人工智能

命题逻辑

代建华 教授、博士生导师
湖南师范大学信息科学与工程学院

真值表与等价公式

真值表

❖ 在命题公式中，对于分量指派真值的各种可能组合，就确定了这个命题公式的各种真值情况，把它汇列成表，就是命题公式的真值表。

P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$P \to Q$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

对于任一公式α，凡使得α为真的指派，不管是完全指派还是部分指派，都称为α的**成真指派**，凡使得α为假的指派，也不管是完全指派还是部分指派，都称为α的**成假指派**。

例 设 $\alpha=(P\rightarrow(Q\wedge R))\vee(\neg R\wedge S)$，则完全指派 $(P,Q,R,S)=(0,1,0,1)$ 和部分指派 $(P,Q,R,S)=(0,1,0,S)$ 都是α的成真指派，而指派 $(P,Q,R,S)=(1,0,1,0)$ 为α的成假指派。

例 利用真值表求命题公式$\neg(P\rightarrow(Q\vee R))$的成真指派和成假指派。

P	Q	R	$Q\vee R$	$P\rightarrow(Q\vee R)$	$\neg(P\rightarrow(Q\vee R))$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	1
1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	0

例

P	Q	R	$P\wedge Q$	$P\wedge Q\vee R$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

一般说来，n 个命题变元组成的命题公式有 2^n 种真值情况。

重言式（永真式）

P	Q	$(\neg P \vee Q) \leftrightarrow (P \rightarrow Q)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- 给定一命题公式，若无论对分量作怎样的指派，其对应的真值永为真，则称该命题公式为重言式或永真公式。

矛盾式（永假式）

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \wedge \neg P$
0	0	1	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	1	0	1	0

❖ 给定一命题公式，若无论对分量作怎样的指派，其对应的真值永为假，则称该命题公式为矛盾式或永假公式。

可满足式

- 如果命题公式不是矛盾式，则称该命题公式是可满足式。

- 对定义的几点说明

1） α 是可满足式的等价定义是： α 至少存在一个成真指派。

2）重言式一定是可满足式，但反之不真。因而，若公式 α 是可满足式，且它至少存在一个成假指派，则称 α 为非重言式的可满足式。

3）真值表可用来判断公式的类型：

①若真值表最后一列全为1，则公式为重言式；

②若真值表最后一列全为0，则公式为矛盾式；

③若真值表最后一列中至少有一个1，则公式为可满足式。

定理

❖任何两个重言式的合取或析取，仍然是一个重言式。

证明:

设 A 和 B 为两个重言式，

则不论 A和 B 的分量指派任何真值，总有 A 为 T, B 为 T,

故 $A \wedge B \Leftrightarrow T \quad A \vee B \Leftrightarrow T$

定理

❖一个重言式，对同一分量都用任何合式公式置换，其结果仍为一重言式。

证明: 由于重言式的真值与分量的指派无关，

故对同一分量以任何合式公式置换后，重言式的真值仍永为 T.

等价

- 给定两个命题公式 ***A*** 和 ***B***，设$P_1,P_2,\ldots,P_n$为出现于***A*** 和 ***B*** 中的原子变元，若给$P_1,P_2,\ldots,P_n$任一组真值指派，***A*** 和 ***B*** 的真值都相同，则称***A*** 和 ***B*** 是等价的或逻辑相等。记作 $A \Leftrightarrow B$。

定理 设 A、B为两个命题公式, $A \Leftrightarrow B$ 当且仅当 $A \leftrightarrow B$ 为一重言式。

注意：

定义中给出的符号⇔与↔是两个完全不同的符号。⇔不是命题联结词而是公式间的关系符号，$\alpha \Leftrightarrow \beta$不表示一个公式，即不代表命题，它表示公式$\alpha$与公式$\beta$有等值关系，而↔是命题联结词，$\alpha \leftrightarrow \beta$是一个公式，表示某个命题。然而这两者之间有密切的联系，即$\alpha \Leftrightarrow \beta$的充要条件是公式$\alpha \leftrightarrow \beta$为重言式。

例 用真值表说明命题公式等价

P	Q	$(P \to Q) \land (Q \to P)$	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

$$(P \to Q) \land (Q \to P) \Leftrightarrow P \leftrightarrow Q$$

下面给出16组重要的等值式（在后面的推理演算中以大写字母E加以引用），这些等值式也称作**命题定律**，其正确性可以用真值表加以证明。

（1）双重否定律

$$\alpha \Leftrightarrow \neg(\neg\alpha)$$

（2）等幂律

$$\alpha \Leftrightarrow \alpha \vee \alpha, \quad \alpha \Leftrightarrow \alpha \wedge \alpha$$

