MCMC 详细推导过程

一、关于 Gibbs（基础知识）

参数空间 $\Phi=\{\Phi_1,\Phi_2,...,\Phi_p\}$ 有 p 个待估参数，以下是 Gibbs 的具体过程（参数估计值最后收敛）。

1. 初始化参数 $\Phi^{(0)}=\{\Phi_1^{(0)},\Phi_2^{(0)},...,\Phi_2^{(0)}\}$，给定观测值 Y。
2. 在其他参数已知的条件下，抽取下一时刻的参数值：

（1）
$$\begin{aligned}
&\Phi_1^{(1)}\sim p(\Phi_1|\Phi_2^{(0)},\ \Phi_3^{(0)},\ ...,\Phi_p^{(0)};Y)\\
&\Phi_2^{(1)}\sim p(\Phi_2|\Phi_1^{(1)},\ \Phi_3^{(0)},\ ...,\Phi_p^{(0)};Y)\\
&\Phi_3^{(1)}\sim p(\Phi_3|\Phi_1^{(1)},\ \Phi_2^{(1)},\ ...,\Phi_p^{(0)};Y)\\
&\quad\cdots\\
&\Phi_p^{(1)}\sim p(\Phi_p|\Phi_1^{(1)},\ \Phi_2^{(1)},\ ...,\Phi_{p-1}^{(1)};Y)
\end{aligned}$$

····得到 $\Phi^{(1)}=\{\Phi_1^{(1)},\Phi_2^{(1)},...,\Phi_2^{(1)}\}$

（2）
$$\begin{aligned}
&\Phi_1^{(2)}\sim p(\Phi_1|\Phi_2^{(1)},\ \Phi_3^{(1)},\ ...,\Phi_p^{(1)};Y)\\
&\Phi_2^{(2)}\sim p(\Phi_2|\Phi_1^{(2)},\ \Phi_3^{(1)},\ ...,\Phi_p^{(1)};Y)\\
&\Phi_3^{(2)}\sim p(\Phi_3|\Phi_1^{(2)},\ \Phi_2^{(2)},\ ...,\Phi_p^{(1)};Y)\\
&\quad\cdots\\
&\Phi_p^{(2)}\sim p(\Phi_p|\Phi_1^{(2)},\ \Phi_2^{(2)},\ ...,\Phi_{p-1}^{(2)};Y)
\end{aligned}$$

····得到 $\Phi^{(2)}=\{\Phi_1^{(2)},\Phi_2^{(2)},...,\Phi_2^{(2)}\}$

（3）以此类推，在 s 时刻有 $\Phi^{(s)}=\{\Phi_1^{(s)},\Phi_2^{(s)},...,\Phi_2^{(s)}\}$

（4）由于开始的参数是随机初始化，和收敛时的数据存在一定差距，所以对于最后参数的估计，采用“退化”前 B 期的数据，最后的参数估计：

$$\widehat{\Phi}=\frac{1}{S-B}\Sigma_{i=B+1}^{S}\Phi^{(i)}$$

简单记忆：尽可能利用“最新的已知参数”来抽取参数。
重点：后验概率分布的具体参数、具体分布求解(结合贝叶斯公式)，见(三)。

二、关于初始化

该过程是我结合代码最后进行理解。论文一开始提到 GARCH 模型，之后提到 SV 模型，而 SV 模型和 GARCH 模型主要差异在于最后的波动项。百度 GARCH 模型：如果方差用 ARMA 模型来表示，则 ARCH 模型的变形为 GARCH 模型，GARCH（p，q）模型为：

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + ... + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + ... + \beta_p \sigma_{t-p}^2$$

对应 GARCH（1，1）有：

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

可见论文中的 h_t 即是上式中的 σ_t^2，表示序列的波动。

下面叙述代码生成初始化参数和序列{$\ln h_t$、β_i、α_i、σ_i}的过程（在此说明，初始化参数这些参数将用于序列 $\ln h_t$ 更新，区别于 Gibbs 的初始化参数）。根据如下：

$$r_t = \mu + a_t, a_t = \sqrt{h_t}\varepsilon_t$$
$$h_t = \alpha_1 + \alpha_2 a_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$$

