

פתרון שיבוץ המבחנים ע"י שימוש בתורת המשחקים

29 באוגוסט 2022

הקדמה:

כחלק מבעיית שיבוץ זמני הבחינות האפשריים למבחנים בשנה מסויימת, נרצה להציע דרך נוספת לפתרון הבעיה. בשונה מהדרכים שהוצגו עד כה ומומשו בעזרת אלגוריתמים וקוד, שיטת הפתרון הנ"ל תהיה מבוססת על עקרונות תורת המשחקים שנלמדו ובפרט על פי הרעיון של משחקים קואופרטיביים.

מידול המשחק:

- נגדיר בתור קבוצת השחקנים את קבוצת החוגים. כלומר, כל חוג מבין רשימת החוגים המצורפת מהווה שחקן בפני עצמו. על כן, עבור $n \in \mathbb{N}$ חוגים, נסמן את החוגים השונים הקיימים ב $\{f_1, \dots, f_n\}$.
- עבור כל חוג, נרצה לשבץ תאריכים לכלל המבחנים הרלוונטים לאותו החוג בסמסטר מסויים עבור שנה כלשהי של כלל החוגים. כלומר, עבור $m \in \mathbb{N}$ תאריכים אפשריים, נסמן את קבוצת התאריכים האפשריים ב $\{d_1, \dots, d_m\}$.
- נגדיר פונקציית ערך. עבור מבחנים של אותו החוג המתקיימים באותו סמסטר נגדיר את פונקציית הערך שנסמנה ב V בצורה הבאה:

בהנתן חוג f_k ושיבוץ כלשהו של המבחנים המסודר בסדר עולה $x = \{x_0, x_1, \dots, x_j\}$ כאשר לכל $i \in [j]$ x_i מתקיים כי x_i הנו השיבוץ של המבחן ה i וכן x_0 הנו יום לפני תאריך תחילת תקופת המבחנים, ערך הפונקציה יוגדר ע"י:

$$V(f_k) = V(\{x_0, x_1, \dots, x_j\}) = \begin{cases} 0 & \{x_1, \dots, x_j\} = \emptyset \\ \min_{0 \leq i \leq j-1} \left((x_{i+1} - x_i) \cdot \left(\frac{1}{z_{i+1} + z_i} \right) \right) & \{x_1, \dots, x_j\} \neq \emptyset \end{cases}$$

- כאשר z_i מייצגת את כמות נקודות הזכות של הקורס ה i וכן z_0 יוגדר להיות 0.
- נסביר כי הסיבה להגדרת פונקציית הערך בצורה הנ"ל נועדה לגרום לחוגים השונים להתחשב בשלושה דברים בעת שיבוץ מבחן כלשהו: שונות נמוכה בקרב הפרשים בין זמני המבחנים השונים, הגדלת הפרש בין זמני המבחנים וכן התחשבות בעומס הקורס (בהתאם לכמות הנ"ז) בעת התלבטות בין שיבוצים שונים בעלי הפרשי זמנים זהים.
- נגדיר קואליציה C כך שכל קואליציה מהווה קבוצה של חוגים כך שאיחודן של כלל הקבוצות שווה לכלל החוגים וכן החיתוך בין כל זוג קואליציות מהווה קבוצה ריקה (כלומר, הקואליציות הנן זרות בזוגות). על כן, עבור $k \in \mathbb{N}$ קואליציות שונות נקבל כי עבור איחוד זר של הקואליציות מתקיים כי:

$$\bigcup_{i=1}^k C_i = \{f_1, \dots, f_n\}$$

- נגדיר את ערך של קואליציה מסויימת בתור סכום הפעלת פונקציית הערך על כל אחד מהחוגים בקואליציה, כלומר:

$$V(C) = \sum_{i \leq |C|, f_i \in C} V(f_i)$$

נשים לב כי כאשר נגדיר את פונקציית הערך בצורה הנ"ל נקבל כי:

$$1. V(\emptyset) = 0$$

$$2. V(C) \geq 0 \text{ לכל } C \subseteq \{f_1, \dots, f_n\}$$

$$3. V(C) \leq V(D) \text{ לכל } C, D \text{ כך } C \subseteq D.$$

מהלך המשחק:

