

目 录

第一章 绪论	1
1.1 复杂控制系统概述	1
1.2 复杂非线性组合系统的相似结构	3
1.3 鲁棒控制及其发展.....	10
1.4 结构全息控制器及其背景.....	12
1.5 现代微分几何基础.....	13
1.6 本书的特色及主要学术贡献.....	19
第二章 非线性相似组合大系统的结构全息状态 反馈集中控制	22
2.1 时变非线性相似组合系统的全息稳定化.....	23
2.2 -类结构不确定相似大系统的鲁棒镇定设计.....	28
2.3 参数不确定非线性相似大系统的鲁棒控制.....	39
第三章 非匹配不确定非线性相似组合大系统的分散 控制	47
3.1 引言.....	47
3.2 一般非匹配条件下的分散控制.....	48
3.3 广义匹配条件下的结构全息分散鲁棒控制.....	57
3.4 例证.....	66
第四章 非线性相似组合大系统的观测器设计	70
4.1 概述.....	70

4.2 非线性控制系统研究	71
4.3 一类相似组合系统的变结构鲁棒观测器设计	74
4.4 一般非线性相似组合大系统的渐近观测器	81
第五章 基于状态观测器的非线性相似组合大系统的 镇定设计及应用	90
5.1 问题的研究背景	90
5.2 系统描述及预备知识	91
5.3 基于观测器的相似系统镇定设计	93
5.4 轴盘传动系统的镇定研究	101
第六章 非线性相似组合系统的全息分散输出反馈 鲁棒控制	106
6.1 输出反馈镇定的研究现状	107
6.2 非匹配不确定大系统的大增益分散控制	109
6.3 完全时变非线性组合大系统的分散控制	118
6.4 数例仿真	126
第七章 非线性相似组合系统的迭代学习控制	132
7.1 迭代学习控制概述	133
7.2 基于相关度的非线性相似系统的迭代学习控制	136
7.3 互联结构未知的相似组合系统的迭代学习控制	146
第八章 复杂相似系统的研究展望	159
参考文献	164

第一章 絮 论

1.1 复杂控制系统概述

当代科学技术的几项重大变革,如航天技术革命,信息技术革命,制造工业革命等,都要求控制理论能够处理更为复杂的控制系统和提供更为有效的控制策略,于是,复杂控制系统的研究逐渐引起了控制理论界的高度重视^[1~4]。

近年来,非线性分析、非线性泛函、物理学中的非线性动力学等学科的迅速发展及现代微分几何方法、微分代数方法在非线性控制系统理论上的成功应用,引起了人们对非线性控制系统研究的高度重视。更多的控制学专家开始转入对非线性系统的研究,更多的工程师力图用非线性系统理论设计控制工程系统,从而促进了非线性控制理论的发展与深入。特别是高新技术的发展,生产系统的规模越来越大,形成了复杂大系统。复杂非线性控制大系统的研究向人们提出了严峻的挑战。同时,非线性系统理论的发展及计算机仿真技术的提高为研究复杂非线性大系统提供了可能性,复杂系统的研究已成为控制理论界的一个重要研究课题。

复杂控制系统问题包含被控对象、环境条件和控制手段三方面的复杂性,也有不确定性导致的复杂性,同时还有系统多模式集成和控制策略方面的复杂性。这类系统的典型实际背景有复杂大工业生产过程、计算机集成制造系统、空间飞行器中的各种复杂设施、柔性机器人系统、电力系统、化工系统、军事指挥系统以及一些自然发展形成的系统(如生物、社会等系统)。对这类系统的研究,

涉及非线性问题、鲁棒性问题、具有柔性结构的系统及离散事件动态系统等。分析表明复杂控制系统主要有以下几个基本特征：

- (1) 系统构成上常具有多模式子系统集成的特点。如多机械手的协调控制(分为两层,上层是 Petri 网,下层是多关节机械手),具有太阳能帆板的卫星控制(卫星姿态系统是刚性的,而帆板是柔性的)。
- (2) 系统的不同模式之间的复杂关联特性。如非线性关联,模糊关联以及随机关联等。
- (3) 系统面临复杂的工作环境和强鲁棒性的要求。
- (4) 系统一般需要采取复杂的控制策略。

针对复杂控制系统的上述特点,文献[2]指出,数学工具和计算机仿真的高层次结合将是复杂控制系统理论研究的重要手段。

复杂系统的控制方法,一方面要利用现有的控制理论思想对具体的子系统进行控制,利用大系统理论等对系统进行分解,用奇异摄动法考虑快慢系统的层次性问题;另一方面,对于非线性建模、子系统联结与协调、人的因素的参与等等,都必须依靠计算机科学、智能控制、神经网络和传统的控制思想相结合,以坚实的数学理论为基础,才有可能产生一整套的适用于复杂系统的新的控制理论和方法。但是,由于一般复杂控制系统所容纳的许多复杂性,诸如受控对象模型的不确定性、高度非线性特性、子系统之间的复杂关联特性、分布式传感器和执行器、系统的动态突变、多时间标度、复杂的信息模式以及庞大的数据量等,很难找到一条处理一般复杂系统的较为有效的途径。于是,从复杂控制系统的结构出发,利用系统自身的结构属性,首先研究一些具有特殊结构的复杂系统,如具有级联结构的级联系统^[3,6]、具有对称结构的对称系统^[3,7,8]以及具有相似性结构的相似系统^[3,9]等,进而研究一般的复杂系统可能是处理复杂控制系统的一条极为有效的途径。本书将主要讨论具有相似结构的复杂非线性组合大系统的控制问题。

1.2 复杂非线性组合系统的相似结构

非线性相似组合大系统是具有特定结构——相似结构——的复杂控制系统之一。许多自然发展形成的系统,如生物系统、社会系统等,这类系统为了适应其外部环境,力求以最佳状态运行,故应是“自寻最优地”逐渐演化而形成其结构^[3]——相似结构。例如,由原始社会低级的部落演化而来的今天的高级社会系统——国家,便是一个具有相似结构的系统。事实上,一个国家的中央、省、市、县等组织机构是相似的,例如,中央设有财政部、组织部、公安部、教育部等部门,而各省、市、县也没有相类似的组织部门,它们不但组织机构相似,而且其相应机构的运行机制也是相似的。再比如,同一层次不同种类的星系、恒星系、行星系统之间都存在系统结构的相似性及运行形式的相似性。相似结构不仅存在于自然形成的系统中,而且存在于许多人为设计的系统中,如电力系统、多臂机器人系统、互联双摆系统及倒立双摆系统等。

1.2.1 复杂系统的相似结构

考虑如下两个非线性系统

$$\begin{aligned}\sum_1: \quad & \begin{cases} x = f(x, u) \\ y = h(x) \end{cases} \\ \sum_2: \quad & \begin{cases} \tilde{x} = \tilde{f}(\tilde{x}, v) \\ y = \tilde{h}(\tilde{x}) \end{cases}\end{aligned}$$

其中 $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n, u, v, y \in \mathbb{R}^m$ 分别是系统 \sum_1 和 \sum_2 的状态, 输入和输出 $f(x), \tilde{f}(\tilde{x})$ 分别是其定义域上的光滑向量场, $h = (h_1, h_2, \dots, h_m)^T$, $\tilde{h} = (\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \dots, \tilde{h}_m)^T$, $h_i, \tilde{h}_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 是 C^∞ 函数。

定义 1.1 如果存在微分同胚 $D: x \rightarrow \tilde{x}$ 和 $\alpha(x) \in C^\infty(\Omega)$, $\beta(x) \in Gl(m, C^\infty(\Omega))$ 使得系统 \sum_1 与反馈

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v \quad (1.1)$$

构成的闭环系统在 \tilde{x} 坐标下, 具有 \sum_2 的形式, 则称系统 \sum_1 和系统 \sum_2 相似, 并称 (D, α, β) 为系统 \sum_1 到系统 \sum_2 的相似参量。

注 1.1 若 $\alpha(x) = 0, \beta(x) = I$, 则上述非线性相似系统的定义是线性等价系统概念的进一步推广。若 D 是恒等变换, 则上述相似系统即为反馈等价系统。由 $\beta(x)$ 的非奇异性易知, 这种相似关系是一种等价关系, 它满足自反性、对称性和传递性。

考虑如下的非线性组合大系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(x_i) + \Delta f_i(x_i) + G_i(x_i)(u_i + \Delta g_i(x_i)) + \\ &\quad \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (\mathbf{H}_{ij}(x_j) + \Delta \mathbf{H}_{ij}(x_j)) \\ y_i &= h_i(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

其中 $x_i \in \Omega_i \subset \mathbb{R}^n, u_i, y_i \in \mathbb{R}^m$ 分别是第 i 个子系统的状态, 输入和输出, $x = \text{col}(x_1, x_2, \dots, x_N) \in \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_N, G_i(x_i) =$

$$(g_{1i}(x_i) \ g_{2i}(x_i) \ \dots \ g_{mi}(x_i)), \ f_i(x_i), \ g_i(x_i) \in V_n^w(\Omega_i), \ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbf{H}_{ij}(x_j)$$

是确定的互联项, $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \Delta \mathbf{H}_{ij}(x_j)$ 是不确定互联项, $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots$

$\times \Omega_N$ 是 $x_i \in R^{N \times n}$ 的某邻域, $h_i = (h_{i1}(x_i) \ h_{i2}(x_i) \ \dots \ h_{im}(x_i))^T$, $h_{ij}(x_i) \in C^\infty(\Omega_i)$ ($i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, m$)。

定义 1.2 称系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(x_i) + \Delta f_i(x_i) + G_i(x_i)(u_i + \Delta g_i(x_i)) \\ y_i &= h_i(x_i) \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

为系统(1.2)的孤立子系统, 系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(x_i) + G_i(x_i)u_i \\ y_i &= h_i(x_i) \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

为系统(1.2)的名义子系统。

定义 1.3 如果非线性组合大系统(1.2)的 N 个名义子系统在其研究区域上是彼此相似的, 即存在微分同胚 $T_i: \mathbf{x}_i \rightarrow \mathbf{z}_i$ 及 $\alpha_i(\mathbf{x}_i) \in C_m^{\infty}(\Omega_i), \beta_i(\mathbf{x}_i) \in GL(m, C^{\infty}(\Omega_i))$ 使得由反馈

$$\mathbf{u}_i = \alpha_i(\mathbf{x}_i) + \beta_i(\mathbf{x}_i)\mathbf{v}_i \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.5)$$

与系统(1.4)构成的闭环系统在 $\mathbf{z} = \text{col}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_N)$ 坐标下具有如下的结构形式:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\mathbf{z}}_i = \mathbf{f}(\mathbf{z}_i) + \mathbf{G}(\mathbf{z}_i)\mathbf{v}_i \\ \mathbf{y}_i = \mathbf{h}(\mathbf{z}_i) \end{array} \right\} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.6)$$

则称系统(1.2)为非线性相似组合大系统, 并称 (T_i, α_i, β_i) 为系统(1.2)的第 i 个子系统的相似参量。

注 1.2 上述相似组合大系统的概念完全可以平行地推广到时变非线性组合大系统的情形, 此时, 相似参量 (T_i, α_i, β_i) 中的 α_i, β_i 一般是时变的。

非线性相似组合大系统是复杂系统之一, 其复杂性主要表现在:(1) 系统的非线性特性; (2) 系统的不确定性; (3) 系统的高维性; (4) 子系统之间的互联特性。正是这些特征使得非线性相似组合大系统的研究非常困难, 因而这方面的结果甚少。本书将对这类系统的有关控制问题进行较系统的研究。

1.2.2 实例

由定义 1.3 知, 非线性相似组合大系统实质上是由相似的名义子系统互联而成的组合大系统, 正如文献[3]所指出的, 这种由行动特性相同或相似的子系统互联而成的组合大系统在许多其它领域都出现过, 如将相同机床组合, 大规模生产同类小部件; 大规模并行计算; 人工神经网络等^[3]。这类系统有着广泛的实际背景。

例 1.1 倒立双摆系统模型^[10]: 考虑两个由弹簧联结的置于小车上的倒立摆, 其中弹簧可沿着摆滑动(如图 1.1)。

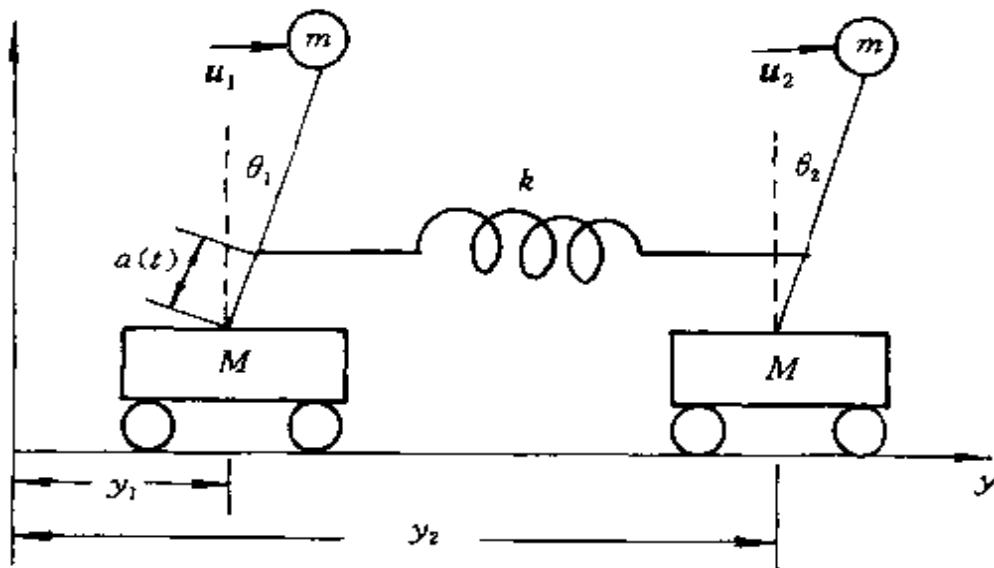


图 1.1 小车上的倒立双摆系统

令 $x_1 = (\theta_1 \dot{\theta}_1)^T$, $x_2 = (\theta_2 \dot{\theta}_2)^T$, 则小车上的倒立双摆系统的动态方程为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{cl} - \frac{ka(t)(a(t) - cl)}{cml^2} & 0 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{cml^2} \end{bmatrix} + u_1 + \\ &\quad k \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{ka(t)(a(t) - cl)}{cml^2} & 0 \end{bmatrix} x_2 - \\ &\quad \left[\frac{m}{M} \sin(\theta_1) \dot{\theta}_1^2 + \frac{ka(t)(a(t) - cl)}{cml^2} (y_1 - y_2) \right] \\ \dot{x}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{cl} - \frac{ka(t)(a(t) - cl)}{cml^2} & 0 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{cml^2} \end{bmatrix} u_2 + \\ &\quad k \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{ka(t)(a(t) - cl)}{cml^2} & 0 \end{bmatrix} x_1 - \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{m}{M}\sin(\theta_2)\dot{\theta}_2^2 + \frac{ka(t)(a(t) - cl)}{cml^2}(y_2 - y_1) \end{bmatrix}$$

$$Y_1 = (1 \ 0)x_1, \quad Y_2 = (1 \ 0)x_2$$

其中 $c = M/(M+m)$, k 和 g 分别是弹簧系数和重力常数。考察其结构易知, 此系统是由结构相同的子系统以相似的方式互联而成的, 显然, 它是一相似组合大系统。

例 1.2 双机械臂协调控制系统^[1]: 考虑两个二连杆机械臂合作搬运一物体。两个平面机械臂的动力学方程分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_1(\boldsymbol{\theta}^1)\ddot{\boldsymbol{\theta}}^1 + \mathbf{E}_1(\boldsymbol{\theta}^1, \dot{\boldsymbol{\theta}}^1) + \mathbf{J}_1^T(\boldsymbol{\theta}^1)\mathbf{F} &= \mathbf{T}^1 \\ \mathbf{D}_2(\boldsymbol{\theta}^2)\ddot{\boldsymbol{\theta}}^2 + \mathbf{E}_2(\boldsymbol{\theta}^2, \dot{\boldsymbol{\theta}}^2) + \mathbf{J}_2^T(\boldsymbol{\theta}^2)\mathbf{F} &= \mathbf{T}^2 \end{aligned} \quad (1.7)$$

其中 $\boldsymbol{\theta}^1 = \text{col}(\theta_1^1, \theta_2^1), \boldsymbol{\theta}^2 = \text{col}(\theta_1^2, \theta_2^2), \mathbf{T}^1 = \text{col}(\mathbf{T}_1^1, \mathbf{T}_2^1), \mathbf{T}^2 = \text{col}(\mathbf{T}_1^2, \mathbf{T}_2^2)$ 。这里 $\mathbf{D}_i, \boldsymbol{\theta}^i, \mathbf{E}_i, \mathbf{J}_i, \mathbf{T}^i$ ($i = 1, 2$) 分别是两机械臂的惯量矩阵、关节角矢量、离心力、哥氏力、重力矢量和关节力矩矢量。

由文献[11]知道, 在两机械臂的加速度约束下, \mathbf{F} 为 $\boldsymbol{\theta}^1, \dot{\boldsymbol{\theta}}^1, \boldsymbol{\theta}^2, \dot{\boldsymbol{\theta}}^2$ 的函数, 记 $\mathbf{F} = \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}^1, \dot{\boldsymbol{\theta}}^1, \boldsymbol{\theta}^2, \dot{\boldsymbol{\theta}}^2)$, $\mathbf{x}_i^1 = \text{col}(\theta_1^i, \theta_2^i), \mathbf{x}_i^2 = \text{col}(\dot{\theta}_1^i, \dot{\theta}_2^i), \mathbf{x}_i = \text{col}(\mathbf{x}_i^1, \mathbf{x}_i^2), \mathbf{u}_i = \mathbf{T}^i$, 则双机械臂的动力学方程可描述为

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i) + \mathbf{g}_i(\mathbf{x}_i)\mathbf{u}_i + \mathbf{H}(\mathbf{x}) \quad i = 1, 2 \quad (1.8)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i) &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i^2 \\ -\mathbf{D}_i^{-1}\mathbf{E}_i \end{bmatrix} \quad \mathbf{g}_i(\mathbf{x}_i) = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{D}_i^{-1} \end{bmatrix} \quad i = 1, 2 \\ \mathbf{H}_i(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} 0 \\ (-1)^{i+1}\mathbf{J}_i^T\mathbf{D}_i^{-1}\mathbf{K}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

选择机械臂终端执行器为系统的输出, 即

$$\mathbf{y}_i = \begin{bmatrix} h_{i1} \\ -h_{i2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l\cos\theta_1^i + l\cos(\theta_1^i + \theta_2^i) \\ l\sin\theta_1^i + l\sin(\theta_1^i + \theta_2^i) \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2$$

其中 $l = l_1 = l_2$ 为机械臂的杆长。

记 $\mathbf{x}_i^1 = (x_{i1} \ x_{i2})^\top$, $\mathbf{x}_i^2 = (x_{i3} \ x_{i4})^\top$, 选取

$$T_{i1} : \begin{cases} z_{i1} = l\cos x_{i1} + l\cos(x_{i1} + x_{i2}) \\ z_{i2} = -l(\sin x_{i1} + \sin(x_{i1} + x_{i2})) - l\sin(x_{i1} + x_{i2})x_{i4} \\ z_{i3} = l\sin x_{i1} + l\sin(x_{i1} + x_{i2}) \\ z_{i4} = -l[\cos x_{i1} + \cos(x_{i1} + x_{i2})]x_{i3} + l\cos(x_{i1} + x_{i2})x_{i4} \end{cases}$$

$$\alpha_i = -\mathbf{D}_i \mathbf{J}_i^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{J}_i}{\partial x_{i1}} x_{i3} - \frac{\partial \mathbf{J}_i}{\partial x_{i2}} x_{i4} \right) \begin{bmatrix} x_{i3} \\ x_{i4} \end{bmatrix} -$$

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{x}_i) + (-1)^i \mathbf{J}_i^T \mathbf{K}(\mathbf{x})$$

$$\beta_i = \mathbf{D}_i(\mathbf{x}_i) \mathbf{J}_i^{-1}(\mathbf{x}_i)$$

容易验证上述系统是相似组合系统。

例 1.3 互联双摆系统^[12]: 考虑含有不确定参数的耦合双摆系统, 如图 1.2, 其动力学方程为

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1 &= -\sin\theta_1 + u_1 - \zeta_1 \cos\theta_1 - 0.1\dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_2 &= -\sin\theta_2 + u_2 - \zeta_2 \cos\theta_2 - 0.1\dot{\theta}_1\end{aligned}$$

其中 $\theta_i, u_i (i = 1, 2)$ 分别为双摆系统的摆角和控制输入, $\zeta_i \in [-l, l]$ ($i = 1, 2$) 为不确定参数。

令

$$\mathbf{x}_1 = \text{col}(\mathbf{x}_1^1, \mathbf{x}_1^2) = \text{col}(\theta_1, \dot{\theta}_1)$$

$$\mathbf{x}_2 = \text{col}(\mathbf{x}_2^1, \mathbf{x}_2^2) = \text{col}(\theta_2, \dot{\theta}_2), \quad \mathbf{x} = \text{col}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$$

则互联双摆系统的动力学方程可表达为下述形式:

$$\left. \begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_i &= \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i) + \Delta\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i) + \mathbf{g}_i(\mathbf{x}_i)u_i + \mathbf{H}(\mathbf{x}) \\ y_i &= h_i(\mathbf{x}_i) = x_i^1 \quad i = 1, 2\end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

其中

$$\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i) = \begin{bmatrix} x_i^2 \\ -\sin x_i^1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{g}_i(\mathbf{x}_i) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

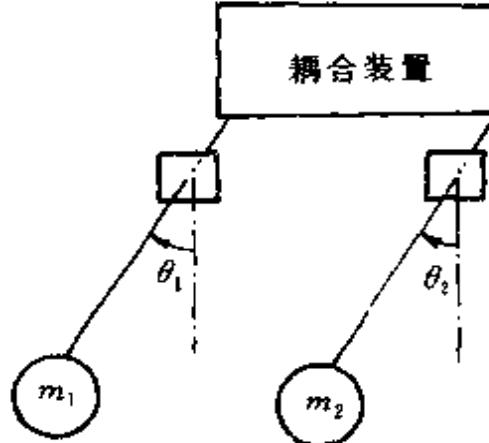


图 1.2 互联双摆系统

$$\begin{aligned}\Delta f_1(x_1) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\zeta_1 \cos x_1^1 \end{bmatrix} & \mathbf{H}_1(x) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -0.1x_2^1 \end{bmatrix} \\ f_2(x_2) &= \begin{bmatrix} x_2^2 \\ -\sin x_2^1 \end{bmatrix} & \mathbf{g}_2(x_2) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \\ \Delta f_2(x_2) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\zeta_2 \cos x_2^1 \end{bmatrix} & \mathbf{H}_2(x) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -0.1x_1^2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

显然,系统(1.9)是一相似组合大系统。

例 1.4 考虑由 N 个电机组成的多级电力系统,其动态系统模型为^[13]

$$M_i = \frac{d^2\delta_i}{dt^2} + D_i \frac{d\delta_i}{dt} = P_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N b_{ij} \sin \delta_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.10)$$

其中 M_i 为惯量常数, D_i 为阻尼系数, δ_i 为第 i 个电机轴的转子相对于系统同步速度运转轴的夹角, $\delta_{ij} = \delta_i - \delta_j$, P_i 为有效输入功率, $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N b_{ij} \sin \delta_{ij}$ 为第 i 个电机与其它电机之间的关联作用。

选取

$$\begin{aligned}x_{i1} &= \delta_i & x_{i2} &= \dot{\delta}_i & \mathbf{x}_i &= \text{col}(x_{i1}, x_{i2}) \\ u_i &= P_i & H_{ij}(x) &= -b_{ij} \sin \delta_{ij}\end{aligned}$$

如果 N 个电机相同,则令 $M_i = M$, $D_i = D$, 选取 δ_i 为第 i 个子系统的输出,则多级电力系统模型可表示为

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_i &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{D}{M} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbf{H}_{ij}(x) \\ y_i &= (0 \ 1) \mathbf{x}_i \quad i = 1, 2, \dots, N\end{aligned} \quad (1.11)$$

显然它也是一非线性相似组合大系统。

1.3 鲁棒控制及其发展

系统鲁棒性的研究,最早可追溯到上个世纪许多学者在微分方程解对参数的连续依赖性方面的工作。但直到70年代初期,反馈系统的设计还主要是基于Niquist判据,且局限于单输入单输出(SISO)系统。1972年,“鲁棒控制”一词首次出现,人们开始处理多输入多输出(MIMO)系统的控制器综合问题,由此开创了现代鲁棒控制的新时期。特别是由于控制理论界的推动,形成了从80年代至今不衰的鲁棒分析与鲁棒控制研究热。这一方面是由于实际工程问题的需要,另一方面,相关科学理论特别是非线性科学的发展也为非线性鲁棒控制的研究提供了有效的研究手段和途径。

我们知道,实际系统总是不可避免地受到这样或那样一些不确定因素的影响,如系统内部的不确定参数、不确定结构等。另外,系统在运行过程中,由于工作环境的变化、位置的变迁、元件的老化,还有建模过程中的降阶近似及量测噪声等,这些因素对系统的性能都有着不同程度的影响。为了提高系统的性能,在控制器的设计中必须考虑这些不确定因素。如果把所有的不确定因素视为扰动,所谓的鲁棒性就是系统的某一品质或者说某种性能在受有扰动后仍然能保持不变的性质,而鲁棒控制就是设计一个控制器使得系统具有鲁棒性。前者是分析,后者是综合,但通常人们笼统地把二者都称为鲁棒控制,如某一稳定的系统在受有扰动后仍然是稳定的,我们便称其具有鲁棒稳定性。由此可见,鲁棒控制是一项非常有实际意义的研究课题。

目前线性系统鲁棒控制的研究已取得了许多成果,非线性系统的鲁棒控制正在稳步发展,其核心问题是什么类型的不确定系统能够实现鲁棒控制,鲁棒控制器如何设计。这方面取得成果最多的是系统的鲁棒稳定化即鲁棒镇定问题。第一类系统便是满足匹

配条件的不确定系统,这种不确定性和系统的输入以相同的通道进入系统,对这类系统可运用 Min-Max 控制方法设计相应的鲁棒控制器;另一类则是非匹配不确定系统,对这类系统,传统的方法是根据系统的已知动态特征设计控制器,然后希望这种控制器能够提供足够的稳定系数(稳定裕度)以补偿非匹配不确定因素的影响,显然这种处理方法保守性较大。90 年代初期提出的广义匹配条件为研究一类特殊的非匹配不确定系统提供了保守性较低的鲁棒控制设计方案。

近 20 年来,随着控制理论的深入发展,许多控制方法诸如微分几何方法、 H^∞ 控制、变结构控制、自适应控制、奇异摄动理论、迭代学习控制等在鲁棒控制的研究中得到了较为成功的应用,特别是近年来出现的“Backstepping”方法和“Recursive Interlacing”方法^[14],既不要求系统是最小相位系统,也不要求系统具有相关度,且对降低非线性鲁棒控制结论的保守性有着重要的意义。尽管目前已形成了许多方法,然而,Lyapunov 直接方法无疑是研究非线性鲁棒控制的最基本且最有效的方法之一。目前鲁棒控制已形成了一个方法多样、成果丰硕、内容广泛的格局,许多成果已在实际中得到了广泛应用。然而,对于非线性系统,由于问题本身的复杂性,其研究还只能算是初步的,大量的问题还有待进一步深入探讨。充分利用各种方法的特点,有机地结合其中的几种方法较之于孤立地研究某一种方法要有效得多,几种方法的结合可能会为非线性鲁棒控制的研究开辟新的方向。本书的部分内容,就是利用现代微分几何方法和 Lyapunov 分析法相结合,给出其相应的结构全息鲁棒控制方案。

总之,鲁棒控制的研究趋势就是寻找保守性小、且易于验证的判据,探求易于实现,便于设计的鲁棒控制方案。由于鲁棒控制在实际系统中的广泛实用性,其研究不但具有重要的理论价值,而且具有非常重要的工程意义。

1.4 结构全息控制器及其背景

相似现象是现实世界中广泛存在的一种现象,近年来,其研究受到了许多学者的普遍关注。文献[15]分析了自然界大量的相似现象,提出了一门新兴的边缘学科——相似学,文献[16]讨论了多级系统的层次结构,从系统学的角度提出了 n 级相似的概念,文献[17]研究了生长系统,从中可看出相似系统的演化过程,文献[18,19]也研究了有关相似系统的问题。但是,通过分析自然现象及生物系统,特别是受我国针灸学的启发分析相似控制系统,并通过控制系统的中间层次来控制整个系统的全息控制思想则是文献[3,9]首先提出的,这种独特的研究方法国内外似乎未曾见到。这一深刻的思想为建立控制理论的一个全新的研究领域开辟了广阔前景。近期的研究表明这将是一条极为有效的研究途径。

文献[20]指出,生物个体是一个大系统,它由许多相对独立的小系统组成,在大系统与小系统之间存在着全息对应关系。生物全息律揭示了生物全息元上的各部位,相对于该全息元的其它部位,总是和整体或其它全息元上其所对应部位生物特性相似程度较大。全息元在不同程度上成为整体的缩影,且各全息元之间在不同程度上是相似的。文献[21]从全息的角度说明了针灸学等医学观点,受这些全息现象及文献[3,9]思想的启发,本书提出了一种结构全息控制器。

定义 1.4 考虑系统(1.2),设 $x_i \in \Omega \subset \mathbb{R}^{n_i}$ (Ω 是 x_0 的某邻域),系统(1.2)是区域 Ω 上的相似组合大系统,且它的第 i 个子系统的相似参量为 (T_i, α_i, β_i) ($i = 1, 2, \dots, N$)。如果存在函数

$$u = u(x, T, \alpha, \beta) \quad (1.12)$$

使得由反馈

$$u_i = u(x, T_i(x_i), \alpha_i(x_i), \beta_i(x_i)), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.13)$$

与系统(1.2)构成的闭环系统在 Ω 上渐近稳定,则称系统(1.2)可结构全息镇定,并称(1.13)为系统(1.2)的结构全息控制器。

之所以称式(1.13)为系统(1.2)的结构全息控制器,主要是因为控制器(1.13)具有如下特征:整个大系统的控制器是由 N 个控制器 u_1, u_2, \dots, u_N 构成的,从式(1.13)可以看出,这 N 个控制器的任一个子控制器的结构都具有其它子控制器的全部结构信息,于是,从任一子控制器的结构信息,借助于相应子系统的相似参量,就可以获得其它子控制器的全部信息,进而获得整个大系统控制器的全部结构信息,所以,称这种控制器为结构全息控制器。

从工程角度分析,结构全息控制器能够简化组合大系统的工程设计。事实上,由控制器(1.13)的结构全息特性知道,在工程实际中,可先设计 N 个结构相同的控制器(1.12),然后适当调试相似参量(函数发生器),即可得到满足要求的结构全息控制器(1.13),特别当子系统的个数 N 较大时,其优越性则更为明显。另外,当结构全息控制器中的某个控制器被损坏或者被完全烧毁,亦可根据其它控制器的结构确定出该控制器的结构,并借助于(或求出)相应子系统的相似参量设计出一个满足要求的控制器。所以,研究结构全息控制器不但具有重要的理论意义,而且具有重要的实用价值。

1.5 现代微分几何基础

70 年代发展起来的微分几何方法为非线性控制系统的研究找到了新的突破口,并为之提供了一种有效的研究工具,大大促进了非线性系统控制理论的发展。经过十余年的努力,到了 80 年代末 90 年代初,微分几何方法在非线性控制系统中的研究达到了高潮,取得了大量的研究成果,并在实际中得到了广泛的应用,它不但在理论上已形成了较为完整的体系,而且正越来越多地被应用

于尖端工程技术中。因此,从某种意义上讲,微分几何方法的引入,标志着控制理论发展的一个新阶段。

这一节将给出微分几何的部分基本概念以及本书后面各章节要涉及的基础结论。一方面是为了使本书系统化及以后的叙述方便,另一方面是为了使那些已具有现代微分几何基础的读者不必再翻阅其它相关微分几何书籍即可阅读此书,详细的内容可参见文献[22~24]。

1.5.1 李导数、李括号

设 $X, Y \in V(M)$, $\omega \in V^*(M)$ 分别是微分流形 M 上的光滑向量场和微分一型, $\phi(x)$ 是 C^∞ 函数。向量场 Y , 微分一型 ω 及函数 $\phi(x)$ 沿向量场 X 方向的“变化率”即为李导数。设 X, ω 的局部坐标分别为 $X = (a_1(x) \ a_2(x) \ \dots \ a_n(x))^T$, $\omega = (b_1(x) \ b_2(x) \ \dots \ b_n(x))$, 则其相应的李导数可定义如下:

1. C^∞ 函数 $\phi(x)$ 对向量场 X 的李导数 $L_X(\phi(x))$ 定义为

$$L_X(\phi(x)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\phi(\Phi_t^X(x)) - \phi(x))$$

它仍然是一 C^∞ 函数, 在局部坐标下

$$L_X(\phi(x)) = \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

2. 向量场 Y 对向量场 X 的李导数 $ad_X Y$ 定义为

$$ad_X Y = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\Phi_{-t}^X)_* Y(\Phi_t^X(x)) - Y(x)$$

它是 $V(M)$ 上的向量场, 在局部坐标下

$$ad_X Y = \frac{\partial Y}{\partial x} X - \frac{\partial X}{\partial x} Y$$

其中 $\frac{\partial Y}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial X}{\partial x}$ 分别为向量场 X 和 Y 的 Jacobi 矩阵。

向量场 Y 对向量场 X 的李导数 $ad_X Y$ 也可记作 $[X, Y]$, 并称其

为向量场 X 与 Y 的李括号。李括号具有三条最基本的性质：(1) 对 R^1 的线性性，(2) 反对称性，(3) Jacobi 等式成立。

3. 微分一型 ω 对向量场 X 的李导数 $L_X(\omega)$ 定义为

$$L_X(\omega) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} ((\Phi_t^X)_* \omega (\Phi_t^X(x)) - \omega(x))$$

在局部坐标下

$$L_X(\omega) = \left[\frac{\partial \omega^\dagger}{\partial x} X \right]^\dagger - \omega \frac{\partial X}{\partial x}$$

注 1.3 用递推的办法可以定义高阶李导数，如 $L_X^k(\phi(x)) = L_X(L_X^{k-1}(\phi(x)))$ 。为方便期间，通常记 $L_X^k(\phi(x)) = \phi(x)$ 。其它形式的高阶李导数可以此类推。

1.5.2 分布及其基本概念

微分流形 M 的分布是一个映射 $\Delta: M \rightarrow TM$ ，且满足 $\Delta_p \subset T_p M$ ，即在每一点 $p \in M$, Δ_p 都是 M 在 p 点的切空间的子空间，其维数称为分布 Δ_p 的维数。

一个分布 Δ 在各点的维数并不一定相等，如果对 M 上的每一点 p , Δ_p 的维数都相等，则称 Δ 为非奇异分布，其维数记为 $\dim(\Delta)$ 。

设 X 和 Δ 分别是流形 M 上的向量场和分布，如果对每一点 $p \in M$ 均有 $X_p \in \Delta_p$ ，则称向量场 X 属于分布 Δ ，记为 $X \in \Delta$ 。如果一个分布 Δ 对于任何属于它的向量场 X 和 Y 均有 $[X, Y] \in \Delta$ ，即 Δ 上的向量场对李括号运算封闭，则称 Δ 为对合分布。

如果一个分布 Δ 既是对合的，又是非奇异的，则称 Δ 为非奇异对合分布。

1.5.3 几个主要结论

考虑仿射非线性系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x) u_i \\ y_j &= h_j(x) \quad j = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n, u, y \in \mathbb{R}^m$ 分别是系统的状态、输入和输出。

这一节将给出本书中所涉及的有关微分几何方法的几个主要结论，在给出有关结论之前，先给出仿射系统相关度的定义。

定义 1.5 设系统(1.14)满足

(1) 存在 x_0 某领域，在该领域内

$$L_{g_i} L_f^k h_j(x) = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, m, \quad k = 1, 2, \dots, r_i - 1$$

(2) $m \times m$ 阶矩阵

$$A(x) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(x) & L_{g_2} L_f^{r_1-1} h_1(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1(x) \\ L_{g_1} L_f^{r_2-1} h_2(x) & L_{g_2} L_f^{r_2-1} h_2(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_2-1} h_2(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{r_m-1} h_m(x) & L_{g_2} L_f^{r_m-1} h_m(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m(x) \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

在 x_0 非奇异，则称系统(1.14)在 x_0 点具有相关度 $r = \{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ 。如果系统(1.14)在某区域内每一点均具有相同的相关度 $r = \{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ ，则称系统(1.14)在该区域具有一致相关度 $r = \{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ ，简称系统(1.14)在该区域具有相关度 $r = \{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ 。

1. 部分线性化

定理 1.1 设系统(1.14)在 x_0 点具有相关度 $r = \{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ ， $G = \text{Span}\{g_1, g_2, \dots, g_m\}$ 是一对合分布，则存在局部非奇异坐标变换 $z = \text{col}(\xi, \eta)$ ，其中 $\xi = \text{col}(z_1^1, z_2^1, \dots, z_{r_1}^1, \dots, z_1^m, z_2^m, \dots, z_{r_m}^m)$ ， $\eta \in \mathbb{R}^{n-\sum r_i}$ ，使得系统(1.14)在 z 坐标下具有如下形式：

$$\dot{z}_1^i = z_2^i$$

$$\dot{z}_2^i = z_3^i$$

⋮

$$\dot{z}_{r_i+1}^i = z_{r_i}^i$$

$$\dot{z}_i^i = b_i(\xi, \eta) + \sum_{j=1}^m a_{ij}(\xi, \eta) u_j, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\dot{\eta} = q(\xi, \eta)$$

其中

$$z_1^i(x) = h_i(x)$$

$$z_2^i(x) = L_i h_i(x)$$

$$\vdots \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$z_{r_i}^i = L_{r_i}^{r_i-1} h_i(x)$$

$n = \sum_{i=1}^m r_i$ 维向量 $\eta = (\eta_1 \ \eta_2 \ \cdots \ \eta_{n-\sum_{i=1}^m r_i})$ 可由式

$$L_{r_i} \eta_j(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n - \sum_{i=1}^m r_i$$

确定

2. 完全线性化

(1) 反馈完全线性化

定理 1.2 设定理 1.1 中, $\sum_{i=1}^m r_i = n$, 则存在反馈

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v$$

其中 $u = (u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_m)^T$, $v = (v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_m)^T$, $\alpha(x) = -A^{-1}(x)b(x)$, $\beta(x) = A^{-1}(x)$, $A(x)$ 由式(1.15)确定

$$b(x) = \begin{bmatrix} L_1' h_1(x) \\ L_2' h_2(x) \\ \vdots \\ L_m' h_m(x) \end{bmatrix}$$

使得系统(1.14)在 z 坐标下具有如下形式:

$$\dot{z} = Az + Bv$$

$$y = Cz$$

其中 $A = \text{diag}\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$, $B = \text{diag}\{B_1, B_2, \dots, B_m\}$, $C = \text{diag}\{C_1, C_2, \dots, C_m\}$, (A_i, B_i, C_i) ($i = 1, 2, \dots, m$) 是 Brunovsky 标准型。

(2) 无反馈完全线性化

定理 1.3 设 x_0 为系统(1.14)的平衡点, 如果

- (1) $\dim(\text{Span}\{ad^k g_i(x_0) | 1 \leq i \leq m, 0 \leq k \leq n-1\}) = n$;
- (2) $\dim(\text{Span}\{dL_j^k h_j(x_0) | 1 \leq j \leq m, 0 \leq k \leq n-1\}) = n$;
- (3) 存在 x_0 的某领域 U , 使得在 U 上, $L_{s_i} L_j L_{s_j} L_j^k h(x) = 0$ ($1 \leq i, j \leq m, s, t \geq 0$), 则存在微分同胚 $z = T(x)$, 使得系统(1.14)在 z 坐标下具有如下的形式:

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + Bu \\ y = Cz \end{cases}$$

