02 Linear Predictor

Logistic Regression(逻辑回归)

本章目录

1.分类问题

分类问题

监督学习的最主要类型

标签离散

- ✓ 分类（Classification）
  - ✓ 身高1.85m，体重100kg的男人穿什么尺码的T恤？
  - ✓ 根据肿瘤的体积、患者的年龄来判断良性或恶性？
  - ✓ 根据用户的年龄、职业、存款数量来判断信用卡是否会违约？

输入变量可以是离散的，也可以是连续的。

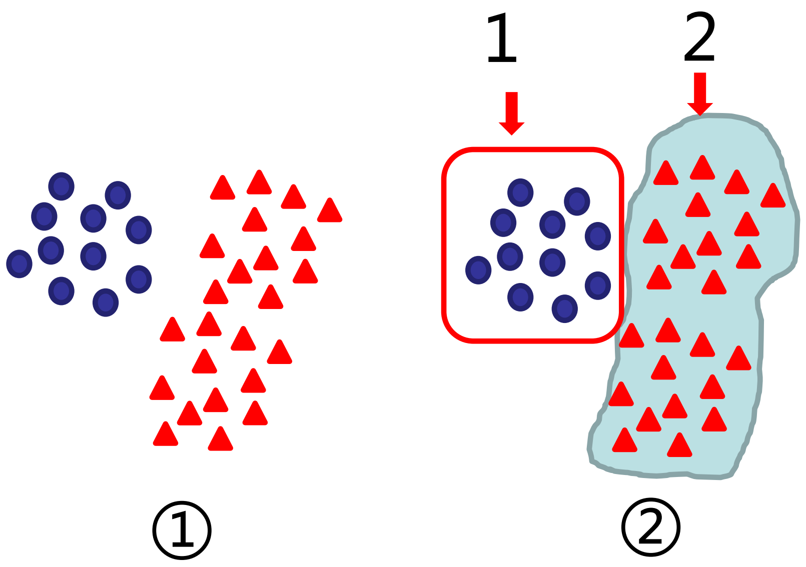
分类问题

二分类

我们先从用蓝色圆形数据定义为类型1，其余数据为类型2；

只需要分类1次

步骤：①->②



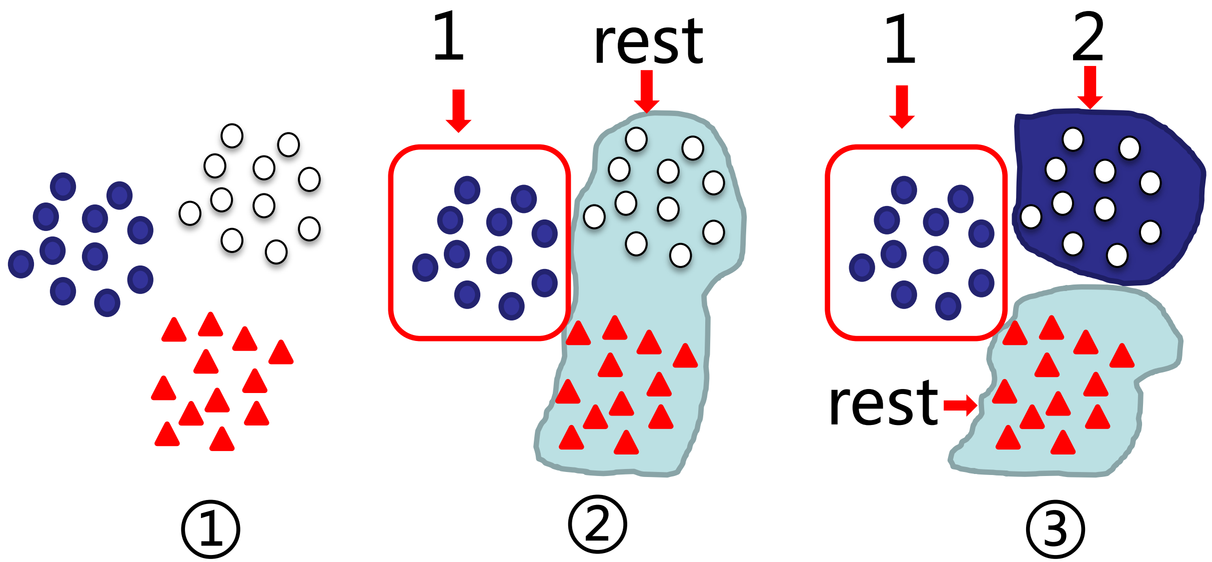
二分类

分类问题

多分类

我们先定义其中一类为类型1（正类），其余数据为负类（rest）；接下来去掉类型1数据，剩余部分再次进行二分类，分成类型2和负类；如果有n类，那就需要分类n-1次

步骤：①->②->③->……



One-vs-All (One-vs-Rest)