（1）构建 arima(0,0,0)模型(下面简称 model0)，其中含有时间序列的待估参数 μ 。

（2）在 model0 上加入 garch(1,1)作为方差(简称 model1),其中含有待估参数 α_1、α_2、β_1 。

（3）论文提供了交易数据的时间序列，而代码运用到的数据包含(close)列。首先对 close 进行如下操作：

$$\mathrm{rtn} = \frac{close_t - close_{t-1}}{close_{t-1}}$$

（4）利用 rtn 数据来拟合 model1 模型的参数，得到：

$$\hat{\mu} = 0.006, \hat{\alpha}_1 = 0.001, \hat{\alpha}_2 = 0.031, \hat{\beta}_1 = 0.966$$

（5）对模型进行评估，estimate(model,rtn) 得到 $h_t = (rtn_t - prtn_t)^2$，其中 $prtn_t$ 为模型对该序列的预测值。对于原始序列，我们用到的是 $\ln h_t$ 。

（6）在下列 SV 模型中：

$$r_t = \beta + a_t, a_t = \sqrt{h_t}\varepsilon_t$$
$$\ln h_t = \alpha_1 + \alpha_2 \ln h_{t-1} + v_t$$

在这里，我们把（4）得到的 $\hat{\mu}$ 作为 SV 模型的 β 估计值（初始值），而后通过 $\ln h_t$ 序列对

$\ln h_t = \alpha_1 + \alpha_2 \ln h_{t-1}$ 回归,得到α_1、α_2 估计值（做为更新$\ln h_t$ 的初始值），即：

$$\hat{\alpha}_1 = -0.0505、\hat{\alpha}_2 = 0.9581$$

（1）最后再将$\ln h_t$ 代入$\ln h_t{}' = \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 \ln h_{t-1}$,计算序列（$\ln h_t{}'$-$\ln h_t$)^2 的方差得到$\sigma_v^2$ 的初始值（做为更新$\ln h_t$ 的初始值）$\hat{\sigma}_v^2 =$ 0.0399 。

以上得到的初始化参数，在下面的 MCMC 过程中有运用到以上的参数，在这里做简单的铺垫。初始化参数表：

表 1 初始参数表

参数	初始值
β	0.006
α_1	-0.0505
α_2	0.9581
σ_v^2	0.0399

三、关于几个后验分布的推导

1. β 的后验分布参数：

$$r_t = \beta + a_t, a_t = \sqrt{h_t}\varepsilon_t$$

$$\frac{r_t}{\sqrt{h_t}} = \frac{\beta}{\sqrt{h_t}} + \frac{a_t}{\sqrt{h_t}} = \frac{\beta}{\sqrt{h_t}} + \varepsilon_t$$

$$\tilde{r}_t = \beta x_t + \varepsilon_t, (\tilde{r}_t = \frac{r_t}{\sqrt{h_t}}, x_t = \frac{1}{\sqrt{h_t}})$$

$$\tilde{r} = \beta X + \varepsilon$$

所以，在 $\tilde{r}$、X 已知的条件下，β 的似然为：

$$\beta = \frac{\tilde{r} - \varepsilon}{X}$$

$$\therefore Var(\tilde{r}, X \mid \beta) = (X^T X)^{-1}, E(\tilde{r}, X \mid \beta) = \frac{\tilde{r}}{X}, p(\beta) \sim N(\beta_0, \sigma_{0,\beta}^2)$$