其中 (A, B, C) 是能控能观的。

注 1.4 在分布 $\text{Span}\{ad^k g_i(x_0) | 1 \leq i \leq m, 0 \leq k \leq n-1\}$ 中选取 n 个线性无关的向量场 X_1, X_2, \dots, X_n , 并求得微分同胚 $\tilde{T}(z_1, z_2, \dots, z_n) = \Phi_{z_1}^{X_1} \circ \Phi_{z_2}^{X_2} \circ \dots \circ \Phi_{z_n}^{X_n}(x_0)$, 则定理 1.3 中的微分同胚 T 可选为 \tilde{T}^{-1} 。

3. 无反馈解耦线性化

定理 1.4 设 $x_0 \in M$, 则解析系统(1.14)在 x_0 点可局部解耦线性化的充要条件是存在 x_0 某领域 U 及其上 $n-m$ 个解析向量场, 使之与 $g_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) 构成 n 个向量场

$$g_1, X_1^1, X_2^1, \dots, X_{s_1}^1, g_2, X_1^2, X_2^2, \dots, X_{s_2}^2, \dots, g_m, X_1^m, X_2^m, \dots, X_{s_m}^m \quad (1.16)$$

(其中 $\sum_{i=1}^m s_i = n$ ($s_i > 0$)), 记(1.16)依次为 X_1, X_2, \dots, X_n , 它满足

(1) X_1, X_2, \dots, X_n 在 x_0 线性无关, 且 $[X_i, X_j] = 0$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$);

(2) 设 $T(z_1, z_2, \dots, z_n) = \Phi_{z_1}^{X_1} \circ \Phi_{z_2}^{X_2} \circ \dots \circ \Phi_{z_n}^{X_n}(x_0)$, 则

$$Tz \cdot (f) = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m \end{bmatrix} z + C$$

其中 A_i 为 s_i 阶常值矩阵 ($i = 1, 2, \dots, m$) , C 为 n 维常值向量。

注 1.5 上述结论对于双线性系统具有更简洁形式^[25], 后来, 这一结论也被推广到奇异非线性系统^[26]。

1.6 本书的特色及主要学术贡献

本书主要研究具有相似结构的复杂非线性组合大系统(1.2), 这类系统具有高度的非线性特性, 不但孤立子系统是非线性的, 而且互联项也是非线性的。而非线性系统的基础是李亚普诺夫(Lyapunov)理论, 所以, 本书主要运用 Lyapunov 方法, 结合其它方法, 研究了这类复杂非线性相似组合大系统的系列控制问题。

本书首先描述了一类具有广泛代表性和广泛实际背景的相似组合大系统的模型。既然相似系统具有较好的结构特征, 自然希望能设计出结构良好的控制器。本书结合系统相似结构的特征, 首次提出了结构全息控制器的概念, 并给出了用结构全息控制器对相似组合大系统进行稳定化的鲁棒控制方案。与传统大系统的非线性控制方案不同的是结构全息特性使得大系统控制器的设计得以大大简化, 给工程设计带来极大方便, 特别当大系统的子系统个数较多时, 其优越性更为明显。

众所周知, 大系统互联项的处理是大系统理论研究中一个重要环节, 也是一个难点。对于线性相似组合大系统和线性对称组合大系统, 文献[7, 9, 27] 给出了处理互联项的非常好的方法, 使得大系统的互联项能够得以充分利用。然而, 对于非线性相似组合大系统, 问题则要复杂得多。文献[28] 通过一个例子说明, 对于非线

性系统,即使含有一个以指数衰减的因子的项,也会对系统性能产生很大影响,文献[14]充分强调了互联项的作用,它指出,对于一种特殊的非线性互联系统,互联项直接确定着系统可否稳定化。所以对于非线性相似组合大系统,不可能像线性相似组合大系统那样充分利用系统之间的互联作用。于是,寻求一种处理互联项的方法,以求最大限度地降低所得结论的保守性是研究复杂非线性组合大系统必须考虑的一个重要问题之一。本书提出了对大系统确定互联项的一种分解方法,特别对于互联项的确定部分和不确定部分可分离成两项和的情形,本书则采用分别处理的办法,从而在一定程度上降低了所得结论的保守性,提高了系统的鲁棒性能。

在鲁棒控制的研究中,大部分关于非线性组合大系统的控制方案都是线性的,这主要在于其研究方法基本上是基于线性系统理论。虽然线性控制器便于工程设计,但它对系统及不确定项特别是互联项均有较强的限制(如要求互联项以状态的范数或者状态范数的多项式为其界函数),且由于用线性控制方案对非线性系统实施控制,一般所得结论保守性大。本文则基于非线性理论,给出了非线性鲁棒控制器的设计方案,避免了现有结论的缺陷,这主要得益于非线性理论的成功应用。

如 1.3 节所述,传统鲁棒控制对于非匹配不确定系统的设计方法是仅依据系统的已知动态部分设计鲁棒控制器,然后希望所设计的控制器能够补偿非匹配不确定因素产生的影响,显然这样的处理方法带有较大的保守性。本文在设计控制器时,将匹配部分和非匹配部分结合考虑,不但充分利用系统的已知动态部分,而且利用了不确定部分的特征(不确定项的界函数),这样处理降低了所得结论的保守性,提高了系统的鲁棒性能。

复杂非线性相似组合大系统的特点之一是维数高,规模大,因而导致计算量大,信息交流困难以及庞大的数据处理及误差累计给实际系统分析和设计带来极大困难。如果操作不当,会造成巨大

的经济浪费,甚至发生灾难性的后果。为此,本书不但给出了集中控制的有关结论,而且给出了大量的有关分散控制的结论。对于由 N 个 n 阶子系统互联而成的相似组合大系统,一般需要解 N 个 n 阶 Lyapunov 方程或者类似复杂程度的分析,而本书则利用系统的相似结构,使得具体分析中只须解一个 n 阶 Lyapunov 方程,从而使得计算量大大降低。

本书几乎每一个问题都附有一个典型的数例或实例,以说明所得方案的实施过程及所得方法和结论的有效性及可行性。采取这种处理方法,其目的是便于读者对抽象理论的更深刻理解,并为在实际工程中设计控制器时的具体操作提供示范。

本书的研究表明,相似结构能大大简化复杂非线性组合大系统的理论分析及工程设计,相似结构与全息特性密切相关,这一点与文献[3,9]的预见完全吻合。

第二章 非线性相似组合大系统的结构 全息状态反馈集中控制

系统的镇定问题是控制理论中的重要问题之一。对于多变量控制系统,传统的控制方法一般采用集中控制策略。大系统的分层控制(Hierarchical Control)从总体上看就是集中控制。集中控制^[29-31]的主要特点是系统的任一控制作用一般都要受到所有传感器输出的影响,要求在中央控制室可获取系统的全部信息,同时可对系统的全部状态变量施行处理和操作。由于集中控制利用了系统的所有信息,所以,相对于只能利用部分信息的控制方式来说,集中控制所得结论一般保守性较小。这种控制方案适合于大系统分布范围小,信息传递方便的情形。

这一章给出用集中控制方法对非线性相似组合大系统进行镇定的有关结论。首先对时变的确定非线性相似组合大系统进行研究,然后分别分析了匹配结构不确定和参数不确定非线性相似组合大系统,所设计的控制器实质上属于分层控制,其特点在于对孤立子系统和互联项中的不确定项的影响在设计控制器时都给予考虑,并分别设计相应的辅助控制器以抑制系统的不确定因素的影响。本章设计的控制器均具有结构全息特性,因此,相对于现有结果来说,计算量小,易于工程设计。

2.1 时变非线性相似组合系统的全息稳定化

2.1.1 系统描述

考虑由 N 个 n 阶单输入系统互联而成的组合时变系统

$$\dot{x}^i = f_i(x^i, t) + g_i(x^i, t)u^i + \Phi_i(x, t), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.1)$$

其中 $x^i \in \mathbb{R}^n, u^i \in \mathbb{R}$ 分别是第 i 个子系统的状态向量及输入, $x_0^i \in \Omega_i \subset \mathbb{R}^n, f_i(x^i, t) \in C_{n \times 1}(\Omega_i \times [t_0, +\infty)), g_i(x^i, t) \in GC_{n \times 1}^{\omega}(\Omega_i \times [t_0, +\infty)), \Phi(x, t) \in C_{n \times 1}(\Omega \times [t_0, +\infty))$ 是系统(2.1)的互联项。其中 $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_N$ 是 $x_0 = \text{col}(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^N)$ 的某邻域, 对一切 $t \geq t_0, \Phi_i(\mathbf{0}, t) = f_i(\mathbf{0}, t) = 0$ 。

现在对于上述系统(2.1)提出这样一个问题:如果系统(2.1)是区域 Ω 上的相似组合系统,且式(2.1)有一个孤立子系统可稳定化,试设计一全息控制器,使相似系统(2.1)在 x_0 点可全息稳定化。

为解决上述问题,我们给出如下几个有用的结论:

考虑非线性系统

$$\dot{x} = \phi(x, t) \quad (2.2)$$

其中 $x = \text{col}(x_1, x_2, \dots, x_n), \phi(x, t) \in C_{n \times 1}(\mathbb{R}^n \times (t_0, +\infty)),$ 且 $\phi(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0} (t \geq t_0)$ 。

引理 2.1^[32] 系统(2.2)的解 $x = 0$ 稳定的充分必要条件是在某个区域 $\{(x, t) | \|x\| < M, t \geq t_0\}$ 上存在正定函数 $V(x, t)$, 使得 $\frac{dV}{dt} \Big|_{(x, t)} \leq 0$ 。

对于一般的 n 阶单输入系统

$$\dot{x} = A(x, t) + B(x, t)u \quad (2.3)$$

其中 $A(x, t) \in C_{n \times 1}^\infty(\Omega_i \times [t_0, +\infty))$, $B(x, t) \in GC_{n \times 1}^\infty(\Omega_i \times [t_0, +\infty))$, $u \in \mathbb{R}^+$, Ω 是原点的某邻域, $A(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0}$ ($t \geq t_0$), 则有如下结论:

引理 2.2 如果系统(2.3)经微分同胚 $z = T(x)$ ($x \in \Omega$, $T(0) = 0$) 及反馈 $u = \alpha(x, t) + \beta(x, t)v$ ($\alpha \in C^\infty(\Omega \times [t_0, +\infty))$, $\beta \in GC(\Omega \times [t_0, +\infty))$ 在 z 坐标下的形式为

$$\dot{z} = \bar{A}(z, t) + \bar{B}(z, t)v \quad (2.4)$$

则系统(2.3)在 $x = 0$ 可稳定化, 当且仅当系统(2.4)在 $z = 0$ 可稳定化。

证明 必要性: 由系统(2.3)在 $x = 0$ 可稳定化知, 存在反馈

$$u = \psi(x, t) \quad (2.5)$$

使得闭环系统

$$\dot{x} = A(x, t) + B(x, t)\psi(x, t) \quad (2.6)$$

在 $x = 0$ 是稳定的, 故由引理 2.1 知, 存在正定函数 $V(x, t)$ 使得

$$\dot{V}|_{(2.6)} \leq 0$$

考虑系统(2.4), 直接计算有

$$\begin{aligned} \bar{A}(z, t) &= \left[\frac{\partial T}{\partial x} \right]_{x=T^{-1}(z)} (A(T^{-1}(z), t) + \\ &\quad B(T^{-1}(z), t)\alpha(T^{-1}(z), t)) \end{aligned}$$

$$\bar{B}(z, t) = \left[\frac{\partial T}{\partial x} \right]_{x=T^{-1}(z)} B(T^{-1}(z), t)\beta(T^{-1}(z), t)$$

对系统(2.4)构造反馈

$$v(z, t) = -\alpha(T^{-1}(z), t) + \beta(T^{-1}(z), t)\psi(T^{-1}, t)$$

及 Lyapunov 函数

$$\bar{V} = V(T^{-1}(z), t)$$

则

$$\begin{aligned}\bar{V}|_{(2.4)} &= \frac{\partial V}{\partial \dot{x}} \frac{\partial T^{-1}}{\partial z} (\bar{A}(z, t) + \bar{B}(z, t)v(z, t)) = \\ &\frac{\partial V}{\partial x} (A(z, t) + B(z, t)\beta(T^{-1}(z), t)\psi(z, t)) = \bar{V}_{(2.3)} \leqslant 0\end{aligned}$$

由引理 2.1 即得系统(2.4) 在点 $x = 0$ 可稳定化。

充分性: 由必要性的证明可直接得到。 [证毕]

2.1.2 相似系统的全息稳定化

下面给出本节的主要结论:

定理 2.1 设系统(2.1)是 Ω 上的相似组合系统, 如果系统(2.1)有一个孤立子系统在 x_0^i 可稳定化, 且

$$\Phi_i(x, t) = g_i(x^i, t)b_i(x, t) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.7)$$

则相似组合系统(2.1)在 x_0 点可全息稳定化。

证明 由系统(2.1)在 Ω 上的相似结构知, 存在 Ω_i 上的微分同胚 $T_i: x^i \rightarrow z^i$ (不妨设 $T_i(x_0^i) = 0$, 若不然, 取微分同胚 $z^i = T_i(x^i) - T_i(x_0^i)$ 即可) 及 $a_i(x^i, t) \in C^*(\Omega_i \times [t_0, +\infty)), \beta_i(x^i, t) \in GC(\Omega_i \times [t_0, +\infty))$, 使系统(2.1)与反馈

$$u^i = a_i(x^i, t) + \beta_i(x^i, t)v^i$$

构成的闭环系统在 $z = (z_1, z_2, \dots, z_N)$ 坐标下具有如下结构

$$\dot{z}^i = f(z^i, t) + g(z^i, t)v^i + H_i(z, t) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.8)$$

其中

$$H_i(z, t) = \left[\frac{\partial T_i}{\partial x_j} \Phi_j(x, t) \right]_{x=T^{-1}(z)}$$

不失一般性, 设 $x_0 = 0$ 。由于系统(2.1)有一个孤立子系统可稳定化, 不妨设其第 1 个子系统在 $x_0^1 = 0$ 点可稳定化。由引理 2.2 知系统

$$\dot{z}^1 = f(z^1, t) + g(z^1, t)v^1$$

在 $z_0^1 = 0$ 点可稳定化, 即有 $v^1 = v(z^1, t)$, 使得系统

$$\dot{z}^i = f(z^i, t) + g(z^i, t)v(z^i, t)$$

在 $z_0^i = 0$ 点是稳定的。由于系统的表达方式与所采用的变量记号无关, 故

$$v^i = v(z^i, t) \quad i = 1, 2, \dots, N$$

能使系统

$$\dot{z}^i = f(z^i, t) + g(z^i, t)v(z^i, t) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.9)$$

稳定化。

由引理 2.1 知在 $\Omega \times [t_0, \infty)$ 上存在正定函数 $V(z^i, t)$, 使得

$$\left. \frac{dV(z^i, t)}{dt} \right|_{(2.9)} \leqslant 0 \quad (2.10)$$

现在考虑系统(2.1)。构造控制器

$$u = u_a + u_b \quad (2.11)$$

其中

$$u_a = \alpha^* + \beta^* v(T^*, t)$$

$$u_b = \begin{cases} -\rho(x, t) \frac{\partial V(T^*, t)}{\partial T^*} g(T^*, t)(\beta^*)^{-1} \geqslant 0 \\ \rho(x, t) \frac{\partial V(T^*, t)}{\partial T^*} g(T^*, t)(\beta^*)^{-1} \leqslant 0 \end{cases}$$

$$\rho(x, t) = \max_i \{b_i(x, t)\}$$

从式(2.11)的结构知 u_b 是与 T^* 有关的函数, 其作用主要是为了抑制互联项 $\phi_i(x, t)$ 的影响, 称为附加控制, 其表达式与 i 无关。 u_a 仅是 α^*, β^*, T^* 的函数, 故只须证由反馈

$$u^i = u_a^i + u_b^i \quad (2.12)$$

其中

$$u_a^i = \alpha_i(x_i, t) + \beta_i(x_i, t)v(T_i(x_i), t)$$

$$u_b^i = \begin{cases} -\rho(x, t) \frac{\partial V(T_i(x^i), t)}{\partial T_i} g(T_i(x^i), t)\beta_i^{-1} \geqslant 0 \\ -\rho(x, t) \frac{\partial V(T_i(x^i), t)}{\partial T_i} g(T_i(x^i), t)\beta_i^{-1} \leqslant 0 \end{cases}$$

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \max_i \{\Phi_i(\mathbf{x}, t)\}$$

与系统(2.1)组成的闭环系统

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}^i &= \mathbf{f}_i(\mathbf{x}^i, t) + \mathbf{g}_i(\mathbf{x}^i, t)\alpha_i(\mathbf{x}^i, t) + \\ &\quad \mathbf{g}_i(\mathbf{x}^i, t)\beta_i(\mathbf{x}^i, t)v(T_i(\mathbf{x}^i), t) + \\ &\quad \mathbf{g}_i(\mathbf{x}_i, t)(u_b^i + b_i(\mathbf{x}, t)) + \Phi_i(\mathbf{x}, t) \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (2.13)$$

在 $\mathbf{x} = 0$ 点是稳定的。

构造 Lyapunov 函数

$$V = \sum_{i=1}^N V(T_i(\mathbf{x}^i), t)$$

由于 $V_i(T_i(\mathbf{x}^i), t)$ 皆为正定函数且满足式(2.10), 显然 \bar{V} 是 $\Omega \times [t_0, \infty)$ 上的正定函数。且

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{V}}{dt} \Big|_{(2.13)} &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial z^i} (\mathbf{f}(z^i, t) + \mathbf{g}(z^i, t)v(z^i, t)) \right) + \\ &\quad \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial V}{\partial T_i} \mathbf{g}(T_i(\mathbf{x}^i), t) \beta_i^{-1} (u_b^i + \Phi_i(\mathbf{x}, t)) \right) \stackrel{(2.45)}{\leqslant} \\ &\quad \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial V}{\partial T_i} \mathbf{g}(T_i(\mathbf{x}^i), t) \beta_i^{-1} (u_b^i + \Phi_i(\mathbf{x}, t)) \right) \end{aligned}$$

由 $\rho(\mathbf{x})$ 的定义易知

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial V}{\partial T_i} \mathbf{g}(T_i(\mathbf{x}^i), t) \beta_i^{-1} (u_b^i + \Phi_i(\mathbf{x}, t)) \right) \leqslant \\ \quad \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial V}{\partial T_i} \mathbf{g}(T_i(\mathbf{x}^i), t) \beta_i^{-1} (u_b^i + \rho(\mathbf{x})) \right) \\ \quad \frac{\partial V(T_i(\mathbf{x}^i), t)}{\partial T_i} \mathbf{g}(T_i(\mathbf{x}^i), t) \beta_i^{-1} \geqslant 0 \\ \quad \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial V}{\partial T_i} \mathbf{g}(T_i(\mathbf{x}^i), t) \beta_i^{-1} (u_b^i - \rho(\mathbf{x})) \right) \\ \quad \frac{\partial V(T_i(\mathbf{x}^i), t)}{\partial T_i} \mathbf{g}(T_i(\mathbf{x}^i), t) \beta_i^{-1} \leqslant 0 \end{cases}$$

结合 u_i^i 的定义易知 $\frac{dV}{dt} \Big|_{(2.13)} \leqslant 0$, 由引理 2.1 知系统 (2.1) 在 $x = 0$ 可稳定化, 故式 (2.12) 是系统 (2.1) 的全息稳定化控制器。[证毕]

如果系统 (2.1) 是定常系统, 且存在 N 个输出函数 $y_i(x^i)$ ($i = 1, 2, \dots, N$), 使系统

$$\begin{aligned}\dot{x}^i &= f_i(x^i) + g_i(x^i)u^i \\ y_i &= y_i(x^i) \\ i &= 1, 2, \dots, N\end{aligned}$$

在 x_0^i 点具有相关度 n , 则系统 (2.1) 是相似组合系统, 且其相似参数可由文献 [22] 求出。

2.2 一类结构不确定相似大系统的 鲁棒镇定设计

这一节研究孤立子系统为单输入线性系统的匹配结构不确定非线性相似组合大系统, 给出其可用结构相似非光滑控制器进行镇定的鲁棒控制器设计方案及有关结论。这种控制器由线性和非线性两部分组成, 其中的非线性部分类似于“砰砰 (Bang-Bang)”控制结构, 相对于一般非线性组合大系统的非线性控制方案更容易实现。

2.2.1 相似组合系统描述

考虑如下的结构不确定非线性组合大系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= A_i x_i + B_i(u_i + H_i(x) + \Delta H_i(x)) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \Phi_{ij}(x_j) \\ i &= 1, 2, \dots, N\end{aligned}\tag{2.14}$$

其中 $x_i \in \mathbb{R}^n, u_i \in \mathbb{R}^m$ 分别是第 i 个子系统的状态和输入, A_i, B_i 分

别是 n 阶和 $n \times m$ 阶常值阵, $\mathbf{H}_i(x) \in V_m^n(\Omega)$, $\sum_{j=1}^N \Phi_{ij}(x_j) \in V_n^n(\Omega)$

和 $\Delta\mathbf{H}_i(x)$ 分别是匹配互联项, 非匹配互联项和结构不确定的匹配互联项 (Ω_i 是 $x_i = 0$ 的某邻域, $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \cdots \times \Omega_N$ 是 $x = 0$ 的邻域, $x = \text{col}(x_1, x_2, \dots, x_N)$)。不失一般性, 假设 $\mathbf{H}_i(\mathbf{0}) = \Phi_{ii}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ($i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, N$)。

定义 2.1 如果存在 $m \times n$ 阶矩阵 \mathbf{F}_i 及 n 阶非奇异阵 \mathbf{T}_i , 使

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{T}_1^{-1}(\mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1\mathbf{F}_1)\mathbf{T}_1 &= \mathbf{T}_2^{-1}(\mathbf{A}_2 + \mathbf{B}_2\mathbf{F}_2)\mathbf{T}_2 = \cdots = \\ \mathbf{T}_N^{-1}(\mathbf{A}_N + \mathbf{B}_N\mathbf{F}_N)\mathbf{T}_N & \\ \mathbf{T}_1^{-1}\mathbf{B}_1 = \mathbf{T}_2^{-1}\mathbf{B}_2 = \cdots = \mathbf{T}_N^{-1}\mathbf{B}_N & \end{aligned} \right\} (2.15)$$

则称系统(2.14)为相似组合大系统, 并称 $(\mathbf{T}_i, \mathbf{F}_i)$ 为第 i 个子系统的相似参量。

引理 2.3 如果非线性组合大系统(2.14)中 $(\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i)$ ($i = 1, 2, \dots, N$) 都是能控对, 则系统(2.14)是相似组合大系统。

证明 无妨设 $m = 1$, 由 $(\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i)$ ($i = 1, 2, \dots, N$) 可控知, 存在非奇异变换

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{T}_i \mathbf{z}_i \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.16)$$

使得在坐标 $\mathbf{z} = \text{col}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_N)$ 下, 系统(2.14)的孤立子系统具有如下的能控标准型结构

$$\dot{\mathbf{z}}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \\ -a'_1 & \cdots & -a'_2 & \cdots & -a'_n \end{bmatrix} \mathbf{z}^i + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_i \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.17)$$

构造控制器

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{F}_i \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{x}_i + \mathbf{v}_i \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.18)$$

其中 $\mathbf{F}_i = (a'_1, a'_2, \dots, a'_n)$, 则在 \mathbf{z} 坐标下式(2.18)与式(2.14)的孤

立子系统构成的闭环系统为

$$\dot{z}_i = Az_i + Bv_i \quad i = 1, 2, \dots, N$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{n \times 1} \quad (2.19)$$

于是有

$$\begin{aligned} T_i^{-1}(A_i + B_i F_i T_i^{-1}) T_i &= A \\ T_i^{-1} B_i &= B \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

所以, 系统(2.14)是相似组合大系统, 且其相似参量为 $(T_i, F_i T_i^{-1})$ ($i = 1, 2, \dots, N$)。 [证毕]

2.2.2 系统的状态输出解耦

考虑一般线性系统

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.20)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$ 分别是系统的状态和输入, A 和 B 分别是 $n \times n$ 阶, $n \times m$ 阶常值阵。

定义 2.2 如果存在非奇异变换 $x = Tz$ 及状态反馈 $u = Lx + v$, 使之与系统(2.20)构成的闭环系统在 z 坐标下具有如下的结构

$$\dot{z} = \text{diag}\{\hat{A}_1, \hat{A}_2, \dots, \hat{A}_m\}z + \text{diag}\{\hat{B}_1, \hat{B}_2, \dots, \hat{B}_m\}v$$

其中 \hat{A}_l 是 $s_l \times s_l$ 阶矩阵, \hat{B}_l 是 $s_l \times 1$ 阶矩阵 ($l = 1, 2, \dots, m$), $\sum_{l=1}^N s_l = n$, 则称系统(2.20)可输入状态解耦, 并称 (T, L) 为其输入状态解耦对, (s_1, s_2, \dots, s_m) 为输入状态解耦块指数, 简称为块指数 (Block Index), 记为 BI。

注 2.1 当 $L = 0$ 时, 定义式(2.3)类似于文献[33]所述的非线性系统无反馈状态解耦线性化概念, 此时, 由文献[33]可判断

系统的输入状态解耦性，并可用文献[33]的方法求出非奇异变换 T 。

引理 2.4 设系统(2.20)能控，且可输入状态解耦，其 BI 为 (s_1, s_2, \dots, s_m) ，则存在输入状态解耦对 (D, E) 使得

$$\begin{aligned} D^{-1}(A + BE)D &= \text{diag}\{\hat{A}_1, \hat{A}_2, \dots, \hat{A}_m\} \\ D^{-1}B &= \text{diag}\{\hat{B}_1, \hat{B}_2, \dots, \hat{B}_m\} \end{aligned}$$

其中 (\hat{A}_l, \hat{B}_l) ($l = 1, 2, \dots, m$) 是与式(2.19)中的 (A, B) 结构相同的矩阵。

证明 设系统(2.20)的输入状态解耦对为 (D_1, E_1) ，其 BI 为 (s_1, s_2, \dots, s_m) ，则

$$\begin{aligned} D_1^{-1}(A + BE_1)D_1 &= \text{diag}\{A_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_m\} \\ D_1^{-1}B &= \text{diag}\{\bar{B}_1, \bar{B}_2, \dots, \bar{B}_m\} \end{aligned}$$

由于非奇异线性变换及状态反馈不影响系统的能控性，所以 (A, B) 能控等价于 (\bar{A}_l, \bar{B}_l) 皆能控。由引理 2.3 知，存在 (D_{2l}, E_{2l}) 使

$$D_{2l}^{-1}(\bar{A}_l + \bar{B}_l E_{2l})D_{2l} = \hat{A}_l, \quad D_{2l}^{-1}B_l = \hat{B}_l$$

令 $D = D_1 \text{diag}\{D_{21}, \dots, D_{22}, D_{2m}\}, E = E_1 + \text{diag}\{E_{21}, E_{22}, \dots, E_{2m}\}D^{-1}$ ，则

$$\begin{aligned} D^{-1}(A + BE)D &= \text{diag}\{\hat{A}_1, \hat{A}_2, \dots, \hat{A}_m\} \\ D^{-1}B &= \text{diag}\{\hat{B}_1, \hat{B}_2, \dots, \hat{B}_m\} \end{aligned}$$

所以，结论成立。〔证毕〕

2.2.3 结构全息鲁棒控制器设计

考虑组合大系统(2.14)，假设 (A_i, B_i) 都是能控对，且 $m = 1$ ，则由引理 2.3 的证明知，存在相似参量 $(T_i, F_i T_i^{-1})$ 使得

$$\begin{aligned} T_i^{-1}(A_i + B_i F_i T_i^{-1})T_i &= A \\ T_i^{-1}B_i &= B \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \tag{2.21}$$

其中 (A, B) 同式(2.19)。由 (A, B) 能控知, 存在矩阵 K , 使得 $A + BK$ 是 Hurwitz 稳定阵, 所以对任一正定阵 Q , 下述 Lyapunov 方程

$$(A + BK)^T P + P(A + BK) = -Q \quad (2.22)$$

有惟一正定解矩阵 P 。

再考察系统(2.14)的非匹配互联项, 由 $\Phi_{ij}(x_j) \in V_n(\Omega_j)$ 及 $\Phi_{ij}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ 知道^[34,35], 存在 Ω_j 上的光滑函数矩阵 $R_{ij}(x_j)$, 使得

$$\Phi_{ij}(x_j) = R_{ij}(x_j)x_j \quad i, j = 1, 2, \dots, N, \quad i \neq j \quad (2.23)$$

由于矩阵乘法不满足消去律, 所以, 满足式(2.23)的 $R_{ij}(x_j)$ 一般是不惟一的。它可通过观察法求得, 也可用文献[34,35]的方法或其它方法求出。

定理 2.2 设非线性组合大系统(2.14)满足如下条件:

- (1) $m = 1$;
- (2) 所有孤立子系统皆可控;
- (3) $\|\Delta H_i(x)\| \leq \rho_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, N$

如果矩阵 $W^T(x) + W(x)$ ($W(x) = (\omega_{ij}(x_j))_{N \times N}$) 是区域 Ω 上的正定阵, 其中

$$\omega_{ij}(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ -2\lambda_M((Q^{-\frac{1}{2}})^T P T_i^{-1} R_{ij}(x_j) T_i Q^{\frac{1}{2}}) & i \neq j \end{cases}$$

这里 Q, P 由式(2.22)确定, $R_{ij}(x_j)$ 由式(2.23)确定, 则系统(2.14)在区域 Ω 上可鲁棒镇定。

证明 考虑系统(2.14), 由定理条件(1)、(2)知式(2.21)和式(2.22)成立, 设计控制器

$$u_i = (F_i T_i^{-1} + K T_i^{-1}) x_i + u_i^e(x) + u_i^d(x) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.24)$$

其中 $F_i, T_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 满足式(2.21)可根据引理 2.4 的证明利用线性系统理论求出, 使得 $A + BK$ 为 Hurwitz 稳定阵的 K 可根据实际问题的需要设置。

$$\begin{cases} u_i^a(\mathbf{x}) = \begin{cases} \lambda(\mathbf{x}) - (\mathbf{T}_i^{-1}\mathbf{x}_i)^T \mathbf{P} \mathbf{B} \geq 0 \\ \lambda(\mathbf{x}) - (\mathbf{T}_i^{-1}\mathbf{x}_i)^T \mathbf{P} \mathbf{B} < 0 \end{cases} \\ u_i^b(\mathbf{x}) = \begin{cases} -\rho(\mathbf{x}) - (\mathbf{T}_i^{-1}\mathbf{x}_i)^T \mathbf{P} \mathbf{B} \geq 0 \\ \rho(\mathbf{x}) - (\mathbf{T}_i^{-1}\mathbf{x}_i)^T \mathbf{P} \mathbf{B} < 0 \end{cases} \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.25)$$

这里 $\mathbf{B} = (0 \cdots 0 \ 1)^T$, \mathbf{P} 由式(2.22)确定。

$$\lambda(\mathbf{x}) = \max_i \{H_i(\mathbf{x})\}, \quad \rho(\mathbf{x}) = \max_i \{\rho_i(\mathbf{x})\} \quad (2.26)$$

考察式(2.24)与系统(2.14)构成的闭环系统

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_i &= (\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{F}_i \mathbf{T}_i^{-1} + \mathbf{B}_i \mathbf{K} \mathbf{T}_i^{-1}) \mathbf{x}_i + \\ &\quad \mathbf{B}_i(u_i^a(\mathbf{x}) + u_i^b(\mathbf{x}) + H_i(\mathbf{x}) + \Delta H_i(\mathbf{x})) + \\ &\quad \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \Phi_{ij}(\mathbf{x}_j) \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (2.27)$$

对系统(2.27), 构造正定函数

$$V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) = \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i^T [(\mathbf{T}_i^{-1})^T \mathbf{P} \mathbf{T}_i^{-1}] \mathbf{x}_i$$

结合式(2.21), 式(2.22), 式(2.23)得 $V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N)$ 沿着系统(2.27)的状态轨线的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N)|_{(2.27)} &= \\ &\sum_{i=1}^N (\mathbf{x}_i^T (\mathbf{T}_i^{-1})^T [(\mathbf{T}_i^{-1})(\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{F}_i \mathbf{T}_i^{-1}) \mathbf{T}_i + \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{B}_i \mathbf{K})^T \mathbf{P} - \\ &\quad \mathbf{P} (\mathbf{T}_i^{-1} (\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{F}_i \mathbf{T}_i^{-1}) \mathbf{T}_i + \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{B}_i \mathbf{K})] \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{x}_i + \\ &\quad 2 \mathbf{x}_i^T (\mathbf{T}_i^{-1})^T \mathbf{P} \mathbf{T}_i^{-1} [\mathbf{B}_i(u_i^a(\mathbf{x}) + u_i^b(\mathbf{x}) + \\ &\quad H_i(\mathbf{x}) + \Delta H_i(\mathbf{x})) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \Phi_{ij}(\mathbf{x}_j)] \} = \\ &= \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i^T ((\mathbf{T}_i^{-1})^T \mathbf{Q} \mathbf{T}_i^{-1}) \mathbf{x}_i + \\ &\quad 2 \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i^T (\mathbf{T}_i^{-1})^T \mathbf{P} \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{B}_i(u_i^a(\mathbf{x}) + u_i^b(\mathbf{x}) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_i(\mathbf{x}) + \Delta H_i(\mathbf{x}) &+ 2 \sum_{j=1}^N \mathbf{x}_i^\top (\mathbf{T}_i^{-1})^\top \mathbf{P} \mathbf{T}_i^{-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbf{R}_{ij}(\mathbf{x}_j) \mathbf{x}_j = \\
&= \sum_{i=1}^N \left(\mathbf{x}_i^\top (\mathbf{T}_i^{-1})^\top \mathbf{Q} \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{x}_i - 2 \mathbf{x}_i^\top (\mathbf{T}_i^{-1})^\top \mathbf{P} \mathbf{T}_i^{-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbf{R}_{ij}(\mathbf{x}_j) \mathbf{x}_j \right) + \\
&2 \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i^\top (\mathbf{T}_i^{-1})^\top \mathbf{P} \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{B}_i(u_i^a(\mathbf{x}) + H_i(\mathbf{x})) + \\
&2 \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i^\top (\mathbf{T}_i^{-1})^\top \mathbf{P} \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{B}_i(u_i^b(\mathbf{x}) + \Delta H_i(\mathbf{x})) \quad (2.28)
\end{aligned}$$

由式(2.25)中定义的 $u_i^a(\mathbf{x})$ 及 $u_i^b(\mathbf{x})$ 的结构形式可得

$$\begin{aligned}
&\mathbf{x}_i^\top (\mathbf{T}_i^{-1})^\top \mathbf{P} \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{B}_i(u_i^a(\mathbf{x}) - H_i(\mathbf{x})) = \\
&\mathbf{x}_i^\top (\mathbf{T}_i^{-1})^\top \mathbf{P} \mathbf{B}(u_i^a(\mathbf{x}) - H_i(\mathbf{x})) \leqslant \\
&\begin{cases} (\mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{x}_i)^\top \mathbf{P} \mathbf{B}(u_i^a(\mathbf{x}) - \lambda(\mathbf{x})) & (\mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{x}_i)^\top \mathbf{P} \mathbf{B} \geqslant 0 \\ (\mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{x}_i)^\top \mathbf{P} \mathbf{B}(u_i^a(\mathbf{x}) - \lambda(\mathbf{x})) & (\mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{x}_i)^\top \mathbf{P} \mathbf{B} < 0 \end{cases} \quad (2.29) \\
&\leqslant 0 \quad i = 1, 2, \dots, N
\end{aligned}$$

同理可得

$$\mathbf{x}_i^\top (\mathbf{T}_i^{-1})^\top \mathbf{P} \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{B}_i(u_i^b(\mathbf{x}) + \Delta H_i(\mathbf{x})) \leqslant 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.30)$$

结合式(2.28), 式(2.29)和式(2.30)即得

$$\begin{aligned}
&\dot{V}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) \Big|_{(2.27)} \leqslant \\
&- \sum_{i=1}^N (\mathbf{x}_i^\top (\mathbf{T}_i^{-1})^\top \mathbf{Q} \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{x}_i - 2 \mathbf{x}_i^\top (\mathbf{T}_i^{-1})^\top \mathbf{P} \mathbf{T}_i^{-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbf{R}_{ij}(\mathbf{x}_j) \mathbf{x}_j) = \\
&- \sum_{i=1}^N (\mathbf{x}_i^\top (\mathbf{T}_i^{-1})^\top (\mathbf{Q}^{\frac{1}{2}})^\top \mathbf{Q}^{\frac{1}{2}} \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{x}_i - \\
&2 \mathbf{x}_i^\top (\mathbf{T}_i^{-1})^\top (\mathbf{Q}^{\frac{1}{2}})^\top (\mathbf{Q}^{-\frac{1}{2}})^\top \mathbf{P} \mathbf{T}_i^{-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbf{R}_{ij}(\mathbf{x}_j) \mathbf{T}_j \mathbf{Q}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{Q}^{\frac{1}{2}} \mathbf{T}_j^{-1} \mathbf{x}_j) \leqslant \\
&- \sum_{i=1}^N (\|\mathbf{Q}^{\frac{1}{2}} \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{x}_i\|^2 - 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \lambda_M((\mathbf{Q}^{-\frac{1}{2}})^\top \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{P}\mathbf{T}_i^{-1}\mathbf{R}_{ij}(\mathbf{x}_j)\mathbf{T}_j\mathbf{Q}^{\frac{1}{2}}\| \|\mathbf{Q}^{\frac{1}{2}}\mathbf{T}_i^{-1}\mathbf{x}_i\| + \|\mathbf{Q}^{\frac{1}{2}}\mathbf{T}_j^{-1}\mathbf{x}_j\| \\ & = -\frac{1}{2}\mathbf{Y}^T(\mathbf{W}^T(\mathbf{x}) + \mathbf{W}(\mathbf{x}))\mathbf{Y} \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{Y} = (\|\mathbf{Q}^{\frac{1}{2}}\mathbf{T}_1^{-1}\mathbf{x}_1\| \|\mathbf{Q}^{\frac{1}{2}}\mathbf{T}_2^{-1}\mathbf{x}_2\| \cdots \|\mathbf{Q}^{\frac{1}{2}}\mathbf{T}_N^{-1}\mathbf{x}_N\|)^T$ 。由 $\mathbf{W}^T(\mathbf{x}) + \mathbf{W}(\mathbf{x})$ 在区域 Ω 上的正定性及 \mathbf{T}_i ($i = 1, 2, \dots, N$) 的非奇异性得, $V|_{(2.27)}$ 是区域 Ω 上的负定函数, 所以系统 (2.27) 在区域 Ω 上关于 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 漂近稳定。

综上所述, 非线性组合系统 (2.14) 可用控制器 (2.24) 鲁棒镇定。
[证毕]

注 2.2 考察鲁棒控制器 (2.24) 的结构, 它由三部分组成, 其中第一部分是由相似参量确定的线性控制器, 第二部分和第三部分是分别用来抑制匹配确定互联项和匹配不确定互联项的效应而引入的非线性控制器, 注意到非线性控制器的结构类似于“砰砰 (Bang-Bang)”控制结构, 所以, 工程上易于实现。

注 2.3 由控制器 (2.24) 的结构形式容易看出, 式 (2.24) 中的 N 个控制器均有相似的结构, 其差异仅在于参量 $\mathbf{T}_i, \mathbf{F}_i$ 的不同, 称控制器 (2.24) 为结构相似控制器或全息控制器。

下面考虑非线性组合大系统 (2.14) 的孤立子系统为多输入的情形。假定系统 (2.14) 的孤立子系统能控, 且可输入状态解耦, 其 BI 为 (s_1, s_2, \dots, s_m) , 则由引理 2.4 知存在输入状态解耦对 $(\hat{\mathbf{A}}_i, \hat{\mathbf{B}}_i)$ 使得