החוגים השונים רשאים ליצור קואליציות בכל אופן שירצו בהתאם לכללים שהוגדרו לעיל. לאחר סיום הרכבת הקואליציות, יתבצע התהליך הבא:

גודל כל קואליציה נקבע בהתאם לכמות הסטודנטים הנמצאים בה. כלומר, בהנתן קואליציה המורכבת מ- $i \in [n]$ חוגים, גודל הקואליציה יהיה סכום מספר הסטודנטים מכל חוג בה.

לאחר מכן, בהתאם לגודלן של הקואליציות יקבע סדר בחירת המבחנים של הקואליציות השונות. כלומר, חוגי הקואליציה של הקואליציה הגדולה ביותר ישבצו ראשונים מבין אחד של כל חוג מבין התאריכים האפשריים הנוותרים ברשימת התאריכים הפנויים והחוקיים ולאחר מכן התור יעבור לקואליציה השנייה בגודלה וכן הלאה. כמו כן, סדר הבחירה בכל קואליציה יקבע בהתאם לגודל החוג. בחירת כל חוג של איזה מבין לשבץ וכן התאריך שבו ישובץ תתבצע באופן חמדני. כלומר, מבין המבחנים שנותר לחוג לשבץ וכל התאריכים הפנויים, החוג יבחר באפשרות שבהנתן המצב הנוכחי, תביא לערך הגבוה ביותר. חלוקת התוצאה הסופית הנה ערך שיבוץ מבחנים של כל חוג בקואליציה מסוימת.

דוגמאת הרצה:

נדגים את התהליך באמצעות הדוגמא הבאה:

ניקח את 3 הקורסים הבאים: מדעי המחשב ביחד עם הקורסים חשבון אינפיניטיסמלי 1 (7 נ"ז), אלגברה לינארית 1 (6 נ"ז) ומתמטיקה דיסקרטית (5 נ"ז), מתמטיקה ביחד עם הקורסים חשבון אינפיניטיסמלי 1 (7 נ"ז), אלגברה לינארית 1 (6 נ"ז) ותורת הקבוצות (3 נ"ז) וכן הנדסת חשמל ומחשבים יחד עם הקורסים מתמטיקה דיסקרטית (5 נ"ז), חשמל (6 נ"ז) ומכניקה (7 נ"ז). כמו כן, נניח כי במדעי המחשב ישנם 40 סטודנטים, במתמטיקה ישנם 30 סטודנטים ובהנדסת חשמל ישנם 20 סטודנטים.

נרצה לשבץ את המבחנים של 3 החוגים הללו בתקופה של שבועיים. על כן, נסמן את הימים ב- d_1, \dots, d_{12} כך שיתקיים $d_i = i$ לכל $i \in [12]$.

נרצה לבדוק שני מצבים אפשריים:

1. נניח כי הקואליציה שנוצרת הנה בין מתמטיקה ובין הנדסת חשמל.

ע"פ מהלך המשחק שהוגדר, הקואליציה הנ"ל תבחר את שיבוץ הקורסים לפני הקואליציה השנייה שכוללת בתוכה את מדעי המחשב בלבד וכמו כן, השיבוץ בתוך הקואליציה יתבצע קודם ע"י החוג למתמטיקה ורק לאחר מכן ע"י החוג להנדסת חשמל.

על כן, בסיבוב הראשון מתמטיקה תבחר לשבץ את תורת הקבוצות ביום ה-12. כתוצאה מכך, הנדסת חשמל ישבצו את מתמטיקה דיסקרטית ביום ה-11. מדעי המחשב יבחר לשבץ את אלגברה לינארית ביום ה-4.

בסיבוב השני, נשים לב כי כתוצאה מבחירת השיבוץ של מדעי המחשב, למתמטיקה נותר רק קורס אחד לשבץ והוא חשבון אינפיניטיסמלי וע"פ פונקציית הערך שהוגדרה, המבחן ישובץ ביום ה-8. כעת, נותרו להנדסת חשמל לשבץ שני קורסים והם היחידים שעבורם נותר לשבץ. על כן, בהתאם לפונקציית הערך, חשמל ישובץ ביום ה-5 ומכניקה תשובץ ביום ה-9.