根据贝叶斯估计：

$$p(\beta \mid \tilde{r}, X) \propto \exp\{-\frac{1}{2}[\frac{(\beta - \frac{\tilde{r}}{X})^2}{(X^T X)^{-1}}] - \frac{1}{2}[\frac{(\beta - \beta_0)^2}{\sigma_{0,\beta}^2}]\}$$

$$= \exp\{-\frac{1}{2}[\frac{(\beta - \frac{\tilde{r}}{X})^2}{(X^T X)^{-1}} + \frac{(\beta - \beta_0)^2}{\sigma_{0,\beta}^2}]\}$$

$$= \exp\{-\frac{1}{2}[\frac{(\beta - \frac{\tilde{r}}{X})^2 \sigma_{0,\beta}^2}{(X^T X)^{-1}\sigma_{0,\beta}^2} + \frac{(\beta - \beta_0)^2 (X^T X)^{-1}}{(X^T X)^{-1}\sigma_{0,\beta}^2}]\}$$

$$= \exp\{-\frac{1}{2}\frac{(\beta - \frac{\tilde{r}}{X})^2 \sigma_{0,\beta}^2 + (\beta - \beta_0)^2 (X^T X)^{-1}}{(X^T X)^{-1}\sigma_{0,\beta}^2}\}$$

$$= \exp\{-\frac{1}{2}\frac{[\sigma_{0,\beta}^2 + (X^T X)^{-1}]\beta^2 - 2[\frac{\tilde{r}}{X}\sigma_{0,\beta}^2 + \beta_0 (X^T X)^{-1}]\beta + [\sigma_{0,\beta}^2 (\frac{\tilde{r}}{X})^2 + (X^T X)^{-1}{\beta_0}^2]}{(X^T X)^{-1}\sigma_{0,\beta}^2}\}$$

$$= \exp\{-\frac{1}{2}\frac{\beta^2 - 2\frac{\frac{\tilde{r}}{X}\sigma_{0,\beta}^2 + \beta_0 (X^T X)^{-1}}{\sigma_{0,\beta}^2 + (X^T X)^{-1}}\beta + B}{\frac{(X^T X)^{-1}\sigma_{0,\beta}^2}{\sigma_{0,\beta}^2 + (X^T X)^{-1}}}\}, (B\text{为常数})$$

$$= \exp\{-\frac{1}{2}\frac{\beta^2 - 2\frac{\frac{\tilde{r}}{X}\sigma_{0,\beta}^2 + \beta_0 (X^T X)^{-1}}{\sigma_{0,\beta}^2 + (X^T X)^{-1}}\beta + B}{\frac{(X^T X)^{-1}\sigma_{0,\beta}^2}{\sigma_{0,\beta}^2 + (X^T X)^{-1}}}\}, (B\text{为常数})$$

对于分母：

$$Var(\beta|\tilde{r},X)=\frac{(X^TX)^{-1}\sigma_{0,\beta}^2}{\sigma_{0,\beta}^2+(X^TX)^{-1}}=[\frac{\sigma_{0,\beta}^2+(X^TX)^{-1}}{(X^TX)^{-1}\sigma_{0,\beta}^2}]^{-1}=(X^TX+\frac{1}{\sigma_{0\beta}^2})^{-1}$$

对于分子：

$$\begin{aligned}
&\beta^2-2\frac{\frac{\tilde{r}}{X}\sigma_{0,\beta}^2+(X^TX)^{-1}\beta_0}{\sigma_{0,\beta}^2+(X^TX)^{-1}}\beta+B \\
&=[\beta-E(\beta|\tilde{r},X)]^2 \\
&E(\beta|\tilde{r},X)=\frac{\frac{\tilde{r}}{X}\sigma_{0,\beta}^2+(X^TX)^{-1}\beta_0}{\sigma_{0,\beta}^2+(X^TX)^{-1}}=\frac{[\frac{\tilde{r}}{X}\sigma_{0,\beta}^2+(X^TX)^{-1}\beta_0]X^TX}{[\sigma_{0,\beta}^2+(X^TX)^{-1}]X^TX} \\
&=\frac{\tilde{r}X^T\sigma_{0,\beta}^2+\beta_0}{\sigma_{0,\beta}^2X^TX+1}=\frac{\tilde{r}X^T+\frac{\beta_0}{\sigma_{0,\beta}^2}}{X^TX+\frac{1}{\sigma_{0,\beta}^2}}=(X^TX+\frac{1}{\sigma_{0,\beta}^2})^{-1}(\tilde{r}X^T+\frac{\beta_0}{\sigma_{0,\beta}^2})
\end{aligned}$$