（3）交换律

$$\alpha\vee\beta\Leftrightarrow\beta\vee\alpha,\quad \alpha\wedge\beta\Leftrightarrow\beta\wedge\alpha$$

（4）结合律

$$(\alpha\vee\beta)\vee\gamma\Leftrightarrow\alpha\vee(\beta\vee\gamma),$$

$$(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma\Leftrightarrow\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)$$

（5）分配律

$\alpha\vee(\beta\wedge\gamma)\Leftrightarrow(\alpha\vee\beta)\wedge(\alpha\vee\gamma)$（$\vee$对$\wedge$的分配律）

$\alpha\wedge(\beta\vee\gamma)\Leftrightarrow(\alpha\wedge\beta)\vee(\alpha\wedge\gamma)$（$\wedge$对$\vee$的分配律）

（6）德摩根律

$$\neg(\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow \neg\alpha \wedge \neg\beta,$$

$$\neg(\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow \neg\alpha \vee \neg\beta$$

（7）吸收律

$$\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow \alpha, \quad \alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow \alpha$$

（8）零一律

$$\alpha \vee 1 \Leftrightarrow 1, \quad \alpha \wedge 0 \Leftrightarrow 0$$

（9）同一律

$$\alpha\vee 0\Leftrightarrow\alpha,\qquad \alpha\wedge 1\Leftrightarrow\alpha$$

（10）排中律

$$\alpha\vee\neg\alpha\Leftrightarrow 1$$

（11）矛盾律

$$\alpha\wedge\neg\alpha\Leftrightarrow 0$$

（12）蕴含等值式

$$\alpha\rightarrow\beta\Leftrightarrow\neg\alpha\vee\beta$$

（13）假言易位

$$\alpha \to \beta \Leftrightarrow \neg \beta \to \neg \alpha$$

（14）等价等值式

$$\alpha \leftrightarrow \beta \Leftrightarrow (\alpha \to \beta) \land (\beta \to \alpha),$$

$$\alpha \leftrightarrow \beta \Leftrightarrow (\alpha \land \beta) \lor (\neg \alpha \land \neg \beta)$$

（15）等价否定等值式

$$\alpha \leftrightarrow \beta \Leftrightarrow \neg \alpha \leftrightarrow \neg \beta$$

（16）归谬论

$$(\alpha \to \beta) \land (\alpha \to \neg \beta) \Leftrightarrow \neg \alpha$$

其它等价式

$$P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$$

$$\neg(P \to Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$$

$$P \to (Q \to R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \to R$$

$$\neg(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow P \leftrightarrow \neg Q$$

$$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (Q \to P)$$

$$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$$

等值演算及几个重要定理

由已知的等值式推演出另外一些等值式的过程称为**演算**。

定义 设 α 是一个命题公式，$P_1, P_2, \ldots, P_n$ 是其中出现的所有命题变元。

（1）用某些公式代换 α 中的某些命题变元；

（2）若用公式A代换 P_i，则必须用A代换 α 中所有的 P_i。

那么，由此而得到的新公式 β 叫做公式 α 的一个**代换实例**。

例如，设公式α=P→(R∧P)用Q↔S代换其中P，可得公式β=(Q↔S)→(R∧(Q↔S))，公式β是α的一个代换实例。

定理（代入定理） 对于重言式中的任一命题变元出现的每一处均用同一命题公式代入，得到的仍是重言式。

于是，若对于等值式中的任一命题变元出现的每一处均用同一命题公式代入，则仍得到等值式。

定理1.2（置换定理） 设A是公式α的一个子公式且A⇔B。如果将公式α中的子公式A置换成公式B之后，得到的公式是β，则$\alpha \Leftrightarrow \beta$。

比较代入定理和置换定理的区别:

	代入定理	置换定理
使用对象	任意重言式	任一命题公式
代换对象	任一命题变元	任一子公式
代换物	任一命题公式	任一与代换对象等值的命题公式
代换方式	代换同一命题变元的所有出现	代换子公式的某些出现
代换结果	仍为重言式	与原公式等值