一对多 (一对余)

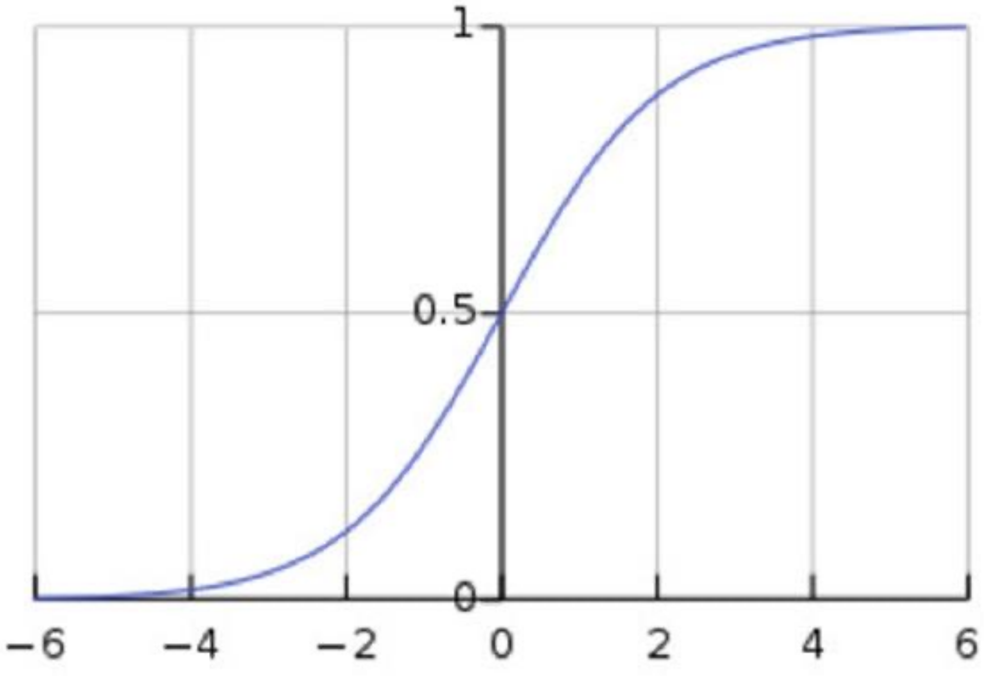
2.Sigmoid函数

2.Sigmoid函数

Sigmoid 函数

$\sigma(z)$代表一个常用的逻辑函数（logistic function）为S形函数（Sigmoid function）

则：$\sigma(z) = g(z) = \frac{1}{1+e^{-z}}$ z=$w^{\mathrm{T}}x + b$



当$\sigma(z)$大于等于0.5时，预测 y=1

当$\sigma(z)$小于0.5时，预测 y=0

2.Sigmoid函数

线性回归的函数 $h(x)=z=w^{\mathrm{T}}x$，范围是$(-\infty,+\infty)$。

而分类预测结果需要得到[0,1]的概率值。

在二分类模型中，事件的几率odds：事件发生与事件不发生的概率之比为$\frac{p}{1-p}$，

称为事件的发生比（the odds of experiencing an event）

其中p为随机事件发生的概率，p的范围为[0,1]。

取对数得到：$\log\frac{p}{1-p}$，而$\log\frac{p}{1-p}=w^{\mathrm{T}}x=z$

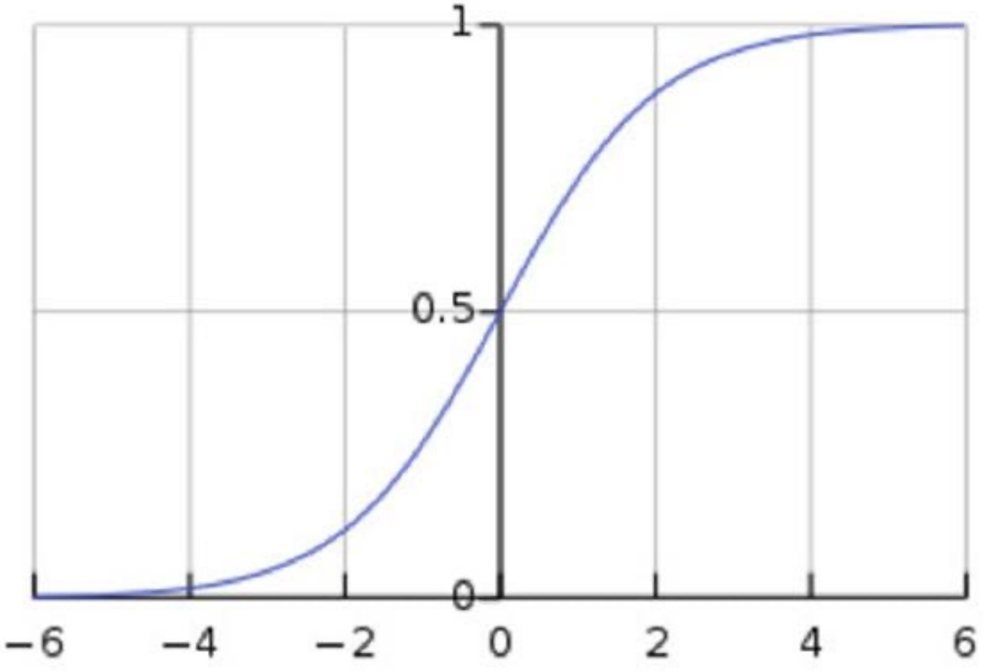
求解得到：$p=\frac{1}{1+e^{-w^{\mathrm{T}}x}}=\frac{1}{1+e^{-z}}$

注意：若表达式 $h(x)=z=w_0+w_1x_1+w_2x_2+\ldots+w_nx_n+b=w^{\mathrm{T}}x+b$， 则$b$可以融入到$w_0$，即：$z=w^{\mathrm{T}}x$

2.Sigmoid函数

将z进行逻辑变换：$g(z)=\frac{1}{1+e^{-z}}$

$$
\begin{aligned}
g'(z) &= \left(\frac{1}{1+e^{-z}}\right)' \\
&= \frac{e^{-z}}{(1+e^{-z})^2} \\
&= \frac{1+e^{-z}-1}{(1+e^{-z})^2} \\
&= \frac{1}{(1+e^{-z})}\left(1-\frac{1}{(1+e^{-z})}\right) \\
&= g(z)(1-g(z))
\end{aligned}
$$



$g(z)$

3.逻辑回归求解

3.逻辑回归求解

假设一个二分类模型：

$$p(y=1|x;w)=h(x)$$

$$p(y=0|x;w)=1-h(x)$$

则：