证毕。

注：在β的抽样中，和其他参数独立，只和不断更新的序列$\ln h_t$、$\tilde{r}$、β_0、$\sigma_{0,\beta}^2$有关。（给定（$\beta_0=0,\sigma_{0,\beta}^2=0.25$））

2. α的后验分布参数：

$$\ln h_t=\alpha_1+\alpha_2\ln h_{t-1}+v_t$$

展开：

$$\begin{aligned}
\ln h_t&=\alpha_1+\alpha_2\ln h_{t-1}+v_t \\
....&=..... \\
\ln h_2&=\alpha_1+\alpha_2\ln h_1+v_2
\end{aligned}$$

令：

$$Z=(z_1,...,z_{n-1}),z_t=(1,\ln h_{t-1})^T,H_{-1}=(h_2,...,h_n)$$

矩阵形式：

$$\ln H_{-1}=\alpha Z+v$$

类比：

$$\tilde{r}=\beta X+\varepsilon\therefore\beta=\frac{\tilde{r}-\varepsilon}{X}$$

有：

$$\ln H_{-1}=\alpha Z+v\therefore\alpha=\frac{\ln H_{-1}-v}{Z}$$

$$Var(\ln H_{-1}, Z \mid \alpha) = \delta_v^2 (Z^T Z)^{-1}, E(\ln H_{-1}, Z \mid \alpha) = \frac{\ln H_{-1}}{Z}, p(\alpha) \sim N(\alpha_0, \Sigma_{0,\alpha})$$

根据贝叶斯估计：

$$p(a \mid \ln H_{-1}, Z) \propto \exp\{-\frac{1}{2}[\frac{(\alpha - \frac{\ln H_{-1}}{Z})^T (\alpha - \frac{\ln H_{-1}}{Z})}{\sigma_v^2 (Z^T Z)^{-1}}] - \frac{1}{2}[\frac{(\alpha - \alpha_0)^T (\alpha - \alpha_0)}{\Sigma_{0,\alpha}}]\}$$

$$= \exp\{-\frac{1}{2}[\frac{(\alpha - \frac{\ln H_{-1}}{Z})^T (\alpha - \frac{\ln H_{-1}}{Z})}{\sigma_v^2 (Z^T Z)^{-1}} + \frac{(\alpha - \alpha_0)^T (\alpha - \alpha_0)}{\Sigma_{0,\alpha}}]\}$$

$$= \exp\{-\frac{1}{2}[\frac{(\alpha - \frac{\ln H_{-1}}{Z})^T (\alpha - \frac{\ln H_{-1}}{Z}) \Sigma_{0,\alpha} + (\alpha - \alpha_0)^T (\alpha - \alpha_0) \sigma_v^2 (Z^T Z)^{-1}}{\sigma_v^2 (Z^T Z)^{-1} \Sigma_{0,\alpha}}]\}$$

$$= \exp\{-\frac{1}{2}\frac{[\Sigma_{0,\alpha} + \sigma_v^2 (Z^T Z)^{-1}] \alpha^T \alpha - 2\alpha^T [\frac{\ln H_{-1}}{Z} \Sigma_{0,\alpha} + \alpha_0 \sigma_v^2 (Z^T Z)^{-1}] + [\Sigma_{0,\alpha} (\frac{\ln H_{-1}}{Z})^T (\frac{\ln H_{-1}}{Z}) + \sigma_v^2 (Z^T Z)^{-1} \alpha_0^T \alpha_0]}{\sigma_v^2 (Z^T Z)^{-1} \Sigma_{0,\alpha}}\}$$

$$= \exp\{-\frac{1}{2}\frac{\alpha^T \alpha - 2\alpha^T \frac{\frac{\ln H_{-1}}{Z} \Sigma_{0,\alpha} + \alpha_0 \sigma_v^2 (Z^T Z)^{-1}}{\Sigma_{0,\alpha} + \sigma_v^2 (Z^T Z)^{-1}} + A}{\frac{\sigma_v^2 (Z^T Z)^{-1} \Sigma_{0,\alpha}}{\Sigma_{0,\alpha} + \sigma_v^2 (Z^T Z)^{-1}}}\}, (A\text{为常数})$$