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_i^{-1}(\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i\mathbf{F}_i)\mathbf{T}_i &= \text{diag}\{\hat{\mathbf{A}}_1, \hat{\mathbf{A}}_2, \dots, \hat{\mathbf{A}}_m\} \\ \mathbf{T}_i^{-1}\mathbf{B}_i &= \text{diag}\{\hat{\mathbf{B}}_1, \hat{\mathbf{B}}_2, \dots, \hat{\mathbf{B}}_m\} \end{aligned} \quad (2.31)$$

所以, 系统 (2.14) 是相似组合大系统, 且 $(\mathbf{T}_i, \mathbf{F}_i)$ 是其相似参量。由 $(\hat{\mathbf{A}}_i, \hat{\mathbf{B}}_i)$ 的能控性知, 存在 \mathbf{K}_i 使 $\hat{\mathbf{A}}_i + \hat{\mathbf{B}}_i\mathbf{K}_i$ 为 Hurwitz 稳定阵, 故对任一正定阵 \mathbf{Q}_i , 下述 Lyapunov 方程

$$(\hat{\mathbf{A}}_i + \hat{\mathbf{B}}_i\mathbf{K}_i)^T\mathbf{P}_i + \mathbf{P}_i(\hat{\mathbf{A}}_i + \hat{\mathbf{B}}_i\mathbf{K}_i) = -\mathbf{Q}_i \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.32)$$

有惟一正定解矩阵 P_i , 记

$$\left. \begin{array}{l} P = \text{diag}\{P_1, P_2, \dots, P_N\} \\ Q = \text{diag}\{Q_1, Q_2, \dots, Q_N\} \\ K = \text{diag}\{K_1, K_2, \dots, K_N\} \end{array} \right\} \quad (2.33)$$

定理 2.3 设非线性组合大系统(2.14)满足如下条件:

- (1) 所有孤立子系统皆可控, 且可输入状态解耦, 其 BI 为 (s_1, s_2, \dots, s_N) ;
- (2) $\|\Delta H_{il}(x)\| \leqslant \gamma_{il}(x)$ ($x \in \Omega$, $l = 1, 2, \dots, m$), 其中 $\Delta H_{il}(x)$ 是 $\Delta H_i(x)$ 按 BI 分块后的第 l 块;
- (3) 矩阵 $W^1(x) + W(x)$ ($W(x) = (\omega_{ij}(x_j))_{N \times N}$) 是区域 Ω 上的正定函数阵,

$$\omega_{ij}(x) = \begin{cases} 1 & i = j \\ -2\lambda_M((Q^{-\frac{1}{2}})^T P T_i^{-1} R_{ij} T_j Q^{-\frac{1}{2}}) & i \neq j \end{cases}$$

其中 Q, P 是由式(2.33)确定的块对角阵, $R_{ij}(x_i)$ 由式(2.23)确定。则系统(2.14)在区域 Ω 上可鲁棒镇定。

证明 将 $H_i(x)$ 及 $T_i^{-1}x_i$ 按 BI 分块得

$$H_i(x) = \begin{bmatrix} H_{i1}(x) \\ H_{i2}(x) \\ \vdots \\ H_{im}(x) \end{bmatrix} \quad T_i^{-1}x_i = \begin{bmatrix} \hat{x}_{i1} \\ \hat{x}_{i2} \\ \vdots \\ \hat{x}_{im} \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, N$$

记

$$\lambda_i(x) = \max_i\{H_{il}(x)\} \quad \rho_i(x) = \max_i\{\gamma_{il}(x)\} \\ i = 1, 2, \dots, N \quad l = 1, 2, \dots, m \quad (2.34)$$

构造控制器

$$u_i = (F_i + K)T_i^{-1}x_i + u_i^c(x) + u_i^d(x) \quad i = 1, 2, \dots, N \\ (2.35)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i^a(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} u_{i1}^a(\mathbf{x}) \\ u_{i2}^a(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ u_{im}^a(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad u_{il}^a(\mathbf{x}) = \begin{cases} \lambda_l(\mathbf{x}) & \hat{\mathbf{x}}_l^\top \mathbf{P}_l \hat{\mathbf{B}}_l \geq 0 \\ -\lambda_l(\mathbf{x}) & \hat{\mathbf{x}}_l^\top \mathbf{P}_l \hat{\mathbf{B}}_l < 0 \end{cases} \\ \mathbf{u}_i^b(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} u_{i1}^b(\mathbf{x}) \\ u_{i2}^b(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ u_{im}^b(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad u_{il}^b(\mathbf{x}) = \begin{cases} \rho_l(\mathbf{x}) & \hat{\mathbf{x}}_l^\top \mathbf{P}_l \hat{\mathbf{B}}_l \geq 0 \\ -\rho_l(\mathbf{x}) & \hat{\mathbf{x}}_l^\top \mathbf{P}_l \hat{\mathbf{B}}_l < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.36)$$

这里 $\hat{\mathbf{B}}_l$ 由式(2.31)确定, $\mathbf{P}_l (l = 1, 2, \dots, m)$ 由式(2.32)确定, 则式(2.35)与系统(2.14)构成的闭环系统为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_i &= (\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i(\mathbf{F}_i + \mathbf{K})\mathbf{T}_i^{-1})\mathbf{x}_i + \\ &\quad \mathbf{B}_i(\mathbf{u}_i^a(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_i^b(\mathbf{x}) + \mathbf{H}_i(\mathbf{x}) + \Delta\mathbf{H}_i(\mathbf{x})) + \\ &\quad \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \Phi_{ij}(\mathbf{x}_j) \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (2.37)$$

构造正定函数

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^m \mathbf{x}_i^\top \mathbf{P}_l \hat{\mathbf{x}}_i = \\ &\quad \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i^\top [(\mathbf{T}_i^{-1})^\top \mathbf{P} \mathbf{T}_i^{-1}] \mathbf{x}_i \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} \dot{V}|_{(2.37)} &= - \sum_{i=1}^N (\mathbf{x}_i^\top (\mathbf{T}_i^{-1})^\top \mathbf{Q} \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{x}_i - \\ &\quad 2\mathbf{x}_i^\top (\mathbf{T}_i^{-1})^\top \mathbf{P} \mathbf{T}_i^{-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbf{R}_{ij}(\mathbf{x}_j) \mathbf{x}_j) + \\ &\quad 2 \sum_{i=1}^N (\mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{x}_i)^\top \mathbf{P} \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{B} [\mathbf{u}_i^a(\mathbf{x}) + \\ &\quad \mathbf{u}_i^b(\mathbf{x}) + \mathbf{H}_i(\mathbf{x}) + \Delta\mathbf{H}_i(\mathbf{x})] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i=1}^N (\mathbf{x}_i^\top (\mathbf{T}_i^{-1})^\top \mathbf{Q} \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{x}_i - \\
& 2 \mathbf{x}_i^\top (\mathbf{T}_i^{-1})^\top \mathbf{P} \mathbf{T}_i^{-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbf{R}_{ij}(\mathbf{x}_j) \mathbf{x}_j)] + \\
& 2 \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^m \hat{x}_i^\top \mathbf{P}_i \hat{\mathbf{B}}_i (u_n^a(\mathbf{x}) + H_n(\mathbf{x})) + \\
& 2 \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^m \hat{x}_i^\top \mathbf{P}_i \hat{\mathbf{B}}_i (u_n^b(\mathbf{x}) + \Delta H_n(\mathbf{x}))
\end{aligned}$$

由式(2.36)中 $u_n^a(\mathbf{x}), u_n^b(\mathbf{x})$ 的定义,结合定理条件(3)仿照定理 2.3 的证明即得 $V|_{(2.37)}$ 在 Ω 上负定。故非线性组合大系统(2.14)在区域 Ω 上可鲁棒镇定。 [证毕]

注 2.4 孤立子系统为多输入的情形并不是孤立子系统为单输入情形的直接推广,这不仅在于子系统解耦后不同输入对应状态的维数一般不等,还在于解耦后的每个子系统的互联形式不同于定理 2.3 的单输入情形,所以,定理 2.4 不能由定理 2.3 直接得出。

下面给出非线性相似组合大系统结构相似鲁棒控制器的设计步骤(以孤立子系统为单输入的情形为例):

Step 1. 由线性系统理论求出相似参量 $(\mathbf{T}_i, \mathbf{F}, \mathbf{T}_i^{-1})$ ($i = 1, 2, \dots, N$);

Step 2. 根据实际问题需要设定 \mathbf{K} ,使得 $\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}$ 为 Hurwitz 稳定阵;

Step 3. 设定正定阵 \mathbf{Q} ,并求出 Lyapunov 方程(2.22)的正定解矩阵 \mathbf{P} ;

Step 4. 求出 $\mathbf{R}_{ij}(\mathbf{x}_j)$,并由 $\mathbf{W}^\top(\mathbf{x}) + \mathbf{W}(\mathbf{x})$ 的正定性估计出区域 Ω ;

Step 5. 由(2.26)求出 $\lambda(\mathbf{x})$ 和 $\rho(\mathbf{x})$,进一步依式(2.25)求出辅助控制器 $u_i^a(\mathbf{x})$ 和 $u_i^b(\mathbf{x})$;

Step 6. 设计结构相似鲁棒控制器(2.24)。

这样,(2.24)即为使系统(2.14)在区域 Ω 上鲁棒镇定的结构相似控制器。

2.3 参数不确定非线性相似大系统的鲁棒控制

这一节针对参数不确定非线性相似组合大系统,利用现代微分几何方法和Lyapunov方法相结合,设计了一种使得该类系统镇定的结构全息鲁棒控制器,并通过仿真算例说明所得结论的有效性。本节的方法尤适合于系统结构完全已知,系统只含不确定参数的一类非线性组合大系统。

2.3.1 系统描述

考虑不确定系统

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}^i = f_i(x^i) + R_i(x_i, \theta_1) + G_i(x^i)u^i + \Phi_i(x, \theta_2) \\ y^i = y^i(x^i) \quad i = 1, 2, \dots, N \end{array} \right\} \quad (2.38)$$

其中 $x^i \in \mathbb{R}^n, u^i, y^i \in \mathbb{R}^m$ 分别是第*i*个子系统的状态,输入和输出; $\theta_1 \in \Omega_1, \theta_2 \in \Omega_2$ 是不确定参数; $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{F_1}, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^{F_2}$ 是紧集; $G_i(x^i) = (g_1^i(x^i), \dots, g_m^i(x^i)), f_i(x^i), g_j^i(x^i) \in V(\mathbb{R}^n)$ ($i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, m$); $R_i(x^i, \theta_1), \Phi_i(x, \theta_2)$ 是光滑或分块光滑的; $\Phi_i(x, \theta_2)$ 是互联项,不失一般性。设 $f_i(x_0) = R_i(x_0, \theta_1) = \Phi_i(x_0, \theta_2) = 0 (\forall \theta_1 \in \Omega_1, \theta_2 \in \Omega_2)$ 。

命题 2.1 若系统(2.38)的每个孤立子系统在 $x_0(x_0 = \text{col}(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^N))$ 具有相同的相关度 $r = \{r_1, r_2, \dots, r_N\}$,且 $\sum_{j=1}^m r_j = n$,则系统(2.38)是 x_0 某邻域上的相似组合系统。

2.3.2 基于微分几何变换的结构全息控制

下面将给出本节的主要结论。

定理 2.5 设 $E'_q = \text{Span}\{ad_{g_j}^k g_j(x')\} | 0 \leq k \leq q, 1 \leq j \leq m\}$, $\text{rank}G_i(x'_i) = m$ ($i = 1, 2, \dots, N$), Ω' 是 x'_0 的一个邻域, $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_N$ 是 x'_0 的邻域, 如果

- (1) E'_q ($i = 1, 2, \dots, N, q = 0, 1, 2, \dots, n - 2$) 是 Ω' 上的非奇异对合分布, $\dim E'_{n-1} = n$ ($i = 1, 2, \dots, N$), 且 E'_{n-1} 在 x'_0 非奇异;
- (2) 对任意的 $x \in \Omega$ 及 $i = 1, 2, \dots, N$

$$\begin{aligned} R_i(x', \theta_1) &= G_i(x')L^i(x', \theta_1) \quad \theta_1 \in \Omega_1 \\ \Phi_i(x, \theta_2) &= G_i(x')H^i(x, \theta_2) \quad \theta_2 \in \Omega_2 \end{aligned}$$

则系统(2.38)在 Ω 上存在结构全息鲁棒控制器。

证明 考虑系统(2.38), 由条件(1)知^[22], 存在函数 $\lambda'_1(x')$, $\lambda'_2(x')$, \dots , $\lambda'_m(x')$ 使系统

$$\begin{aligned} \dot{x}' &= f_i(x') + G_i(x')u' \\ y' &= \lambda'(x') \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

(这里 $\lambda'(x') = (\lambda'_1(x'), \dots, \lambda'_m(x'))$ 称为伪输出) 均具有相同的相关度 $r = \{r_1, r_2, \dots, r_m\}$, 且 $\sum_{j=1}^m r_j = n$ 。不妨设 $y^i(x') = \lambda^i(x')$, $y^i(x'_0) = 0$, 由命题 2.1 知, 系统(2.38)是相似组合系统, 每个孤立子系统的相关度均为 $r = \{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ ($\sum_{j=1}^m r_j = n$), 且其相似参数 (T_i, α_i, β_i) ($i = 1, 2, \dots, N$) 可由文献[22]或文献[23]求出, 令 $D = (T_1^T T_2^T \cdots T_N^T)$; $x \rightarrow z$, 结合条件(2)即知, 系统(2.38)与反馈 $u' = \alpha_i(x') + \beta_i(x')v'$ 组成的闭环系统在 z 坐标下具有如下结构形式^[22]:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}^i &= \text{diag}\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_m\} \mathbf{z}^i + \\ &\quad \text{diag}\{\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_m\} (\mathbf{v}^i + \mathbf{L}^i(\mathbf{T}_i^{-1}(\mathbf{z}^i), \theta_1) + \\ &\quad \mathbf{H}^i(\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{z}), \theta_2)) \\ \mathbf{y}^i &= (\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \dots, \mathbf{C}_m) \mathbf{z}^i, \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (2.39)$$

其中 $(\mathbf{A}_j, \mathbf{B}_j)$ 是 Brunovsky 标准形, $\mathbf{C}_j = (1 \ 0 \ \cdots \ 0)_{1 \times r_j}$ ($j = 1, 2, \dots, m$)。故存在 $1 \times r_j$ 矩阵 \mathbf{K}_j , 使 $\mathbf{A}_j + \mathbf{B}_j \mathbf{K}_j$ 是渐近稳定的。于是对任意的 r_j 阶正定阵 \mathbf{Q}_j , 下述 Lyapunov 方程有惟一正定解矩阵 \mathbf{P}_j

$$(\mathbf{A}_j + \mathbf{B}_j \mathbf{K}_j)^T \mathbf{P}_j + \mathbf{P}_j (\mathbf{A}_j + \mathbf{B}_j \mathbf{K}_j) = -\mathbf{Q}_j, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (2.40)$$

考虑系统(2.38), 构造全息控制器

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_a + \mathbf{u}_b + \mathbf{u}_c \quad (2.41)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_a &= \alpha + \beta \mathbf{K} \mathbf{T} \\ \mathbf{u}_b &= \begin{bmatrix} \phi_1(\mathbf{x}) \\ \phi_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \phi_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \quad \phi_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} -\rho_1^i(\mathbf{x}) & (\mathbf{T}_i)^T \mathbf{P}_i \mathbf{B}_i \geq 0 \\ \rho_1^i(\mathbf{x}) & (\mathbf{T}_i)^T \mathbf{P}_i \mathbf{B}_i < 0 \end{cases} \\ \mathbf{u}_c &= \begin{bmatrix} \psi_1(\mathbf{x}) \\ \psi_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \psi_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \quad \psi_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} -\rho_2^i(\mathbf{x}) & (\mathbf{T}_i)^T \mathbf{P}_i \mathbf{B}_i \geq 0 \\ \rho_2^i(\mathbf{x}) & (\mathbf{T}_i)^T \mathbf{P}_i \mathbf{B}_i < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

这里 $\mathbf{K} = \text{diag}\{\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \dots, \mathbf{K}_m\}$, $\mathbf{B}_j, \mathbf{P}_j, \mathbf{K}_j$ 满足式(2.39), $\rho_1^i(\mathbf{x}) = \max_i \sup_{\theta_1 \in \Omega_1} \{L_j^i(\mathbf{x}^i, \theta_1)\}$, $\rho_2^i(\mathbf{x}) = \max_i \sup_{\theta_2 \in \Omega_2} \{\mathbf{H}_j^i(\mathbf{x}, \theta_2)\}$, $\mathbf{L}_j^i(\mathbf{x}^i, \theta_1), \mathbf{H}_j^i(\mathbf{x}, \theta_2)$ 分别是 $L^i(\mathbf{x}^i, \theta_1), \mathbf{H}^i(\mathbf{x}, \theta_2)$ 的第 j 个分量, $j = 1, 2, \dots, m, i = 1, 2, \dots, N$ 。

下证控制器(2.41)是系统(2.38)的结构全息鲁棒控制器。由 ρ_1, ρ_2 的结构形式知, 只须证

$$\mathbf{u}^i = \mathbf{u}_a^i + \mathbf{u}_b^i + \mathbf{u}_c^i \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.42)$$

与系统(2.38)构成的闭环系统在 x_* 点渐近稳定, 其中

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_b^i &= \alpha_i(\mathbf{x}') + \beta_i(\mathbf{x}') \mathbf{K} \mathbf{T}_i(\mathbf{x}') \\ \mathbf{u}_b^i &= \begin{bmatrix} \phi_1^i(\mathbf{x}) \\ \phi_2^i(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \phi_m^i(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad \phi_j^i(\mathbf{x}) = \begin{cases} -\rho_1^i(\mathbf{x}) - (\mathbf{T}_j^i)^T \mathbf{P}_j \mathbf{B}_j \geq 0 \\ \rho_2^i(\mathbf{x}) - (\mathbf{T}_j^i)^T \mathbf{P}_j \mathbf{B}_j < 0 \end{cases} \\ \mathbf{u}_c^i &= \begin{bmatrix} \psi_1^i(\mathbf{x}) \\ \psi_2^i(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \psi_m^i(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad \psi_j^i(\mathbf{x}) = \begin{cases} -\rho_1^i(\mathbf{x}) - (\mathbf{T}_j^i)^T \mathbf{P}_j \mathbf{B}_j \geq 0 \\ \rho_2^i(\mathbf{x}) - (\mathbf{T}_j^i)^T \mathbf{P}_j \mathbf{B}_j < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{T}^i = ((\mathbf{T}_1^i)^T, (\mathbf{T}_2^i)^T, \dots, (\mathbf{T}_m^i)^T)$, 由于微分同胚不影响系统的渐近稳定性, 所以只须证系统

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}^i &= \text{diag}\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_m\} \mathbf{z}^i + \\ &\quad \text{diag}\{\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_m\} (\text{diag}\{\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \dots, \mathbf{K}_m\} \mathbf{z}^i + \\ &\quad [\mathbf{u}_b^i(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_c^i(\mathbf{x}) + \mathbf{L}_i^i(\mathbf{x}', \boldsymbol{\theta}_1) + \mathbf{H}_i^i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_2)]_{\mathbf{x}=D^{-1}(\mathbf{z})}) \\ &\quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.43) \end{aligned}$$

在 $\mathbf{z} = 0$ 渐近稳定性。

对系统(2.43), 构造 Lyapunov 函数

$$V(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^m (\mathbf{z}^{ij})^T \mathbf{P}_j \mathbf{z}^{ij} \quad (2.44)$$

其中 $\mathbf{z} = \text{col}(\mathbf{z}^1, \mathbf{z}^2, \dots, \mathbf{z}^N)$, $\mathbf{z}^i = \text{col}(\mathbf{z}^{i1}, \mathbf{z}^{i2}, \dots, \mathbf{z}^{im})$, $\mathbf{z}^{ij} = \text{col}(\mathbf{z}_1^{ij}, \mathbf{z}_2^{ij}, \dots, \mathbf{z}_{r_j}^{ij})$ 。由 \mathbf{P}_j 的正定性易知, $V(\mathbf{z})$ 是 $D(\Omega)$ 上的正定函数, 且

$$\begin{aligned} \dot{V} \quad (2.44) &= - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^m (\mathbf{z}^{ij})^T \mathbf{Q}_j \mathbf{z}^{ij} + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^m ((\mathbf{z}^{ij})^T \mathbf{P}_j \mathbf{B}_j [\mathbf{u}_{bj}^i + \\ &\quad \mathbf{u}_{cj}^i + \mathbf{L}_i^i(\mathbf{x}', \boldsymbol{\theta}_1) + \mathbf{H}_i^i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_2)]_{\mathbf{x}=D^{-1}(\mathbf{z})}) \quad (2.45) \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{u}_{bj}^i, \mathbf{u}_{cj}^i$ 分别是 $\mathbf{u}_b^i, \mathbf{u}_c^i$ 的第 j 个分量。由 $\rho_1(\mathbf{x}), \rho_2(\mathbf{x})$ 的定义知, 对一切 $i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, m$ 有

$$(\mathbf{z}^{ij})^T \mathbf{P}_j \mathbf{B}_j [\mathbf{u}_{bj}^i + \mathbf{u}_{cj}^i + \mathbf{L}_i^i(\mathbf{x}', \boldsymbol{\theta}_1) + \mathbf{H}_i^i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_2)]_{\mathbf{x}=D^{-1}(\mathbf{z})} =$$

$$\left. \begin{array}{l} (T'_j(x^i))^T P_j B_j [u_{bj}^i + u_{cj}^i + L'_j(x^i, \theta_1) + H'_j(x, \theta_2)] \leqslant \\ (T'_j(x^i))^T P_j B_j (u_{bj}^i + \rho_1^i(x) + u_{cj}^i + \rho_2^i(x)) \\ (T'_j(x^i))^T P_j B_j \geqslant 0 \\ (T'_j(x^i))^T P_j B_j (u_{bj}^i - \rho_1^i(x) + u_{cj}^i - \rho_2^i(x)) \\ (T'_j(x^i))^T P_j B_j \leqslant 0 \end{array} \right\} \quad (2.46)$$

由式(2.45), (2.46) 及 u_{bj}^i, u_{cj}^i 的定义即知

$$\begin{aligned} V(z) &\leqslant - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^m (z^{ij})^T Q_j z^{ij} = \\ &= - \sum_{i=1}^N (z^i)^T \text{diag}\{\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \dots, \mathbf{Q}_m\} z^i \end{aligned}$$

结合 $\mathbf{Q}_j (j = 1, 2, \dots, m)$ 的正定性即得 $V(z)|_{(2.43)}$ 负定, 所以 $z = 0$ 是系统(2.43)的渐近稳定平衡点。故控制器(2.41)是系统(2.38)的结构全息鲁棒控制器。
[证毕]

2.3.3 仿真算例

考虑非线性组合大系统

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1^1 \\ \dot{x}_2^1 \\ \dot{x}_3^1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -(x_1^1)^2 \\ 0 \\ x_2^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-x_1^1} & 0 \\ 1 & e^{x_1^1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \end{bmatrix} + \\ &\quad \begin{bmatrix} (x_1^1)^2 \sin^2 \theta_{21} \\ (x_1^1)^2 e^{-x_1^1} \sin^2 \theta_{22} + (x_2^1)^2 e^{-x_1^1} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{x}_1^2 \\ \dot{x}_2^2 \\ \dot{x}_3^2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_1^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ (x_2^2)^2 \sin^2 \theta_{11} \\ (x_3^2)^2 \theta_{11} \end{bmatrix} + \\ &\quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ (x_1^2)^2 e^{x_1^2} \theta_{22}^2 \\ (x_2^2)^2 \cos^2 \theta_{21} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$\mathbf{y}^1 = \begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{y}^2 = \begin{bmatrix} x_2^2 \\ x_3^2 \end{bmatrix} \quad x_0 = 0$$

其中不确定参数的扰动范围为如下的已知集合

$$\theta_1 = \theta_{11} \in \Omega_1 = \{\theta_{11} \mid |\theta_{11}| < 2\}$$

$$\theta_2 = (\theta_{21}, \theta_{22}) \in \Omega_2 = \{(\theta_{21}, \theta_{22}) \mid \theta_{21} \in R, |\theta_{22}| < 1\}$$

直接验证知式(2.47)是相似组合系统, $r = \{2, 1\}$, 且相似参量可选为

$$\mathbf{T}_1: \begin{cases} z_1^1 = x_3^1 \\ z_2^1 = x_2^1 \\ z_3^1 = x_1^1 \end{cases} \quad \alpha_1 = \begin{bmatrix} (x_1^1)^2 e^{x_1^1} \\ -(x_1^1)^2 \end{bmatrix} \quad \beta_1 = \begin{bmatrix} 0 & e^{x_1^1} \\ e^{x_1^1} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_2: z_j^2 = x_j^2 \quad (j = 1, 2, 3) \quad \alpha_2 = 0 \quad \beta_2 = I$$

设定 $\mathbf{K}_1 = (-2, -2)$, $\mathbf{K}_2 = -1$, 取 $\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{Q}_2 = 2$, 则

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_2 = 1$$

故所求结构全息控制器为

$$\mathbf{u} = \alpha + \beta \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{T} + \begin{bmatrix} u_{b1} \\ u_{b2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{c1} \\ u_{c2} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

其中

$$u_{b1} = \begin{cases} -(x_2^2)^2 - (\mathbf{T}_1)^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \geqslant 0 \\ (x_2^2)^2 - (\mathbf{T}_1)^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} < 0 \end{cases}$$

$$u_{c1} = \begin{cases} -(x_1^1)^2 e^{x_1^1} - (\mathbf{T}_1)^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \geqslant 0 \\ (x_1^1)^2 e^{x_1^1} - (\mathbf{T}_1)^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} < 0 \end{cases}$$

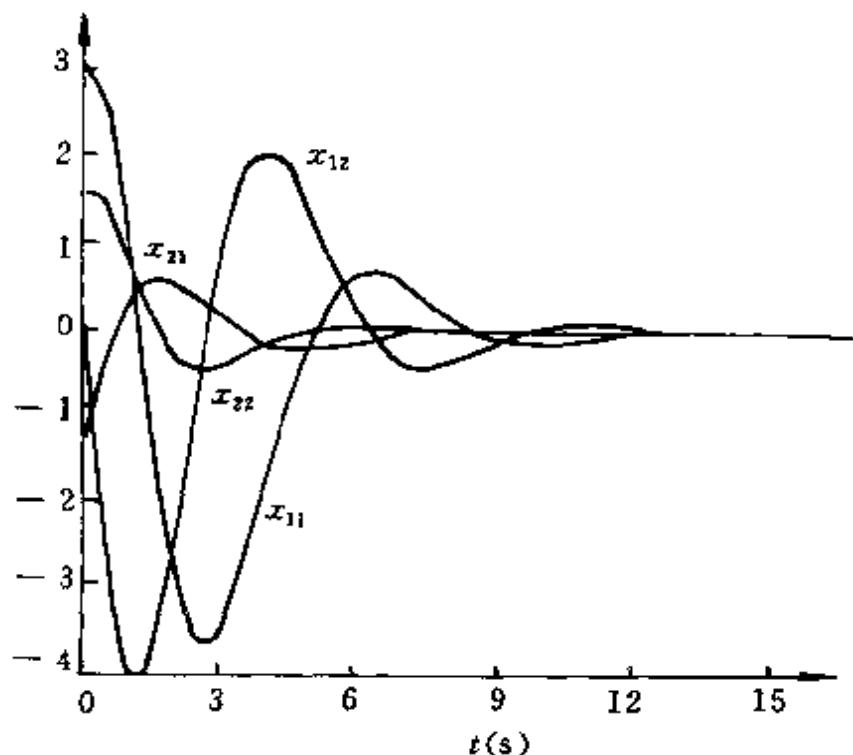
$$u_{b2} = \begin{cases} -2(x_3^2)^2 & T_2 \geqslant 0 \\ 2(x_3^2)^2 & T_2 < 0 \end{cases} \quad u_{c2} = \begin{cases} -(x_2^2)^2 & T_2 \geqslant 0 \\ (x_2^2)^2 & T_2 < 0 \end{cases}$$

这里 $T = ((T_1)^T, T_2)^T$, 引入函数 $\widehat{\text{sgn}} = \begin{cases} -1 & x \geq 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$, 则使系统

(2.47) 在原点镇定的鲁棒控制器为

$$\left. \begin{aligned} u_1^1 &= (x_1^1 - 1)x_1^1 e^{-x_1^1} + [(x_2^1)^2 + (x_3^1)^2 e^{-x_1^1}] \widehat{\text{sgn}}(x_3^1 + x_2^1) \\ u_2^1 &= -(x_1^1)^2 - 2(x_3^1 + x_2^1)e^{-x_1^1} + x_1^1 + \\ &\quad [2(x_3^1)^2 + (x_2^1)^2] \widehat{\text{sgn}}(x_1^1) \\ u_1^2 &= -2[x_1^2 + x_2^2] + ((x_2^2)^2 + (x_3^2)^2) \widehat{\text{Big}} \widehat{\text{sgn}}(x_1^2 + x_2^2) \\ u_2^2 &= -x_3^2 + [2(x_3^2)^2 + (x_2^2)^2] \widehat{\text{sgn}}(x_3^2) \end{aligned} \right\} \quad (2.49)$$

取 $\theta_1 = 1.5, \theta_2 = (10, -0.8)$, 初值 $x_0 = (1, 3, -3.5, -2.5, 2)$, 则其响应曲线如图 2.1 仿真结果表明本节的方法是可行的。



(a) $x^1 = (x_1^1, x_2^1, x_3^1)$ 的响应曲线

图 2.1 系统(2.47)的状态响应曲线

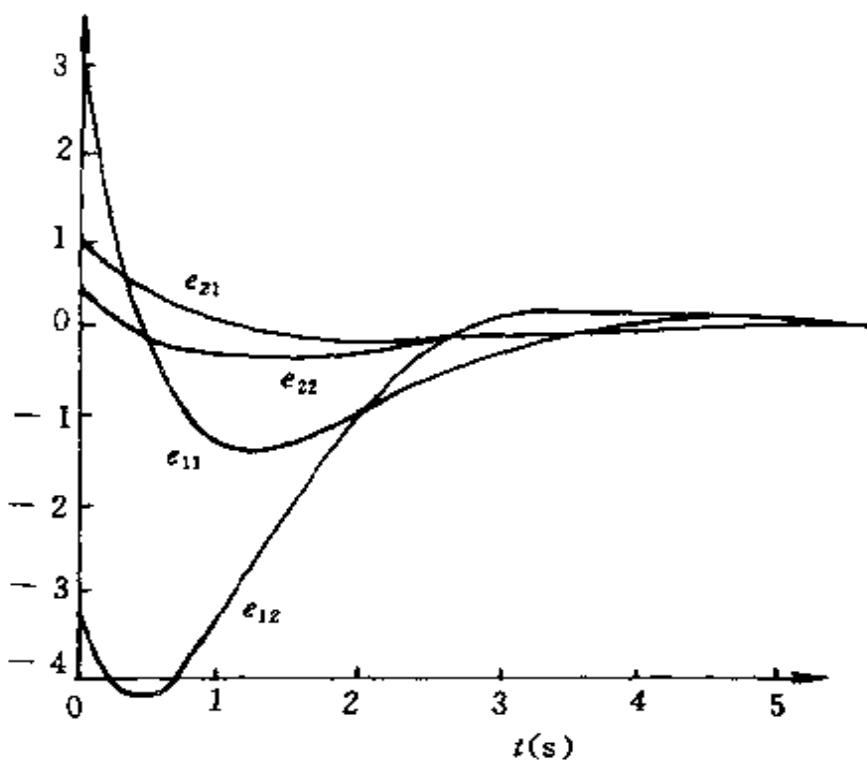
(b) $x^2 := (x_1^2 \ x_2^2 \ x_3^2)$ 的响应曲线

图 2.1 系统(2.47)的状态响应曲线(续)

第三章 非匹配不确定非线性相似 组合大系统的分散控制

本章首先概述分散控制的特征,然后对孤立子系统分别为线性和非线性时的情形进行分析。在非匹配不确定性存在的条件下,给出非线性相似组合大系统鲁棒稳定化的有关结论,所设计的控制器不但具有分散控制的特征,而且是结构全息的,分析简便,计算量小,易于工程设计。最后通过数值例子说明所得结论的实施方法及其有效性。

3.1 引 言

分散控制^[36~38]是实践中产生和发展起来的处理组合大系统的重要方法之一。它不仅是理论发展的产物,而且是大系统实现在线反馈的现实需要。

在现实世界中,有许多实际系统,如电力系统、数字计算机通讯系统、城市交通网络系统以及社会管理系统等。由于其规模庞大、地理上分布广泛,信息传递会受到一定的约束,即使信息传递不受影响,也可能由于计算量过大或者所需传递信息的费用过高而不能采用集中控制方式。在大多数情况下,集中控制往往是既不经济,也不必要,甚至是不可行的,于是分散控制便成为处理组合大系统的有效而经济的手段。

在分散控制中,各子系统只需要根据自己的信息就能确定自

己的控制,便于对出现于子系统的干扰迅速做出反应,有利于提高控制品质,且由于各控制站之间不需信息交换,从而节省了信息大范围传递所需的能量消耗,也可避免数据收集、存贮及计算机程序诊断上由于通讯引起的麻烦。更重要的是,有的分散控制能使各子系统具有相对的自治性,它不但能控制整个大系统顺利运行,而且一旦由于某种自然或人为的原因,各子系统之间失去关联,该子系统在不须修正控制律的情况下仍能正常工作而不出现破坏性的故障。所以,对那些维数高、规模大、分布广的系统,相对于集中控制而言,分散控制具有可实现性、实时性、经济性以及可靠性等优点。但由于在分散控制中,每个控制站只能利用自己子系统的信息,所以,所得结论保守性一般较大。正是由于这种信息约束,使得许多有关集中控制的结论在分散控制中不能成立。所以分散控制有许多独特的性质,它不是集中控制的简单推广,也不应视为它的特例,事实上,它作为一种处理大系统的重要方法,已形成了大系统理论研究中的一个活跃的分支。

近年来,分散控制的研究已取得了许多成果,在电力系统、过程控制系统、工业机器人以及快速复杂的伺服系统中得到了成功的应用,且由于实际问题的需要以及控制理论的发展,非线性大系统的分散控制开始受到人们的广泛重视。非线性系统的分散控制不但能处理由于高维性、信息的不完全性以及子系统之间的互联特性带来的困难,而且能处理由非线性特性引起的复杂性。其研究的进一步深入,必将推动大系统理论在深度和广度上的进一步发展。

3.2 一般非匹配条件下的分散控制

这一节讨论在一般非匹配条件下,孤立子系统为线性系统的非线性相似组合大系统的分散鲁棒稳定化问题。

3.2.1 系统描述及问题叙述

考虑非线性大系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_i = & A_i x_i + f_i(x_i, t) + B(u_i + \xi_i(x_i, t)) + \\ & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N H_{ij}(x_j, \delta_j, t) \quad i = 1, 2, \dots, N\end{aligned}\quad (3.1)$$

其中 $x_i \in \Omega_i \subset \mathbb{R}^n, u_i \in \mathbb{R}^m$ 分别是第 i 个子系统的状态变量和输入; Ω_i 是 $x_i = 0$ 的某邻域; A_i, B_i 是适当维数的常值矩阵; $\delta_j \in E_j \subset \mathbb{R}^p (j = 1, 2, \dots, N)$ 是不确定参数(可以是时变的), 非匹配不确定项 $f_i(x_i, t)$, 匹配不确定项 $\xi_i(x_i, t)$ 以及互联项 $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N H_{ij}(x_j, \delta_j, t)$ 在

其定义域中所有变量都是连续的。不失一般性, 假设对所有的 $i, j = 1, 2, \dots, N; t \in \mathbb{R}^+ = \{t | t \geq 0\}$ 和 $\delta_j \in E_j$ 有 $\xi_j(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0}, f_j(\mathbf{0}, t) = H_{ij}(\mathbf{0}, \delta_j, t) = \mathbf{0}$ 。记 $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_N = \{x^T | x_i \in \Omega_i, i = 1, 2, \dots, N\}, x = \text{col}(x_1^T, x_2^T, \dots, x_N^T)$,

首先引入下面的基本假设:

假设 3.1 存在已知函数 $\rho(\cdot, t), \gamma(\cdot)$ 和 $\phi_i(\cdot)$ 使得对所有的 $x \in \Omega$, 系统(3.1)的不确定项满足

$$\left. \begin{aligned}\|f_i(x_i, t)\| &\leq \gamma(\|x_i\|) \quad i = 1, 2, \dots, N \\ \|\xi_i(x_i, t)\| &\leq \rho(x_i, t) \quad i = 1, 2, \dots, N \\ \|H_{ij}(x_j, \delta_j, t)\| &\leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \phi_i(\|x_j\|) \quad i \neq j, t \in \mathbb{R}^+, \delta_j \in E_j\end{aligned}\right\} \quad (3.2)$$

其中 $\rho(\cdot, t)$ 是满足 $\rho(0, t) = 0 (t \in \mathbb{R}^+)$ 的连续函数, $\gamma(\cdot)$ 和 ϕ_i 是满足 $\gamma(0) = \phi_i(0) = 0$ 的 C^1 的函数。

注 3.1 满足假设 3.1 的互联项文献[37]曾讨论过。正如文献[37]所说, 这种互联项具有更一般的形式, 现有文献所研究的

互联项都是这种互联项的特殊情形。但文献[37]讨论的是实用稳定性问题,而这里则研究的是渐近稳定化问题。

注 3.2 函数 $f_i(x_i, t)$ 和 $\xi_i(x_i, t)$ 包含了系统(3.1)的第 i 个孤立子系统的所有不确定性和非线性项。应当注意到,假设 3.1 要求系统(3.1)的每个孤立子系统的非匹配项 $f_i(x_i, t)$ 和匹配项 $\xi_i(x_i, t)$ 分别具有相同的界函数,这可被视为非线性相似组合大系统的重要特性之一。事实上,在实际工程中,经常把一些相同或相似的机床互 联在一起以批量生产同类小部件,这些机床可能由于所处的环境 及所在位置的不同而受有不同的扰动,但这些扰动一般差别不大,通常可用假设 3.1 来描述。

这一节主要解决这样一个问题:假设系统(3.1)具有相似参量 (T_i, F_i) ($i = 1, 2, \dots, N$),即系统(3.1)是满足条件

$$\begin{aligned} T_1^{-1}(A_1 + B_1 F_1) T_1 &= T_2^{-1}(A_2 + B_2 F_2) T_2 = \cdots = \\ T_N^{-1}(A_N + B_N F_N) T_N & \\ T_1^{-1}B_1 &= T_2^{-1}B_2 = \cdots = T_N^{-1}B_N \end{aligned} \quad (3.3)$$

的相似组合系统,如果可能,试设计一分散结构全息控制器

$$u_i = \phi(x_i, t, T_i, F_i) \quad (\phi(0, t, T_i, F_i) = 0) \quad i = 1, 2, \dots, N$$

使得由这一控制器与系统(3.1)构成的闭环系统在区域 Ω 上渐近稳定。

3.2.2 分散鲁棒全息控制器设计

考虑非线性相似组合大系统(3.1)。为了给出主要结果,还须引入一些基本假设:

假设 3.2 系统(3.1)是相似参量为 (T_i, F_i) ($i = 1, 2, \dots, N$) 的相似组合大系统。

假设 3.3 系统(3.1)至少有一个名义子系统是可控的。

由假设 3.2 知,存在矩阵 A, B 使得

$$T_i^{-1}(A_i + B_i F_i) T_i = A \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.4)$$

$$\mathbf{T}_i^{-1}\mathbf{B}_i = \mathbf{B} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.5)$$

如果假设3.3也满足,则由线性系统理论易知, (A, B) 是可控对。所以,存在矩阵 K 使得 $A + BK$ 是 Hurwitz 稳定阵。故对任一正定阵 Q , Lyapunov 方程

$$(A + BK)^T P + P(A + BK) = -Q \quad (3.6)$$

有惟一正定解矩阵 P 。

注 3.3 在假设 3.3 下,系统(3.1)的所有名义子系统都是可控的,即矩阵对 (A_i, B_i) ($i = 1, 2, \dots, N$) 都是可控的,所以系统(3.1)的相似参量 (\mathbf{T}_i, F_i) ($i = 1, 2, \dots, N$) 可由线性系统理论借助于可控标准型结构求得。