$$p(y|x;w)=(h(x))^{y}(1-h(x))^{1-y}$$

逻辑回归模型的假设是： $h(x)=g\left(w^{\mathrm{T}}x\right)=g(z)$

其中$z=w^{\mathrm{T}}x$ ，逻辑函数（**logistic function**)公式为：

$$g(z)=\frac{1}{1+e^{-z}},\ g'(z)=g(z)(1-g(z))$$

注意：若表达式 $h(x)=z=w_0+w_1x_1+w_2x_2+\ldots+w_nx_n+b=w^{\mathrm{T}}x+b$， 则$b$可以融入到$w_0$，即：$z$=$w^{\mathrm{T}}x$

3.逻辑回归求解

损失函数

$$L(\hat{y},y) = -y\log(\hat{y}) - (1-y)\log(1-\hat{y})$$

$\hat{y}$ 表示预测值$h(x)$

y 表示真实值

为了衡量算法在全部训练样本上的表现如何，我们需要定义一个算法的代价函数，算法的代价函数是对m个样本的损失函数求和然后除以m:

代价函数

$$J(w) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} L\left(\hat{y}^{(i)}, y^{(i)}\right) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(-y^{(i)}\log\hat{y}^{(i)} - (1-y^{(i)})\log(1-\hat{y}^{(i)})\right)$$

3.逻辑回归求解

求解过程：

似然函数为： $\mathrm{L}(w)=\prod_{i=1}^{m}P\left(y^{(i)}|x^{(i)};w\right)=\prod_{i=1}^{m}\left(h(x^{(i)})\right)^{y^{(i)}}\left(1-h(x^{(i)})\right)^{1-y^{(i)}}$

似然函数两边取对数，则连乘号变成了连加号：

$$l(w)=\log\mathrm{L}(w)=\sum_{i=1}^{m}\left(y^{(i)}\log(h(x^{(i)}))+(1-y^{(i)})\log(1-h(x^{(i)}))\right)$$

代价函数为：

$$J(w)=-\frac{1}{m}l(w)=-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(y^{(i)}\log(h(x^{(i)}))+(1-y^{(i)})\log(1-h(x^{(i)}))\right)$$