对于分母：

$$Var(a \mid \ln H_{-1}, Z) = \frac{\sigma_v^2 (Z^T Z)^{-1} \Sigma_{0,\alpha}}{\Sigma_{0,\alpha} + \sigma_v^2 (Z^T Z)^{-1}} = [\frac{\Sigma_{0,\alpha} + \sigma_v^2 (Z^T Z)^{-1}}{\sigma_v^2 (Z^T Z)^{-1} \Sigma_{0,\alpha}}]^{-1} = (\frac{1}{\sigma_v^2 (Z^T Z)^{-1}} + \Sigma_{0,\alpha}^{-1})^{-1} = (\frac{Z^T Z}{\sigma_v^2} + \Sigma_{0,\alpha}^{-1})^{-1}$$

对于分子：

$$\alpha^T \alpha - 2\alpha^T \frac{\frac{\ln H_{-1}}{Z} \Sigma_{0,\alpha} + \alpha_0 \sigma_v^2 (Z^T Z)^{-1}}{\Sigma_{0,\alpha} + \sigma_v^2 (Z^T Z)^{-1}} + A$$

$$= [\alpha - E(\alpha \mid \ln H_{-1}, Z)]^T [\alpha - E(\alpha \mid \ln H_{-1}, Z)]$$

$$E(\alpha \mid \ln H_{-1}, Z) = \frac{\frac{\ln H_{-1}}{Z} \Sigma_{0,\alpha} + \alpha_0 \sigma_v^2 (Z^T Z)^{-1}}{\Sigma_{0,\alpha} + \sigma_v^2 (Z^T Z)^{-1}} = \frac{[\frac{\ln H_{-1}}{Z} \Sigma_{0,\alpha} + \alpha_0 \delta_v^2 (Z^T Z)^{-1}] \frac{Z^T Z}{\sigma_v^2}}{[\Sigma_{0,\alpha} + \sigma_v^2 (Z^T Z)^{-1}] \frac{Z^T Z}{\sigma_v^2}}$$

$$= \frac{\frac{\ln H_{-1} Z^T \Sigma_{0,\alpha}}{\sigma_v^2} + \alpha_0}{\frac{\Sigma_{0,\alpha} Z^T Z}{\sigma_v^2} + 1} = \frac{\frac{\ln H_{-1} Z^T}{\sigma_v^2} + \frac{\alpha_0}{\Sigma_{0,\alpha}}}{\frac{Z^T Z}{\sigma_v^2} + \frac{1}{\Sigma_{0,\alpha}}} = (\frac{Z^T Z}{\sigma_v^2} + \frac{1}{\Sigma_{0,\alpha}})^{-1} (\frac{Z^T \ln H_{-1}}{\sigma_v^2} + \frac{\alpha_0}{\Sigma_{0,\alpha}})$$

证毕。

注：在 α 的抽样中，和其他参数独立，只和不断更新的序列 $\ln h_t$、$\Sigma_{0,\alpha}$、α_0、σ_v^2（该值来自 GARCH 初始化（二），给定（$\Sigma_{0,\alpha} = [[0.4,0],[0,0.4]]$、$\alpha_0 = [0, 0.2]$））。

3. σ_v^2 的后验概率：

通过：

$$\ln h_t = \alpha_1 + \alpha_2 \ln h_{t-1} + v_t$$

在 $\ln h_t$ 已知的条件下，对 v_t 进行极大似然估计，可得到 v_t 的似然：

$$\widehat{v}_t = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\ln h_t - \alpha_1 - \alpha_2 \ln h_{t-1})}{n-1} = \frac{SSR(\alpha)}{n-1}$$

$$\sigma_v^2 \sim \Gamma^{-1}(v_0 / 2, v_0 \sigma_{0,v}^2 / 2)$$

通过“共轭分布表”（附件 Conjugate prior.pdf）可得：

图 1 共轭分布表

σ^2 (variance)	Inverse gamma	$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ [note 5]	$\boldsymbol{\alpha}+\frac{n}{2}, \boldsymbol{\beta}+\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2}$