定理 3.1 假设系统(3.1)满足假设 3.2,3.3,如果函数矩阵 $W^T(x) + W(x)$ 在区域 $\Omega \setminus \{\mathbf{0}\}$ 上正定,其中 $W(x) = (\omega_{ij}(x))_{N \times N}$,

$$\omega_{ij} = \begin{cases} \lambda_m((\mathbf{T}_i^{-1})^T Q \mathbf{T}_i^{-1}) - 2\kappa(\|x_i\|) & i = j \\ -2\lambda_m((\mathbf{T}_i^{-1})^T P \mathbf{T}_i^{-1})\eta_i(\|x_i\|) & i \neq j \end{cases}$$

这里

$$\eta_i(r) = \begin{cases} \frac{\phi_i(r)}{r} & r \neq 0 \\ \phi_i'(0) & r = 0 \end{cases} \quad \kappa(r) = \begin{cases} \frac{\gamma(r)}{r} & r \neq 0 \\ \gamma'(0) & r = 0 \end{cases}$$

则系统(3.1)在区域 Ω 上可用结构全息控制器分散镇定。

证明 构造控制器

$$u_i = F_i x_i + K \mathbf{T}_i^{-1} x_i + v_i(x_i, t) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.7)$$

其中

$$v_i(x_i, t) = \begin{cases} -\frac{\mathbf{B}_i^T (\mathbf{T}_i^{-1})^T P \mathbf{T}_i^{-1} x_i}{\|\mathbf{B}_i^T (\mathbf{T}_i^{-1})^T P \mathbf{T}_i^{-1} x_i\|} \rho(x_i, t) & \mathbf{B}_i^T (\mathbf{T}_i^{-1})^T P \mathbf{T}_i^{-1} x_i \neq 0 \\ 0 & \mathbf{B}_i^T (\mathbf{T}_i^{-1})^T P \mathbf{T}_i^{-1} x_i = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

考虑 v_i 的结构,由条件(3.5)有

$$v_i(\mathbf{x}_i, t) = \begin{cases} \frac{\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{x}_i}{\|\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{x}_i\|} \rho(\mathbf{x}_i, t) & \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{x}_i \neq 0 \\ 0 & \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{x}_i = 0 \end{cases}$$

所以,控制器(3.7)不但是分散的,而且具有全息结构。下面只须证明控制律(3.7)与系统(3.1)构成的闭环系统

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_i = & (\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{F}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{K} \mathbf{T}_i^{-1}) \mathbf{x}_i + \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i, t) + \\ & \mathbf{B}_i(v_i(\mathbf{x}_i, t) + \xi_i(\mathbf{x}_i, t)) + \\ & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N H_{ij}(\mathbf{x}_j, \delta_j, t) \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (3.9)$$

是渐近稳定的即可。

对系统(3.9),考虑正定函数

$$V = \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i^T (\mathbf{T}_i^{-1})^T \mathbf{P} \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{x}_i$$

其中 \mathbf{P} 由式(3.6)确定,则函数 $V(\mathbf{x})$ 沿着系统(3.9)的状态轨线对时间 t 的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}|_{(3.9)} = & \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i^T (\mathbf{T}_i^{-1})^T \mathbf{P} \mathbf{T}_i^{-1} [(\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{F}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{K} \mathbf{T}_i^{-1}) \mathbf{x}_i + \\ & \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i, t) + \mathbf{B}_i(v_i(\mathbf{x}_i, t) + \xi_i(\mathbf{x}_i, t)) + \\ & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N H_{ij}(\mathbf{x}_j, \delta_j, t)] + \sum_{i=1}^N [(\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{F}_i + \\ & \mathbf{B}_i \mathbf{K} \mathbf{T}_i^{-1}) \mathbf{x}_i + \mathbf{B}_i(v_i(\mathbf{x}_i, t) + \xi_i(\mathbf{x}_i, t)) + \\ & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N H_{ij}(\mathbf{x}_j, \delta_j, t)]^T (\mathbf{T}_i^{-1})^T \mathbf{P} \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{x}_i = \\ & - \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i^T (\mathbf{T}_i^{-1}) \mathbf{Q} \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{x}_i + \\ & 2 \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i^T (\mathbf{T}_i^{-1})^T \mathbf{P} \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{B}_i(v_i(\mathbf{x}_i, t) + \xi_i(\mathbf{x}_i, t)) + \end{aligned}$$

$$2 \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i^T (\mathbf{T}_i^{-1})^T \mathbf{P} \mathbf{T}_i^{-1} \left[\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N H_{ij}(\mathbf{x}_j, \delta_j, t) + f_i(\mathbf{x}_i, t) \right] \quad (3.10)$$

由 v_i 的结构式(3.8) 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i^T (\mathbf{T}_i^{-1})^T \mathbf{P} \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{B}_i (v_i(\mathbf{x}_i, t) + \xi_i(\mathbf{x}_i, t)) &= \mathbf{x}_i^T (\mathbf{T}_i^{-1})^T \mathbf{P} \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{B}_i \times \\ &\left\{ \begin{array}{ll} - \frac{\mathbf{B}_i^T (\mathbf{T}_i^{-1})^T \mathbf{P} \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{x}_i}{\| \mathbf{B}_i^T (\mathbf{T}_i^{-1})^T \mathbf{P} \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{x}_i \|} \rho(\mathbf{x}_i, t), & \mathbf{B}_i^T (\mathbf{T}_i^{-1})^T \mathbf{P} \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{x}_i \neq 0 \\ 0, & \mathbf{B}_i^T (\mathbf{T}_i^{-1})^T \mathbf{P} \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{x}_i = 0 \end{array} \right. + \\ \xi_i(\mathbf{x}_i, t) &\leq - \| \mathbf{B}_i^T (\mathbf{T}_i^{-1})^T \mathbf{P} \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{x}_i \| \rho(\mathbf{x}_i, t) + \\ \mathbf{x}_i^T (\mathbf{T}_i^{-1})^T \mathbf{P} \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{B}_i \xi_i(\mathbf{x}_i, t) &\leq \\ - \| \mathbf{B}_i^T (\mathbf{T}_i^{-1})^T \mathbf{P} \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{x}_i \| \rho(\mathbf{x}_i, t) + \\ \| \mathbf{x}_i^T (\mathbf{T}_i^{-1})^T \mathbf{P} \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{B}_i \| \| \xi_i(\mathbf{x}_i, t) \| &\leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

所以,

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i^T (\mathbf{T}_i^{-1})^T \mathbf{P} \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{B}_i (v_i(\mathbf{x}_i, t) + \xi_i(\mathbf{x}_i, t)) \leq 0 \quad (3.11)$$

由于 $\eta_i(r) = \psi_i(r)r, \phi(r) = \kappa(r)r$, 于是有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i^T (\mathbf{T}_i^{-1})^T \mathbf{P} \mathbf{T}_i^{-1} [f_i(\mathbf{x}_i) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N H_{ij}(\mathbf{x}_j, \delta_j, t)] &\leq \\ \sum_{i=1}^N \| \mathbf{x}_i \| \| (\mathbf{T}_i^{-1})^T \mathbf{P} \mathbf{T}_i^{-1} \| \\ \left[\gamma(\| \mathbf{x}_i \|) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \psi_j(\| \mathbf{x}_j \|) \right] &- \\ \sum_{i=1}^N \left[\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \lambda_m((\mathbf{T}_i^{-1})^T \mathbf{P} \mathbf{T}_i^{-1}) \eta_i(\| \mathbf{x}_i \|) \| \mathbf{x}_i \| \| \mathbf{x}_j \| + \right. \\ \left. \kappa(\| \mathbf{x}_i \|) \| \mathbf{x}_i \|^2 \right] \quad (3.12) \end{aligned}$$

将式(3.11) 和式(3.12) 代入式(3.10) 可得

$$\dot{V}|_{(3.9)} \leq - \left\{ \sum_{i=1}^N (\lambda_m((\mathbf{T}_i^{-1})^T \mathbf{Q} \mathbf{T}_i^{-1}) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& 2\kappa(\|x_i\|) \|x_i\|^2 - 2 \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \lambda_M \times \\
& ((T_i^{-1})^T P T_i^{-1}) \eta_j(\|x_j\|) \|x_i\| \|x_j\| = \\
& -\frac{1}{2} (\|x_1\|, \|x_2\|, \dots, \|x_N\|) \times \\
& (W^T(x) + W(x)) \begin{Bmatrix} \|x_1\| \\ \|x_2\| \\ \vdots \\ \|x_N\| \end{Bmatrix}
\end{aligned}$$

上式结合 $W^T(x) + W(x)$ 在 $\Omega \setminus \{\mathbf{0}\}$ 的正定性即知 $\dot{V}|_{(3.9)}$ 在 Ω 上是负定的, 所以系统(3.1)可用结构全息控制器分散鲁棒镇定。

[证毕]

定理 3.1 中的 $W^T(x) + W(x)$ 是一函数矩阵。在实际工程问题中, 系统(3.1)的鲁棒稳定化域可通过矩阵 $W^T(x) + W(x)$ 的正定性给出初步的估计。

在定理 3.1 中, 系统(3.1)的第 i 个孤立子系统的非匹配不确定项 $f_i(x_i, t)$ 是通过估计的方法予以处理的, 在设计控制器时未曾考虑。这就是通常处理不确定项的方法之一。显然这样处理所得结论的保守性一般是比较大的。下面我们针对一种特殊的非匹配情形, 给出一个保守性较小的结论。

假设 3.4 对所有的 $x \in D_i (i = 1, 2, \dots, N)$, 系统(3.1)的非匹配不确定项 $f_i(x_i, t) = 0$, 其中

$$\begin{aligned}
D_i &= \{(x_i, t) | B_i^T (T_i^{-1})^T P T_i^{-1} x_i = 0 \\
t \in \mathbb{R}^+ \} \quad i = 1, 2, \dots, N
\end{aligned}$$

注 3.4 应当注意到假设 3.4 是 3.3 节将要给出的广义匹配条件成立的必要而非充分条件, 它是文献[39]的等价匹配条件的更一般推广。

定理 3.2 考虑系统(3.1)。在假设 3.1 ~ 3.4 下, 如果函数矩

阵 $W^T(x) + W(x)$ 在区域 $\Omega \setminus \{0\}$ 上正定, 其中 $W(x) = (w_{ij}(x))_{N \times N}$,

$$w_{ij} = \begin{cases} \lambda_m((T_i^{-1})^T Q T_i^{-1}) & i = j \\ -2\lambda_M((T_i^{-1})^T P T_i^{-1})\eta_i(\|x_i\|) & i \neq j \end{cases}$$

上式中 $\eta_i(r)$ 由定理 3.1 给出, 则系统(3.1)在区域 $\Omega \setminus \{0\}$ 上可用结构全息控制器分散稳定化。

证明 设计分散控制器

$$u_i = F_i x_i + v_i(x_i, t) + \omega_i(x_i) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.13)$$

其中 v_i 由(3.8)式定义, ω_i 由下式给出

$$\omega_i(x_i) =$$

$$\left. \begin{aligned} & -\frac{\mathbf{B}_i^T(T_i^{-1})^T P T_i^{-1} x_i}{\|\mathbf{B}_i^T(T_i^{-1})^T P T_i^{-1} x_i\|^2} \lambda_M((T_i^{-1})^T P T_i^{-1}) Y(\|x_i\|) \|x_i\| \\ & \quad \left. \begin{aligned} & \mathbf{B}_i^T(T_i^{-1})^T P T_i^{-1} x_i \neq 0 \\ & \mathbf{B}_i^T(T_i^{-1})^T P T_i^{-1} x_i = 0 \end{aligned} \right\} (3.14) \end{aligned} \right\}$$

很明显, 控制器(3.13)也是结构全息的。考虑闭环系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= (A_i + B_i F_i) x_i + f_i(x_i, t) + \\ & \quad B_i(v_i(x_i, t) + \xi_i(x_i, t) + \omega_i(x_i)) + \\ & \quad \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N H_{ij}(x_j, \delta_j, t) \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (3.15)$$

对于系统(3.15), 构造正定函数

$$V = \sum_{i=1}^N x_i^T (T_i^{-1})^T P T_i^{-1} x_i$$

则

$$\begin{aligned} \dot{V}|_{(3.15)} &= 2 \sum_{i=1}^N (x_i^T (T_i^{-1})^T P T_i^{-1} B_i \omega_i(x_i) + \\ & \quad x_i^T (T_i^{-1})^T P T_i^{-1} f_i(x_i, t)) + \\ & \quad 2 \sum_{i=1}^N x_i^T (T_i^{-1})^T P T_i^{-1} B_i (v_i(x_i, t) + \xi_i(x_i, t)) + \end{aligned}$$

$$2 \sum_{i=1}^N \left\{ -\mathbf{x}_i^T (\mathbf{T}_i^{-1})^T \mathbf{Q} \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{x}_i + \right. \\ \left. \mathbf{x}_i^T (\mathbf{T}_i^{-1})^T \mathbf{P} \mathbf{T}_i^{-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N H_{ij}(\mathbf{x}_j, \boldsymbol{\delta}_j, t) \right\} \quad (3.16)$$

仿照定理 3.1 的证明可得

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i^T (\mathbf{T}_i^{-1})^T \mathbf{P} \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{B}_i (\boldsymbol{\omega}_i(\mathbf{x}_i, t) + \boldsymbol{\xi}_i(\mathbf{x}_i, t)) \leq 0 \quad (3.17)$$

由假设 3.1 和假设 3.4, 利用结构式(3.14)即得

(1) 如果 $\mathbf{B}_i^T (\mathbf{T}_i^{-1})^T \mathbf{P} \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{x}_i = 0$, 则

$$\mathbf{x}_i^T (\mathbf{T}_i^{-1})^T \mathbf{P} \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{B}_i \boldsymbol{\omega}_i(\mathbf{x}_i) + \mathbf{x}_i^T (\mathbf{T}_i^{-1})^T \mathbf{P} \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i, t) = 0$$

(2) 如果 $\mathbf{B}_i^T (\mathbf{T}_i^{-1})^T \mathbf{P} \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{x}_i \neq 0$, 则

$$\begin{aligned} & \mathbf{x}_i^T (\mathbf{T}_i^{-1})^T \mathbf{P} \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{B}_i \boldsymbol{\omega}_i(\mathbf{x}_i) + \mathbf{x}_i^T (\mathbf{T}_i^{-1})^T \mathbf{P} \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i, t) = \\ & \mathbf{x}_i^T (\mathbf{T}_i^{-1})^T \mathbf{P} \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i, t) - \mathbf{x}_i^T (\mathbf{T}_i^{-1})^T \mathbf{P} \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{B}_i \times \\ & \frac{\mathbf{B}_i^T (\mathbf{T}_i^{-1})^T \mathbf{P} \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{x}_i}{\|\mathbf{B}_i^T (\mathbf{T}_i^{-1})^T \mathbf{P} \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{x}_i\|^2} \lambda_M((\mathbf{T}_i^{-1})^T \mathbf{P} \mathbf{T}_i^{-1}) \gamma(\|\mathbf{x}_i\|) \|\mathbf{x}_i\| \leq \\ & \|\mathbf{x}_i\| \lambda_M((\mathbf{T}_i^{-1})^T \mathbf{P} \mathbf{T}_i^{-1}) \|\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i, t)\| - \\ & \lambda_M((\mathbf{T}_i^{-1})^T \mathbf{P} \mathbf{T}_i^{-1}) \gamma(\|\mathbf{x}_i\|) \|\mathbf{x}_i\| \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

所以,

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{x}_i^T (\mathbf{T}_i^{-1})^T \mathbf{P} \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{B}_i \boldsymbol{\omega}_i(\mathbf{x}_i) + \mathbf{x}_i^T (\mathbf{T}_i^{-1})^T \mathbf{P} \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i, t)) \leq 0 \quad (3.18)$$

按照定理 3.1 的证明方法, 将式(3.17)和式(3.18)代入式(3.16)可得 $V|_{(3.15)}$ 在其研究区域上是负定的。所以, 系统(3.1)在区域 Ω 上可用结构全息控制器(3.13)分散鲁棒镇定。 [证毕]

注 3.5 由定理 3.2 的证明可以看出, 系统(3.1)的不确定项 $f_i(\mathbf{x}_i, t)$ 的界函数以及辅助控制 $\boldsymbol{\omega}_i(\mathbf{x}_i)$ 可以是非线性的, 也可以是时变的, 甚至可以是大范围变化的。

容易看出, 定理 3.1 的结论较定理 3.2 要保守得多。在定理 3.2 中允许非匹配不确定项 $f_i(\mathbf{x}_i, t)$ 是大范围的, 且相应的稳定化

区域较之于定理 3.1 一般要大得多。但定理 3.1 要求 $f_i(x_i, t)$ 满足假设 3.4。

3.3 广义匹配条件下的结构 全息分散鲁棒控制

这一节考虑名义子系统为完全非线性的相似组合大系统的鲁棒控制问题, 所涉及的孤立子系统的非匹配不确定项具有一种特殊的非匹配不确定性——广义匹配不确定性。

3.3.1 系统描述

考虑由 N 个 n 阶系统互联而成的相似组合大系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_i = & f(x_i) + \Delta f_i(x_i) + G(x_i)(u_i + \Delta g_i(x_i)) + \\ & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N H_{ij}(x_j) \quad i = 1, 2, \dots, N\end{aligned}\quad (3.19)$$

其中 $x_i \in \Omega_i \subset \mathbb{R}^n$, $u_i \in \mathbb{R}^m$ 分别是第 i 个子系统的状态向量及输入, $G(x_i) = (g_1(x_i), g_2(x_i), \dots, g_m(x_i)), g_l(x_i)$ ($l = 1, 2, \dots, m$), $f(x_i)$ 都是 Ω_i 上的 n 维光滑向量场, $\Delta g_i(x_i)$ 是匹配不确定项, $\Delta f_i(x_i)$ 是非匹配不确定项, $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N H_{ij}(x_j)$ 是互联项, 可能含有不确定因素, 不失一般性, 设 $f(0) = H_{ij}(0) = 0$ ($i \neq j$; $i, j = 1, 2, \dots, N$)。记 $x = \text{col}(x_1, x_2, \dots, x_N)$, $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_N$ 。

定义 3.1 称系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_i = & f(x_i) + \Delta f_i(x_i) + G(x_i)(u_i + \Delta g_i(x_i)) \\ & i = 1, 2, \dots, N\end{aligned}\quad (3.20)$$

为系统(3.19)的第 i 个孤立子系统。

定义 3.2 考虑系统(3.19), 如果存在结构全息控制器

$$u_i = \Psi(x_i) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.21)$$

使之分别与系统(3.19)和系统(3.20)构成的闭环系统都是渐近稳定的,则称系统(3.19)可用结构全息控制器分散镇定。

定义3.2不但要求控制器(3.21)能使系统(3.19)镇定,而且要求它能使系统(3.20)镇定,这样可以保证一旦某个子系统同其它子系统失去互联作用,该子系统亦能正常工作,从而使系统具有一定程度的容错性。

引理3.1^[34] 若 $H(x)$ 是 \mathbb{R}^p 上的 n 维解析向量场,且 $H(0) = 0$,则存在 $n \times p$ 阶解析函数阵 $L(x)$,使得

$$H(x) = L(x)x$$

3.3.2 基本假设

为了设计系统(3.19)的结构全息分散控制器,需要引入如下一些基本假设:

假设3.5 对于系统(3.19),有

$$\|\Delta g_i(x_i)\| \leq \xi(x_i) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.22)$$

$$\|\Delta H_{ij}(x_j)\| \leq \eta_{ij}(\|x_j\|) \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (3.23)$$

其中 $\xi(\cdot)$ 及 $\eta_{ij}(\cdot)$ 均为已知函数,且 $\eta_{ij}(\cdot)$ 是满足 $\eta_{ij}(0) = 0$ 的 C^∞ 函数, $\xi(\cdot)$ 是连续的。

从式(3.23)可以看出,这里所考虑的互联项是较为一般的形式,它是文献[10, 34, 36, 37]等所研究的互联项的更一般推广。

假设3.6 系统(3.19)的名义子系统是可指数镇定的^[40],即存在 $u_i = u^*(x_i)$ 及 C^1 类函数 $\bar{V}(x_i)$,使得

$$k_1 \|x_i\|^2 \leq V(x) \leq k_2 \|x_i\|^2 \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial V(x_i)}{\partial x_i} (f(x_i) + G(x_i)u^*(x_i)) \leq -k_3 \|x_i\|^2 \quad (3.25)$$

$$\left\| \frac{\partial \bar{V}(x_i)}{\partial x_i} \right\| \leq k_4 \|x_i\| \quad (3.26)$$

其中 $i = 1, 2, \dots, N$; k_1, k_2, k_3, k_4 是正常数。

假设 3.7 非匹配不确定项 $\Delta f_i(x_i)$ 满足

$$\left\| \left(\frac{\partial \bar{V}(x_i)}{\partial x_i} \right)^T \Delta f_i(x_i) \right\| \leq \rho(x_i) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.27)$$

这里 $\rho(x_i)/(\left\| \frac{\partial \bar{V}(x_i)}{\partial x_i} G(x_i) \right\|)$ 是可连续化的, 其中 $\rho(\cdot)$ 是已知的连续函数, $\bar{V}(\cdot)$ 由假设 3.6 给出。

注 3.6 函数 $\rho(x_i)/(\left\| \frac{\partial \bar{V}(x_i)}{\partial x_i} \right\| G(x_i))$ 是可连续化的, 是指适当定义该函数在 $\left\| \frac{\partial \bar{V}(x_i)}{\partial x_i} G(x_i) \right\| = 0$ 的值之后, 该函数即为连续函数(例如, 函数 $t/|t|$ 即为可连续化函数)。由函数 $\rho(x_i)/(\left\| \frac{\partial \bar{V}(x_i)}{\partial x_i} \right\| G(x_i))$ 可连续化即知, 若 $\left\| \frac{\partial \bar{V}(x_i)}{\partial x_i} \right\| G(x_i)|_{x_i^0} = 0$, 则 $\rho(x_i^0) = 0$ 。

考察系统(3.19)的不确定项, 由式(3.22)和(3.27)知, 我们要求孤立了系统的不确定部分具有相同结构的界函数, 这是和实际相吻合的。在实际工程中, 经常将一些相同或相类似的机械互联网成一个庞大的工作系统以批量生产同类小部件, 这些相同机械由于所处环境及相对位置的差异, 可能会受有不同的扰动, 但这些扰动一般差别不大, 可以用上述式(3.22)和(3.27)予以近似描述, 这是相似系统的一个重要特征。

3.3.3 全息分散鲁棒控制器设计

考虑系统(3.19)的互联项, 由引理 3.1 及 $\eta_{ij}(\cdot)$ 是 C^∞ 函数以及 $\eta_{ij}(0) = 0$ 知道, 存在 C^∞ 函数 $\zeta_{ij}(\cdot)$, 使得

$$\eta_{ij}(r) = \zeta_{ij}(r)r \quad i \neq j \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (3.28)$$

其中 $\zeta_{ij}(\cdot)$ 可由式

$$\zeta_{ij}(r) = \begin{cases} \frac{\eta_{ij}(r)}{r} & r \neq 0 \\ \eta_{ij}^+(0) & r = 0 \end{cases} \quad i \neq j \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (3.29)$$

求得。于是有如下的结论。

定理 3.3 设非线性相似组合大系统满足假设 3.5 ~ 3.7, $W(x) = (w_{ij}(x))_{N \times N}$ 是 N 阶函数阵, 其中

$$w_{ii}(x) = \begin{cases} k_3 & i = j \\ -2k_4\zeta_{ii}(\|x_i\|) & i \neq j \end{cases}$$

如果 $W^T(x) + W(x)$ 是正定的, 则系统(3.19)可用结构全息分散控制器鲁棒镇定。

证明 令

$$E = \left\{ x \mid G^T(x) \frac{\partial \bar{V}(x)}{\partial x} = 0 \right\}$$

其中 \bar{V} 由假设 3.6 给出。对系统(3.19), 设计控制器

$$u_i = u^a(x_i) + u^b(x_i) + u^c(x_i) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.30)$$

其中

$u^a(\cdot)$ 由假设 3.6 给出

$$u^b(x_i) = \begin{cases} -\frac{G^T(x_i) \frac{\partial \bar{V}(x_i)}{\partial x_i}}{\|G^T(x_i) \frac{\partial \bar{V}(x_i)}{\partial x_i}\|} \hat{\xi}(x_i) & x_i \notin E \\ 0 & x_i \in E \end{cases}$$

$$u^c(x_i) = \begin{cases} -\frac{G^T(x_i) \frac{\partial \bar{V}(x_i)}{\partial x_i}}{\|G^T(x_i) \frac{\partial \bar{V}(x_i)}{\partial x_i}\|^2} \rho(x_i) & x_i \notin E \\ 0 & x_i \in E \end{cases}$$

考察式(3.30)的结构即知, 它是一结构全息鲁棒控制器, 且是分散的。于是只须证式(3.30)分别与系统(3.19)和系统(3.20)构成

的闭环系统均渐近稳定即可。

首先考虑式(3.30)与系统(3.19)构成的闭环系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= f(x_i) + \Delta f_i(x_i) + G(x_i)(u^*(x_i)) + \\ &\quad u^b(x_i) + u^c(x_i) + \Delta g_i(x_i)) + \\ &\quad \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N H_{ij}(x_j) \quad i = 1, 2, \dots, N\end{aligned}\quad (3.31)$$

对于系统(3.31),构造函数

$$V(x_1, x_2, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^N \bar{V}(x_i)$$

其中 $\bar{V}(\cdot)$ 由假设 3.6 给出, 所以 $V(x_1, x_2, \dots, x_N)$ 是一正定函数, 它沿着系统(3.31) 的状态轨线的导数为

$$\begin{aligned}V(x)|_{(3.31)} &= \sum_{i=1}^N \left\{ \left[\frac{\partial \bar{V}(x_i)}{\partial x_i} \right]^T (f(x_i) + G(x_i)u^*(x_i)) + \right. \\ &\quad \left[\frac{\partial \bar{V}(x_i)}{\partial x^i} \right]^T (\Delta f_i(x_i) + G(x_i)u^c(x_i)) + \\ &\quad \left[\frac{\partial \bar{V}(x_i)}{\partial x_i} \right]^T G(x_i)(u^b(x_i) + \Delta g_i(x_i)) + \\ &\quad \left. \left[\frac{\partial \bar{V}(x_i)}{\partial x_i} \right]^T \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N H_{ij}(x_j) \right\} \quad i = 1, 2, \dots, N\end{aligned}\quad (3.32)$$

由假设 3.6 得

$$\left[\frac{\partial \bar{V}(x_i)}{\partial x_i} \right]^T (f(x_i) + G(x_i)u^*(x_i)) \leq - \sum_{i=1}^N k_3 \|x_i\|^2 \quad (3.33)$$

由 $u^b(\cdot)$ 的结构及假设 3.5 有

当 $x \in E$ 时, 有

$$\left[\frac{\partial \bar{V}(x_i)}{\partial x_i} \right]^T G(x_i)(u^b(x_i) + \Delta g_i(x_i)) =$$

$$\left(\mathbf{G}^T(\mathbf{x}_i) \frac{\partial \bar{V}(\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}_i} \right)^T (\mathbf{u}_i^b(\mathbf{x}_i) + \Delta g_i(\mathbf{x}_i)) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N$$

当 $\mathbf{x} \in E$ 时, 有

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \bar{V}(\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}_i} \right)^T \mathbf{G}(\mathbf{x}_i) (\mathbf{u}_i^b(\mathbf{x}_i) + \Delta g_i(\mathbf{x}_i)) = \\ & \left(\frac{\partial \bar{V}(\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}_i} \right)^T \mathbf{G}(\mathbf{x}_i) \left(- \frac{\mathbf{G}^T(\mathbf{x}_i) \frac{\partial V(\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}_i}}{\| \mathbf{G}^T(\mathbf{x}_i) \frac{\partial V(\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}_i} \|} \xi(\mathbf{x}_i) + \right. \\ & \left. \Delta g_i(\mathbf{x}_i) \right) = - \| \mathbf{G}^T(\mathbf{x}_i) \frac{\partial \bar{V}(\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}_i} \| \xi(\mathbf{x}_i) + \\ & \left(\frac{\partial \bar{V}(\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}_i} \right)^T \mathbf{G}(\mathbf{x}_i) \Delta g_i(\mathbf{x}_i) \leqslant \\ & - \| \mathbf{G}^T(\mathbf{x}_i) \frac{\partial \bar{V}(\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}_i} \| \xi(\mathbf{x}_i) + \\ & \| (\frac{\partial \bar{V}(\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}_i})^T \mathbf{G}(\mathbf{x}_i) \| + \| \Delta g_i(\mathbf{x}_i) \| \leqslant 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

所以, 对于定义域上的 \mathbf{x} 有

$$\left(\frac{\partial \bar{V}(\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}_i} \right)^T \mathbf{G}(\mathbf{x}_i) (\mathbf{u}_i^b(\mathbf{x}_i) + \Delta g_i(\mathbf{x}_i)) \leqslant 0 \quad (3.34)$$

由 $\mathbf{u}^c(\cdot)$ 的结构及假设 3.6 有

(1) 当 $\mathbf{x} \in E$ 时,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \bar{V}(\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}_i} \right)^T (\Delta f_i(\mathbf{x}_i) + \mathbf{G}(\mathbf{x}_i) \mathbf{u}^c(\mathbf{x}_i)) = \\ & \left(\frac{\partial \bar{V}(\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}_i} \right)^T \Delta f_i(\mathbf{x}_i) \leqslant \\ & \| (\frac{\partial \bar{V}(\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}_i})^T \Delta f_i(\mathbf{x}_i) \| \leqslant \rho(\mathbf{x}_i) = 0 \end{aligned}$$

其中最后一个关系式由注 3.6 而得。

(2) 当 $\mathbf{x} \notin E$ 时,

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial \bar{V}(\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}_i} \right)^T (\Delta f_i(\mathbf{x}_i) + \mathbf{G}(\mathbf{x}_i) \mathbf{u}^c(\mathbf{x}_i)) = \\
& \left(\frac{\partial \bar{V}(\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}_i} \right)^T \Delta f_i(\mathbf{x}_i) + \left(\frac{\partial \bar{V}(\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}_i} \right)^T \times \\
& \mathbf{G}(\mathbf{x}_i) \left[\frac{\mathbf{G}^T(\mathbf{x}_i) \frac{\partial \bar{V}(\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}_i}}{\| \mathbf{G}^T(\mathbf{x}_i) \frac{\partial \bar{V}(\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}_i} \|^2} \rho(\mathbf{x}_i) \right] \leqslant \\
& \| \left(\frac{\partial \bar{V}(\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}_i} \right)^T \Delta f_i(\mathbf{x}_i) \| - \rho(\mathbf{x}_i) \leqslant 0 \quad i = 1, 2, \dots, N
\end{aligned}$$

所以, 对任意的 $\mathbf{x} \in \Omega$, 均有

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \bar{V}(\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}_i} \right)^T (\Delta f_i(\mathbf{x}_i) + \mathbf{G}(\mathbf{x}_i) \mathbf{u}^c(\mathbf{x}_i)) \leqslant 0 \quad (3.35)$$

将式(3.33), (3.34), (3.35) 代入式(3.32) 得

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\mathbf{x})|_{(3.31)} & \leqslant \sum_{i=1}^N k_3 \| \mathbf{x}_i \|^2 + \sum_{i=1}^N \left[\left(\frac{\partial \bar{V}(\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}_i} \right)^T \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N H_{ij}(\mathbf{x}_i) \right] \leqslant \\
& \sum_{i=1}^N k_3 \| \mathbf{x}_i \|^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N [k_4 \| \mathbf{x}_i \| \eta_{ij}(\| \mathbf{x}_j \|)] = \\
& = \left(\sum_{i=1}^N k_3 \| \mathbf{x}_i \|^2 - \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (k_4 \| \mathbf{x}_i \| \zeta_{ij} \times \right. \\
& \left. (\| \mathbf{x}_j \|) \| \mathbf{x}_i \| + \| \mathbf{x}_j \|) \right) = \\
& = \frac{1}{2} (\| \mathbf{x}_1 \| \| \mathbf{x}_2 \| \cdots \| \mathbf{x}_N \|) \\
& (\mathbf{W}^T(\mathbf{x}) + \mathbf{W}(\mathbf{x})) \begin{bmatrix} \| \mathbf{x}_1 \| \\ \| \mathbf{x}_2 \| \\ \vdots \\ \| \mathbf{x}_N \| \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

由 $\mathbf{W}^T(\mathbf{x}) + \mathbf{W}(\mathbf{x})$ 的正定性即知 $\dot{V}(\mathbf{x})|_{(3.31)}$ 负定。于是, 系统(3.31)渐近稳定。

对于式(3.30)与系统(3.20)构成的闭环系统,构造同样的Lyapunov函数,完全仿照上述分析易知,它也是渐近稳定的。

综上所述,系统(3.19)可用结构全息分散控制器鲁棒镇定。

[证毕]

注 3.7 定理3.3中的 $W(x)$ 是一函数阵,由 $W^T(x) + W(x)$ 的正定性结合其它条件的成立范围可估计系统(3.19)镇定域的大小。如果上述证明中的Lyapunov函数 $V(x_1, x_2, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^N \bar{V}(x_i)$ 取为代有加权系数的Lyapunov函数 $V(x_1, x_2, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^N d_i \bar{V}(x_i)$ ($d_i > 0$),则适当选取加权系数 d_i 能增大系统的镇定域。

注 3.8 定理3.3的证明实质上已设计出了系统(3.19)的结构全息分散控制器,这样的控制器在集合 E 上是松弛的,称 E 为松弛集。

下面考虑名义子系统是线性的,且各孤立子系统以某种相似方式互联,即考虑如下的由相似系统以相似方式互联而成的相似组合大系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= Ax_i + \Delta f_i(x_i) + B(u_i + \Delta g_i(x_i)) + \\ &\quad (H(x) + \Delta H(x))x_i \quad i = 1, 2, \dots, N\end{aligned}\quad (3.36)$$

其中 A, B 分别是 n 阶和 $n \times m$ 阶常值阵,且 (A, B) 能控, $H(x)x_i$ 是确定的互联项, $\Delta H(x)x_i$ 是不确定的互联项。

由 (A, B) 是能控对知,存在矩阵 K ,使 $A - BK$ 是Hurwitz稳定阵,所以对任一正定阵 Q ,必有惟一的正定阵 P ,使得

$$(A - BK)^T P + P(A - BK) = -Q \quad (3.37)$$

定理 3.4 设系统(3.36)满足如下条件:

$$\begin{aligned}(1) \quad &\|\Delta g_i(x_i)\| \leq \xi(x_i) \quad i = 1, 2, \dots, N \\ &\|\Delta f_i(x_i)\| \leq \rho(x_i) \quad i = 1, 2, \dots, N\end{aligned}$$

$$\|\Delta H(x)\| \leq \eta(x)$$

其中 $\xi(\cdot), \rho(\cdot)$ 及 $\eta(\cdot)$ 均为已知的连续函数, 且 $\frac{\rho(x_i)}{\|B^T P x_i\|}$ 是可连续化函数;

$$(2) \lambda_{\min}(Q) = 2\lambda_{\max}(P)\eta(x) - 2\lambda_M(PH(x)) > 0$$

其中 $\lambda_{\min}(\cdot), \lambda_{\max}(\cdot), \lambda_M(\cdot)$ 分别表示矩阵的最小特征值、最大特征值以及最大奇异值。

则系统(3.36)可用结构全息控制器分散镇定。

证明 设计控制器

$$u_i = -Kx_i + u^1(x_i) + u^2(x_i) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.38)$$

其中增益阵 K 由式(3.37)确定,

$$\begin{aligned} u^1 &= \begin{cases} -\frac{B^T P x_i}{\|B^T P x_i\|} \xi(x_i) & B^T P x_i \neq 0 \\ 0 & B^T P x_i = 0 \end{cases} \\ u^2 &= \begin{cases} -\frac{B^T P x_i}{\|B^T P x_i\|^2} \|x_i\| \lambda_{\max}(P) \rho(x_i) & B^T P x_i \neq 0 \\ 0 & B^T P x_i = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

则系统(3.36)与(3.38)构成的闭环系统为

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= Ax_i + \Delta f_i(x_i) + B(-Kx_i + \\ &\quad u^1(x_i) + u^2(x_i) + \Delta g_i(x_i)) + (H(x) + \Delta H(x))x_i \\ &\quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.39) \end{aligned}$$

对系统(3.39), 构造正定函数

$$V = \sum_{i=1}^N x_i^T P x_i$$

其中正定阵 P 由式(3.37)确定. 注意到当 $B^T P x_i \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned} x_i^T P (\Delta f_i(x_i) + B u^1(x_i)) &= \\ x_i^T B \Delta f_i(x_i) - \frac{x_i^T P B B^T P x_i}{\|B^T P x_i\|^2} \|x_i\| \lambda_{\max}(P) \rho(x_i) &\leq 0 \end{aligned}$$

仿照定理 3.3 的论证得

$$\begin{aligned}
 V|_{(3.39)} &= \\
 &= \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_i + 2 \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i^T \mathbf{P}(\mathbf{H}(\mathbf{x}) + \Delta \mathbf{H}(\mathbf{x})) \mathbf{x}_i \leqslant \\
 &= \sum_{i=1}^N \lambda_{\min}(\mathbf{Q}) \|\mathbf{x}_i\|^2 + \\
 &\quad 2 \sum_{i=1}^N (\lambda_M(\mathbf{PH}(\mathbf{x})) + \lambda_{\max}(\mathbf{P})\eta(\mathbf{x})) \|\mathbf{x}_i\|^2 \leqslant \\
 &= \sum_{i=1}^N (\lambda_{\min}(\mathbf{Q}) - 2\lambda_M(\mathbf{PH}(\mathbf{x}))\eta(\mathbf{x}) - 2\lambda_{\max}(\mathbf{P})\eta(\mathbf{x})) \|\mathbf{x}_i\|^2
 \end{aligned}$$

结合定理 3.3 的证明及条件(2)即知定理 3.4 结论成立。〔证毕〕

注 3.9 定理 3.4 考虑了确定互联项和不确定互联项可分离的情形。现有的结果大都是对互联项统一进行估计,而定理 3.4 中则对确定互联项及不确定互联项分别予以处理,所得结论的保守性一般较低,从而提高了系统的鲁棒性。

3.4 例 证

这一节通过两个数值例子,说明本章所得的有关结论以及全息控制器的设计方法。

例 3.1 考虑非线性组合系统

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{x}}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_{11} f_1(\mathbf{x}_1, t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \times \\
 &\quad (u_1 + \xi_1(\mathbf{x}_1, t)) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{10} \delta_2 \|\mathbf{x}_2\| \end{bmatrix} \\
 \dot{\mathbf{x}}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_{21} f_2(\mathbf{x}_2, t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \times \\
 &\quad (u_2 + \xi_2(\mathbf{x}_2, t)) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{20} \delta_1 \|\mathbf{x}_1\| e^{(\|\mathbf{x}_1\|-2)} \end{bmatrix} \quad (3.40)
 \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{x}_1 = \text{col}(\mathbf{x}_{11}, \mathbf{x}_{12}), \mathbf{x}_2 = \text{col}(\mathbf{x}_{21}, \mathbf{x}_{22}) \in \mathbb{R}^2, u_1, u_2 \in \mathbb{R}^1$ 分别是系统状态变量及输入, $\delta_j \in E_j \in (-1, 1)$ ($j = 1, 2$) 是不确定参数 (可以是时变的), $\| \mathbf{x}_i f_i(\mathbf{x}_i, t) \| \leq \frac{1}{4} \|\mathbf{x}_i\|$, $\| \xi_i(\mathbf{x}_i, t) \| \leq \|\mathbf{x}_i\|^3 e^{-t}$ ($i = 1, 2$)。