3.逻辑回归求解

梯度下降求解过程：

$$w_j := w_j - \alpha \frac{\partial J(w)}{\partial w}$$

$$J(w) = -\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(y^{(i)}\log(h(x^{(i)})) + (1 - y^{(i)})\log(1 - h(x^{(i)}))\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial w_j}J(w) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(h(x^{(i)}) - y^{(i)}\right)x_j^{(i)}$$

则：$w_j := w_j - \alpha \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(h(x^{(i)}) - y^{(i)}\right)x_j^{(i)}$

3.逻辑回归求解

求解过程： $\frac{\partial}{\partial w_j}J(w)=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(h(x^{(i)})-y^{(i)})x_j^{(i)}$的推导过程：

$$J(w)=-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(\underline{y^{(i)}\log(h(x^{(i)}))+(1-y^{(i)})\log(1-h(x^{(i)}))})$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned}&y^{(i)}\log(h(x^{(i)}))+(1-y^{(i)})\log(1-h(x^{(i)}))\\&=y^{(i)}\log(\frac{1}{1+e^{-w^{\mathrm{T}}x^{(i)}}})+(1-y^{(i)})\log(1-\frac{1}{1+e^{-w^{\mathrm{T}}x^{(i)}}})\\&=-y^{(i)}\log(1+e^{-w^{\mathrm{T}}x^{(i)}})-(1-y^{(i)})\log(1+e^{w^{\mathrm{T}}x^{(i)}})\end{aligned}$$

3.逻辑回归求解

求解过程： $\frac{\partial}{\partial w_j}J(w)=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(h(x^{(i)})-y^{(i)})x_j^{(i)}$的推导过程：

$$\frac{\partial}{\partial w_j}J(w)=\frac{\partial}{\partial w_j}(-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(-y^{(i)}\log\left(1+e^{-w^{\mathrm{T}}x^{(i)}}\right)-(1-y^{(i)})\log\left(1+e^{w^{\mathrm{T}}x^{(i)}}\right)))$$

$$=-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(-y^{(i)}\frac{-x_j^{(i)}e^{-w^{\mathrm{T}}x^{(i)}}}{1+e^{-w^{\mathrm{T}}x^{(i)}}}-(1-y^{(i)})\frac{x_j^{(i)}e^{w^{\mathrm{T}}x^{(i)}}}{1+e^{w^{\mathrm{T}}x^{(i)}}})$$

$$=-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(y^{(i)}-h(x^{(i)}))x_j^{(i)}$$

$$=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(h(x^{(i)})-y^{(i)})x_j^{(i)}$$