类推可得到：

$$\{1/\sigma_v^2\} \sim \Gamma([v_0 + n - 1]/2, [v_0 \sigma_{0,v}^2 + SSR(\alpha)]/2)$$

注：在 σ_v^2 的抽样中，只和不断更新的序列 $\ln h_t$、v_0、$\sigma_{0,v}^2$。（给定 v_0=1、$\sigma_{0,v}^2$=0.01）

4. $\ln h_t$ 的后验分布

$$\because r_t = \beta + \sqrt{h_t}\varepsilon_t$$
$$\because r_t \mid \ln h_t \sim N(0, h_t)$$

$$\because \ln h_t = \alpha_1 + \alpha_2 \ln h_{t-1} + v_t$$
$$\therefore \ln h_t \mid \ln h_{t-1} \sim N(\alpha_1 + \alpha_2 \ln h_{t-1}, \sigma_v^2)$$

$$\because \ln h_{t+1} = \alpha_1 + \alpha_2 \ln h_t + v_{t+1}$$
$$\therefore \ln h_{t+1} \mid \ln h_t \sim N(\alpha_1 + \alpha_2 \ln h_t, \sigma_v^2)$$

$$\begin{aligned}
p(\ln h_t \mid r_t, \beta, \ln h_{t-1}, \ln h_{t+1}, \alpha, \sigma_v^2) &\propto p(r_t, \ln h_{t-1}, \ln h_{t+1} \mid \ln h_t, \beta, \alpha, \sigma_v^2) p(\ln h_t) \\
&= p(r_t \mid \ln h_t, \beta) p(\ln h_{t-1} \mid \ln h_t, \alpha, \sigma_v^2) p(\ln h_{t+1} \mid \ln h_t, \alpha, \sigma_v^2) p(\ln h_t) \\
&= p(r_t \mid \ln h_t, \beta)[p(\ln h_{t-1} \mid \ln h_t, \alpha, \sigma_v^2) p(\ln h_t)] p(\ln h_{t+1} \mid \ln h_t, \alpha, \sigma_v^2) \qquad (*) \\
&\propto p(r_t \mid \ln h_t, \beta) p(\ln h_t \mid \ln h_{t-1}, \alpha, \sigma_v^2) p(\ln h_{t+1} \mid \ln h_t, \alpha, \sigma_v^2) \\
&\propto p(r_t \mid \ln h_t, \beta) p(\ln h_t \mid \ln h_{t-1}, \alpha, \sigma_v^2)
\end{aligned}$$

以上只对 1<t<有用,而对于 t=1 and t=n 边界有两种方法,其一,按下式,不考虑 $\ln h_0$ 和 $\ln h_{n+1}$，

即边界概率去除了未知的值的影响：

$$p(\ln h_1 | r_1, \beta, \ln h_2, \alpha, \sigma_v^2) \propto p(r_1 | \ln h_1, \beta) p(\ln h_2 | \ln h_1, \alpha, \sigma_v^2) p(\ln h_1)$$
$$p(\ln h_n | r_n, \beta, \ln h_{n-1}, \alpha, \sigma_v^2) \propto p(r_n | \ln h_n, \beta) p(\ln h_n | \ln h_{n-1}, \alpha, \sigma_v^2)$$

其二，考虑 $\ln h_0$ 和 $\ln h_{n+1}$，但对他们进行“2 步”估计（步长为 2）：

$$\ln \widehat{h}_{n+1} = \alpha_1 + \alpha_2 (\alpha_1 + \alpha_2 \ln h_{n-1})$$