直接计算得

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_1 &= I & \mathbf{T}_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{F}_1 &= -[1, 0] & \mathbf{F}_2 &= \mathbf{F}_1 \\ \eta_1(\|\mathbf{x}_2\|) &= \frac{1}{10} & \eta_2(\|\mathbf{x}_1\|) &= \frac{1}{20} e^{-(\|\mathbf{x}_1\|-2)} \\ \rho(\mathbf{x}_i, t) &= \|\mathbf{x}_i\|^3 e^{-t} & \gamma(\|\mathbf{x}_i\|) &= \frac{1}{4} \|\mathbf{x}_i\| \\ \kappa(\mathbf{x}_i) &= \frac{1}{4} & i &= 1, 2\end{aligned}$$

选取 $K = [-1 \quad -2], Q = 2I$, 则 $P = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 。

由 $\mathbf{B}_i^T (\mathbf{T}_i^{-1})^T P \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{x}_i = x_{ii}$ 可以看出假设 3.4 成立, 按照定理 3.2 有

$$W(x) = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{4}(2 + \sqrt{2}) \\ -\frac{11 + \sqrt{113}}{20} e^{-(\|\mathbf{x}_1\|-2)} & 3 - \sqrt{5} \end{bmatrix}$$

令 $\Omega = \{\mathbf{x}_{11}, \mathbf{x}_{12}, \mathbf{x}_{21}, \mathbf{x}_{22} \mid \mathbf{x}_{21}, \mathbf{x}_{22} \in \mathbb{R}^1, \|\mathbf{x}_1\| < 2.51\}$, 则系统(3.40)在区域 Ω 上可用如下的结构全息分散控制器鲁棒稳定化。

$$\begin{aligned}u_i &= F_i \mathbf{x}_i + (1 - 2) \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{x}_i + \\ v_i(\mathbf{x}_i, t) &+ \omega_i(\mathbf{x}_i) \quad i = 1, 2, \dots, N\end{aligned}\tag{3.41}$$

其中

$$v_i(\mathbf{x}_i, t) =$$

$$\begin{aligned} \omega_i(\mathbf{x}_i) = & \begin{cases} -\frac{[1 \ 1]\mathbf{T}_i^{-1}\mathbf{x}_i}{\|[1 \ 1]\mathbf{T}_i^{-1}\mathbf{x}_i\|} \|\mathbf{x}_i\|^3 e^{-\|1 \ 1]\mathbf{T}_i^{-1}\mathbf{x}_i\|} & [1 \ 1]\mathbf{T}_i^{-1}\mathbf{x}_i \neq 0 \\ 0 & [1 \ 1]\mathbf{T}_i^{-1}\mathbf{x}_i = 0 \end{cases} \quad (i=1,2) \\ & -\frac{1}{5} \frac{[1 \ 1]\mathbf{T}_i^{-1}\mathbf{x}_i}{\|[1 \ 1]\mathbf{T}_i^{-1}\mathbf{x}_i\|^2} \lambda \times \\ & \begin{cases} (\mathbf{T}_i^{-1})^\top \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{T}_i^{-1} & \|\mathbf{x}_i\| \quad [1 \ 1]\mathbf{T}_i^{-1}\mathbf{x}_i \neq 0 \\ 0 & [1 \ 1]\mathbf{T}_i^{-1}\mathbf{x}_i = 0 \end{cases} \quad (i=1,2) \end{aligned}$$

注 3.10 如果按照定理 3.1 设计控制器, 则所得的区域可由式

$$\tilde{\Omega} = \{(\mathbf{x}_{11}, \mathbf{x}_{12}, \mathbf{x}_{21}, \mathbf{x}_{22}) \mid \mathbf{x}_{21}, \mathbf{x}_{22} \in \mathbb{R}^1, \|\mathbf{x}_1\| < 2.1\}$$

估计。显然 Ω 比 $\tilde{\Omega}$ 大, 更重要的是如果孤立子系统的非匹配不确定项较大时, 一般来说, 定理 3.1 就不再成立。在这种情况下, 如果假设 3.4 满足, 则定理 3.2 便是解决这一问题的有效手段。

例 3.2 考虑非线性相似组合系统

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 = & \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_1 + \begin{bmatrix} \theta_1 \mathbf{x}_{11} \mathbf{x}_{12} e^{x_{12}} \\ 2 \mathbf{x}_{12}^2 e^{x_{12}} \sin \theta_2 \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (u_1 + \mathbf{x}_{12}^2 \sin^2 \theta_2) + 14 \times \\ & \begin{bmatrix} (x_{11}^2 + x_{12}^2 + x_{21}^2 + x_{22}^2)^{\frac{1}{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_1 + \Delta H(\mathbf{x}) \mathbf{x}_1 \quad (3.42) \\ \dot{\mathbf{x}}_2 = & \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_2 + \begin{bmatrix} \theta_2^2 \mathbf{x}_{21} \mathbf{x}_{22} e^{x_{22}} \\ \mathbf{x}_{22}^2 e^{x_{22}} \cos \theta_1 \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (u_2 + \frac{1}{2} \mathbf{x}_{22}^2 \theta_1) + \\ & 14 \begin{bmatrix} (x_{11}^2 + x_{12}^2 + x_{21}^2 + x_{22}^2)^{\frac{1}{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_2 + \Delta H(\mathbf{x}) \mathbf{x}_2 \end{aligned}$$

其中 $x_i = \text{col}(x_{i1}, x_{i2})$ ($i = 1, 2$), $\theta_1 \in (-2, 2)$, $\theta_2 \in (-1, 1)$ 是不确定参数, $\|\Delta H(x)\| \leq \frac{1}{4} \|x\|$ 是结构不确定项。

取 $Q = I$, $K = [0 \ 1]$, 则 Lyapunov 方程的解为 $P = \frac{1}{2}$ 。容易看出

$$\xi(x_i) = 2 \|x_i\|^2 e^{-x_i} \quad \rho(x_i) = x_{i2}^2, \quad \eta(x) = \frac{1}{4} \|x\|$$

显见 $\frac{\rho(x_i)}{\|B^\top P x_i\|} = \frac{x_{i2}^2}{\frac{1}{2} |x_{i2}|}$ 是可连续化函数。考察定理 3.4 的条件

(2) 知, 当 $\|x\| < 2$ 时, 即当

$$x \in \{x \mid \|x\| < 2\} = \Omega$$

时, 定理 3.4 条件(2)满足, 故在区域 Ω 上, 系统可用结构全息控制器分散镇定, 且分散鲁棒控制器为

$$u_i = -[0 \ 1]x_i + u^+(x_i) + u^-(x_i) \quad i = 1, 2$$

其中

$$u^+(x_i) = \begin{cases} 2 \frac{x_{i2}}{|x_{i2}|} \|x_i\|^2 e^{-x_i} & x_{i2} \neq 0 \\ 0 & x_{i2} = 0 \end{cases} \quad i = 1, 2$$

$$u^-(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{x_{i2}^2}{|x_{i2}|} \|x_i\|^2 e^{-x_i} & x_{i2} \neq 0 \\ 0 & x_{i2} = 0 \end{cases} \quad i = 1, 2$$

注 3.11 上述两例给出了在非匹配条件下, 非线性相似组合系统控制器的设计方法, 这对于实际工程设计有一定的参考价值, 也有助于加深读者对本章结论的理解。

第四章 非线性相似组合大系统的观测器设计

第二章和第三章的理论研究都是在系统状态已知的条件下进行的,而实际系统状态一般仅是部分可知的。所以,研究系统状态观测器设计无疑是一项颇有实际意义的工作。

本章将对具有相似结构的组合大系统进行分析。首先对一类不确定非线性相似组合大系统设计出一种鲁棒变结构渐近观测器,然后利用几何方法和分析法相结合,对由一般非线性控制系统互联而成的相似组合大系统给出其渐近观测器的设计方案。结果将表明,相似结构能简化组合大系统的理论分析及组合大系统观测器的工程设计。

4.1 概 述

近年来,随着科学技术的发展,非线性系统的研究受到了人们的普遍重视。但由于非线性系统的复杂性,其观测器的设计一般是比较困难的。与镇定问题相比,非线性系统观测器的研究无论从投入的力量与所取得的成果都要逊色得多^[41],且一般非线性系统观测器的设计都要求很强的限制条件^[42]。

目前,关于线性组合大系统和非线性系统的观测器设计已取得了一些成果^[43~46],但对于非线性组合大系统,由于其中不仅有系统的非线性特性,而且有子系统之间的互联作用,因而其相应的研究成果极少。已有的—些成果或者是关于线性系统受非线性扰

动,或者是通过近似线性化方法,总之,在很大程度上依赖于系统的线性特性^[47~50]。

考虑非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (4.1)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$, $u, y \in \mathbb{R}^m$ 分别是系统的状态、输入和输出。

定义 4.1 对于非线性系统(4.1),如果存在动态系统

$$\dot{\hat{x}} = \hat{f}(\hat{x}, u, y) \quad (4.2)$$

使得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x - \hat{x}\| = 0$$

则称式(4.2)是系统(4.1)的渐近状态观测器。

注 4.1 本章所涉及的观测器均系指渐近状态观测器。

4.2 非线性控制系统研究

这一节将给出一般非线性系统的有关结论。

考虑一般非线性系统(4.1),假设 $(x_0, u_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, 函数 $f(x, u)$ 是 (x_0, u_0) 某邻域 $\Omega_0 \times U_0$ (Ω_0, U_0 分别是 x_0 和 u_0 的邻域) 上的光滑向量场, $h = (h_1 \ h_2 \ \cdots \ h_m)^T$, $h_i(x)(i = 1, 2, \dots, m)$ 是 Ω_0 上的 C^∞ 函数。

定义 4.2 称 U 为系统(4.1)在 Ω_0 上的容许控制集,如果对任意的 $u \in U$ 方程 $\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ 有惟一连续可微解 $x(t_0, t, u)$, 且存在 $T(x_0)$ 使得 $\{x(t_0, t, u) \mid t \geq T(x_0)\} \subset \Omega_0$ 。

定义 4.3 对于系统(4.1),如果存在 (x_0, u_0) 点某邻域 $\Omega_0 \times U_0$ ($U_0 \subset U$) 及正整数 r_1, r_2, \dots, r_m , 使得

(1) 对任意的 $(x, u) \in \Omega_0 \times U_0$, $0 \leq k \leq r_i - 1$ 及 $0 \leq i \leq m$ 有

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} L_{f(\mathbf{x}, \mathbf{u})}^k h_i(\mathbf{x}) = 0$$

(2) 函数矩阵 $A(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = (a_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{u}))_{m \times m}$ 在 $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$ 点非奇异, 其中

$$a_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \frac{\partial}{\partial u_j} (L_{f(\mathbf{x}, \mathbf{u})}^k h_i(\mathbf{x})) \quad i, j = 1, 2, \dots, m$$

则称非线性系统(4.1)在 $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$ 点具有相关度 $r = \{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ 。如果系统(4.1)在某区域上每一点都具有相同的相关度 $r = \{r_1, r_2, \dots, r_m\}$, 则称系统(4.1)在该区域具有一致相关度 $r = \{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ 。

注 4.2 如果系统(4.1)退化为仿射非线性系统

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}} = \bar{f}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \bar{g}_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i \\ \mathbf{y} = h(\mathbf{x}) \end{array} \right\} \quad (4.3)$$

则由

$$\frac{\partial}{\partial u_j} L_{f(\mathbf{x}, \mathbf{u})}^k \sum_{i=1}^m g_i(\mathbf{x}) u_i h_i(\mathbf{x}) = L_{g_j} L_f^{k-1} h_i(\mathbf{x})$$

易知定义 4.3 中的相关度概念是仿射非线性系统相关度概念^[22]的更一般推广。

定理 4.1 设系统(4.1)在 $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$ 点具有相关度 $r = \{r_1, r_2, \dots, r_m\}$, 且 $\sum_{i=1}^m r_i = n$, 则

(1) $\mathbf{z} = (z_1^1, \dots, z_{r_1}^1, \dots, z_1^m, \dots, z_{r_m}^m) = T(\mathbf{x})$ 是 \mathbf{x}_0 某邻域的局部坐标, 其中

$$z_j^i = L_{f(\mathbf{x}, \mathbf{u})}^{i-1} h_i(\mathbf{x}) \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, r_i$$

(2) 在局部坐标 \mathbf{z} 下, 系统(4.1)具有如下结构:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}f(T^{-1}(\mathbf{z}), \mathbf{u}) \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{z} \end{array} \right\} \quad (4.4)$$

其中 $\mathbf{A} = \text{diag}\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_m\}$, $\mathbf{B} = \text{diag}\{\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_m\}$, $\mathbf{C} =$

$\text{diag}\{\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \dots, \mathbf{C}_m\}$,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= \begin{bmatrix} \gamma_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \gamma_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \vdots \\ \gamma_m(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_i &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_i = (1 \ 0 \ \cdots \ 0)_{1 \times r_i} \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\gamma_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = L_{f(\mathbf{x}, \mathbf{u})}^i h_i(\mathbf{x}) \quad i = 1, 2, \dots, m$$

证明 (1) 仿照文献[22]中关于仿射非线性系统有关结论的证明即得,也可参见文献[50]。

(2) 由定理4.1的条件及定义4.3知, $z_j^i = L_{f(\mathbf{x}, \mathbf{u})}^{j-1} h_i(\mathbf{x})$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, r_i - 1$ 与控制 \mathbf{u} 无关, 直接计算有

$$\begin{aligned} \dot{z}_j^i &= \frac{\partial L_{f(\mathbf{x}, \mathbf{u})}^{j-1} h_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial L_{f(\mathbf{x}, \mathbf{u})}^{j-1} h_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \\ &L_{f(\mathbf{x}, \mathbf{u})}^j h_i(\mathbf{x}) = z_{j+1}^i \\ \dot{z}_{r_i}^i &= \left[\frac{\partial L_{f(\mathbf{x}, \mathbf{u})}^{r_i-1} h_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{T}^{-1}(z)} = \\ &[L_{f(\mathbf{x}, \mathbf{u})}^i h_i(\mathbf{x})]_{\mathbf{x}=\mathbf{T}^{-1}(z)} = \gamma_i(\mathbf{T}^{-1}(z), \mathbf{u}) \end{aligned}$$

于是,在局部坐标 z 下,系统(4.1)具有如下结构:

$$\dot{z}^i = A_i z^i + B_i \gamma_i(\mathbf{T}^{-1}(z), \mathbf{u})$$

$$\mathbf{y}_i = C_i z^i$$

其中 $A_i, B_i, C_i, \gamma_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 由式(4.5)确定,故定理结论成立。 [证毕]

注 4.3 如果系统(4.1)退化为仿射非线性系统,则在定理4.1的条件下,相应的系统(4.4)一定是线性系统。而对于本节所

述的一般非线性控制系统(4.1),相应的系统(4.4)一般仍然是非线性系统。从定理4.1可以看出,对一般非线性系统(4.1),即使它具有相关度 $r = \{r_1, r_2, \dots, r_m\}$,且 $\sum_{i=1}^m r_i = n$,该系统并不一定能线性化。

4.3 一类相似组合系统的变结构 鲁棒观测器设计

本节将对一类非线性相似组合大系统设计出一种渐近状态观测器,由于所设计的观测器对于不确定参数具有鲁棒性,且其结构是相似的,称其为结构相似鲁棒观测器。

4.3.1 系统描述及预备知识

考虑如下的非线性组合大系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= Ax_i + G_i(x_i, u_i, \theta) + H_i(x) \\ y_i &= Cx_i \quad i = 1, 2, \dots, N\end{aligned}\quad (4.6)$$

其中 $x_i \in \mathbb{R}^n$, $y_i, u_i \in \mathbb{R}^n$ 分别是第*i*个子系统的状态、输出和输入; A, C 是常值阵; $G_i(x_i, u_i, \theta)$, $H_i(x)$ 是其定义域上的*n*维光滑向量场; $\theta \in \Omega \subset \mathbb{R}^q$ (Ω 是紧集)是不确定参数,可以是时变的; $G_i(x_i, u_i, \theta)$ 是不确定项; $H_i(x)$ 是互联项。

考察系统(4.6)的结构,结合下述定理4.2条件(3)对系统不确定项的要求,系统(4.6)可看作是由相似子系统互联而成的,称其为相似组合大系统。这类系统有着极其广泛的实际背景。

引理4.1 设 $f(x)$ ($x \in \mathbb{R}^n$)在区域 E ($E \subset \mathbb{R}^n$)上满足Lipschitz条件,即存在正常数 β ,对一切 $x, \dot{x} \in E$,有 $\|f(\dot{x}) - f(x)\| \leq \beta \|\dot{x} - x\|$,则对任意的对称矩阵 P 有

$$\mathbf{e}^T \mathbf{P} \| f(\hat{\mathbf{x}}) - f(\mathbf{x}) \| \leq \frac{1}{2} (\beta^2 \mathbf{e}^T \mathbf{P}^2 \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbf{e})$$

其中 $\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \in E$, $\mathbf{e} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$ 。

证明 由 \mathbf{P} 的对称性及不等式 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ 知

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^T \mathbf{P} \| f(\hat{\mathbf{x}}) - f(\mathbf{x}) \| &= (\mathbf{P}\mathbf{e})^T \| f(\hat{\mathbf{x}}) - f(\mathbf{x}) \| \leq \\ &\leq \beta \| \mathbf{P}\mathbf{e} \| \| \mathbf{e} \| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} (\| \beta \mathbf{P}\mathbf{e} \|^2 + \| \mathbf{e} \|^2) = \\ &= \frac{1}{2} (\beta^2 \mathbf{e}^T \mathbf{P}^2 \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbf{e}) \end{aligned} \quad [\text{证毕}]$$

4.3.2 鲁棒观测器设计

考察相似组合大系统(4.6)。假设 (A, C) 可检测, 即存在 $n \times m$ 阶矩阵 \mathbf{K} , 使得 $A + \mathbf{K}C$ 是 Hurwitz 稳定阵, 则对任一正定阵 \mathbf{Q} , Lyapunov 方程

$$(A + \mathbf{K}C)^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(A + \mathbf{K}C) = -\mathbf{Q} \quad (4.7)$$

必有惟一正定解矩阵 \mathbf{P} 。于是有如下结论:

定理 4.2 如果相似组合大系统(4.6)满足如下条件:

- (1) (A, C) 可检测;
- (2) $H_i(\mathbf{x})$ ($i = 1, 2, \dots, N$) 满足 Lipschitz 条件, 即

$$\| H_i(\hat{\mathbf{x}}) - H_i(\mathbf{x}) \| \leq \gamma_i \| \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x} \| \quad i = 1, 2, \dots, N$$
- (3) $G_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i, \theta) = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{C}^T g_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i, \theta) \quad i = 1, 2, \dots, N$

(4.8)

其中 \mathbf{P} 由式(4.7)确定, 且 $\| g_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i, \theta) \| \leq \rho_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{y}_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$;

(4) 矩阵 $\mathbf{Q} = \mu^2 \mathbf{P}^2 - I$ 正定, 其中 $\mu = \max\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N\}$, 则系统

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_i = (A + \mathbf{K}C)\hat{\mathbf{x}}_i + L(\hat{\mathbf{x}}_i, \mathbf{y}_i, \rho_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{y}_i)) + H_i(\hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{K}\mathbf{y}_i$$

$$i = 1, 2, \dots, N \quad (4.9)$$

是相似组合大系统(4.6)的鲁棒观测器,其中 $\hat{\mathbf{x}} = \text{col}(\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, \dots, \hat{\mathbf{x}}_N)$ 。

$$L(\hat{\mathbf{x}}_i, \mathbf{y}_i, \rho_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{y}_i)) = \begin{cases} \frac{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{C}^T(\mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_i - \mathbf{y}_i)}{\|\mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_i - \mathbf{y}_i\|} \rho_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{y}_i) & \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_i \neq \mathbf{y}_i \\ 0 & \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_i = \mathbf{y}_i \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N$$

证明 记 $\mathbf{e}_i = \hat{\mathbf{x}}_i - \mathbf{x}_i$, 则误差方程为

$$\dot{\mathbf{e}}_i = (\mathbf{A} + \mathbf{K}\mathbf{C})\mathbf{e}_i + L(\hat{\mathbf{x}}_i, \mathbf{y}_i, \rho_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{y}_i)) - \mathbf{G}_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i, \theta) + \mathbf{H}_i(\hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{H}_i(\mathbf{x})$$

将条件(3)中的式(4.8)代入上述误差方程即得

$$\dot{\mathbf{e}}_i = (\mathbf{A} + \mathbf{K}\mathbf{C})\mathbf{e}_i + L(\hat{\mathbf{x}}_i, \mathbf{y}_i, \rho_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{y}_i)) - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{C}^T g_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i, \theta) + \mathbf{H}_i(\hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{H}_i(\mathbf{x}) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.10)$$

构造正定函数 $V(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_N) = \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T \mathbf{P} \mathbf{e}_i$, 其中 \mathbf{P} 由式(4.7)确定, 则

$$\begin{aligned} V(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_N) |_{(4.10)} = & \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T \mathbf{Q} \mathbf{e}_i + 2 \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T \mathbf{P} (\mathbf{H}_i(\hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{H}_i(\mathbf{x})) + \\ & 2 \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T \mathbf{P} \begin{cases} (-\frac{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{C}^T(\mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_i - \mathbf{y}_i)}{\|\mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_i - \mathbf{y}_i\|} \rho_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{y}_i) - \\ \mathbf{P}^{-1}\mathbf{C}^T g_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i, \theta)) & \mathbf{y}_i = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_i \\ 0 & \mathbf{y}_i \neq \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_i \end{cases} \end{aligned} \quad (4.11)$$

下面分别对上述各项进行分析。由 $\mathbf{y}_i = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_i$ 及 $\|g_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i, \theta)\| \leq \rho_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)$ ($i = 1, 2, \dots, N$) 知

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^\top \mathbf{P} \left\{ -\frac{\mathbf{P}^{-1} \mathbf{C}^\top (\hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{x}}_i - \mathbf{y}_i)}{\|\hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{x}}_i - \mathbf{y}_i\|} \rho_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{y}_i) - \right. \\
& \quad \left. \mathbf{P}^{-1} \mathbf{C}^\top \mathbf{g}_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i, \theta) \right\} \quad \mathbf{y}_i = \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{x}}_i \\
& \quad \quad \quad 0 \quad \mathbf{y}_i \neq \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{x}}_i \\
& = - \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{\mathbf{e}_i^\top \mathbf{C} \mathbf{C}^\top \mathbf{e}_i}{\|\mathbf{C}\mathbf{e}_i\|} \rho_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{y}_i) + \mathbf{e}_i^\top \mathbf{C}^\top \mathbf{g}_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i, \theta) \quad \mathbf{y}_i = \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{x}}_i \right. \\
& \quad \left. 0 \quad \mathbf{y}_i \neq \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{x}}_i \right. \\
& = - \sum_{i=1}^N \left\{ \|\mathbf{C}\mathbf{e}_i\| \rho_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{y}_i) + \mathbf{e}_i^\top \mathbf{C}^\top \mathbf{g}_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i, \theta) \quad \mathbf{y}_i = \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{x}}_i \right. \\
& \quad \left. 0 \quad \mathbf{y}_i \neq \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{x}}_i \right. \\
& \leq - \sum_{i=1}^N (\|\mathbf{C}\mathbf{e}_i\| \rho_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{y}_i) - \|\mathbf{C}\mathbf{e}_i\| \|\mathbf{g}_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i, \theta)\|) \leq 0
\end{aligned} \tag{4.12}$$

令 $\mathbf{H}(\mathbf{x}) = (\mathbf{H}_1(\mathbf{x}) \ \mathbf{H}_2(\mathbf{x}) \ \cdots \ \mathbf{H}_N(\mathbf{x}))^\top$, $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1(t) \ \mathbf{e}_2(t) \ \cdots \ \mathbf{e}_N(t))^\top$, 则由定理 4.2 的条件(2) 知 $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ 满足 Lipschitz 条件, 且有

$$\|\mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{H}(\mathbf{x})\| \leq \mu \|\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\| \tag{4.13}$$

其中 $\mu = \max\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N\}$, 故由引理 4.1 及式(4.13) 即得

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^\top \mathbf{P} (\mathbf{H}_i(\hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{H}_i(\mathbf{x})) \leq \\
& \quad \frac{1}{2} \mu^2 \mathbf{e}^\top (\text{diag}(\mathbf{P}, \mathbf{P}, \dots, \mathbf{P}))^2 \mathbf{e} + \frac{1}{2} \mathbf{e}^\top \mathbf{e} = \\
& \quad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^\top (\mu^2 \mathbf{P}^2 + \mathbf{I}) \mathbf{e}_i
\end{aligned} \tag{4.14}$$

结合式(4.11), (4.12), (4.14) 得

$$\dot{V}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_N)|_{(4.10)} \leq - \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^\top (\mathbf{Q} - \mu^2 \mathbf{P}^2 - \mathbf{I}) \mathbf{e}_i$$

由定理条件(4) 即知, $\dot{V}|_{(4.10)}$ 是负定的, 从而系统(4.10) 是渐近稳定的。所以 $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{e}_1^\top(t) \ \mathbf{e}_2^\top(t) \ \cdots \ \mathbf{e}_N^\top(t))^\top = \mathbf{0}$, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t)\| = 0$, 故(4.10) 是非线性相似组合大系统

(4.6) 的鲁棒观测器。

[证毕]

注 4.4 由定理 4.2 的证明易知, 定理 4.2 条件(4)中的 μ 可用 $H(x) = (H_1^T(x) \ H_2^T(x) \cdots H_N^T(x))^T$ 的 Lipschitz 常数代替, 此时所得结论的保守性一般会降低。另外, 定理 4.2 没有特别指明研究区域, 故所得结论可以是局部的, 也可以是全局的, 这主要取决于定理 4.2 条件成立的区域是局部还是全局的。

注 4.5 考察观测器(4.9)的结构, 易知式(4.9)是一相似组合大系统, 称其为结构相似观测器。定理 4.2 说明, 在一定条件下, 不确定非线性相似组合大系统具有结构相似鲁棒观测器。

注 4.6 观测器(4.9)的一个重要特点在于, 它并不需要系统(4.6)的孤立子系统的非线性部分的精确模型, 而文献[44, 47]的观测器设计均需要系统非线性部分的精确模型, 文献[49]中组合大系统的观测器设计既需要互联项的精确模型, 也需要孤立子系统非线性部分的精确模型。

4.3.3 数例仿真

考虑不确定非线性相似组合大系统

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{aligned} \dot{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \\ &\quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1/4\theta_1 e^{-\theta_2} \sin x_1 + \frac{1}{2} u_1^2 \sin x_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 x_3 \\ 1/4 \sin^2 x_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \\ \begin{aligned} \dot{\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_2 + u_2^2 \sin x_4^2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ y_1 &= (0 \ 1) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ y_2 &= (0 \ 1) \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \end{aligned} \end{array} \right. \quad (4.15)$$

其中 $(\theta_1, \theta_2) \in \Omega = \{(\theta_1, \theta_2) \mid |\theta_1| < 2, |\theta_2| < 1\}$. 试设计系统(4.15)的结构相似鲁棒观测器。

设 $K = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$, $Q = 4I$, 则 $P = 2I$. 计算得 $H(x) = \left(\frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{4}\sin x_1^2 - \frac{1}{2}x_2 - 0 \right)^T$ 的 Lipschitz 常数为 $\frac{1}{2}$, 令

$$\rho_1 = e + u_1^2 \quad \rho_2 = 1 + u_2^2 \quad (4.16)$$

$$g_1(x_1, x_2, \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2}\theta_1 e^{-\theta_2} \sin x_1 + u_1^2 \sin x_2^2$$

$$g_2(x_2, x_4, \theta_1, \theta_2) = \theta_2 + u_2^2 \sin x_4^2$$

容易验证, 定理 4.2 条件均满足, 故系统(4.15)的结构相似鲁棒观测器为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + L(\hat{x}_1, \hat{x}_2, y_1, \rho_1) + \\ &\quad \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \hat{x}_3 \\ \frac{1}{2} \sin^2 \hat{x}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} y_1 \\ \begin{bmatrix} \hat{x}_3 \\ \hat{x}_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_3 \\ \hat{x}_4 \end{bmatrix} + L(\hat{x}_3, \hat{x}_4, y_2, \rho_2) + \\ &\quad \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \hat{x}_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} y_2 \end{aligned}$$

其中

$$L(\hat{x}_1, \hat{x}_2, y_1, \rho_1) = - \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \operatorname{sgn}(\hat{x}_2 - y_1) \rho_1$$

$$L(\hat{x}_3, \hat{x}_4, y_2, \rho_2) = - \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \operatorname{sgn}(\hat{x}_4 - y_2) \rho_2$$

这里 ρ_1, ρ_2 由(4.16)确定, $\operatorname{sgn}(x)$ 即通常的符号函数。取初值 $x(0) = (-0.5 \ 1.5 \ 0.5 \ 2)$, $\dot{x}(0) = (1, 5 - 0.5 - 1, 3)$, $\theta_1 = 1$.

$\theta_2 = 0.5$, 输入 $u_1 = 1$, $u_2 = e^{-t}$ 进行仿真, 其误差曲线如图 4.1 所示, 其中 $e(t) = (e_1(t) \ e_2(t) \ e_3(t) \ e_4(t))^T$, ($e_i(t) = \dot{x}_i(t) - x_i(t)$, $i = 1, 2, 3, 4$). 仿真结果表明本节的方法是非常有效的。

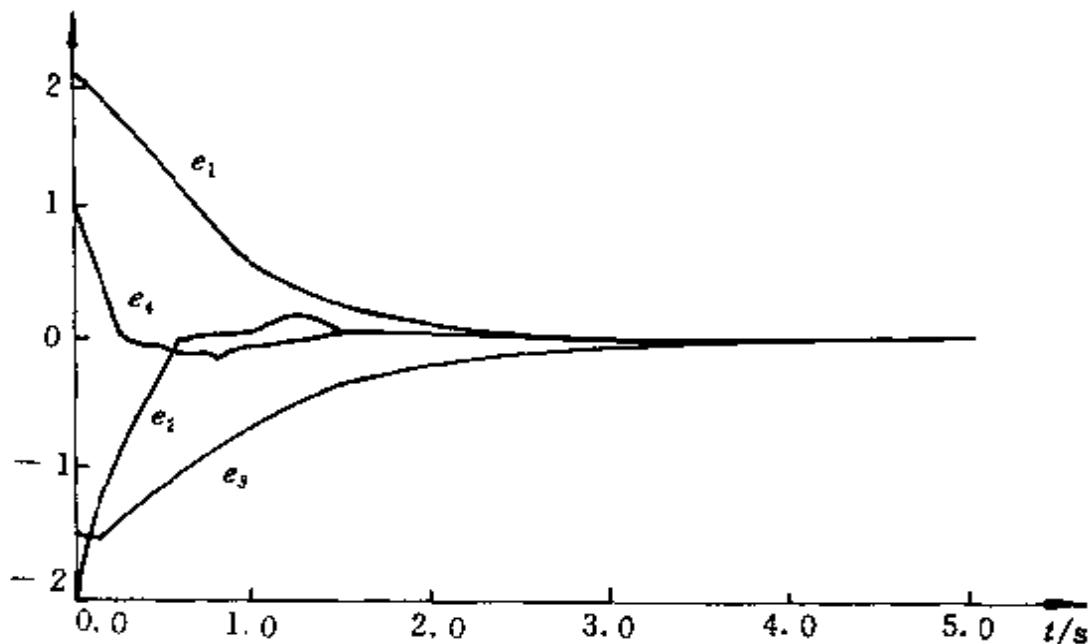


图 4.1 误差曲线 $e(t)$, ($e = (e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_4)^T$)

注 4.7 上述例子给出的观测器(4.17)是相似组合系统(4.15)的全局鲁棒观测器。

这一节给出了一类不确定非线性相似组合大系统的结构相似鲁棒观测器的设计方法。需要指出的是, 这种方法不但适合于相似组合大系统, 而且适合于较一般的组合大系统。对于一般组合大系统, 利用本节的方法所得的观测器一般不再具有相似结构, 且一般需要解 N (N 是子系统的个数) 个 Lyapunov 方程, 因而计算量较大。研究结果表明相似结构能简化组合大系统的理论分析与观测器的设计。

4.4 一般非线性相似组合大系统的渐近观测器

本节将利用现代微分几何法和分析法相结合，并结合 4.2 节的有关结论，给出由一般非线性控制系统经非线性互联而成的相似组合大系统渐近观测器存在的充分条件。最后，通过一数值算例说明一般非线性相似组合大系统观测器的设计方法。

4.4.1 系统描述

考虑如下两个非线性系统

$$\Sigma_1: \begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x) \end{cases}$$

$$\Sigma_2: \begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \tilde{f}(\tilde{x}, u) \\ y = h(x) \end{cases}$$

其中 $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ 分别是系统 Σ_1 和 Σ_2 的状态向量， $u, y \in \mathbb{R}^m$ 分别是 Σ_1 和 Σ_2 的输入和输出。

引理 4.2 如果系统 Σ_1 和系统 Σ_2 在紧集 E 上相似， D 为系统 Σ_1 到系统 Σ_2 的相似元， $\hat{\Sigma}_1$ 是 Σ_1 的渐近观测器，且 Σ_2 在 D 确定的坐标下的结构形式为 $\hat{\Sigma}_2$ ，则 $\hat{\Sigma}_2$ 是系统 Σ_2 的渐近观测器。

证明 设系统 $\hat{\Sigma}_1$ 和 $\hat{\Sigma}_2$ 的状态变量分别为 \hat{x} 和 \tilde{x} ，则由题设条件得

$$\tilde{x} = D(x), \quad \hat{x} = D(\tilde{x})$$

由于 $\hat{\Sigma}_1$ 是系统 Σ_1 的渐近观测器，所以

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{x} - x\| = 0$$

由 Σ_2 在 D 确定的坐标下的结构形式为 $\hat{\Sigma}_2$ 可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{x} - \tilde{x}\| = 0$$

所以

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{x} - x\| = 0$$

结合微分同胚的性质即得, 以紧集 E 上

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{x} - x\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|D(\tilde{x}) - D(x)\| = 0$$

即 $\hat{\Sigma}_2$ 是系统 Σ_2 的渐近观测器。 [证毕]

考虑如下的非线性组合大系统

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_i = f_i(x_i, u_i) + \Phi_i(x) \\ y_i = h_i(x_i) \end{array} \right\} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.18)$$

其中 $x_i \in \mathbb{R}^n$, $u_i, y_i \in \mathbb{R}^m$ 分别是第 i 个子系统的状态、输入和输出; $x = \text{col}(x_1, x_2, \dots, x_N)$, $(x_i, u_i) \in \Omega_i \times U_i$, $f_i(x_i, u_i)$, $\Phi_i(x)$ 分别是其定义域 $\Omega_i \times U_i$ 和 Ω 上的光滑向量场; $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_N$ 是 $x_0 \in \mathbb{R}^{Nn}$ 的某个邻域; $h_i = (h_{i1}(x_i), h_{i2}(x_i), \dots, h_{im}(x_i))^T$, $h_{ij}(x_i) \in C^\infty(\Omega_i)$ ($i = 1, 2, \dots, N$, $j = 1, 2, \dots, m$), $U = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_N$ 是容许控制。

定义 4.4 如果系统(4.18)的 N 个孤立子系统

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_i = f_i(x_i, u_i) \\ y_i = h_i(x_i) \end{array} \right\} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.19)$$

在其研究区域上是彼此相似的, 则称系统(4.18)为相似组合大系统。

4.4.2 渐近观测器设计

考察系统(4.18), 如果系统(4.18)是相似组合大系统, 由于其各个孤立子系统彼此相似, 所以它们必须相似于同一个系统。结合引理 4.2 即知, 只须考虑如下有非线性相似组合大系统

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_i = f(x_i, u_i) + H_i(x) \\ y_i = h(x_i) \end{array} \right\} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.20)$$

首先考虑系统(4.20)的孤立子系统

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_i = f(x_i, u_i) \\ y_i = h(x_i) \end{array} \right\} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.21)$$

假设系统(4.21)在区域 $\Omega_i \times U_i$ 上具有一致相关度 $r = \{r_1, r_2, \dots, r_m\}$, 且 $\sum_{j=1}^m r_j = n$ 。在 Ω 上构造微分同胚 $T = (T^1 \ T^2 \ \dots \ T^N)$: $x \rightarrow z$ 如下:

$$T^i: z_{jl}^i = L_{f(x_l, u_l)}^{l-1} h_j(x_l)$$

$$i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, m; l = 1, 2, \dots, r_j \quad (4.22)$$

其中 $z^i = \text{col}(z_1^i, z_2^i, \dots, z_m^i) = T^i(x_i)$, $z_j^i = \text{col}(z_{j1}^i, z_{j2}^i, \dots, z_{jr_j}^i)$

由 T 的定义式(4.22)知, T^1, T^2, \dots, T^N 的结构形式是相同的, 只是定义域有可能不同而已。为了方便, 记 $D = T^1 = T^2 = \dots = T^N$ 。由定理 4.1 知 T 是一微分同胚, 从而 z 是区域 Ω 上的局部坐标, 且在 z 坐标下, 系统(4.20)具有如下的结构:

$$\begin{aligned} \dot{z}^i &= Az^i + B\Gamma(D^{-1}(z^i), u_i) + R_i(T^{-1}(z)) \\ y &= Cz^i \end{aligned} \quad (4.23)$$

其中 $R_i(x) = \frac{\partial D(x_i)}{\partial x_i} H_i(x)$, (A, C) 能检测, 所以存在矩阵 $K = \text{diag}\{K_1, K_2, \dots, K_N\}$ 使得 $A - KC$ 是 Hurwitz 稳定阵, 故对任一正定阵 Q , Lyapunov 方程

$$(A - KC)^T P + P(A - KC) = -Q \quad (4.24)$$

有惟一正定阵 P , 于是有如下结论。

定理 4.3 设系统(4.20)满足如下条件:

(1) 式(4.20)的孤立子系统在区域 $\Omega_i \times U_i$ 上具有一致相关度 $r = \{r_1, r_2, \dots, r_m\}$, 且 $\sum_{j=1}^m r_j = n$;

(2) $\Gamma(x_i, u_i)$ 关于 $u_i \in U_i$ 在 Ω_i 上一致满足 Lipschitz 条件, 且其 Lipschitz 常数为 α ;

(3) $R_i(x) = \frac{\partial D(x_i)}{\partial x_i} H_i(x)$ 在 Ω 上满足 Lipschitz 条件, 且其 Lipschitz 常数为 β_i , 其中 $D = T^i$ 由式(4.22)确定, D 在 Ω 上满足 Lipschitz 条件, 且其 Lipschitz 常数为 ϵ ;

(4) 矩阵

$$\mathbf{W} = \mathbf{Q} - 2\epsilon\lambda_M(\mathbf{PB})(\alpha + \max_i\{\beta_i\})\mathbf{I}$$

$$i = 1, 2, \dots, N \quad (4.25)$$

在区域 Ω 正定, 其中 $\lambda_M(\cdot)$ 表示矩阵的最大奇异值。

则系统(4.20) 在区域 Ω 上存在渐近观测器。

证明 考虑系统

$$\tilde{\mathbf{x}}_i = f(\tilde{\mathbf{x}}_i, u_i) + \left[\frac{\partial \mathbf{D}(\tilde{\mathbf{x}}_i)}{\partial \tilde{\mathbf{x}}_i} \right]^{-1} \mathbf{K}(\mathbf{y}_i - \mathbf{CD}(\tilde{\mathbf{x}})) + \mathbf{H}_i(\tilde{\mathbf{x}})$$

$$i = 1, 2, \dots, N \quad (4.26)$$

其中 \mathbf{K} 满足式(4.24)。显然, 在由式(4.22) 定义的微分同胚 \mathbf{T} : $\text{col}(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{x}}_N) \rightarrow (\bar{\mathbf{z}}_1, \bar{\mathbf{z}}_2, \dots, \bar{\mathbf{z}}_N)$ 所确定的局部坐标 $\bar{\mathbf{z}}$ 下, 系统(4.26) 具有如下的结构:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{z}}}_i &= (\mathbf{A} - \mathbf{KC})\bar{\mathbf{z}}_i + \mathbf{Ky}_i + \mathbf{B}\Gamma(\mathbf{D}^{-1}(\bar{\mathbf{z}}_i), u_i) + \\ &\quad \mathbf{R}_i(\mathbf{T}^{-1}(\bar{\mathbf{z}})) \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (4.27)$$