例 试证 $Q \to (P \vee (P \wedge Q)) \Leftrightarrow Q \to P$

证法1

$$Q \underline{\to} (P \vee (P \wedge Q))$$

$$\Leftrightarrow \neg Q \vee (P \underline{\vee} (P \wedge Q))$$

$$\Leftrightarrow \neg Q \vee ((P \vee P) \wedge (P \vee Q))$$

$$\Leftrightarrow \neg Q \underline{\vee} (P \wedge (P \vee Q))$$

$$\Leftrightarrow (\neg Q \vee P) \wedge \underline{(P \vee Q \vee \neg Q)}$$

$$\Leftrightarrow \neg Q \vee P$$

$$\Leftrightarrow Q \to P$$

例(续) 试证 $Q \to (P \vee (P \wedge Q)) \Leftrightarrow Q \to P$

证法2

设 $A: Q \to (P \vee (P \wedge Q))$

因为 $(P \vee (P \wedge Q)) \Leftrightarrow P$

所以 $B: Q \to P$

即 $A \Leftrightarrow B$

得证。

例 试证 $(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \Leftrightarrow P$

证明:

$$(\underline{P} \wedge Q) \vee (\underline{P} \wedge \neg Q)$$

$$\Leftrightarrow P \wedge (Q \vee \neg Q)$$

$$\Leftrightarrow P \wedge T$$

$$\Leftrightarrow P$$

例 试证

$$((P\vee Q)\wedge\neg(P\wedge(\neg Q\vee\neg R)))\vee(\neg P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge\neg R)\Leftrightarrow T$$

证明

原式左边 $\Leftrightarrow((P\vee Q)\wedge(P\vee(Q\wedge R)))\vee\neg(P\vee Q)\vee\neg(P\vee R)$

$$\Leftrightarrow((P\vee Q)\wedge(P\vee Q)\wedge(P\vee R))\vee\neg((P\vee Q)\wedge(P\vee R))$$

$$\Leftrightarrow((P\vee Q)\wedge(P\vee R))\vee\neg((P\vee Q)\wedge(P\vee R))$$

$$\Leftrightarrow T$$

- 范式

合取范式

- 一个命题公式称为合取范式，当且仅当它具有型式：

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \quad (n \geqslant 1)$$

- 其中A_1，A_2，…，A_n都是由命题变元或其否定所组成的析取式。

例：

$$(P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge \neg Q$$

析取范式

❖ 一个命题公式称为析取范式，当且仅当它具有型式：

$$A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n \quad (n \geqslant 1)$$

❖ 其中A_1，A_2，…，A_n都是由命题变元或其否定所组成的合取式。

例：

$$\neg P \vee (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R)$$

范式的求法

1) 将公式中的联结词化归成 $\wedge, \vee, \neg$ 。
2) 利用德·摩根律将 $\neg$ 消去或内移。
3) 利用分配律、结合律将公式规约为合取(析取)范式。

例 求下式的合取范式

$$((P \vee Q) \rightarrow R) \rightarrow P$$

$$\Leftrightarrow (\neg(P \vee Q) \vee R) \rightarrow P$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg(P \vee Q) \vee R) \vee P$$

$$\Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge \neg R) \vee P$$

$$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee P) \wedge (\neg R \vee P)$$

与命题公式等价的合取范式不唯一

例 求下式的析取范式

$$((P\vee Q)\rightarrow R)\rightarrow P$$

$$\Leftrightarrow (\neg(P\vee Q)\vee R)\rightarrow P$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg(P\vee Q)\vee R)\vee P$$

$$\Leftrightarrow ((P\vee Q)\wedge\neg R)\vee P$$

$$\Leftrightarrow (P\wedge\neg R)\vee(Q\wedge\neg R)\vee P$$

$$\Leftrightarrow (Q\wedge\neg R)\vee P$$

与命题公式等价的析取范式不唯一

极小项（主析取范式）

❖ n 个命题变元的合取式，称作布尔合取或极小项，其中每个变元与它的否定不能同时存在，但两者必须出现且仅出现一次。

例: 由 P 和 Q 构成的极小项有：

$$\neg P \wedge \neg Q = m_{00} \qquad \neg P \wedge Q = m_{01}$$

$$P \wedge \neg Q = m_{10} \qquad P \wedge Q = m_{11}$$

极小项的编码：命 题 变 元 ————1

命题变元的否定 ——0

极小项的性质

	P	Q	m_{00}	m_{01}	m_{10}	m_{11}
$m_{00}=\neg P\wedge\neg Q$	0	0	1	0	0	0
$m_{01}=\neg P\wedge Q$	0	1	0	1	0	0
$m_{10}=P\wedge\neg Q$	1	0	0	0	1	0
$m_{11}=P\wedge Q$	1	1	0	0	0	1