	1	2	3	4	5	6
				אלגברה לינארית	חשמל	
	7	8	9	10	11	12
		חשבון אינפיניטסימלי	מכניקה		מתמטיקה דיסקרטית	תורת הקבוצות

2. נניח כי הקואליציה שנוצרת הנה בין מתמטיקה ובין מדעי המחשב.

ע"פ מהלך המשחק שהוגדר, הקואליציה הנ"ל תבחר את שיבוץ הקורסים לפני הקואליציה השנייה שכוללת בתוכה את הנדסת חשמל בלבד וכמו כן, השיבוץ בתוך הקואליציה יתבצע קודם ע"י החוג למדעי המחשב ורק לאחר מכן ע"י החוג למתמטיקה.

על כן, בסיבוב הראשון מדעי המחשב יבחר לשבץ את מתמטיקה דיסקרטית ביום ה-12. כתוצאה מכך, מתמטיקה תבחר לשבץ את תורת הקבוצות ביום ה-11. הנדסת חשמל יבחרו לשבץ את חשמל ביום ה-5. בסיבוב השני, מדעי המחשב יבחרו לשבץ את אלגברה לינארית ביום ה-4. לאחריהם, מתמטיקה תבחר לשבץ את חשבון אינפיניטסימלי ביום ה-8. לבסוף, להנדסת חשמל ישאר לשבץ את מכניקה ביום ה-9.

	1	2	3	4	5	6
				אלגברה לינארית	חשמל	
	7	8	9	10	11	12
		חשבון אינפיניטסימלי	מכניקה		תורת הקבוצות	מתמטיקה דיסקרטית

3. נניח כי הקואליציה שנוצרת הנה בין מדעי המחשב והנדסת חשמל.

ע"פ מהלך המשחק שהוגדר, הקואליציה הנ"ל תבחר את שיבוץ הקורסים לפני הקואליציה השנייה שכוללת בתוכה את מתמטיקה בלבד וכמו כן, השיבוץ בתוך הקואליציה יתבצע קודם ע"י החוג למדעי המחשב ורק לאחר מכן ע"י החוג להנדסת חשמל.

על כן, בסיבוב הראשון מדעי המחשב יבחר לשבץ את מתמטיקה דיסקרטית ביום ה-12. כתוצאה מכך, הנדסת חשמל תבחר לשבץ את חשמל ביום ה-5. מתמטיקה יבחרו לשבץ את תורת הקבוצות ביום ה-11. בסיבוב השני, מדעי המחשב יבחרו לשבץ את אלגברה לינארית ביום ה-4. לאחריהם, הנדסת חשמל יבחרו לשבץ את מכניקה ביום ה-9. לבסוף, מתמטיקה תבחר לשבץ את חשבון אינפיניטסימלי ביום ה-8.

	1	2	3	4	5	6
				אלגברה לינארית	חשמל	
	7	8	9	10	11	12
		חשבון אינפיניטסימלי	מכניקה		תורת הקבוצות	מתמטיקה דיסקרטית

נרצה להעריך את השיבוץ המתקבל עבור מתמטיקה. נסמן את הערכים שמתקבלים בשלוש הדוגמאות ב- V_1, V_2, V_3 בהתאמה. נשים לב כי:

$$\begin{aligned} V_1 &= V(\{0, 4, 8, 12\}) = \min \left\{ 4 \cdot \frac{1}{6}, 4 \cdot \frac{1}{13}, 4 \cdot \frac{1}{10} \right\} = \min \left\{ \frac{2}{3}, \frac{4}{13}, \frac{4}{10} \right\} = \frac{4}{13} \\ V_2 &= V(\{0, 4, 8, 11\}) = \min \left\{ 4 \cdot \frac{1}{6}, 4 \cdot \frac{1}{13}, 3 \cdot \frac{1}{10} \right\} = \min \left\{ \frac{2}{3}, \frac{4}{13}, \frac{3}{10} \right\} = \frac{3}{10} \\ V_3 &= V(\{0, 4, 8, 11\}) = \min \left\{ 4 \cdot \frac{1}{6}, 4 \cdot \frac{1}{13}, 3 \cdot \frac{1}{10} \right\} = \min \left\{ \frac{2}{3}, \frac{4}{13}, \frac{3}{10} \right\} = \frac{3}{10} \end{aligned}$$