所以系统(4.26) 与系统(4.27) 相似, 且式(4.26) 到系统(4.27) 的相似元为 \mathbf{T} 。

下面首先证明式(4.27) 是系统(4.23) 的渐近观测器。事实上, 令 $\mathbf{e}_i = \bar{\mathbf{z}}_i - \mathbf{z}_i$, $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1^T \quad \mathbf{e}_2^T \quad \cdots \quad \mathbf{e}_N^T)^T$, 则由式(4.27) 及(4.23) 得误差方程为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_i &= (\mathbf{A} - \mathbf{KC})\mathbf{e}_i + \mathbf{B}(\Gamma(\mathbf{D}^{-1}(\bar{\mathbf{z}}_i), u_i) - \Gamma(\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{z}_i), u_i)) + \\ &\quad \mathbf{R}_i(\mathbf{T}^{-1}(\bar{\mathbf{z}})) - \mathbf{R}_i(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z})) \end{aligned} \quad (4.28)$$

考察系统(4.28), 构造正定函数

$$V = \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T \mathbf{P} \mathbf{e}_i$$

则由题设条件得

$$\begin{aligned} V|_{(4.28)} &= \\ &= \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T \mathbf{Q} \mathbf{e}_i + 2 \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T \mathbf{P} \mathbf{B} (\Gamma(\mathbf{D}^{-1}(\bar{\mathbf{z}}_i), u_i) - \Gamma(\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{z}_i), u_i)) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2 \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^\top \mathbf{P} (\mathbf{R}_i(\mathbf{T}^{-1}(\tilde{\mathbf{z}}_i)) - \mathbf{R}_i(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z}_i))) \leq \\
& = \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^\top \mathbf{Q} \mathbf{e}_i + 2\alpha\epsilon \sum_{i=1}^N \|\mathbf{e}_i^\top\| \|\mathbf{P}\mathbf{B}\| \|\mathbf{e}_i\| + \\
& 2\epsilon \sum_{i=1}^N \beta_i \|\mathbf{e}_i\| \|\mathbf{P}\mathbf{B}\| \|\mathbf{e}\| \leq \\
& = \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^\top \mathbf{Q} \mathbf{e}_i + 2\alpha\epsilon \sum_{i=1}^N \lambda_M(\mathbf{P}\mathbf{B}) \mathbf{e}_i^\top \mathbf{e}_i + \\
& 2\epsilon \max_i \{\beta_i\} \sum_{i=1}^N \|\mathbf{e}_i\| \lambda_M(\mathbf{P}\mathbf{B}) \|\mathbf{e}\| = \\
& = \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^\top (\mathbf{Q} - 2\alpha\epsilon \lambda_M(\mathbf{P}\mathbf{B}) \mathbf{I}) \mathbf{e}_i + \\
& 2\epsilon \max_i \{\beta_i\} \lambda_M(\mathbf{P}\mathbf{B}) \|\mathbf{e}\| \sum_{i=1}^N \|\mathbf{e}_i\| \leq \\
& = \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^\top (\mathbf{Q} - 2\alpha\epsilon \lambda_M(\mathbf{P}\mathbf{B}) \mathbf{I}) \mathbf{e}_i + 2\epsilon \max_i \{\beta_i\} \lambda_M(\mathbf{P}\mathbf{B}) \|\mathbf{e}\|^2 = \\
& = \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^\top (\mathbf{Q} - 2\alpha\epsilon \lambda_M(\mathbf{P}\mathbf{B}) \mathbf{I}) \mathbf{e}_i + 2\epsilon \max_i \{\beta_i\} \lambda_M(\mathbf{P}\mathbf{B}) \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^\top \mathbf{e}_i = \\
& = \mathbf{e}^\top \begin{bmatrix} \mathbf{W} & & & \\ & \mathbf{W} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{W} \end{bmatrix} \mathbf{e}
\end{aligned}$$

由 $\mathbf{W} = \mathbf{Q} - 2\epsilon \lambda_M(\mathbf{P}\mathbf{B})(\alpha + \max_i \{\beta_i\}) \mathbf{I}$ 在区域 Ω 的正定性即知 $\dot{V}|_{(4.28)}$ 在区域 Ω 上是负定的, 所以

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\mathbf{z}}_i - \mathbf{z}_i\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}_i\| = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N$$

故式(4.27)是系统(4.23)的渐近观测器。

由上述分析知, 系统(4.20)与系统(4.23)相似, 其相似元为 \mathbf{T} , 系统(4.26)与系统(4.27)相似, 且其相似元亦为 \mathbf{T} , 再由式(4.27)是系统(4.23)的渐近观测器, 结合引理 4.2 即知, 式

(4.26) 是系统(4.20) 的渐近观测器。

[证毕]

注 4.8 由于 $A = \text{diag}\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$, $B = \text{diag}\{B_1, B_2, \dots, B_m\}$, $C = \text{diag}\{C_1, C_2, \dots, C_m\}$, 所以对于任意选取的正定阵 $Q = \text{diag}\{Q_1, Q_2, \dots, Q_m\}$, n 阶 Lyapunov 方程(4.24) 的求解可转化为如下的 m 个 r_j ($\sum_{j=1}^m r_j = n$) 阶 Lyapunov 方程的求解, 即

$$(A_j - K_j C_j)^T P_j + P_j (A_j - K_j C_j) = -Q_j, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (4.29)$$

显然后者更易于求解。

注 4.9 定理 4.3 的证明实质上已给出了系统(4.20) 的渐近观测器的设计方案。如果定理 4.3 条件满足, 则系统(4.26) 即为系统(4.20) 的渐近观测器。如果定理 4.3 中的研究区域 $\Omega = R^{Nn}$, 则所得结论即为全局的。

注 4.10 使式(4.20) 变换为式(4.23) 的微分同胚 T 可通过式(4.22) 求得, 此时, 求得的 (A, B, C) 是 Brunovsky 标准型。也可用观察法或者文献[51] 中的方法, 不过, 后者求出的 (A, B, C) 一般不再具有 Brunovsky 标准型结构。另外, 定理 4.3 中的条件(4.25) 的正定性可用

$$Q = 2\lambda_M(PB)(\bar{\alpha} + \max_i\{\bar{\beta}_i\})I \quad (4.30)$$

的正定性代替。其中 $\bar{\alpha}$ 是 $\Gamma(D^{-1}(z_i), u_i)$ 相对于 $u_i \in U_i$ 在 $D(\Omega_i)$ 上的一致 Lipschitz 常数, $\bar{\beta}$ 是 $R_i(T^{-1}(z))$ 在 $T(\Omega)$ 上的 Lipschitz 常数, 此时所得结论的保守性一般会降低, 这一点从定理 4.3 的证明过程容易看出。

4.4.3 例子

这一部分通过一个简单数例说明非线性相似组合大系统观测器的设计方法。

考虑非线性相似组合大系统

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -x_1 + 2x_2 e^{x_1} \\ x_1 e^{-x_1} - 2x_2^2 e^{x_1} + x_1 x_2 + \frac{1}{4}(x_1 + 5)e^{-x_1} u_1 \end{bmatrix} + \\ &\quad \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x_3 \\ -\frac{1}{2}x_2 x_3 + \frac{1}{4}e^{-x_1} \sin^2 x_2 e^{x_1} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -x_3 + 2x_4 e^{x_3} \\ x_3 e^{-x_3} - 2x_4^2 e^{x_3} + x_3 x_4 + \frac{1}{4}(x_3 + 5)e^{-x_3} u_2 \end{bmatrix} + \\ &\quad \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}x_1 e^{-x_3} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.31}$$

$$y_1 = x_2 e^{x_1}$$

$$y_2 = x_4 e^{x_3}$$

其中 $x = \text{col}(x_1, x_2, x_3, x_4)$, $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ 分别是系统 (4.31) 的状态向量, 输入和输出, 容许控制 $U = \{u \mid \|u\| \leq 1\}$, 讨论的区域 $\Omega = \{x \mid \|x\| \leq 5\} \subset R^4$ 。

容易验证, 相似组合系统 (4.31) 的所有孤立子系统均具有相关度 $r = 2$ 。构造微分同胚 T 如下:

$$T \left\{ \begin{array}{l} z_1 = x_1 \\ z_2 = x_2 e^{x_1} \\ z_3 = x_3 \\ z_4 = x_4 e^{x_3} \end{array} \right.$$

则在 T 确定的局部坐标 z 下, 系统 (4.31) 具有如下的结构

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{4}(x_1 + 5)u_1 + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x_3 \\ \frac{1}{4}\sin^2 x_3 \end{bmatrix} \\ y_1 &= (0 \quad 1) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{4}(x_3 + 5)u_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}x_1 \end{bmatrix} \\ y_2 &= (0 \quad 1) \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (4.32)$$

取 $K = [3 \quad 1]^T$, $\mathbf{Q} = 2\mathbf{I}$, 则 $\mathbf{P} = \mathbf{I}$, 直接计算得

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{4} \quad \hat{\beta}_1 = \hat{\beta}_2 = \frac{1}{2} \quad \lambda_M(\mathbf{PB}) = 1$$

容易验证(4.30)成立, 故由定理 4.3 知, 系统(4.31)的渐近观测器为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 e^{\tilde{\beta}_1} \\ \tilde{x}_1 e^{-\tilde{\beta}_1} - 2\tilde{x}_2 e^{\tilde{\beta}_1} + \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 + \frac{1}{4}(\tilde{x}_1 + 5)e^{-\tilde{\beta}_1} u_1 \end{bmatrix} + \\ &\quad \begin{bmatrix} 3 \\ -3\tilde{x}_2 + e^{-\tilde{\beta}_1} \end{bmatrix} (y_1 - \tilde{x}_2 e^{\tilde{\beta}_1}) + \\ &\quad \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\tilde{x}_3 \\ -\frac{1}{2}\tilde{x}_2 \tilde{x}_3 + \frac{1}{4}e^{-\tilde{\beta}_1} \sin^2 \tilde{x}_2 e^{\tilde{\beta}_1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_3 \\ \tilde{x}_4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -\tilde{x}_3 + 2\tilde{x}_4 e^{\tilde{x}_3} \\ \tilde{x}_3 e^{-\tilde{x}_3} - 2\tilde{x}_4^2 e^{\tilde{x}_3} + \tilde{x}_3 \tilde{x}_4 + \frac{1}{4} (\tilde{x}_3 + 5) e^{-\tilde{x}_3} u_2 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -3\tilde{x}_4 + e^{-\tilde{x}_3} \end{bmatrix} (y_2 - \tilde{x}_4 e^{-\tilde{x}_3}) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \tilde{x}_1 e^{-\tilde{x}_3} \end{bmatrix}$$
(4.33)

上述例子向读者展示了一般非线性相似组合大系统渐近观测器的设计方法。这种方法稍加修正，即可推广到一般非线性组合大系统的情形。

注 4.11 由于本节所得结论既不要求大系统的子系统可线性化，也不要求大系统的孤立子系统可线性化，且由于几何变换成立的区域比较大，一般能满足实际工程的需要^[51]，所以，本节所得结论不但具有重大的理论价值，而且具有一定的实用价值。

第五章 基于状态观测器的非线性相似组合大系统的镇定设计及应用

本章 5.1 节给出问题的研究背景;5.2 节给出所研究的非线性相似组合系统描述以及预备知识;5.3 节首先设计这类相似组合大系统的渐近状态观测器,然后,设计出一种基于此观测器给出的估计状态使整个大系统镇定的控制器,并给出基于估计状态的镇定设计步骤;5.4 节将 5.3 节所得结论应用于轴盘传动系统,仿真结果表明,所给出的方法是非常有效的。

5.1 问题的研究背景

系统的镇定一直是控制界研究的一个重要课题。自从状态空间描述被引入控制领域之后,状态反馈就成为人们解决一些问题的重要手段,状态反馈镇定问题受到了人们的普遍重视,并取得了许多研究成果^[52~54]。然而对于实际系统来说,其状态一般是不可知的或者仅是部分可知的,于是,就必须考虑对系统的状态进行估计,并进一步研究用估计状态镇定的问题。众所周知,对于线性系统,其控制器和观测器的设计具有分离性,所以两部分模态的收敛性互不影响,但对非线性系统,情况则复杂得多。

考虑系统

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} = \frac{2}{(t+2)^2} + x^3 + xu \\ y = x, \quad x(0) = -1 \end{array} \right\} \quad (5.1)$$

其中 $x, u \in \mathbb{R}$ 分别是系统的状态和输入。

下面用控制器 $u = -x$ 对系统(5.1)进行镇定研究。

(1) 用真实状态对系统(5.1)进行镇定研究, 此时, 相应的闭环系统为

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{2}{(t+2)^2} \\ x(0) = -1 \end{cases}$$

容易验证闭环系统是渐近稳定的;

(2) 用估计状态对系统(5.1)进行镇定研究, 显然, $\dot{x} = x - \frac{1}{t+2}$ 是系统(5.1)的估计状态, $u = -\dot{x}$ 与系统(5.1)构成的闭环系统的解为

$$x(t) = (t+2) \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{(t+2)^2} \right) \rightarrow \infty \quad (t \rightarrow \infty)$$

所以, 闭环系统不稳定。

上例说明, 对同一非线性系统, 分别用真实状态和估计状态对其进行镇定, 即便使用同一控制器, 也会产生不同甚至截然相反的结论。所以, 研究用估计状态对非线性系统进行镇定具有重要的理论意义和实际价值。

近年来, 基于估计状态的镇定设计对于线性组合大系统^[55,56]及非线性系统^[57~59]已取得了一些成果, 但对于非线性组合大系统, 由于其中系统的非线性特性及子系统之间的耦合作用, 使得这一问题的研究极为困难。充分利用系统的结构属性是解决这一些特殊组合大系统有关问题的有效途径, 下面对具有相似结构的非线性组合大系统基于估计状态的镇定问题进行研究。

5.2 系统描述及预备知识

考虑非线性组合大系统

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_i = f_i(x_i) + G_i(x_i)u_i - H_i(x, t) \\ y_i = h_i(x_i) \quad i = 1, 2, \dots, N \end{array} \right\} \quad (5.2)$$

其中 $x_i \in \mathbb{R}^n$, $u_i = (u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{im})^\top$, $y_i = (h_{i1}(x_i), h_{i2}(x_i), \dots, h_{im}(x_i))^\top \in \mathbb{R}^m$ 分别是系统的第 i 个子系统状态向量、输入和输出; $G_i(x_i) = (g_{i1}(x_i), g_{i2}(x_i), \dots, g_{im}(x_i))$, $f_i(x_i), g_{ij}(x_i) \in V_n^w(\Omega_i)$, 而 $H_i(x, t) \in V_n^w(\Omega \times \mathbb{R}^+)$ 是互联项, 这里 Ω_i 是 $x_i = 0$ 点的某个邻域, $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_N$ 是 $x = 0$ 点的某个邻域。不失一般性, 假设 $f_i(0) = H_i(0, t) = 0$, $h_{ij}(0) = 0$, 其中 $i = 1, 2, \dots, N$, $j = 1, 2, \dots, m$, $x = \text{col}(x_1, x_2, \dots, x_N)$ 。

定义 5.1 称系统

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_i = f_i(x_i) + G_i(x_i)u_i \\ y_i = h_i(x_i) \quad i = 1, 2, \dots, N \end{array} \right\} \quad (5.3)$$

为非线性组合大系统(5.2)的孤立子系统。

为了研究系统(5.2)基于估计状态的镇定问题, 我们需要引入如下的基本假设:

(A1) 非线性组合大系统(5.2)的 N 个孤立子系统(5.3)是彼此相似的;

(A2) 非线性组合大系统(5.2)的 N 个孤立子系统至少有一个相似于完全能控能观的线性系统。

注 5.1 假设(A1), (A2)保证了非线性组合大系统(5.2)的 N 个孤立子系统均相似于线性系统, 由文献[24]知道, 使式(5.2)的第 i 个孤立子系统相似于线性系统的相似元 T_i 可表为如下形式:

$$\begin{aligned} T_i(z_{i1}, z_{i2}, \dots, z_{im}) &= \Phi_{z_{i1}}^{g_{i1}} \circ \dots \circ \Phi_{z_{im}}^{ad_{f_i}^{-1}g_{im}} \circ \dots \circ \\ &\quad \Phi_{z_{im}}^{g_{im}} \circ \dots \circ \Phi_{z_{im}}^{ad_{f_i}^{-1}g_{im}}(0) \end{aligned} \quad (5.4)$$

且由 $f_i(0) = 0$ 容易验证 $T_i(0) = 0$, 其中 $i = 1, 2, \dots, N$ 。

定义 5.2 设 $f(x, t)$ 是定义在 $\Omega \times \mathbb{R}^+$ 上的函数, 如果存在

常数 γ 使得对任意的 $x_1, x_2 \in \Omega$, 则

$$\|f(x_1, t) - f(x_2, t)\| \leq \gamma |x_1 - x_2|$$

对所有的 $t \in \mathbb{R}^+$ 都成立, 则称 $f(x, t)$ 在 Ω 上关于 $t \in \mathbb{R}^+$ 一致满足 Lipschitz 条件, 并称 γ 是 $f(x, t)$ 在 $\Omega \times \mathbb{R}^+$ 上的 Lipschitz 常数。

引理 5.1^[80] 设 P 是 n 阶正定矩阵, $F(x)$ ($x \in E \subset \mathbb{R}^n$) 是满足 Lipschitz 条件的 n 维向量函数, 且其 Lipschitz 常数为 γ , 则对任意的 $x, \bar{x} \in E$ 有

$$(x - \bar{x})^T P(F(x) - F(\bar{x})) \leq \frac{1}{2} [\gamma^2 (x - \bar{x})^T P^2 (x - \bar{x}) + (x - \bar{x})^T (x - \bar{x})]$$

5.3 基于观测器的相似系统镇定设计

5.3.1 状态观测器的设计

我们考虑满足定义 5.1 中假设(A1) 和(A2) 的相似组合大系统(5.2), 由条件(A1), (A2) 知, 系统(5.2) 的孤立子系统(5.3) 相似于能控能观线性系统

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\tilde{z}}_i = A_i \tilde{z}_i + B_i u, \\ y_i = C_i \tilde{z}_i \end{array} \right\} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (5.5)$$

其中孤立子系统(5.3)到系统(5.5)的相应系统的相似元 $\tilde{T}_i: x_i \rightarrow \tilde{z}_i$ 可由式(5.4)定义的微分同胚确定。再由相似关系的对称性和传递性知式(5.5)的 N 个系统是彼此相似的, 从而由线性系统理论可求得非奇异线性变换: $\tilde{D}_i: \tilde{z}_i \rightarrow z_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$) 使得在 z 坐标下系统(5.5)的每一个子系统均相似于如下的结构相同的能控能观线性系统

$$\left. \begin{array}{l} \dot{z}_i = Az_i + Bu, \\ y_i = Cz_i \end{array} \right\} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (5.6)$$

记

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_i &\triangleq \tilde{\mathbf{D}} \circ \tilde{\mathbf{T}}_i: \mathbf{x}_i \rightarrow \mathbf{z}_i \quad i = 1, 2, \dots, N \\ \mathbf{T} &= \text{col}(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \dots, \mathbf{T}_N) \quad \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{z} = \text{col}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_N) \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (5.7)$$

则在 \mathbf{T} 确定的坐标 \mathbf{z} 下相似组合大系统(5.2) 具有如下的结构形式:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}_i &= \mathbf{A}\mathbf{z}_i + \mathbf{B}\mathbf{u}_i + \Psi_i(\mathbf{z}, t)^{-1} \\ \mathbf{y}_i &= \mathbf{C}\mathbf{z}_i \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (5.8)$$

其中

$$\Psi_i(\mathbf{z}, t) = \left[\frac{\partial \mathbf{T}_i(\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}_i} \mathbf{H}_i(\mathbf{x}, t) \right]_{\mathbf{x}_i=\mathbf{T}_i^{-1}(\mathbf{z}_i)} \in V_n^*(T(\Omega) \times \mathbb{R}^+) \quad (5.9)$$

由于 $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ 是能控能观测的, 所以存在矩阵 \mathbf{K} 和 \mathbf{L} 使得 $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ 和 $\mathbf{A} - \mathbf{LC}$ 均为 Hurwitz 稳定阵, 因而对于任意的正定阵 $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2$ 下述 Lyapunov 方程:

$$(\mathbf{A} - \mathbf{LC})^T \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_1 (\mathbf{A} - \mathbf{LC}) = -\mathbf{Q}_1 \quad (5.10)$$

$$(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^T \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_2 (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) = -\mathbf{Q}_2 \quad (5.11)$$

分别有惟一正定解矩阵 $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ 。

现在构造如下的系统

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}}_i &= f_i(\hat{\mathbf{x}}_i) + \left[\frac{\partial \mathbf{T}_i^{-1}(\mathbf{z}_i)}{\partial \mathbf{z}_i} \right]_{\mathbf{z}_i=\mathbf{T}_i^{-1}(\hat{\mathbf{x}}_i)} \mathbf{L}(\mathbf{y}_i - \mathbf{C}\mathbf{T}_i(\hat{\mathbf{x}}_i)) + \\ &\quad \mathbf{G}_i(\hat{\mathbf{x}}_i)\mathbf{u}_i + \mathbf{H}_i(\hat{\mathbf{x}}, t) \end{aligned} \quad (5.12)$$

其中 \mathbf{L} 由式(5.10)确定, $\mathbf{T}_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 可依前述方法由式(5.4)求得。于是, 我们有如下结论。

定理 5.1 设系统(5.2)是满足定义 5.1 中假设(A1), (A2)的非线性组合大系统, 如果

(1) $\Psi_i(\mathbf{z}, t)$ 在 $T(\Omega)$ 上关于 $t \in \mathbb{R}^+$ 一致满足 Lipschitz 条件, 且其 Lipschitz 常数为 γ_i , 其中 $\Psi_i(\mathbf{z}, t)$ 由式(5.9)确定, $i = 1, 2,$

$\dots, N;$

(2) $Q_1 - \gamma^2 P_1^2 - I > 0$, 其中 $\gamma = \max\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N\}$, P_1 , Q_1 由式(5.10)确定。

则式(5.12)是系统(5.2)的渐近状态观测器, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - \hat{x}_i(t)\| = 0$ 。

证明 构造系统:

$$\dot{z}_i = (A - LC)\dot{z}_i + Bu_i + \Psi_i(z, t) + Ly_i \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (5.13)$$

其中 A, B, C 同式(5.6), Ψ_i 由式(5.9)确定, L 由式(5.10)确定。

下面首先证明(5.13)是系统(5.8)的渐近状态观测器。事实上, 令 $e_i = z_i - \hat{z}_i$, 则误差方程为

$$\dot{e}_i = (A - LC)e_i + \Psi_i(z, t) - \Psi_i(\hat{z}, t) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (5.14)$$

对于系统(5.14), 构造 Lyapunov 函数

$$V = \sum_{i=1}^N e_i^T P_1 e_i$$

其中正定阵 P_1 由式(5.10)确定, 则由式(5.10)及引理 5.1 有

$$\begin{aligned} V|_{(5.14)} &= \\ &\sum_{i=1}^N (-e_i^T Q_1 e_i + 2e_i^T P_1 (\Psi_i(z, t) - \Psi_i(\hat{z}, t))) = \\ &- e^T \begin{bmatrix} Q_1 & & & \\ & Q_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & Q_1 \end{bmatrix} e + \\ &2e^T \begin{bmatrix} P_1 & & & \\ & P_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & P_1 \end{bmatrix} (\Psi(z, t) - \Psi(\hat{z}, t)) \leqslant \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\mathbf{e}^T \begin{bmatrix} Q_1 & & & P_1^2 \\ & Q_1 & & P_1^2 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & Q_1 \end{bmatrix} \left[e + e^T (\gamma^2) \right] \begin{bmatrix} P_1^2 \\ P_1^2 \\ \vdots \\ P_1^2 \end{bmatrix} + \mathbf{I} \mathbf{e} = \\
 & -\mathbf{e}^T \left[\begin{bmatrix} Q_1 & & & P_1^2 \\ & Q_1 & & P_1^2 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & Q_1 \end{bmatrix} - \gamma^2 \begin{bmatrix} P_1^2 \\ P_1^2 \\ \vdots \\ P_1^2 \end{bmatrix} \right] - \mathbf{I} \mathbf{e} = \\
 & -\sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T (Q_1 - \gamma^2 P_1^2 - \mathbf{I}) \mathbf{e}_i
 \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1^T \quad \mathbf{e}_2^T \quad \cdots \quad \mathbf{e}_N^T)^T$, 再由定理 5.1 的条件(2) $Q_1 - \gamma^2 P_1^2 - \mathbf{I} > 0$ 即知, $V|_{(5.14)}$ 是负定的。所以, 系统(5.14)渐近稳定, 于是有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \| \mathbf{z}_i(t) - \hat{\mathbf{z}}_i(t) \| = \lim_{t \rightarrow \infty} \| \mathbf{e}_i(t) \| = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N$$

即式(5.13)是系统(5.8)的渐近状态观测器。

考察系统(5.2)、(5.8)、(5.12)和(5.13)的结构形式, 容易验证, 系统(5.2)和(5.8)相似, 式(5.12)和式(5.13)相似。而由上述分析知式(5.13)是系统(5.8)的状态观测器, 故由引理 5.1 即知, 式(5.12)是系统(5.2)的状态观测器。 [证毕]

注 5.2 如果我们讨论的区域 $\Omega = \mathbb{R}^{nN}$, 则上述结论即为全局性结果。

5.3.2 基于观测器的控制器设计

考虑系统(5.2), 在这一节中, 我们将设计一个控制器, 使得用观测器(5.12)所观测的状态进行反馈所构成的闭环系统是渐近稳定的。

由 $\Psi_i(\mathbf{z}, t) \in V_u^*(T(\Omega) \times \mathbb{R}^+)$ 及 $\Psi_i(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0}$ 知^{[34][51]}, $\Psi_i(\mathbf{z}, t)$ 可表为如下的形式:

$$\Psi_i(\mathbf{z}, t) = \sum_{j=1}^N \mathbf{R}_{ij}(\mathbf{z}, t) \mathbf{z}_j \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (5.15)$$

注 5.3 表达式(5.15)是较文献[34, 61, 62]曾利用过的更为一般的表示法。

定理 5.2 设系统(5.2)是满足条件(A1)、(A2)的非线性组合大系统,如果

(1) $\Psi_i(\mathbf{z}, t)$ 在 $T(\Omega)$ 上关于 $t \in \mathbb{R}^+$ 一致满足 Lipschitz 条件,且其 Lipschitz 常数为 γ_i ,其中 $\Psi_i(\mathbf{z}, t)$ 由式(5.9)确定, $i = 1, 2, \dots, N$;

(2) $\mathbf{Q}_1 - \gamma^2 \mathbf{P}_1^2 - \mathbf{I} > 0$, 其中 $\gamma = \max\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N\}$, $\mathbf{P}_1, \mathbf{Q}_1$ 由式(5.10)确定;

(3) $\mathbf{W}^T(\mathbf{x}) + \mathbf{W}(\mathbf{x})$ 在区域 Ω 上正定,其中 $\mathbf{W}(\mathbf{x}) = (w_{ij})_{N \times N}$,

$$w_{ij} = \begin{cases} \lambda_m(\mathbf{Q}_2) - 1 - 2\lambda_M(\mathbf{P}_2 \mathbf{R}_{ij}(T(\mathbf{x}))) & i = j \\ -2\lambda_M(\mathbf{P}_2 \mathbf{R}_{ij}(T(\mathbf{x}))) & i \neq j \end{cases}$$

$\mathbf{P}_2, \mathbf{Q}_2$ 由式(5.11)确定, $T(\mathbf{x})$ 由式(5.7)确定, $i, j = 1, 2, \dots, N$

则系统(5.2)可用观测器(5.12)给出的估计状态镇定。

证明 首先设计控制器

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{K} \mathbf{T}_i(\mathbf{x}_i) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (5.16)$$

其中 \mathbf{K} 由式(5.11)确定, \mathbf{T}_i 由式(5.7)确定。下面证明利用观测器(5.12)给出的估计状态借助于控制器(5.16)可使相似组合大系统(5.2)镇定。考察如下的系统:

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i) + \mathbf{G}_i(\mathbf{x}_i) \mathbf{u}_i + \mathbf{H}_i(\mathbf{x}, t) \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}}_i &= \mathbf{f}_i(\hat{\mathbf{x}}_i) + \left[\frac{\partial \mathbf{T}_i^{-1}(\mathbf{z}_i)}{\partial \mathbf{z}_i} \right]_{\mathbf{z}_i=\mathbf{T}_i^{-1}(\hat{\mathbf{x}}_i)} \mathbf{L}(\mathbf{y}_i - \mathbf{C} \mathbf{T}_i(\hat{\mathbf{x}}_i)) + \\ &\quad \mathbf{G}_i(\hat{\mathbf{x}}_i) \mathbf{u}_i + \mathbf{H}_i(\hat{\mathbf{x}}, t) \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{h}_i(\mathbf{x}_i) \quad (5.19)$$

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{K} \mathbf{T}_i(\hat{\mathbf{x}}_i) \quad (5.20)$$

其中 \mathbf{L}, \mathbf{K} 分别由式(5.10)和(5.11)确定。故只须证明系统(5.17)

$\sim (5.20)$ 是渐近稳定的即可。

构造微分同胚 D_i 如下：

$$D_i : \begin{cases} \dot{\mathbf{z}}_i = T_i(\mathbf{x}_i) \\ \dot{\hat{\mathbf{z}}}_i = T_i(\hat{\mathbf{x}}_i) \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N$$

其中 T_i 由式(5.7)确定, 则在 $D_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 确定的坐标下, 系统(5.17) \sim (5.20) 具有如下的结构:

$$\dot{\mathbf{z}}_i = \mathbf{A}\mathbf{z}_i + \mathbf{B}\mathbf{u}_i + \Psi_i(\mathbf{z}, t) \quad (5.21)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}}_i = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\hat{\mathbf{z}}_i + \mathbf{B}\mathbf{u}_i + \Psi_i(\hat{\mathbf{z}}, t) + \mathbf{L}\mathbf{y}_i \quad (5.22)$$

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{C}\mathbf{z}_i \quad (5.23)$$

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{K}\hat{\mathbf{z}}_i \quad (5.24)$$

令 $\mathbf{e}_i(t) = \mathbf{z}_i(t) - \hat{\mathbf{z}}_i(t)$, 则系统(5.21) \sim (5.24) 的渐近稳定性等价于系统

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}}_i \\ \dot{\mathbf{e}}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} & \mathbf{B}\mathbf{K} \\ 0 & \mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_i \\ \mathbf{e}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Psi_i(\mathbf{z}, t) \\ \Psi_i(\mathbf{z}, t) - \Psi_i(\hat{\mathbf{z}}, t) \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

的渐近稳定性, 对系统(5.25), 构造 Lyapunov 函数

$$V(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_N, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_N) = \sum_{i=1}^N \mathbf{z}_i^\top \mathbf{P}_2 \mathbf{z}_i + \alpha \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^\top \mathbf{P}_1 \mathbf{e}_i$$

其中 $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ 分别由式(5.10) 和(5.11) 确定, α 是待定正常数, 则

$$\begin{aligned} \dot{V}|_{(5.25)} &= \\ &= - \sum_{i=1}^N (\mathbf{z}_i^\top \mathbf{Q}_2 \mathbf{z}_i + \alpha \mathbf{e}_i^\top \mathbf{Q}_1 \mathbf{e}_i) + \\ &\quad \sum_{i=1}^N 2\mathbf{z}_i^\top \mathbf{P}_2 (\Psi_i(\mathbf{z}, t) + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{e}_i) + \\ &\quad 2\alpha \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^\top \mathbf{P}_1 (\Psi_i(\mathbf{z}, t) - \Psi_i(\hat{\mathbf{z}}, t)) \end{aligned} \quad (5.26)$$

记

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_N \end{bmatrix} \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{z}_N \end{bmatrix} \quad \Psi = \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \vdots \\ \Psi_N \end{bmatrix}$$

由引理 5.1 得

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^\top \mathbf{P}_1 (\Psi_i(\mathbf{z}, t) - \Psi_i(\hat{\mathbf{z}}, t)) = \\ & \mathbf{e}^\top \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{P}_1 & & & \\ & \mathbf{P}_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{P}_1 \end{array} \right] (\Psi(\mathbf{z}, t) - \Psi(\hat{\mathbf{z}}, t)) \leqslant \\ & \frac{1}{2} \mathbf{e}^\top (\gamma^2 \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{P}_1^2 & & & \\ & \mathbf{P}_1^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{P}_1^2 \end{array} \right] + \mathbf{I}) \mathbf{e} = \\ & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^\top (\gamma^2 \mathbf{P}_1^2 + \mathbf{I}) \mathbf{e}, \end{aligned} \tag{5.27}$$

由基本不等式 $ab \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ 及式(5.15)有

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \mathbf{z}_i^\top \mathbf{P}_2 (\Psi_i(\mathbf{z}, t) + \mathbf{B} \mathbf{K} \mathbf{e}_i) = \\ & \sum_{i=1}^N \mathbf{z}_i^\top \mathbf{P}_2 \Psi_i(\mathbf{z}, t) + \sum_{i=1}^N \mathbf{z}_i^\top \mathbf{P}_2 \mathbf{B} \mathbf{K} \mathbf{e}_i \leqslant \\ & \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{z}_i^\top \mathbf{P}_2 \mathbf{R}_{ij}(\mathbf{z}, t) \mathbf{z}_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\|\mathbf{z}_i\|^2 + \|\mathbf{P}_2 \mathbf{B} \mathbf{K} \mathbf{e}_i\|^2) = \\ & \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_M(\mathbf{P}_2 \mathbf{R}_{ij}(\mathbf{z}, t)) \mathbf{z}_i^\top \mathbf{z}_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \mathbf{z}_i^\top \mathbf{z}_i + \\ & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \lambda_M((\mathbf{P}_2 \mathbf{B} \mathbf{K})^2) \mathbf{e}_i^\top \mathbf{e}_i \end{aligned} \tag{5.28}$$

结合式(5.26), (5.27) 和式(5.28) 即得

$$\begin{aligned}
 \dot{V}|_{(5.25)} &= \\
 &= \sum_{i=1}^N [z_i^T Q_2 z_i - z_i^T \sum_{j=1}^N 2\lambda_M(P_2 R_{ij}(z, t)) z_j - z_i^T z_i] - \\
 &\quad \sum_{i=1}^N e_i^T (\alpha Q_1 - \alpha(\gamma^2 P_1^2 - I) - \lambda_M((P_2 B K)^2) I) e_i \leqslant \\
 &= \left\{ \sum_{i=1}^N (\lambda_m(Q_2) - 1) z_i^T z_i - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N 2\lambda_M(P_2 R_{ij}(z, t)) z_i^T z_j \right\} - \\
 &\quad \sum_{i=1}^N e_i^T (\alpha(Q_1 - \gamma^2 P_1^2 - I) - \lambda_M((P_2 B K)^2) I) e_i = \\
 &= \frac{1}{2} (T(x))^T (W^T(x) + W(x)) T(x) - \\
 &\quad \sum_{i=1}^N e_i^T (\alpha(Q_1 - \gamma^2 P_1^2 - I) - \lambda_M((P_2 B K)^2) I) e_i
 \end{aligned}$$

由定理 5.2 的条件(2) 知, 存在 α 使得 $\alpha(Q_1 - \gamma^2 P_1^2 - I) - \lambda_M((P_2 B K)^2) I$ 正定, 结合条件(3) 即知 $V|_{(5.25)}$ 在其定义域上负定, 所以系统(5.25) 是渐近稳定的。

由于微分同胚不影响系统的渐近稳定性, 故由式(5.25) 在区域 $T(\Omega)$ 上的渐近稳定性即得系统(5.17)~(5.20) 在区域 Ω 上渐近稳定。所以系统(5.2) 可用式(5.12) 给出的估计状态借助于控制器(5.16) 进行镇定。 [证毕]

注 5.4 定理 5.2 条件(3) 中的 $W^T(x) + W(x)$ 是 x 的函数, 故可以利用 $W^T(x) + W(x)$ 的正定性结合其它条件给出系统(5.2) 的镇定域 Ω 大小的一种估计。

5.3.3 控制器设计步骤

现在, 我们给出基于估计状态的非线性相似组合大系统(5.2) 的镇定设计步骤。

Step 1. 按照式(5.7) 求出微分同胚 $T_i (i = 1, 2, \dots, N)$, 并进

一步求出系统(5.2)在新坐标下的形式,从而求得(A, B, C)及 $\Psi_i(z, t)$ ($i = 1, 2, \dots, N$)。

Step 2. 验证 $\Psi_i(z, t)$ ($i = 1, 2, \dots, N$)在所研究的区域内是否满足Lipschitz条件,若满足,求出Lipschitz常数 γ_i ($i = 1, 2, \dots, N$)及 γ ,然后进入下一步;否则,本节方法失效。

Step 3. 根据实际问题需要设定 L 与 K 的值,并选择可调矩阵 Q_1 和 Q_2 。

Step 4. 解Lyapunov方程(5.10)、(5.11)求出其正定解矩阵 P_1, P_2 。

Step 5. 验证定理5.1条件是否满足,若满足,则设计出状态观测器(5.12),然后进入下一步;否则,本节方法失效。

Step 6. 求出 R_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, N$)使其满足式(5.15)。

Step 7. 验证定理5.2条件(3)是否满足,若满足,则进入下一步;否则,本节方法失效。

Step 8. 设计控制器(5.16)。

根据定理5.2非线性相似组合大系统(5.2),可用状态观测器(5.12)给出的估计状态借助于控制器(5.16)进行镇定。

注5.5 Step1中的微分同胚 T_1 是不唯一的,它可通过5.3.1节的分析中所述的方法求出,也可用观察法或者借助于文献[22]中的方法或者其它方法求出。

5.4 轴盘传动系统的镇定研究

这一节,我们将以轴盘传动系统为例,说明5.3节所得的基于观测器的非线性相似组合大系统的镇定控制器的设计方法。

考虑图5.1所示的轴盘传动系统,其动态系统模型为^[63]

$$\dot{x}_{11} = x_{12} \quad (5.29)$$

$$\dot{x}_{12} = \frac{1}{I_1 \cos^2 x_{21} + I_2 \sin^2 x_{21}} [(I_1 - I_2) \sin(2x_{21}) + I_1 \omega_1 x_{22} + u_1] \quad (5.30)$$

$$\dot{x}_{21} = x_{22} \quad (5.31)$$

$$\dot{x}_{22} = \frac{1}{I_2} \left[-\frac{I_1 - I_2}{2} x_{12}^2 \sin(2x_{21}) + I_1 \omega_1 x_{12} \sin x_{21} + (m_1 + \frac{1}{2} m_2) g l \sin x_{21} + u_1 \right] \quad (5.32)$$