加入波动项并重写：

$$\because \ln h_t = \alpha_1 + \alpha_2 \ln h_{t-1} + v_t$$
$$\therefore \ln h_t = \alpha_1 \left(\frac{1-\alpha_2}{1-\alpha_2}\right) + \alpha_2 \ln h_{t-1} + v_t$$
$$\therefore \ln h_t - \frac{\alpha_1}{1-\alpha_2} = \alpha_2 \left(\ln h_{t-1} - \frac{\alpha_1}{1-\alpha_2}\right) + v_t$$
$$\ln h_t - \eta = \alpha_2 (\ln h_{t-1} - \eta) + v_t$$

其中 $\eta = \alpha_1 / (1-\alpha_2)$ 反向过程：

$$\ln h_t - \eta = \alpha_2 (\ln h_{t+1} - \eta) + v_t^*$$

得到：

$$\ln \widehat{h}_0 = \alpha_2^2 (\ln h_2 - \eta) + \eta$$

在这种情况下，便可得到代入（*）得到说有 $p(\ln h_t | r_t, \beta, \ln h_{t-1}, \ln h_{t+1}, \alpha, \sigma_v^2), 1 \le t \le n$，由此解决了边界问题。

四、关于代码解析

1. Matlab 代码产生（二）中的初始化参数，即表格(1)中参数数据，及 $\ln h_t$ 原始序列。
2. 在 python 和 matlab 中复现 MCMC 过程。
3. Python 运行通过，在 MCMC.ipynb 文件中。
4. 其中重点在 MH 算法（https://www.cnblogs.com/pinard/p/6638955.html）在求 $\ln h_t$ 中的运用。
5. 下面代码重点，代码见文件 MCMC.ipynb 或（https://github.com/small-qiu/Python_with_Finance/tree/master/MCMC）

图 2 代码片段

```python
# Metropolis sampling: ht
logh0 = alphai[1]**2*(loght[1]-alphai[0]/(1-alphai[1])) + alphai[0]/(1-alphai[1])   # lnh0, ita=alphai[0]/(1-alphai[1])
loghn1 = alphai[0]+alphai[1]*(alphai[0]+alphai[1]*loght[n-1]) # lnht+1
loghf1 = list(loght[1:]);loghf1.append(loghn1); loghf1 = np.array(loghf1)   # log of one-step forward ht, [lnh1,lnh2,...lnht+1]
loghb1 = list(loght[:-1]);loghb1.insert(0,logh0); loghb1 = np.array(loghb1)   # log of one-step backward ht, [lnh0,lnh1,lnh2,...lnht]
##################重点##########################################################################################
#  propose new ht, 下面来自于MH算法。stats.norm.pdf求概率值。
loghp = np.random.normal(loght,sigma_loghp)
#  check log ratio of the posterior probability
#  np.dot(np.array([[i,j] for i,j in zip(np.ones(n),list(loghb1))]),alphai.T) 难点 表示 lnht/lnht-1的均值
#  stats.norm.pdf(x,均值, 标准差)
logr = np.log(stats.norm.pdf(loghp, np.dot(np.array([[i,j] for i,j in zip(np.ones(n),list(loghb1))]),alphai.T),np.sqrt(Sigmavi))) + \
    np.log(stats.norm.pdf(loghf1,np.dot(np.array([[i,j] for i,j in zip(np.ones(n),list(loghp))]),alphai.T),np.sqrt(Sigmavi))) + \
    np.log(stats.norm.pdf(rtn-betai,0,np.sqrt(np.exp(loghp)))) -\
    np.log(stats.norm.pdf(loght, np.dot(np.array([[i,j] for i,j in zip(np.ones(n),list(loghb1))]),alphai.T),np.sqrt(Sigmavi))) - \
    np.log(stats.norm.pdf(loghf1,np.dot(np.array([[i,j] for i,j in zip(np.ones(n),list(loght))]),alphai.T),np.sqrt(Sigmavi))) - \
    np.log(stats.norm.pdf(rtn-betai,0,np.sqrt(np.exp(loght))))
# accept or not,在这里修改了loght, 拒绝或接受
idxi = np.log(np.random.rand(n))< logr
loght[idxi] = loghp[idxi]
################################################################################################################
```