באופן דומה, כאשר נעריך את השיבוץ עבור מדעי המחשב נקבל:

$$\begin{aligned} V_1 &= V(\{0, 4, 8, 11\}) = \min \left\{ 4 \cdot \frac{1}{6}, 4 \cdot \frac{1}{13}, 3 \cdot \frac{1}{12} \right\} = \min \left\{ \frac{4}{6}, \frac{4}{13}, \frac{3}{12} \right\} = \frac{1}{4} \\ V_2 &= V(\{0, 4, 8, 12\}) = \min \left\{ 4 \cdot \frac{1}{6}, 4 \cdot \frac{1}{13}, 4 \cdot \frac{1}{12} \right\} = \min \left\{ \frac{4}{6}, \frac{4}{13}, \frac{4}{12} \right\} = \frac{4}{13} \\ V_3 &= V(\{0, 4, 8, 12\}) = \min \left\{ 4 \cdot \frac{1}{6}, 4 \cdot \frac{1}{13}, 4 \cdot \frac{1}{12} \right\} = \min \left\{ \frac{4}{6}, \frac{4}{13}, \frac{4}{12} \right\} = \frac{4}{13} \end{aligned}$$

לבסוף, כאשר נעריך את השיבוץ של הנדסת חשמל נקבל:

$$\begin{aligned} V_1 &= V(\{0, 5, 9, 11\}) = \min \left\{ 5 \cdot \frac{1}{6}, 4 \cdot \frac{1}{13}, 2 \cdot \frac{1}{12} \right\} = \min \left\{ \frac{5}{6}, \frac{4}{13}, \frac{2}{12} \right\} = \frac{1}{6} \\ V_2 &= V(\{0, 5, 9, 12\}) = \min \left\{ 5 \cdot \frac{1}{6}, 4 \cdot \frac{1}{13}, 3 \cdot \frac{1}{12} \right\} = \min \left\{ \frac{5}{6}, \frac{4}{13}, \frac{3}{12} \right\} = \frac{1}{4} \\ V_3 &= V(\{0, 5, 9, 12\}) = \min \left\{ 5 \cdot \frac{1}{6}, 4 \cdot \frac{1}{13}, 3 \cdot \frac{1}{12} \right\} = \min \left\{ \frac{5}{6}, \frac{4}{13}, \frac{3}{12} \right\} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

מהתוצאות המתקבלות נוכל להסיק כי מתמטיקה בלבד תרוויח מקיום קואליציה במידה ותיווצר בינה ובין הנדסת חשמל. מנגד, נשים לב כי מדעי המחשב והנדסת חשמל יזכו לערך הטוב ביותר כאשר ישנה קואליציה בינם או כאשר אין קואליציה כלל. נוכל לשאר כי הסיבה לכך היא שמאופן הגדרת פונקציית הערך, קורסים בעלי נ"ז נמוך יותר משובצים קודם ומאחר ובדוגמא הנ"ל הקורס בעל כמות הנ"ז הנמוכה ביותר של מדעי המחשב ושל הנדסת חשמל הוא דיסקרית והוא משובץ קודם ומאחר ולא יתכן כי הנדסת חשמל יבחרו את השיבוץ ראשוני, ישתלם להם המצב שבו מדעי המחשב תבחר את השיבוץ טרם מתמטיקה בוחרת את שלה.

נשים לב כי במקרה הנ"ל לא קיימת קואליציה המניבה את הערך הטוב ביותר עבור כל אחד מהחוגים ולכן מתקיים כי הליבה של המשחק הנה ריקה.