1) 每一个极小项当其真值指派与编码相同时，其真值为 ***T***,在其余 **2^n-1** 种指派情况下均为 ***F***。
2) 任意两个不同极小项的合取式永假。
3) 全体极小项的析取式永为真，记为

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} m_i = m_0 \vee m_1 \vee \cdots \vee m_{2^n-1} \Leftrightarrow T$$

例

P	Q	R	m_{000}	m_{001}	$\cdots$	m_{111}
0	0	0	1	0		0
0	0	1	0	1		0
0	1	0	0	0		0
0	1	1	0	0	$\cdots$	0
1	0	0	0	0		0
1	0	1	0	0		0
1	1	0	0	0		0
1	1	1	0	0		1

一般说来，n 个命题变元共有 2^n 个极小项。

主析取范式及其求法

- 对于给定的命题公式，如果有一个等价公式，它仅由极小项的析取所组成，则该等价式称作原式的主析取范式。

定理 任何一个不为矛盾式（重言式）的命题公式都存在着与之等值的主析取范式（主合取范式），并且是惟一的。

从定理中可看出，矛盾式的主析取范式是空公式，定义它为0，其主合取范式必由所有极大项的合取构成，同理重言式的主合取范式也是空公式，定义它为1，其主析取范式必由所有极小项的析取构成。因此，利用一个公式的主范式可以判别这个公式是否为重言式或矛盾式。

主析取范式及其求法

主析取范式的求法：

1. 真值表法

定理3 一个公式的真值为 T 的指派所对应的极小项的析取，即为此公式的主析取范式。

2. 等价演算法

例 求公式的主析取范式

P	Q	$P \rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

解：

$$P \rightarrow Q$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$$

$$\vee (\neg P \wedge Q)$$

$$\vee (P \wedge Q)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{0,1,3}$$

为了表达简洁，用Σ表示小项的析取

例求公式的主析取范式

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

解：

$$
\begin{aligned}
& P \vee Q \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \wedge Q) \\
& \vee (P \wedge \neg Q) \\
& \vee (P \wedge Q) \\
\Leftrightarrow\ & \sum\nolimits_{1,2,3}
\end{aligned}
$$

例求公式的主析取范式

P	Q	R	A
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

解:

$$A \Leftrightarrow$$

$$(\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$$

$$\vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{1,3,6,7}$$

主析取范式的求法 — 等价演算法

1) 化为析取范式。
2) 除去其中所有永假的合取式。
3) 在合取式中合并相同的命题变元。
4) 对合取式补入没有出现的命题变元，即添加（$P \vee \neg P$）式，然后应用分配律展开公式。
5) 除去相同的极小项，并将小项按编号由小到大的顺序排列。

例 求下式的主析取范式

$$(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge R)\vee(Q\wedge R)$$

$$\Leftrightarrow(P\wedge Q)\wedge 1\vee(\neg P\wedge R)\wedge 1\vee(Q\wedge R)\wedge 1$$

$$\Leftrightarrow(P\wedge Q)\wedge(\neg R\vee R)\vee(\neg P\wedge R)\wedge(\neg Q\vee Q)$$

$$\vee(Q\wedge R)\wedge(\neg P\vee P)$$

$$\Leftrightarrow(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee\underline{(P\wedge Q\wedge R)}\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)$$

$$\vee\underline{(\neg P\wedge Q\wedge R)}\vee\underline{(\neg P\wedge Q\wedge R)}\vee\underline{(P\wedge Q\wedge R)}$$

$$\Leftrightarrow(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)$$

$$\vee(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge Q\wedge R)$$

例 求下式的主析取范式

$$P \to ((P \to Q) \wedge \neg(\neg Q \vee \neg P))$$

$$\Leftrightarrow \neg P \vee ((\neg P \vee Q) \underline{\wedge} (P \wedge Q))$$

$$\Leftrightarrow \neg P \vee (\neg P \wedge P \wedge Q) \vee (P \wedge Q \wedge Q)$$

$$\Leftrightarrow \neg P \vee (P \wedge Q)$$

$$\Leftrightarrow \neg P \wedge 1 \vee (P \wedge Q)$$

$$\Leftrightarrow \neg P \wedge (\neg Q \vee Q) \vee (P \wedge Q)$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge Q)$$

主析取范式的用途

- 判别命题公式的类型；
  - 永真式：包含所有的小项
  - 矛盾式：没有小项
  - 可满足式：包含部分小项
- 给出命题公式的成真赋值或成假赋值；
  - 成真赋值：出现的小项对应的真值指派
  - 成假赋值：没有出现的小项对应的真值指派
- 判别两个命题公式是否等价。