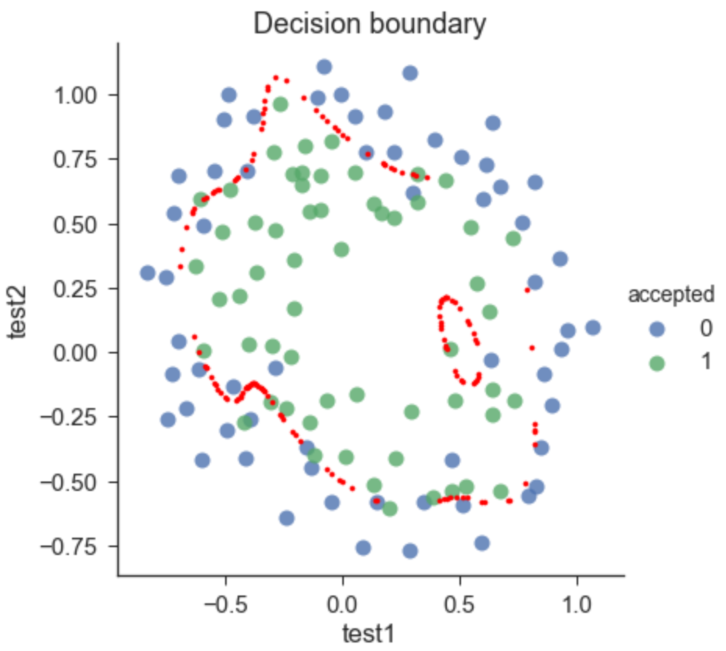
3.逻辑回归求解

正则化：目的是**为了防止过拟合**

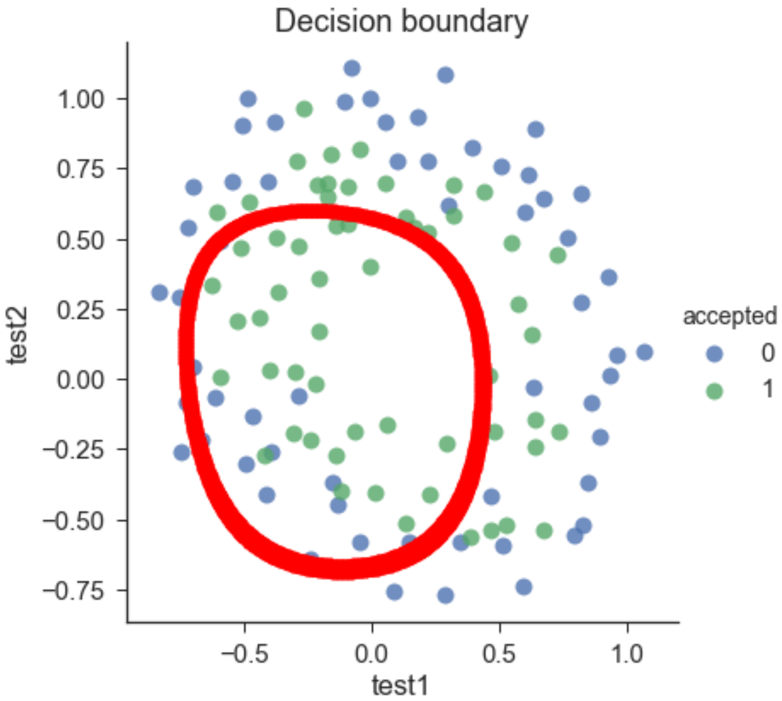
正则化项

$$J(w) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left[-y^{(i)}\log\left(h\left(x^{(i)}\right)\right) - \left(1 - y^{(i)}\right)\log\left(1 - h\left(x^{(i)}\right)\right)\right] + \boxed{\frac{\lambda}{2m}\sum_{j=1}^{n} w_j^2}$$

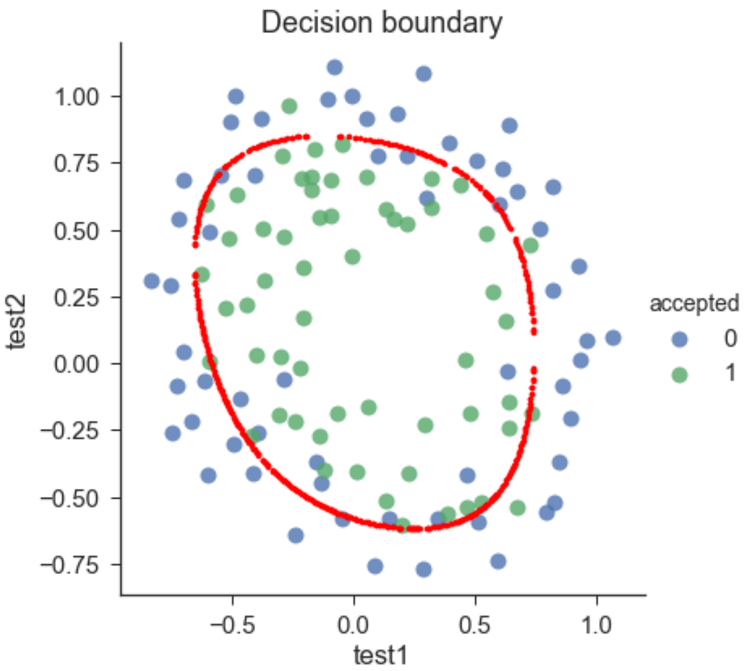
当 λ 的值开始上升时，降低了方差。



没有正则化，过拟合



正则化过度，欠拟合



适当的正则化

思考

逻辑回归（Logistic Regression）与一般线性分类模型（Linear Classification, 如使用Sign（*）函数的分类模型）的区别?

参考文献

[1] HOSMER D W, LEMESHOW S, STURDIVANT R X. Applied logistic regression[M]. New Jersey: Wiley New York.2000.

[2] Andrew Ng. Machine Learning[EB/OL]. Stanford University,2014. https://www.coursera.org/course/ml

[3] 李航. 统计学习方法[M]. 北京: 清华大学出版社,2019.

[4] Hastie T., Tibshirani R., Friedman J. The Elements of Statistical Learning[M]. New York: Springer,2001.

[5] CHRISTOPHER M. BISHOP. Pattern Recognition and Machine Learning[M]. New York: Springer,2006.

[6] Stephen Boyd, Lieven Vandenberghe, Convex Optimization[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.

[7] TIBSHIRANI R. Regression selection and shrinkage via the lasso[J]. Journal of the Royal Statistical Society Series B, 1996, 58(1): 267–288.