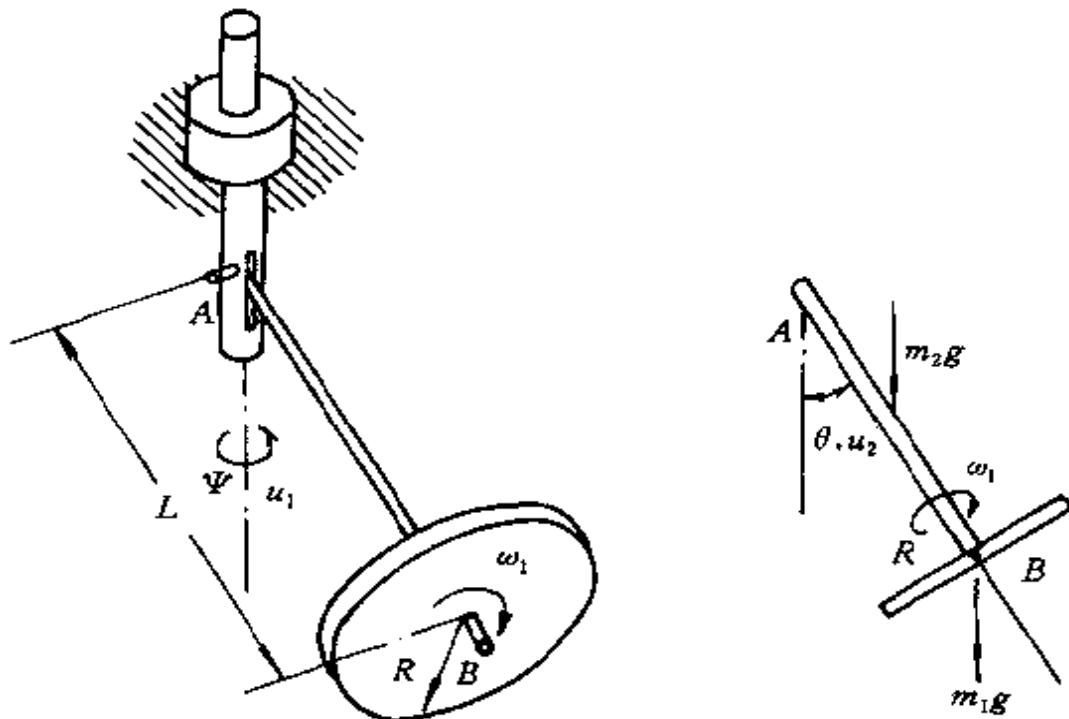


图 5.1 轴盘传动(disc-shift)系统

其中 $x_{11} = \psi, x_{12} = \dot{\psi}, x_{21} = \theta, x_{22} = \dot{\theta}, I_1 = \frac{1}{2} m_1 \cdot R^2, I_2 = \frac{1}{4} m_1 \cdot R^2 + (m_1 + \frac{1}{3} m_2) l^2$ 。我们只考虑质量 m_1, m_2 确定且 $I_1 = I_2 (= I)$ 的情形。此时系统 (5.29) ~ (5.32) 是具有相似结构的组合系统, 其动态系统模型为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{11} \\ \dot{x}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/I \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_1 x_{22} \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

$$y_1 = (1 \quad 0)x_1 \quad (5.34)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{22} \\ \ddot{x}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\hat{I} \end{bmatrix} u_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_1 x_{21} \sin x_{21} + \frac{1}{\hat{I}} \left(\frac{1}{2} m_2 + m_1 \right) g l \sin x_{21} \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

$$y_2 = (1 \quad 0)x_2 \quad (5.36)$$

其中输出 y_1, y_2 是我们添加的。参考文献[63]选取参数 $m_1 = 1.4$, $m_2 = 0.6$, $l = 1$, $g = 0.098$, $R = \frac{4}{7}\sqrt{14}$, $\omega_1 = \frac{1}{10}\sin 10t$, 则 $I_1 = I_2 = \hat{I} = 3.2$ 。

$$\text{令 } \gamma = 0.35 \quad \mathbf{R}_{11}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{R}_{12}(\mathbf{x}, t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \omega_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_{21}(\mathbf{x}, t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \omega_1 \sin x_{21} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{22}(\mathbf{x}, t) = \begin{bmatrix} 1/\hat{I}(\frac{1}{2}m_2 + m_1)gl\eta(x_{21}) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其中 $\eta(x_{21}) = \begin{cases} \frac{\sin x_{21}}{x_{21}} & x_{21} \neq 0 \\ 1, & x_{21} = 0 \end{cases}$

$$\text{设定 } L = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{K} = [3.2 \quad 3.2], \mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_2 = 2\mathbf{I}, \text{ 则}$$

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} -1.5 & -1 \\ -1 & 1.75 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{取 } \Omega = \{(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) \mid |x_{21}| < 3.5, x_{11}, x_{21}, x_{22} \in \mathbb{R}\}$$

直接验证即知, 定理 5.1 和定理 5.2 的条件均满足, 故系统 (5.29) ~ (5.32) 的状态观测器为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{11} \\ \dot{x}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_{11} \\ \dot{x}_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\hat{I} \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_1 \dot{x}_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} y_1$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_{21} \\ \dot{\hat{x}}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{21} \\ \hat{x}_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/I \end{bmatrix} u_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_1 \hat{x}_{12} \sin \hat{x}_{21} + \frac{1}{I} (\frac{1}{2} m_2 + m_1) g / \sin \hat{x}_{21} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} y_2 \quad (5.37)$$

由观测器(5.37)所得的估计状态与系统(5.29)~(5.32)的状态误差 $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ 的误差曲线如图(5.2)所示,其中初值取为 $x(0) = (3 \ 0 \ -1 \ 1.5)$, $\dot{x}(0) = (0 \ 3 \ -2 \ 1)$, 输入 $u_1 = 10 \sin t$, $u_2 = -3e^{-t}$ 。

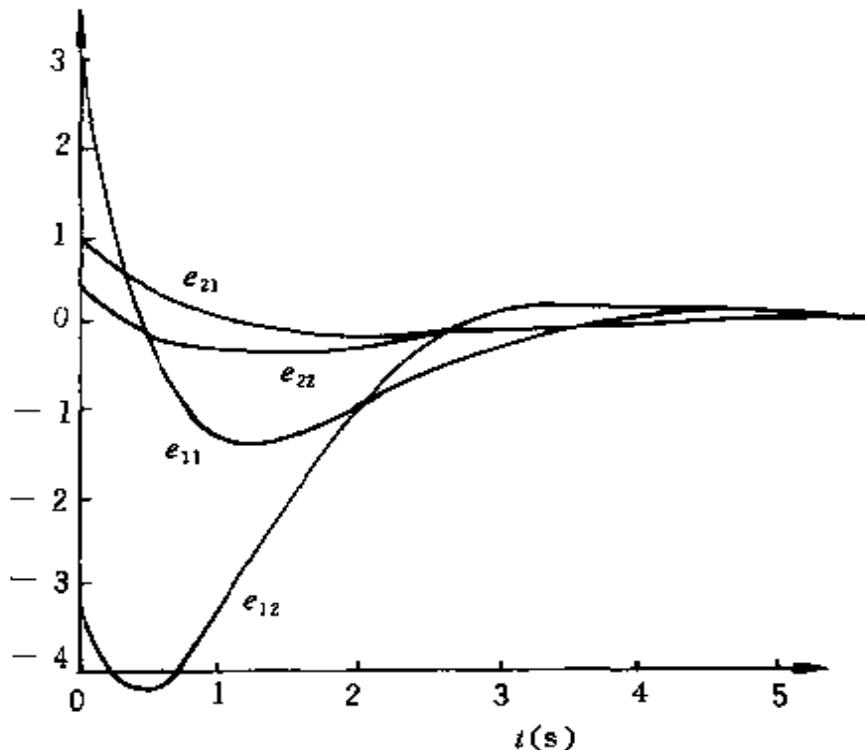


图 5.2 误差曲线 $e_i(t)$ ($e_i(t) = x_i(t) - \hat{x}_i(t)$)

由定理 5.2 知,利用观测器(5.37)所得的估计状态借助于控制器

$$u_i = -(3.2 - 3.2) \begin{bmatrix} \hat{x}_{i1} \\ \hat{x}_{i2} \end{bmatrix} \quad i = 1, 2 \quad (5.38)$$

能使系统(5.29)~(5.32)镇定。取初值 $x(0) = (5.0 - 1.3)$, $\hat{x}(0) = (0.3 - 2.1)$, 则基于估计状态的响应曲线如图 5.3 所示。仿真结果表明, 本节的方法是极其有效的。

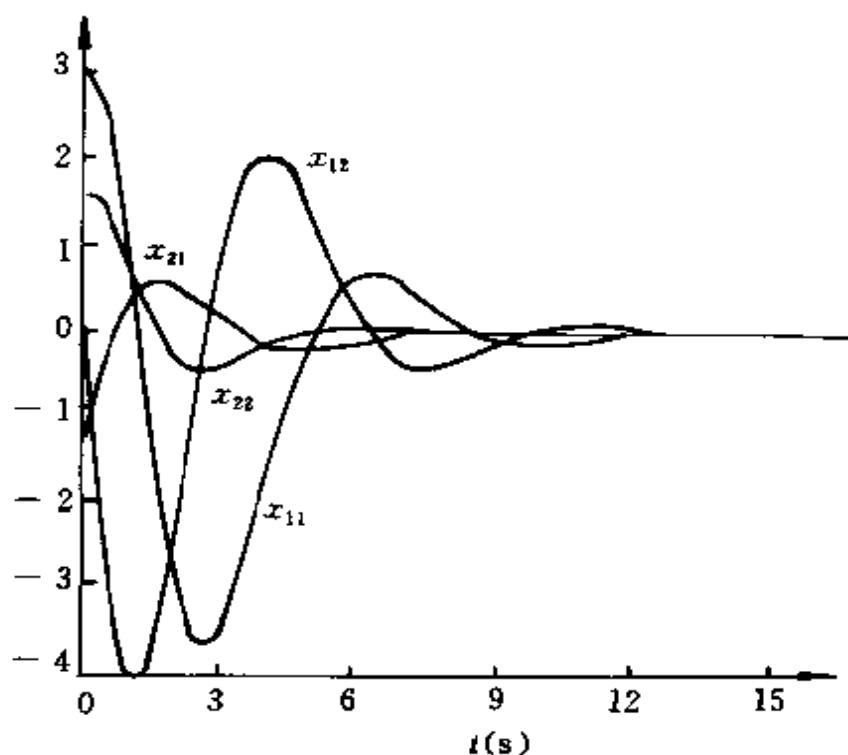


图 5.3 状态响应曲线 $x(t)$

第六章 非线性相似组合系统的全息 分散输出反馈鲁棒控制

第五章研究了非线性相似组合大系统的基于估计状态的镇定问题,虽然避免了由真实状态的不可知性带来的麻烦,但由于要设计观测器来估计系统状态,就需要耗费较大的费用,特别是对大系统,所需费用则更大,且易导致“维数灾”(Curse of Dimensionality)。作为重要镇定手段之一的输出反馈控制,它不但能避免上述麻烦,而且能够避免由估计状态和真实状态对非线性系统进行研究可能会得到不同甚至截然相反的结论所产生的困难,所以,输出反馈是研究非线性系统特别是组合大系统镇定问题的有效手段之一。

这一章首先简单概括一下输出反馈控制问题的研究现状,然后分析受非线性扰动的线性系统经非线性互联而形成的相似组合大系统的分散输出反馈镇定问题,6.3节将这一结论推广到完全非线性相似组合大系统的情形,最后,通过数例仿真说明所得方法和结论的可行性和有效性。

这一章所设计的输出反馈控制器不但是分散的,而且是结构全息的,便于工程设计,所得方法适合于非常广泛的一类非线性组合大系统(包括文献[61,64~66]所研究的系统),本章的研究填补了完全非线性时变组合系统分散输出反馈鲁棒镇定的理论空白,是作者近年来所取得的最为深刻的成果之一。它对于促进复杂非线性组合大系统理论研究的深入有着重要价值。

6.1 输出反馈镇定的研究现状

所谓输出反馈控制问题,即就是对一给定的系统,寻找一输出反馈控制律,使得相应的闭环系统具有某种所期望的性能,或者指出这样的反馈不存在。而输出反馈镇定问题,就是寻找一输出反馈控制律,使得相应的闭环系统渐近稳定。寻找一种易于实现,且保守性小的输出反馈控制律将是输出反馈控制的主要问题之一。

输出反馈镇定问题是实际工程中的重要问题之一。同状态反馈镇定相比,输出反馈镇定无论从投入的力量和取得的成果来说,都要逊色得多。事实上,由于输出反馈只能利用系统的部分状态信息,所以,迄今为止,这一问题还远未解决(open problem)。即便对时不变线性系统,也没有一种普遍的方法设计出能使系统镇定的输出反馈控制方案,至于非线性系统及其组合大系统,问题一般要复杂得多。

1. 线性系统

关于线性时不变系统的输出反馈镇定问题已发展了许多种研究方法,如 Youla 参数化方法、逆线性二次方法、输出结构受限方法等,也有许多学者分别给出了问题可解的必要条件或者充分条件。虽然对单输入单输出(SISO)时不变线性系统,可通过根轨迹法、Nyquist 判据以及代数方法等给出问题可解的较好结论,但这些方法无法推广到一般的多变量(MIMO)系统。尽管也有一些关于输出反馈镇定充要条件方面的结论,但这些结论本质上仍然是将这一问题转化为其它未解决的问题,所得结论充其量只能对一些极特殊系统的研究起到一些简化作用。

2. 非线性系统

随着鲁棒控制研究热的出现,非线性不确定系统的输出反馈控制的研究也受到了人们的重视。对于匹配不确定和非匹配不确

定都有相应的研究,文献[67]利用变结构方法给出了不连续输出控制律的设计方法,文献[68]给出的控制律也是不连续的,文献[69~71]利用Lyapunov分析法结合其它方法给出了一些输出反馈控制律,但所研究的系统均是线性系统受非线性扰动的情形。文献[72]讨论的系统是完全非线性的,且给出的条件是充分必要的,但所给结论在实际中无法实现,只能算作问题的一种转化。

总而言之,较之于线性系统,非线性系统的输出反馈镇定问题要复杂得多,目前的研究大部分仍然是基于线性系统理论的思想,利用Lyapunov分析法,几何方法, H^∞ 控制,自适应以及变结构控制等来研究一些名义系统是线性的或者是可线性化或者能部分线性化的非线性系统,所给出的结论一般均为充分条件。关于完全非线性系统的输出反馈控制问题,也有一些研究,但较深入的、易于工程实现的结果还有待进一步探讨。

3. 非线性组合大系统

非线性组合大系统输出反馈镇定问题所取得的研究成果是非常有限的,其原因不仅在于输出反馈控制问题本身的复杂性,还在于系统的非线性特性及子系统之间的互联特性导致的复杂性,所以,其相应的研究成果极少。下面列出了作者所能收集到的相关方面的研究文献。

文献[65,66]把系统的非线性项作为扰动处理,显然这种方法所得结论的保守性较大。文献[66,73,74]要求系统的互联项是输出的函数或者其界函数是输出的函数,文献[61]考虑的系统不涉及不确定性。文献[65]分析了由两个子系统互联而成的系统,其中不确定性只出现在互联项中,所给的控制方案是集中控制。现有的这些成果中,所设计的控制器均是线性的,这固然能给工程设计带来方便,但所得结论一般保守性大。文献[75,76]利用自适应技术结合几何方法研究了非线性组合大系统的输出反馈控制问题,但仍对系统的互联项及系统的不确定项有较强的限制。最近文献

[77, 78]给出了两种非线性控制方案, 提高了系统的鲁棒性, 这即是本章 6.2 节的内容。但所有这些研究成果都有一个较大的缺陷, 即要求所研究的非线性互联大系统的名义子系统是线性的, 且要求系统的不确定互联项以状态变量的范数或者状态变量范数的多项式为其界函数, 本章的 6.3 节所得结论避免了这些缺陷, 利用非线性方法推广了现有的这些结果, 给出了一般非线性相似组合大系统的有关结论。这一节的成果已发表在 Automatica 上(见文献 [95])。

总之, 输出反馈镇定问题是一个还远未解决的问题(open problem), 其主要原因在于可供利用的系统信息只有一部分。所以, 这一问题的研究将是一项长期而艰巨的工作。我们期待着新的研究方法的诞生, 并对这一问题进行深入探讨。

6.2 非匹配不确定大系统的大增益分散控制

6.2.1 系统描述

考虑非线性相似组合系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= Ax_i + f_i(x_i, t) + B(u_i + \xi_i(x_i, t)) + \\ &\quad \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (\mathbf{H}_{ij}(x_j) + \Delta \mathbf{H}_{ij}(x_j)) \\ y_i &= Cx_i \quad i = 1, 2, \dots, N\end{aligned}\tag{6.1}$$

其中 $x_i \in \mathbb{R}^n$, $u_i, y_i \in \mathbb{R}^m$ 分别是系统的第 i 个子系统的状态、输入及输出; A 和 B 是适当维数的常值矩阵; $\mathbf{H}_{ij}(x_j) \in V^*(\mathbb{R}^n)$ ($\mathbf{H}_{ij}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $1 \leqslant i, j \leqslant N$, $i \neq j$, $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbf{H}_{ij}(x_j)$ 是非线性互联项); $f_i(x_i, t)$, $\xi_i(x_i, t)$ 分别是连续的非匹配结构及匹配结构不确定项, 且 $f_i(\mathbf{0})$,

$t) = \mathbf{0}, \xi_i(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0}, \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \Delta H_{ij}(x_j)$ 是第 i 个子系统的非匹配不确定互联项。

定义 6.1 考虑系统(6.1), 设 $\Omega_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 是 $x_i = 0$ 的某邻域, 且 $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_N$, 如果存在控制器

$$u_i = \Phi(y_i, t) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (6.2)$$

其中 $(y_i, t) \in \Omega_i \times \mathbb{R}^+$ 且 $\Phi(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0}$, 使得分别由控制器(6.2)与系统(6.1)以及其孤立子系统组成的闭环系统在区域 Ω 上都是渐近稳定的, 则称系统(6.1)在区域 Ω 上可用结构全息控制器分散输出反馈镇定。并称控制器(6.2)是系统(6.1)的全息分散输出反馈控制器。

注 6.1 按照定义 6.1, 控制器(6.2)不仅能使整个组合大系统(6.1)镇定, 而且能使其孤立子系统镇定, 这就能够保证一旦某个子系统同其它子系统失去互联作用, 该子系统在不需要改变原来控制器的情况下仍能正常工作。

引理 6.1 设 A 和 B 是 $m \times n$ 矩阵, 且 $|A| \leq B$, 则 $\|A\| \leq \|B\|$ 。其中 $|A|$ 表示矩阵 A 的每一个元素, 取绝对值后所得的矩阵。

引理 6.2 设 P 是 n 阶对称阵, $x \in \mathbb{R}^n$, 且 Q_1, Q_2 都是 n 阶正定阵, 如果 $\|f(x)\| \leq \gamma \|x\| (x \in \Omega)$, 则

$$|x^T P f(x)| \leq \frac{1}{2} \beta \|Q_1^{1/2} x\| \|Q_2^{-1/2} x\| \quad x \in \Omega$$

其中 $\beta = \gamma \lambda_M((Q_1^{1/2})^T (P^2 + I) Q_2^{-1/2})$ 是一常数。

证明 Q_1 及 Q_2 的正定性保证了 $Q_1^{-1/2}$ 和 $Q_2^{-1/2}$ 的存在性。由基本不等式 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ 得

$$\begin{aligned} |x^T P f(x)| &\leq \|Px\| \|f(x)\| \leq \\ &\leq \gamma \|Px\| \|x\| \leq \frac{1}{2} \gamma (x^T P P x + x^T x) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \gamma (\mathbf{Q}_1^{1/2} \mathbf{x})^\top [(\mathbf{Q}_1^{-1/2})^\top \mathbf{P}^2 \mathbf{Q}_2^{-1/2} + \\
& (\mathbf{Q}_1^{-1/2})^\top \mathbf{Q}_2^{-1/2}] \mathbf{Q}_2^{1/2} \mathbf{x} \leqslant \\
& \frac{1}{2} \gamma \| \mathbf{Q}_1^{1/2} \mathbf{x} \| \lambda_M((\mathbf{Q}_1^{-1/2})^\top \times \\
& (\mathbf{P}^2 + I) \mathbf{Q}_2^{-1/2}) \| \mathbf{Q}_2^{1/2} \mathbf{x} \| = \\
& \frac{1}{2} \beta \| \mathbf{Q}_1^{1/2} \mathbf{x} \| \| \mathbf{Q}_2^{1/2} \mathbf{x} \| \quad [\text{证毕}]
\end{aligned}$$

6.2.2 分散输出鲁棒控制

考虑系统(6.1), 假设存在 $m \times n$ 矩阵 \mathbf{K} 使得 $\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C}$ 是 Hurwitz 稳定阵, 则对任何 n 阶正定对称阵 \mathbf{Q} , Lyapunov 方程

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C})^\top \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C}) = -\mathbf{Q} \quad (6.4)$$

有惟一正定解矩阵 \mathbf{P} 。

首先, 引入如下的一些基本假设:

假设 6.1 不确定项 $f_i(\mathbf{x}_i, t)$, $\xi_i(\mathbf{x}_i, t)$ 和 $\Delta H_{ij}(\mathbf{x}_j)$ 满足

$$\| f_i(\mathbf{x}_i, t) \| \leqslant \varphi(\| \mathbf{y}_i \|) \psi(\| \mathbf{x}_i \|)$$

$$\| \xi_i(\mathbf{x}_i, t) \| \leqslant \rho(\mathbf{y}_i, t)$$

$$\| \Delta H_{ij}(\mathbf{x}_j) \| \leqslant \gamma_{ij} \| \mathbf{x}_j \| \quad i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, N$$

其中 $\varphi(\cdot), \psi(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$, $\rho(\mathbf{y}_i, t) \in C^1$ 是满足 $\varphi(0) = 0$ 的已知函数。

注 6.2 系统(6.1)的孤立子系统的所有不确定性及非线性特性都是通过 $f_i(\mathbf{x}_i, t)$ 和 $\xi_i(\mathbf{x}_i, t)$ 来刻画的, 从假设 1 可看出, 它们分别相对于 i 都具有相同的界函数。于是, 系统(6.1)可看作是由相似的子系统互联而成的。应当注意到, 如果把 $f_i(\mathbf{x}_i, t)$, $\xi_i(\mathbf{x}_i, t)$ 也视作交互项, 则假设 6.1 是文献[66]对系统的相应假定的进一步推广。

假设 6.2 存在矩阵 \mathbf{K} 使得 $\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C}$ 是 Hurwitz 稳定阵。

假设 6.3 存在非奇异阵 F 使得

$$B^T P = FC \quad (6.5)$$

其中 P 由式(6.4)确定。

注 6.3 假设 6.2 和假设 6.3 是研究系统输出反馈镇定问题的最基本的要求(参见文献[68, 69])。

由引理 3.1 $H_{ij}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ 以及 $H_{ij}(x_j) \in V^w(\mathbb{R}^n)$ 知, 存在函数矩阵 $R_{ij}(x_j)$ 满足

$$H_{ij}(x_j) = R_{ij}(x_j)x_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, N, i \neq j \quad (6.6)$$

定理 6.1 设系统(6.1)满足假设 6.1 ~ 6.3, 且 $W^T(x) + W(x)$ 是区域 Ω 上的正定函数阵, 其中 $W(x) = (w_{ij}(x_j))_{N \times N}$,

$$w_{ij}(x_j) = \begin{cases} \frac{1}{2} & i = j \\ -(2a_{ij} + b_{ij}) & i \neq j \end{cases}$$

$$a_{ij} = \lambda_M((Q^{-1/2})^T P R_{ij}(x_j) Q^{-1/2})$$

$$b_{ij} = \gamma_{ij}\lambda_M((Q^{-1/2})^T (P^2 + I) Q^{-1/2}) \quad (i \neq j)$$

这里 $1 \leq i, j \leq N$, P, Q 由式(6.4)确定, $R_{ij}(x_j)$ 由式(6.6)确定, 则系统(6.1)可用结构全息输出反馈控制器分散鲁棒镇定。

证明 首先, 设计如下的控制器

$$u_i = u^a(y_i) + u^b(y_i) + u^c(y_i) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (6.7)$$

其中 $u^a(y_i) = Ky_i$ 是线性部分;

$$u^b(y_i) = -\frac{1}{2\epsilon}(F^T)^{-1} \|P\|^2 \eta^2(\|y_i\|) y_i \quad \text{是非线性部分};$$

$$u^c(y_i) = \begin{cases} -\frac{Fy_i}{\|Fy_i\|} \rho(y_i, t) & y_i \neq 0 \\ 0 & y_i = 0 \end{cases}$$

这里 ϵ 是一个待定的正数, $\eta(r)$ 由下式定义

$$\eta(r) = \begin{cases} \frac{\phi(r)}{r} & r \neq 0 \\ \phi'(0) & r = 0 \end{cases} \quad (r \in \mathbb{R}^+)$$

显然有

$$\phi(\|\mathbf{y}_i\|) = \|\mathbf{y}_i\| \eta(\|\mathbf{y}_i\|) \quad (6.8)$$

由控制器(6.7)的结构容易看出, 它不仅是分散输出控制器, 而且具有结构全息特性。所以, 只须证明系统(6.1)及其孤立子系统都能用控制器(6.7)镇定即可。

现在, 考虑由结构全息控制器(6.7)与系统(6.1)构成的闭环系统

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_i &= A\mathbf{x}_i + f_i(\mathbf{x}_i, t) + B(u^a(\mathbf{y}_i) + u^b(\mathbf{y}_i) + u^c(\mathbf{y}_i) + \\ &\quad \xi_i(\mathbf{x}_i, t)) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (\mathbf{H}_{ij}(\mathbf{x}_j) + \Delta\mathbf{H}_{ij}(\mathbf{x}_j)) \quad (6.9) \\ \mathbf{y}_i &= C\mathbf{x}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

构造函数

$$V(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i^\top \mathbf{P} \mathbf{x}_i \quad (6.10)$$

其中 \mathbf{P} 由式(6.4)定义。显然 $V(\mathbf{x})$ 是其定义域 Ω 上的正定函数, 由假设 6.2 和 6.3 即得, 函数 $V(\mathbf{x})$ 沿着系统(6.9)的轨线的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}|_{(6.9)} &= \\ &\sum_{i=1}^N \left\{ -\mathbf{x}_i^\top \mathbf{Q} \mathbf{x}_i + 2\mathbf{x}_i^\top \mathbf{P}[f_i(\mathbf{x}_i, t) + \right. \\ &\quad B(u^b(\mathbf{y}_i) + u^c(\mathbf{y}_i) + \xi_i(\mathbf{x}_i, t)) + \\ &\quad \left. \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (\mathbf{H}_{ij}(\mathbf{x}_j) + \Delta\mathbf{H}_{ij}(\mathbf{x}_j)) \right\} = \\ &\sum_{i=1}^N \left\{ -\mathbf{x}_i^\top \mathbf{Q} \mathbf{x}_i + 2\mathbf{x}_i^\top \mathbf{P} f_i(\mathbf{x}_i, t) + 2\mathbf{x}_i^\top \mathbf{P} B u^b(\mathbf{y}_i) + \right. \\ &\quad 2(\mathbf{F}\mathbf{y}_i)^\top (u^c(\mathbf{y}_i) + \xi_i(\mathbf{x}_i, t)) + \\ &\quad \left. 2\mathbf{x}_i^\top \mathbf{P} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (\mathbf{H}_{ij}(\mathbf{x}_j) + \Delta\mathbf{H}_{ij}(\mathbf{x}_j)) \right\} = \\ &\sum_{i=1}^N (-\alpha_i \mathbf{x}_i^\top \mathbf{Q} \mathbf{x}_i + 2\mathbf{x}_i^\top \mathbf{P} f_i(\mathbf{x}_i, t) + 2\mathbf{x}_i^\top \mathbf{P} B u^b(\mathbf{y}_i)) + \end{aligned}$$

$$2 \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}\mathbf{y}_i)^T (\mathbf{u}^c(\mathbf{y}_i) + \xi_i(\mathbf{x}_i, t)) + \\ \sum_{i=1}^N \left(-\alpha_2 \mathbf{x}_i^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_i + 2 \mathbf{x}_i^T \mathbf{P} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (\mathbf{H}_{ij}(\mathbf{x}_j) + \Delta \mathbf{H}_{ij}(\mathbf{x}_j)) \right)$$

其中 α_1 和 α_2 是满足 $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ 的任意正常数。由下面的证明，容易看出， α_1 ， α_2 和结构全息控制器的增益以及系统(6.1)的镇定域的大小密切相关。所以，适当地选择可调参数 α_1 和 α_2 可以得到满足要求的控制器。为了避免记号的麻烦及不必要的复杂性，令 $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$ ，则

$$\begin{aligned} \dot{V}|_{(6.8)} = & \\ \sum_{i=1}^N & \left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}_i^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_i + 2 \mathbf{x}_i^T \mathbf{P} f_i(\mathbf{x}_i, t) + 2 \mathbf{x}_i^T \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{u}^b(\mathbf{y}_i) \right) + \\ 2 \sum_{i=1}^N & (\mathbf{F}\mathbf{y}_i)^T (\mathbf{u}^c(\mathbf{y}_i) + \xi_i(\mathbf{x}_i, t)) + \\ \sum_{i=1}^N & \left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}_i^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_i + 2 \mathbf{x}_i^T \mathbf{P} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (\mathbf{H}_{ij}(\mathbf{x}_j) + \Delta \mathbf{H}_{ij}(\mathbf{x}_j)) \right) \end{aligned} \quad (6.11)$$

由假设 1 及式(6.8)、 $\mathbf{u}^b(\cdot)$ 的定义以及基本不等式 $2b \leq a^2 + b^2$ 得

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \mathbf{x}_i^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_i + 2 \mathbf{x}_i^T \mathbf{P} f_i(\mathbf{x}_i, t) + 2 \mathbf{x}_i^T \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{u}^b(\mathbf{y}_i) &\leq \\ -\frac{1}{2} \mathbf{x}_i^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_i + 2 \|\mathbf{x}_i\| \|\mathbf{P}\| \varphi(\|\mathbf{y}_i\|) \psi(\|\mathbf{x}_i\|) + \\ 2(\mathbf{F}\mathbf{y}_i)^T \mathbf{u}^b(\mathbf{y}_i) &\leq -\frac{1}{2} \mathbf{x}_i^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_i + \epsilon \|\mathbf{x}_i\|^2 \psi^2(\|\mathbf{x}_i\|) + \\ \frac{1}{2\epsilon} \|\mathbf{P}\|^2 \varphi^2(\|\mathbf{y}_i\|) - \\ 2(\mathbf{F}\mathbf{y}_i)^T (\mathbf{F}^T)^{-1} \frac{1}{\epsilon} \|\mathbf{P}\|^2 \eta^2(\|\mathbf{y}_i\|) \mathbf{y}_i &= \\ -\frac{1}{2} \mathbf{x}_i^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_i + \epsilon \|\mathbf{x}_i\|^2 \psi^2(\|\mathbf{x}_i\|) + \\ \frac{1}{\epsilon} \|\mathbf{P}\|^2 \|\mathbf{y}_i\|^2 \eta^2(\|\mathbf{y}_i\|) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\epsilon} \|P\|^2 \eta^2(\|\mathbf{y}_i\|) \mathbf{y}_i^\top \mathbf{y}_i = \\ & -\frac{1}{2} \mathbf{x}_i^\top \mathbf{Q} \mathbf{x}_i + \epsilon \|\mathbf{x}_i\|^2 \psi^2(\|\mathbf{x}_i\|) \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (6.12)$$

由矩阵 \mathbf{Q} 的正定性及 $\psi(r) \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$ 知, 存在正常数 ϵ 使得

$$\epsilon \|\mathbf{x}_i\|^2 \psi(\|\mathbf{x}_i\|) \leq \frac{1}{2} \mathbf{x}_i^\top \mathbf{Q} \mathbf{x}_i \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (6.13)$$

对所有的 $\mathbf{x}_i \in \Omega_i$ 成立。事实上, 任意满足

$$0 < \epsilon \leq \frac{1}{2} \frac{\lambda_{\min}(\mathbf{Q})}{\max_{1 \leq i \leq N} \sup_{\mathbf{x}_i \in \Omega_i} \psi^2(\|\mathbf{x}_i\|)}$$

的 ϵ 都满足不等式(6.13), 这里 $\lambda_{\min}(\mathbf{Q})$ 表示矩阵 \mathbf{Q} 的最小特征值。

由式(6.13) 和式(6.12) 得

$$\sum_{i=1}^N \left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}_i^\top \mathbf{Q} \mathbf{x}_i + 2\mathbf{x}_i^\top \mathbf{P} \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i, t) + 2\mathbf{x}_i^\top \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{u}^c(\mathbf{y}_i) \right) \leq 0 \quad (6.14)$$

再由假设 6.1 和 $\mathbf{u}^c(\mathbf{y}_i)$ 的结构可得

$$\begin{aligned} & (\mathbf{F}\mathbf{y}_i)^\top (\mathbf{u}^c(\mathbf{y}_i) - \xi_i(\mathbf{x}_i, t)) = \\ & \left\{ \begin{array}{ll} (\mathbf{F}\mathbf{y}_i)^\top \left(-\frac{\mathbf{F}\mathbf{y}_i}{\|\mathbf{F}\mathbf{y}_i\|} \rho(\mathbf{y}_i, t) + \xi_i(\mathbf{x}_i, t) \right) & \mathbf{F}\mathbf{y}_i \neq 0 \\ 0 & \mathbf{F}\mathbf{y}_i = 0 \end{array} \right\} \\ & = -\|\mathbf{F}\mathbf{y}_i\| \rho(\mathbf{y}_i, t) + \|\mathbf{F}\mathbf{y}_i\| \|\xi_i(\mathbf{x}_i, t)\| \leq 0 \\ & \quad (i = 1, 2, \dots, N) \end{aligned}$$

所以

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}\mathbf{y}_i)^\top (\mathbf{u}^c(\mathbf{y}_i) + \xi_i(\mathbf{x}_i, t)) \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (6.15)$$

由假设 6.1, 引理 6.2 有

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}_i^\top \mathbf{Q} \mathbf{x}_i + 2\mathbf{x}_i^\top \mathbf{P} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (\mathbf{H}_{ij}(\mathbf{x}_j) + \Delta \mathbf{H}_{ij}(\mathbf{x}_j)) \right) = \\ & \sum_{i=1}^N \left(-\frac{1}{2} \|\mathbf{Q}^{1/2} \mathbf{x}_i\|^2 + 2(\mathbf{Q}^{1/2} \mathbf{x}_i)^\top (\mathbf{Q}^{-1/2})^\top \mathbf{P} \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N R_{ij}(\mathbf{x}_j) \mathbf{Q}^{-1/2} \mathbf{Q}^{1/2} \mathbf{x}_j + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbf{x}_j^\top \mathbf{P} \Delta \mathbf{H}_{ij}(\mathbf{x}_j) \leq \\
& \sum_{i=1}^N \left\{ -\frac{1}{2} \|\mathbf{Q}^{1/2} \mathbf{x}_i\|^2 + 2 \|\mathbf{Q}^{1/2} \mathbf{x}_i\| \right. \\
& \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \lambda_M((\mathbf{Q}^{-1/2})^\top \mathbf{P} \mathbf{R}_{ij}(\mathbf{x}_j) \mathbf{Q}^{-1/2}) \|\mathbf{Q}^{1/2} \mathbf{x}_j\| \Big\} + \\
& \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \gamma_{ij} \|\mathbf{Q}^{1/2} \mathbf{x}_i\| \lambda_M((\mathbf{Q}^{-1/2})^\top (\mathbf{P}^2 + \mathbf{I}) \mathbf{Q}^{-1/2}) \|\mathbf{Q}^{1/2} \mathbf{x}_j\|
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^N \left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}_i^\top \mathbf{Q} \mathbf{x}_i + 2 \mathbf{x}_i^\top \mathbf{P} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (\mathbf{H}_{ij}(\mathbf{x}_j) + \Delta \mathbf{H}_{ij}(\mathbf{x}_j)) \right) \leq \\
& -\sum_{i=1}^N \left\{ \frac{1}{2} \|\mathbf{Q}^{1/2} \mathbf{x}_i\|^2 + \right. \\
& \left. \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (2a_{ij} + b_{ij}) \|\mathbf{Q}^{1/2} \mathbf{x}_i\| \|\mathbf{Q}^{1/2} \mathbf{x}_j\| \right\} \quad (6.16)
\end{aligned}$$

把式(6.14), (6.15) 和式(6.16)代入式(6.11)得

$$\begin{aligned}
V|_{(6.9)} & \leq -\frac{1}{2} (\|\mathbf{Q}^{1/2} \mathbf{x}_1\| \cdot \\
& \|\mathbf{Q}^{1/2} \mathbf{x}_2\|, \dots, \|\mathbf{Q}^{1/2} \mathbf{x}_N\|) \times \\
& (\mathbf{W}^\top(\mathbf{x}) + \mathbf{W}(\mathbf{x})) \begin{bmatrix} \|\mathbf{Q}^{1/2} \mathbf{x}_1\| \\ \|\mathbf{Q}^{1/2} \mathbf{x}_2\| \\ \vdots \\ \|\mathbf{Q}^{1/2} \mathbf{x}_N\| \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

由函数矩阵 $\mathbf{W}^\top(\mathbf{x}) + \mathbf{W}(\mathbf{x})$ 在区域 Ω 上的正定性得, $V|_{(6.9)}$ 在区域 Ω 上是负定的, 故系统(6.9)渐近稳定。

另外, 完全依照上述证明易得, 结构全息控制器(6.7)与系统(6.1)的孤立子系统构成的闭环系统是渐近稳定的。

综上所述, 定理得证。

[证毕]

注 6.4 式(6.7)给出了使系统(6.1)镇定的结构全息分散输出反馈控制器。需要说明的是,上述定理中充分条件的一个重要作用在于它可以估计系统(6.1)镇定域 Ω 的大小,而且可通过适当地选择正定矩阵 Q 及可调参数 α_1, α_2 来增大系统(6.1)的镇定域 Ω 。

注 6.5 如果系统(6.1)的第 i 个子系统的互联项 $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbf{H}_j(\mathbf{x}_j)$ 具有更一般的形式,比如为 $\mathbf{H}_i(\mathbf{x})$ ($\mathbf{H}_i(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$),则将 $\mathbf{H}_i(\mathbf{x})$ 表示为下述形式^[6]

$$\mathbf{H}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{R}_i(\mathbf{x})\mathbf{x}_i \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

本节所述方法仍然有效,即使各个子系统的维数不等,利用上述方法亦可得到类似结论。不过,此时所得控制器不再具有全息结构。

推论 6.1 假设

(1) 存在矩阵 K 及非奇异矩阵 F 使得 $A + BKC$ 是 Hurwitz 稳定的,且 $B^T P_i = FC$,其中 P_i 是下述 Lyapunov 方程的解

$$(A + BKC)^T P_i + P_i (A + BKC) = -I \quad (6.17)$$

(2) 存在常值矩阵 L_{ij} 使得对所有的 $\mathbf{x}_j \in \Omega_j$ 有

$$|\mathbf{P}_i \mathbf{R}_{ij}(\mathbf{x}_j)| \leq L_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, N, i \neq j)$$

其中 $\mathbf{R}_{ij}(\mathbf{x}_j)$ 由式(6.6)定义。

如果矩阵 $W^T + W$ 正定,其中 $W = (w_{ij})_{N \times N}$

$$w_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2} & i = j \\ -2\lambda_M(L_{ij}) - \lambda_M(P_i^2 + I) & i \neq j \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, N$$

系统(6.1)可用结构全息输出反馈控制器分散鲁棒镇定。

证明 利用引理 6.1 结合定理 6.1 的证明直接可得。[证毕]

定理 6.1 和推论 6.1 的主要区别在于,定理 6.1 中的 W 是函数矩阵,而推论 6.1 中的 W 是常值矩阵。所以,后者易于判别,但后者所得结论一般较前者保守。

6.3 完全时变非线性组合大系统的分散控制

这一节讨论带有非匹配不确定项的时变非线性相似组合大系统,其中大系统的孤立子系统及互联项都是强非线性的,且是时变的。对这类系统设计出一种连续的结构全息大增益分散输出反馈控制器,并给出控制器的增益、镇定域以及不确定项的界函数三者之间的关系描述。