极大项（主合取范式）

❖ n 个命题变元的析取式，称作布尔析取或极大项，其中每个变元与它的否定不能同时存在，但两者必须出现且仅出现一次。

例： 由 P 和 Q 构成的大项有：

$$\neg P \vee \neg Q = M_{11} \qquad \neg P \vee Q = M_{10}$$

$$P \vee \neg Q = M_{01} \qquad P \vee Q = M_{00}$$

大项的编码：命 题 变 元 ———— 0

命题变元的否定 —— 1

大项的性质

	P	Q	M_{00}	M_{01}	M_{10}	M_{11}
$M_{00}=P\vee Q$	0	0	0	1	1	1
$M_{01}=P\vee\neg Q$	0	1	1	0	1	1
$M_{10}=\neg P\vee Q$	1	0	1	1	0	1
$M_{11}=\neg P\vee\neg Q$	1	1	1	1	1	0

1) 每一个极大项当其真值指派与编码相同时，其真值为 F,在其余 2^n-1 种指派情况下均为 T。

2) 任意两个不同大项的析取式永真。

3) 全体大项的合取式永为假，记为

$$\prod_{i=0}^{2^n-1} M_i = M_0 \wedge M_1 \wedge \cdots \wedge M_{2^n-1} \Leftrightarrow F$$

例

$$M_{000} = P \vee Q \vee R$$

$$M_{001} = P \vee Q \vee \neg R$$

$$M_{010} = P \vee \neg Q \vee R$$

$$M_{011} = P \vee \neg Q \vee \neg R$$

$$M_{100} = \neg P \vee Q \vee R$$

$$M_{101} = \neg P \vee Q \vee \neg R$$

$$M_{110} = \neg P \vee \neg Q \vee R$$

$$M_{111} = \neg P \vee \neg Q \vee \neg R$$

主合取范式及其求法

❖对于给定的命题公式，如果有一个等价公式，它仅由极大项的合取所组成，则该等价式称作原式的主合取范式。

主合取范式的求法：

1. 真值表法

定理4 一个公式的真值为 F 的指派所对应的极大项的合取，即为此公式的主合取范式。

2. 等价演算法

例 求公式的主合取范式

P	Q	$P \to Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

解：

$$P \to Q$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$$

$$\Leftrightarrow \prod_{2}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{0,1,3}$$

为了表达简洁，用Π表示大项的合取

例求公式的主合（析）取范式

P	Q	R	A
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

解 $A \Leftrightarrow$

$$(P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R)$$

$$\wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R)$$

$$\Leftrightarrow \prod_{0,2,4,5}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{1,3,6,7} \Leftrightarrow$$

$$(\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$$

$$\vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$$

主合取范式的求法 — 等价演算法

1) 化为合取范式。
2) 除去其中所有永真的析取式。
3) 在析取式中合并相同的命题变元。
4) 对析取式补入没有出现的命题变元，即添加（$P\wedge\neg P$）式，然后应用分配律展开公式。
5) 除去相同的大项，并将大项按编号由小到大的顺序排列。

例 求下式的主合取范式

$$A \Leftrightarrow (P \wedge Q) \underline{\vee} (\neg P \wedge R)$$

$$\Leftrightarrow ((P \wedge Q) \underline{\vee} \neg P) \wedge ((P \wedge Q) \underline{\vee} R)$$

$$\Leftrightarrow \underline{(P \vee \neg P)} \wedge (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$$

$$\Leftrightarrow ((\neg P \vee Q) \vee (R \wedge \neg R))$$
$$\wedge ((P \vee R) \vee (Q \wedge \neg Q))$$
$$\wedge ((P \wedge \neg P) \vee (Q \vee R))$$

$$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R)$$
$$\wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R)$$

例（续）

$$A \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R)$$

$$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R)$$

$$\wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R)$$

$$\Leftrightarrow \prod_{0,2,4,5}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{1,3,6,7}$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$$

$$\vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$$

例 求下面公式的主合取范式

$$((P \vee Q) \wedge \neg(\neg P \wedge (\neg Q \vee \neg R)))$$
$$\vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg R)$$

$$\Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee (Q \wedge R)))$$
$$\vee(\neg P \wedge (\neg Q \vee \neg R))$$

$$\Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$$
$$\vee(\neg P \wedge (\neg Q \vee \neg R))$$

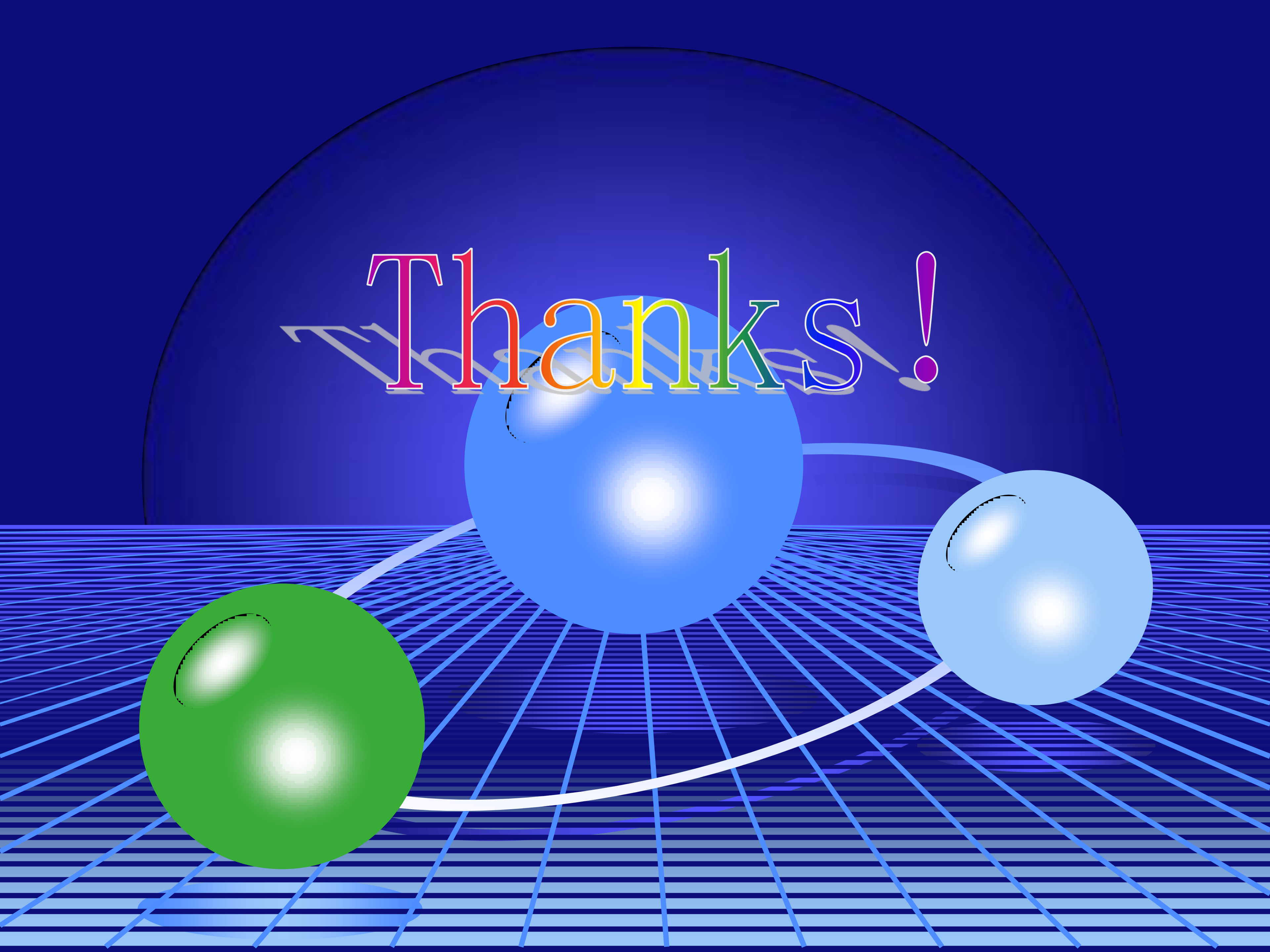
永真式

$$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee \neg P) \wedge (P \vee R \vee \neg P)$$
$$\wedge(P \vee Q \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (P \vee R \vee \neg Q \vee \neg R)$$

$$\Leftrightarrow T$$

主合取范式的用途

- **判别命题公式的类型；**
  - 永真式：没有极大项
  - 永假式：包含所有的极大项
  - 可满足式：包含部分极大项
- **给出命题公式的成真赋值或成假赋值；**
  - 成真赋值：没有出现的极大项对应的真值指派
  - 成假赋值：出现的极大项对应的真值指派
- **判别两个命题公式是否等价。**


Thanks!