6.3.1 系统描述及问题叙述

考虑如下的非线性相似组合系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= f_i(x_i, t) + \Delta f_i(x_i, \delta_i, t) + \\ &\quad G(x_i, t)(u_i + \Delta g_i(x_i, \delta_i, t)) + \\ &\quad H_i(x, \delta_i, t)\end{aligned}\tag{6.18}$$

$$y_i = y_i(x_i), \quad x_i(t_0) = x_{i0} \quad i = 1, 2, \dots, N$$

其中 $x_i \in \Omega_i \subset \mathbb{R}^n$, $u_i, y_i \in \mathbb{R}^m$ 是系统的第 i 个子系统的状态、控制和输出; $x = \text{col}(x_1, x_2, \dots, x_N) \in \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_N = \Omega$, $\delta_i \in E_i \subset \mathbb{R}^{k_i}$ (E_i 是紧集) 是不确定参数,可以是时变的; $G(x_i, t) = (g_{i1}(x_i, t), g_{i2}(x_i, t), \dots, g_{im}(x_i, t))$, $f(x_i, t)$ 是 n 维光滑向量场; $\Delta f_i(x_i, \delta_i, t)$, $\Delta g_i(x_i, \delta_i, t)$ 和 $H_i(x, \delta_i, t)$ 是不确定项,且关于其相应的变量都是连续的; $\Delta g_i(x_i, \delta_i, t)$ 是匹配不确定项; $\Delta f_i(x_i, \delta_i, t)$ 和 $H_i(x, \delta_i, t)$ 是非匹配不确定项。不失一般性,令 $t_0 = 0$, $x_{i0} = \mathbf{0}$, $f(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0}$ ($t \in \mathbb{R}^+ = \{t \mid t \geq 0\}$)。

为行文方便起见,引入如下定义:

定义 6.2 系统

$$\left. \begin{aligned}\dot{x}_i &= f(x_i, t) + G(x_i, t)u_i \\ y_i &= y_i(x_i) \quad i = 1, 2, \dots, N\end{aligned}\right\} \tag{6.19}$$

称为系统(6.1)的名义子系统,而系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_i &= f(x_i, t) + \Delta f_i(x_i, \delta_i, t) + G(x_i, t)(u_i + \Delta g_i(x_i, \delta_i, t)) \\ y_i &= y_i(x_i) \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \right\} \quad (6.20)$$

则称为系统(6.1)的孤立子系统。

首先,对系统(6.1)引入一些基本假设。

假设 6.4 存在 \mathbb{R}^+ 上的函数 $\varphi(\cdot), \rho(\cdot, t), \psi(\cdot)$ 以及 $\Phi_{ij}(\cdot) (i, j = 1, 2, \dots, N)$ 使得

$$\|\Delta f_i(x_i, \delta_i, t)\| \leq \psi(\|x_i\|) \varphi(\|y_i\|) \quad (6.21)$$

$$\|\Delta g_i(x_i, \delta_i, t)\| \leq \rho(y_i, t) \quad (6.22)$$

$$\|H_i(x, \delta_i, t)\| \leq \sum_{j=1}^N \Phi_{ij}(\|x_j\|) \quad (6.23)$$

对所有的 $t \in \mathbb{R}^+, x \in \Omega$ 及 $\delta_i \in E_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 均成立,其中 $\varphi(\cdot), \rho(\cdot, t), \psi(\cdot)$ 都是已知函数, $\varphi(0) = \rho(0, t) = \Phi_{ij}(0) = 0 (t \in \mathbb{R}^+)$, $\psi(\cdot)$ 和 $\rho(\cdot, t)$ 是连续的, $\varphi(\cdot)$ 和 $\Phi_{ij}(\cdot)$ 在 \mathbb{R}^+ 上解析。

注 6.6 满足式(6.23)的每联项在文献[64~66, 74]曾讨论过,正如文献[37]所述,这类互联项具有较一般形式,它是文献[31, 36, 43, 64~66, 74]所讨论过的互联项的更一般推广。

现在,我们提出这样一个问题:假设系统(6.1)的名义子系统(6.19)可用输出反馈控制器镇定,如果可能,试设计一结构全息分散输出反馈控制器

$$u_i = q(y_i, t) \quad i = 1, 2, \dots, N$$

使之与系统(6.1)构成的闭环系统在区域 Ω 上是渐近稳定的。

6.3.2 全息分散输出控制

为了解决上面所提出的问题,还需对系统(6.1)引入如下的假设。

假设 6.5 存在连续控制 $u_i = u^i(y_i, t)$, C^1 函数 $V: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ 及 K 类函数 $r_1(\cdot), r_2(\cdot)$ 和 $r_3(\cdot)$ 使得对所有的 $x_i \in \Omega_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 和 $t \in \mathbb{R}^+$ 有

$$(1) \quad r_1(\|x_i\|) \leq V(x_i, t) \leq r_2(\|x_i\|);$$

$$(2) \quad \frac{\partial V(x_i, t)}{\partial t} + \left[\frac{\partial V(x_i, t)}{\partial x_i} \right]^T (f(x_i, t) + G(x_i, t)u^i(y_i, t)) \\ \leq -r_3(\|x_i\|);$$

$$(3) \quad \left\| \frac{\partial V(x_i, t)}{\partial x_i} \right\| \leq \xi(\|x_i\|) \zeta(\|x_i\|) \zeta(\|y_i\|), \text{ 其中 } \xi(\cdot)$$

是 \mathbb{R}^+ 上的解析函数, $\xi(0) = 0$, 且 $\zeta(\cdot)$ 是连续的。

注 6.7 上述假设 6.5 中的条件(1)和(2)保证了系统(6.1)的名义子系统可用输出反馈镇定^[79]。由文[79]知,如果系统(6.1)的名义子系统是指数稳定的,则条件(3)必满足。另外,如果 V 取为二次型 Lyapunov 函数,则选取 $\zeta(\cdot) = 1$,容易看出,此时条件(3)也满足。

假设 6.6 存在 $m \times m$ 非奇异函数矩阵 $R(\cdot, t)$ ($t \in \mathbb{R}^+$) 使得

$$\left[\frac{\partial V(x_i, t)}{\partial x_i} \right]^T G(x_i, t) = (R(y_i, t)y_i)^T$$

$$x_i \in \Omega_i \quad i = 1, 2, \dots, N$$

其中, V 由假设 6.5 给出。

注 6.8 假设 6.6 是具有线性名义子系统的非线性系统关于输出反馈镇定问题的相应条件的更进一步推广(例如,文献[69, 70]中, $V = x^T P x$, 相应条件为 $B^T P = F C$)。

定理 6.2 假设非线性相似组合大系统(6.1)满足假设 6.4 ~ 6.6。如果函数矩阵 $W^T(x) + W(x)$ 在区域 Ω 上正定,其中 $W(x) = (w_{ij}(x))_{N \times N}$,

$$w_{ij}(x) =$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\eta_3(\|x_i\|) - \xi(\|x_i\|)\zeta(\|y_i\|)\Psi_{ij}(\|x_j\|) & i = j \\ -\gamma(\|x_i\|)\zeta(\|y_i\|)\Psi_{ij}(\|x_j\|)\|x_i\|^{1/2}\|x_j\|^{1/2} & i \neq j \end{cases}$$

函数 $\eta_3(\cdot)$, $\gamma(\cdot)$ 及 $\Psi_{ij}(\cdot)$ 由

$$\begin{aligned} \eta_3(z) &= \begin{cases} \frac{1}{z}r_3(z) & z \neq 0 \\ r'_3(0) & z = 0 \end{cases} \\ \gamma(z) &= \begin{cases} \frac{1}{z}\xi(z) & z \neq 0 \\ \xi'(0) & z = 0 \end{cases} \\ \Psi_{ij}(z) &= \begin{cases} \frac{1}{z}\Phi_{ij}(z) & z \neq 0 \\ \Phi'_{ij}(0) & z = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (6.24)$$

定义, 则系统(6.1)可用连续的结构全息分散控制器镇定。

证明 设计分散输出反馈控制器如下:

$$u_i = u^1(y_i, t) + u^2(y_i, t) + u^3(y_i, t) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (6.25)$$

其中 $u^1(y_i, t)$ 由假设 6.5 确定;

$$u^1(y_i, t) = \begin{cases} -\frac{\mathbf{R}(y_i, t)}{\|\mathbf{R}(y_i, t)y_i\|}\rho(y_i, t) & y_i \neq 0 \\ 0 & y_i = 0 \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (6.26)$$

$$u^2(y_i, t) = -\frac{\xi^2(\|y_i\|)\eta^2(\|y_i\|)}{2\varepsilon^2}((\mathbf{R}(y_i, t))^T)^{-1}y_i \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (6.27)$$

这里 $\mathbf{R}(\cdot, t)$ 由假设 6.6 确定, 它在 Ω 上是非奇异的, ε 是待定正常数, η 由

$$\eta(z) = \begin{cases} \frac{1}{z}\varphi(z) & z = 0 \\ \varphi'(0) & z \neq 0 \end{cases}$$

定义,所以

$$\varphi(\|y_i\|) = \eta(\|y_i\|)\|y_i\| \quad (6.28)$$

显然,控制器(6.25)是结构全息的。

因为 $\rho(0, t) = 0$, $\rho(y_i, t)$ 是连续的,且

$$0 \leq \|u^i(y_i, t)\| \leq \rho(y_i, t)$$

所以,控制器(6.25)是连续的。(6.25)与系统(6.1)构成的闭环系统为

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f(x_i, t) + \Delta f_i(x_i, \delta_i, t) + \\ &\quad G(x_i, t)(u^i(y_i, t) + u^i(y_r, t) + u^i(y_s, t) + \\ &\quad \Delta g_i(x_i, \delta_i, t)) + H_i(x, \delta_i, t) \\ y_i &= y_i(x_i) \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (6.29)$$

下面,只须证系统(6.29)是渐近稳定的即可。

对系统(6.29),构造如下的函数:

$$\hat{V}(x, t) = \sum_{i=1}^N V(x_i, t)$$

其中 V 由假设 6.5 给出,显见 $\hat{V}(x, t)$ 是正定的。 $\hat{V}(x, t)$ 沿着系统(6.29)轨线的导数为

$$\begin{aligned} \dot{\hat{V}}(x, t)|_{(6.29)} &= \\ &\sum_{i=1}^N \left\{ \frac{\partial V(x_i, t)}{\partial t} + \left(\frac{\partial V(x_i, t)}{\partial x_i} \right)^T (f(x_i, t) + \right. \\ &\quad G(x_i, t)u^i(y_i, t)) + \left(\frac{\partial V(x_i, t)}{\partial x_i} \right)^T \Delta f_i(x_i, \delta_i, t) + \\ &\quad \left(\frac{\partial V(x_i, t)}{\partial x_i} \right)^T G(x_i, t)(u^i(y_r, t) + \Delta g_i(x_i, \delta_i, t)) + \\ &\quad \left(\frac{\partial V(x_i, t)}{\partial x_i} \right)^T G(x_i, t)u^i(y_s, t) + \\ &\quad \left. \left(\frac{\partial V(x_i, t)}{\partial x_i} \right)^T H_i(x, \delta_i, t) \right\} \leqslant \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i=1}^N r_i(\|\mathbf{x}_i\|) + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial V(\mathbf{x}_i, t)}{\partial \mathbf{x}_i} \right)^T (\Delta f_i(\mathbf{x}_i, \delta_i, t) + \\
& \mathbf{G}(\mathbf{x}_i, t) \mathbf{u}^*(\mathbf{y}_i, t)) + \\
& \sum_{i=1}^N (\mathbf{R}(\mathbf{y}_i, t) \mathbf{y}_i)^T (\mathbf{u}^*(\mathbf{y}_i, t) + \Delta g_i(\mathbf{x}_i, \delta_i, t)) + \\
& \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial V(\mathbf{x}_i, t)}{\partial \mathbf{x}_i} \right)^T \mathbf{H}_i(\mathbf{x}, \delta_i, t)
\end{aligned} \tag{6.30}$$

应当注意, 上述最后一个关系式用到了假设 6.6。

由式(6.22)以及 $\mathbf{u}^*(\mathbf{y}_i, t)$ 的结构式(6.26)得

$$\begin{aligned}
& (\mathbf{R}(\mathbf{y}_i, t) \mathbf{y}_i)^T (\mathbf{u}^*(\mathbf{y}_i, t) + \Delta g_i(\mathbf{x}_i, \delta_i, t)) \leqslant \\
& \left\{ \begin{array}{ll} (\mathbf{R}(\mathbf{y}_i, t) \mathbf{y}_i)^T \left[- \frac{\mathbf{R}(\mathbf{y}_i, t) \mathbf{y}_i}{\|\mathbf{R}(\mathbf{y}_i, t) \mathbf{y}_i\|} \rho(\mathbf{y}_i, t) + \right. \\ \quad \Delta g_i(\mathbf{x}_i, \delta_i, t) \Big] & \mathbf{y}_i \neq 0 \\ 0 & \mathbf{y}_i = 0 \end{array} \right\} = \\
& \left\{ \begin{array}{ll} - \|\mathbf{R}(\mathbf{y}_i, t) \mathbf{y}_i\| \rho(\mathbf{y}_i, t) + & \\ (\mathbf{R}(\mathbf{y}_i, t) \mathbf{y}_i)^T \Delta g_i(\mathbf{x}_i, \delta_i, t) & \mathbf{y}_i \neq 0 \\ 0 & \mathbf{y}_i = 0 \end{array} \right\} \leqslant \\
& - \|\mathbf{R}(\mathbf{y}_i, t) \mathbf{y}_i\|^2 \rho(\mathbf{y}_i, t) + \\
& \|\mathbf{R}(\mathbf{y}_i, t) \mathbf{y}_i\| \|\Delta g_i(\mathbf{x}_i, \delta_i, t)\| \leqslant 0 \\
& i = 1, 2, \dots, N
\end{aligned}$$

所以

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{R}(\mathbf{y}_i, t) \mathbf{y}_i)^T (\mathbf{u}^*(\mathbf{y}_i, t) + \Delta g_i(\mathbf{x}_i, \delta_i, t)) \leqslant 0 \tag{6.31}$$

由式(6.21)、(6.27)、(6.28), 假设 6.5, 假设 6.6 以及基本不等式 $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$ 得

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial V(\mathbf{x}_i, t)}{\partial \mathbf{x}_i} \right)^T (\Delta f_i(\mathbf{x}_i, \delta_i, t) + \mathbf{G}(\mathbf{x}_i, t) \mathbf{u}^*(\mathbf{y}_i, t)) = \\
& \sum_{i=1}^N \left(\left(\frac{\partial V(\mathbf{x}_i, t)}{\partial \mathbf{x}_i} \right)^T \Delta f_i(\mathbf{x}_i, \delta_i, t) + (\mathbf{R}(\mathbf{y}_i, t) \mathbf{y}_i)^T \mathbf{u}^*(\mathbf{y}_i, t) \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^N \left(\left[\frac{\partial V(\mathbf{x}_i, t)}{\partial \mathbf{x}_i} \right]^T \Delta f_i(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\delta}_i, t) + \right. \\
& (\mathbf{R}(\mathbf{y}_i, t) \mathbf{y}_i)^T \frac{\zeta^2(\|\mathbf{y}_i\|) \eta^2(\|\mathbf{y}_i\|)}{2\epsilon^2} ((\mathbf{R}(\mathbf{y}_i, t))^T)^{-1} \mathbf{y}_i \Big] \leq \\
& \sum_{i=1}^N \{ \xi(\|\mathbf{x}_i\|) \phi(\|\mathbf{x}_i\|) \zeta(\|\mathbf{y}_i\|) \varphi(\|\mathbf{y}_i\|) - \\
& \frac{1}{2\epsilon^2} \zeta^2(\|\mathbf{y}_i\|) \eta^2(\|\mathbf{y}_i\|) \|\mathbf{y}_i\|^2 \} \leq \\
& \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{1}{2} (\epsilon^2 \xi^2(\|\mathbf{x}_i\|) \phi^2(\|\mathbf{x}_i\|) + \frac{1}{\epsilon^2} \zeta^2(\|\mathbf{y}_i\|) \varphi^2(\|\mathbf{y}_i\|)) - \right. \\
& \left. \frac{1}{2\epsilon^2} \zeta^2(\|\mathbf{y}_i\|) \varphi^2(\|\mathbf{y}_i\|) \right\} - \\
& \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \epsilon^2 \xi^2(\|\mathbf{x}_i\|) \phi^2(\|\mathbf{x}_i\|) \quad (6.32)
\end{aligned}$$

由于 $\hat{\xi}(\cdot)$, ($\hat{\xi}(0) = 0$) 以及 $\phi(\cdot)$ 都是 \mathbb{R}^+ 上的连续函数, 且 $r_3(\cdot)$ 是 K 类函数, 所以, 存在 $\epsilon > 0$ 使得对所有的 $\mathbf{x}_i \in \Omega_i$ 有

$$\epsilon^2 \xi^2(\|\mathbf{x}_i\|) \phi^2(\|\mathbf{x}_i\|) \leq r_3(\|\mathbf{x}_i\|) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (6.33)$$

由式(6.32) 及 (6.33) 得

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial V(\mathbf{x}_i, t)}{\partial \mathbf{x}_i} \right)^T (\Delta f_i(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\delta}_i, t) + \mathbf{G}(\mathbf{x}_i, t) \mathbf{u}^1(\mathbf{y}_i, t)) \leq \\
& \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N r_3(\|\mathbf{x}_i\|) \quad (6.34)
\end{aligned}$$

由式(6.24) 得

$$\begin{aligned}
r_3(\|\mathbf{x}_i\|) &= \eta_3(\|\mathbf{x}_i\|) \|\mathbf{x}_i\| \\
\xi(\|\mathbf{x}_i\|) &= \gamma(\|\mathbf{x}_i\|) \|\mathbf{x}_i\| \\
\Phi_{ij}(\|\mathbf{x}_j\|) &= \Psi_{ij}(\|\mathbf{x}_j\|) \|\mathbf{x}_j\|
\end{aligned}$$

现在, 将式(6.31) 及式(6.34) 代入式(6.30) 得

$$\hat{V}(\mathbf{x}, t) |_{(6.29)} \leq$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N r_3(\|x_i\|) + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial V(x_i, t)}{\partial x_i} \right)^T H_i(x, \delta_i, t) \leqslant \\
& -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \eta_3(\|x_i\|) \|x_i\| + \\
& \sum_{i=1}^N (\xi(\|x_i\|) \zeta(\|y_i\|) \sum_{j=1}^N \Phi_{ij}(\|x_j\|)) = \\
& -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \eta_3(\|x_i\|) \|x_i\| + \\
& \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \gamma(\|x_i\|) \zeta(\|y_i\|) \Psi_{ij}(\|x_j\|) \|x_i\| \|x_j\| = \\
& -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \eta_3(\|x_i\|) e_i^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \gamma(\|x_i\|) \zeta(\|y_i\|) \times \\
& \Psi_{ij}(\|x_j\|) \|x_i\|^{1/2} \|x_j\|^{1/2} e_i e_j = \\
& -\frac{1}{2} (e_1, e_2, \dots, e_N) W^T(x) + W(x) \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_N \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

其中 $e_i = \|x_i\|^{1/2}$, 显见 $e_i = 0$ 当且仅当 $x_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, N$)。由函数矩阵 $W^T(x) + W(x)$ 在区域 Ω 上的正定性知, $\dot{V}|_{(6.29)}$ 是区域 Ω 上的负定函数, 所以系统(6.29)在区域 Ω 上渐近稳定。

故系统(6.1)可用结构全息输出控制器分散镇定。〔证毕〕

注 6.9 从上述论证可知, 系统(6.1)的镇定域和控制增益 ϵ 密切相关。式(6.33)描述了系统(6.1)的区域 Ω 和控制增益以及不确定项的界函数三者之间的关系。

下面给出系统(6.1)的结合全息分散输出控制器的设计步骤:

Step 1. 验证假设 6.4 ~ 6.6。

Step 2. 根据式(6.24), 求出函数 $\eta(\cdot)$, $\gamma(\cdot)$ 和 $\Psi_{ij}(\cdot)$, 然后, 求出函数矩阵 $W(x)$;

Step 3. 依据实际工程问题的需要以及 $\mathbf{W}^T(\mathbf{x}) + \mathbf{W}(\mathbf{x})$ 的正定性确定区域 Ω , 然后按照式(6.33)确定控制增益 ϵ ;

Step 4. 由式(6.26)和式(6.27)求出 \mathbf{u}^+ 和 \mathbf{u}^- ;

Step 5. 由式(6.25)设计出使系统(6.1)镇定的结构全息分散控制器。

需要补充说明的是, 如果 $\mathbf{W}(\mathbf{x})$ 是对称阵, 则上述 setp 3 中只须验证 $\mathbf{W}(\mathbf{x})$ 的正定性即可。

6.4 数例仿真

例 6.1 考虑非线性互联系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_1 + \begin{bmatrix} \theta_1 x_{11} x_{12} e^{x_{12}} \\ 2x_{12}^2 e^{x_{12}} \sin(\theta_2 t) \end{bmatrix} + \\ &\quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (\mathbf{u}_1 + x_{12}^2 e^{-t} \sin^2 \theta_2) + \\ &\quad \begin{bmatrix} x_{21}^2 \\ 0 \end{bmatrix} + \Delta \mathbf{H}_{12}(\mathbf{x}_2) \\ \mathbf{y}_1 &= (0 \quad 1) \mathbf{x}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_2 + \begin{bmatrix} \theta_2^2 x_{21} x_{22} e^{x_{22}} \\ x_{22}^2 e^{x_{22}} \cos(\theta_1 t) \end{bmatrix} + \\ &\quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \left(\mathbf{u}_2 + \frac{1}{2} x_{22}^2 e^{-t} \theta_1 \right) + \\ &\quad \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_{12} \sin x_{11} \\ x_{11} \end{bmatrix} + \Delta \mathbf{H}_{21}(\mathbf{x}_1) \\ \mathbf{y}_2 &= (0 \quad 1) \mathbf{x}_2 \end{aligned} \right\} \quad (6.35)$$

其中 $\mathbf{x}_i = \text{col}(x_{i1}, x_{i2})$ ($i = 1, 2$) 是第 i 个子系统的状态; $\theta_1 \in (-2, 2)$, $\theta_2 \in (-1, 1)$ 是不确定参数。 $\Delta \mathbf{H}_{12}(\mathbf{x}_2)$ 和 $\Delta \mathbf{H}_{21}(\mathbf{x}_1)$

是满足 $\|\Delta H_{12}(x_2)\| \leq 0.1 \|x_2\|$, $\|\Delta H_{21}(x_1)\| \leq 0.1 \|x_1\|$ 的结构不确定项。

令 $Q = I$, $K = -1$, 则式(6.17)的解为 $P = \frac{1}{2}I$, 选取 $F = \frac{1}{2}$, 令

$$\varphi(r) = 2r e^r \quad (\eta(r) = 2e^r) \quad \psi(r) = r \quad r \in [0, +\infty)$$

$$\rho(y_i, t) = y_i^2 e^{-t}$$

容易验证假设 6.4 ~ 6.6 成立, 选择

$$R_{12}(x_2) = \begin{bmatrix} x_{21} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_{21}(x_1) = \begin{bmatrix} 1 & \sin x_{11} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

直接计算得

$$W = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\left(\frac{1}{2}|x_{21}| + \frac{1}{8}\right) \\ -\frac{5}{8} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

由式(6.13)知

$$\epsilon \|x_i\|^2 \leq 0.5 \quad i = 1, 2$$

$$\text{令 } \Omega = \{(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) \mid |x_{ij}| < 2.5 \quad i, j = 1, 2\} \quad (6.36)$$

以及 $\epsilon = 0.2$, 则 $W^T(x) + W(x)$ 是区域 Ω 上的正定函数矩阵, 使系统(6.35)镇定的结构全息分散输出反馈控制器为

$$u_i = -y_i - 5y_i e^{|y_i|} - y_i^2 e^{-t} - \operatorname{sgn}(\|y_i\|) \quad i = 1, 2 \quad (6.37)$$

其中 $y_i = x_{i2}$, $\|y_i\| = |x_{i2}|$ ($i = 1, 2$)。

现在, 选取初始条件 $x_1(0) = (1.6 - 1)$, $x_2(0) = (2.1 - 0.9)$ 。考虑由式(6.38)与系统(6.35)构成的闭环系统, 选

取参数 $\theta_1 = 1.5$, $\theta_2 = 0.5$ 进行仿真, 仿真曲线如图 6.1, 仿真结果表明本节的方法是有效的。

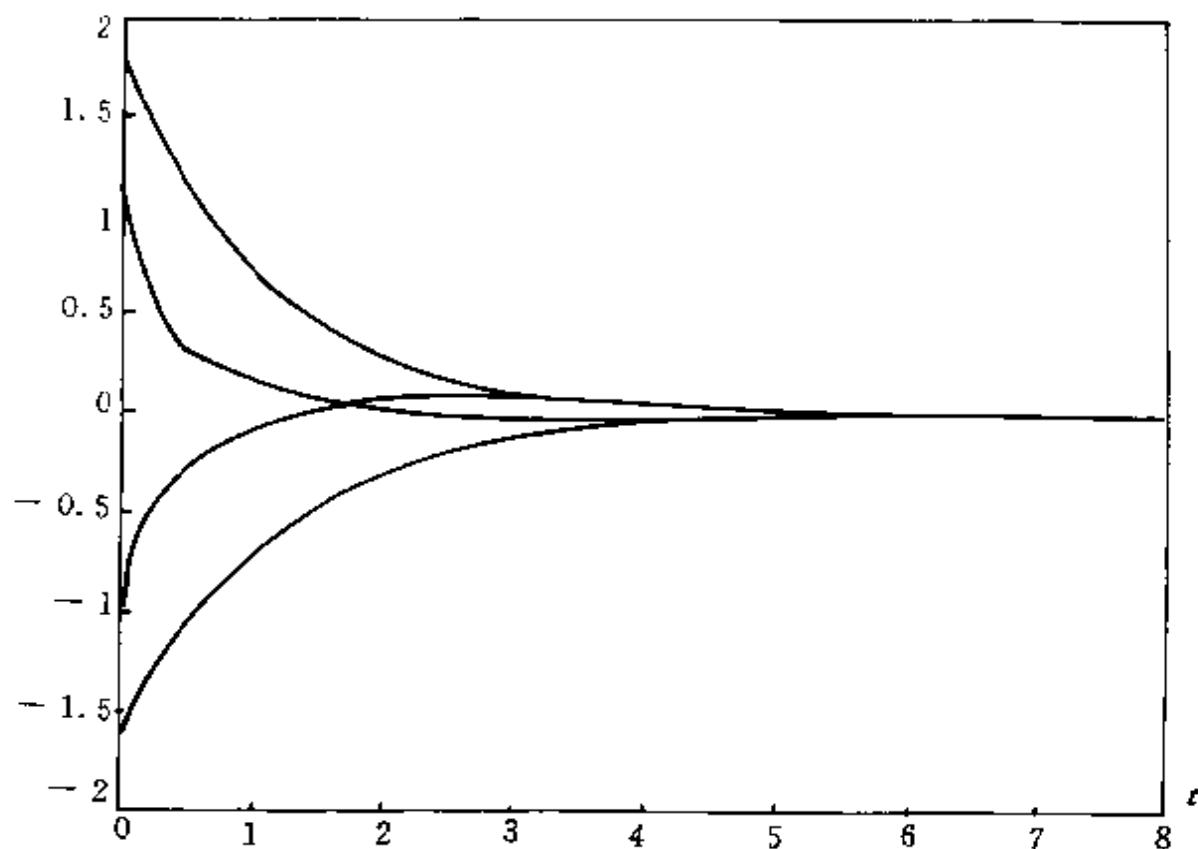


图 6.1 系统(6.35)在控制(6.37)下的响应曲线

注 6.10 由定理 6.1 及其证明知道, 如果我们选择 $\alpha_1 = 0.1$, $\alpha_2 = 0.9$, 则鲁棒镇定域 Ω 可选为

$$\Omega = \{(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) \mid |x_{ij}| < 4.2 \quad i, j = 1, 2\}$$

增益 ϵ 可选为

$$\epsilon = \frac{1}{35.28}$$

此时, 使系统(6.35)镇定的结构全息分散输出反馈控制器为

$$u_i = -y_i - 31.25y_i e^{-t} - y_i^2 e^{-t} \operatorname{sgn}(|y_i|) \quad i = 1, 2 \quad (6.38)$$

显然,增益 ϵ 及镇定域 Ω 和参数 α_1, α_2 密切相关。一般来说,镇定域 Ω 越大,全息控制器的增益越大。

例 6.2 考虑非线性相似组合系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \begin{bmatrix} -x_{12} \\ -\sin(-x_{11} + 2x_{12}) \end{bmatrix} + \\ &\quad \begin{bmatrix} (-x_{11}^2 + 2x_{11}x_{12})\delta_1 \sin x_{11} \\ (-x_{12}^2 + 2x_{11}x_{12})\delta_1^2 \sin \delta_1 t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}(u_1 + \\ &\quad \delta_1^2(x_{11} - 2x_{12})^2 t e^{-t} \sin \delta_1 t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1\delta_1 x_{22}^2 + 0.1x_{21}^2 \end{bmatrix} \\ y_1 &= -x_{11} + 2x_{12} \\ \dot{x}_2 &= \begin{bmatrix} -x_{22} \\ -\sin(-x_{21} + 2x_{22}) \end{bmatrix} + \\ &\quad \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(2x_{22}^2 - x_{22}x_{21})\delta_2^2 \\ (-x_{21}^2 + 2x_{21}x_{22})\sin \delta_2 t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}(u_2 + \\ &\quad \frac{1}{2}\delta_2(-x_{21} + 2x_{22})^2 t e^{-t}) + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 \\ (\delta_2^2 x_{11}^2 + 4x_{12}^2)^{1/2} \end{bmatrix} \\ y_2 &= -x_{21} + 2x_{22} \end{aligned} \right\} \quad (6.39)$$

其中 $x_1 = \text{col}(x_{11}, x_{12})$, $x_2 = \text{col}(x_{21}, x_{22})$, $\delta_1 \in (-1, 1)$, $\delta_2 \in (-2, 2)$ 是不确定参数。试设计使系统(6.39)镇定的结构全息控制器,并估计镇定域的大小。

令

$$\begin{aligned} u_1' &= \sin(-x_{11} + 2x_{12}) + x_{11} - 2x_{12} = \sin y_1 - y_1 \\ u_2' &= \sin(-x_{21} + 2x_{22}) + x_{21} - 2x_{22} = \sin y_2 - y_2 \\ V(z_1, z_2) &= 3z_1^2 - 2z_1 z_2 + z_2^2 \end{aligned}$$

可得

$$\begin{aligned}
 r_1(\tau) &= (2 - \sqrt{2})\tau^2 & r_2(\tau) &= (2 + \sqrt{2})\tau^2 \\
 r_3(\tau) &= 2\tau^2, k = 2 & \xi(\tau) &= 2\tau, \gamma(\tau) = 2 \\
 \zeta(\tau) &= 1 & R(y, t) &= 2 \\
 \Psi_{11}(\tau) &= \Psi_{22}(\tau) = 0 & \Psi_{12}(\tau) &= 0.1\tau \Psi_{21}(\tau) = 2 \\
 \phi(\tau) &= \varphi(\tau) = \tau & \rho(y, t) &= y^2 t e^{-t}, \gamma(\tau) = 2
 \end{aligned}$$

显然,假设 6.4 ~ 6.6 成立,按照定理 6.2, 直接计算得

$$W(x) = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - 0.2 \|x_2\| \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由式(6.33)知道, ϵ 应满足

$$0.2\epsilon^2 \|x_i\| \leq 1 \quad i = 1, 2 \quad (6.40)$$

所以

$$\begin{aligned}
 u^*(y_i, t) &= \begin{cases} -\frac{y_i^3}{|y_i|} t e^{-t} & y_i \neq 0 \\ 0 & y_i = 0 \end{cases} \quad i = 1, 2 \\
 u^*(y_i, t) &= -\frac{1}{\epsilon^2} y_i \quad i = 1, 2
 \end{aligned}$$

于是,系统(6.39)的结构全息控制器为

$$u(y_i, t) = \sin y_i - y_i - y_i^2 \widetilde{\text{sgn}}(y_i) - \frac{1}{\epsilon^2} y_i \quad i = 1, 2$$

其中

$$\widetilde{\text{sgn}}(y_i) = \begin{cases} 1 & y_i > 0 \\ 0 & y_i = 0 \\ -1 & y_i < 0 \end{cases}$$

使系统(6.39)分散镇定的结构全息控制器为

$$\begin{aligned}
 u_1 &= u(y_1, t) = \sin y_1 - y_1 - y_1^2 \widetilde{\text{sgn}}(y_1) - \frac{1}{\epsilon^2} y_1 \\
 u_2 &= u(y_2, t) = \sin y_2 - y_2 - y_2^2 \widetilde{\text{sgn}}(y_2) - \frac{1}{\epsilon^2} y_2
 \end{aligned} \quad (6.41)$$

现在选取 $\epsilon = 0.9$, $\Omega = \{x_i \mid \|x_i\| \leq 5\}$, 则函数矩阵 $W^T(x) +$

$W(x)$ 在 $\Omega \setminus \{0\}$ 上正定, 所以, 系统(6.39)可用下述分散和控制器鲁棒镇定, 即

$$\begin{aligned} u_1 &= u(y_1, t) = \sin y_1 - y_1 - y_1^2 \widetilde{\operatorname{sgn}}(y_1) - \frac{1}{0.9^2} y_1 \\ u_2 &= u(y_2, t) = \sin y_2 - y_2 - y_2^2 \widetilde{\operatorname{sgn}}(y_2) - \frac{1}{0.9^2} y_2 \end{aligned} \quad (6.42)$$

选取初始状态 $x_0 = (-3.9, -1, 3.5, 2)$, 则系统(6.39)在控制(6.42)的作用下的状态响应轨线如图 6.2, 仿真结果表明, 本文的结论是非常有效的。

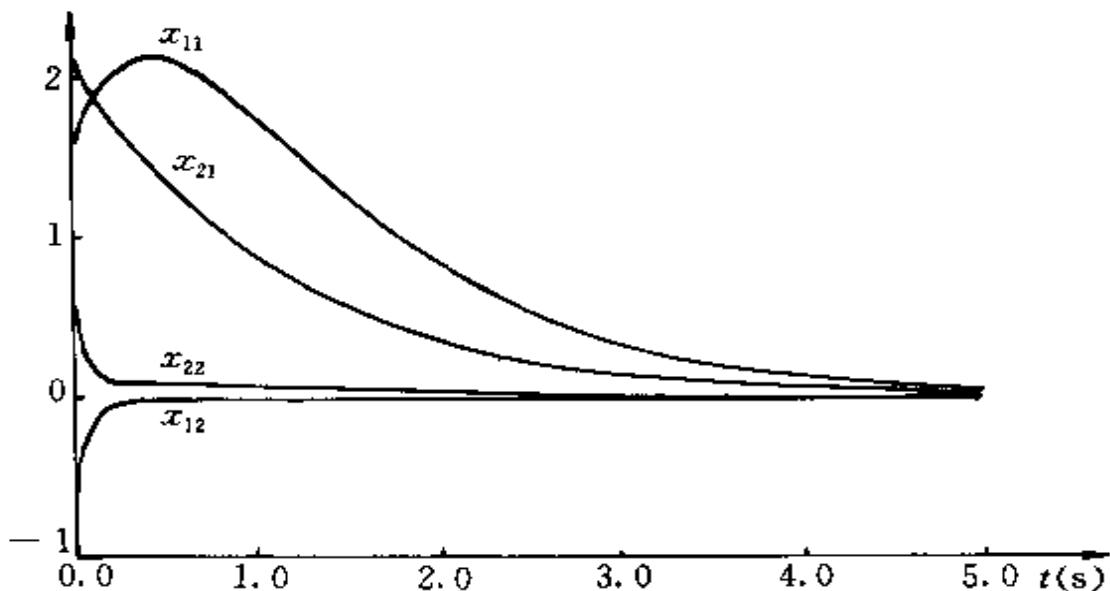


图 6.2 系统(6.39)在控制(6.42)下的响应曲线

注 6.11 由控制 u_1 和 u_2 的结构容易看出, 结构全息控制器能简化控制器的工程设计, 特别当子系统的个数较多时, 这一点尤为明显。式(6.40)描述了镇定域的控制增益之间的关系, 应当注意控制器(6.41)是连续的。从上例可看出, 系统(6.1)的镇定域可通过式(6.33)及 $W^T(x) + W(x)$ 的正定性来估计。

第七章 非线性相似组合系统的迭代学习控制

本章首先给出迭代学习控制的发展现状及其本原理的简单描述,然后对含有不确定参数的一类非线性相似组合大系统,结合现代微分几何方法给出其迭代学习算法收敛的条件,其中的迭代初始状态可由理想信号完全确定。7.3节给出一类部分结构未知的不确定相似组合系统的迭代学习控制方案,所给出的算法避免了确定迭代初始状态的麻烦,克服了现有结论的缺陷,展示了相似结构在学习控制中的优越性。

我们知道,迭代初始状态问题是学习控制中的重要问题之一,现有的关于迭代学习控制的结论一般都要求每次的迭代初始状态与理想输入产生的状态初值即理想初始状态相等。然而,理想状态和理想初始状态一般都是未知的,这样,利用现有的结果就无法得到迭代初始状态。如果迭代初始状态未知,学习控制实质上是无法进行的。尽管现有的一些算法容许迭代初始状态有误差,但所给算法的收敛性依赖于迭代初始状态与理想初始状态之间的误差,因而一般并非严格收敛,所以,给出的迭代算法不能保证通过逐次学习实现对理想信号的严格跟踪。本章对非线性相似组合大系统在迭代学习控制中的初始状态问题进行了深入的研究,得到了严格意义下的迭代学习收敛条件,给出了一种易于工程实现的严格学习跟踪控制方案及实用化的学习算法,体现了迭代学习控制方法较传统跟踪控制方案的差异,对于推动迭代学习控制方法在大系统理论研究的深入具有重要意义。

7.1 迭代学习控制概述

7.1.1 迭代学习控制的发展现状

让控制器本身具有类似于人一样的“智能”，能够通过反复学习来达到某种预期目的，这种思想早在 70 年代就引起了人们的重视^[80]。到了 1984 年，Arimoto 等人^[89]对一类非线性系统提出一种学习控制方案，其中系统的输出误差被用来更新下一次的学习控制，并利用一个简单的变换将所得结论成功地应用于机器人系统，引起了许多学者的广泛关注，并由此推动了迭代学习控制理论的深入发展。80 年代末 90 年代初，迭代学习控制的研究达到了高峰，各种学习控制律相继提出^[81~86]，基本上形成了自己独立的研究框架，成为智能控制领域一个新的研究分支。

近年来，随着复杂系统研究的深入，学习控制受到了人们的普遍关注。这主要在于学习控制一般比较容易实现，特别是它不需要动态系统及参数的精确描述，是研究非线性复杂系统的有效工具之一。将迭代学习控制与其它传统控制方法相结合，已成为学习控制新的研究方向。文献[81, 85]利用几何方法，将系统相关阶的概念与学习控制的收敛性联系起来，并利用系统的相关阶来设计迭代学习控制律；文献[88]结合最优控制理论，使得系统经过逐次学习后，不但能保证学习算法的收敛性，而且能够保证给定的系统性能指标达到最优或次优；受自适应控制理论的启发，文献[91]研究了非线性系统的模型参考学习控制问题；文献[87, 88]在反馈回路的框架下，利用前馈等手段来改进系统的学习性能；也有一些文献，探讨通过对参数进行学习，来解决控制系统的其它问题，避免了对参数进行辨识的过程。尽管目前关于迭代学习控制的研究已取得了许多研究成果，但其研究的问题还主要集中在：① 学

习算法的收敛性;② 迭代初始状态问题;③ 学习控制的鲁棒性问题;④ 重复学习控制等。其应用研究主要限于机器人系统包括受限机器人系统以及数控机床等。如何将迭代学习方法应用于更广泛的实际系统将是一个重要的值得进一步探讨的问题,仅利用现有的迭代学习控制方法,很难实现这种突破。于是,探求新的研究方法也就成为学习控制所面临的重要问题之一,也许对这一问题的深入思考会产生新的思想和方法,甚至会在理论研究与实际应用方面产生重大的突破。

7.1.2 迭代学习控制简介

所谓迭代学习控制,就是利用已获得的先验信息,经过逐次迭代学习,使得受控系统的输出在给定的时间内跟踪理想信号。

考虑非线性系统

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t)) \end{array} \right\} \quad (7.1)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$, $u, y \in \mathbb{R}^m$ 分别是系统的状态、输入和输出。

给定一理想信号,学习控制的任务就是利用前一次或前几次或者当前的学习误差,不断更新学习律,使得经过逐次反复学习之后,系统(7.1)的输出能够跟踪理想信号。近 10 余年来,各种学习控制律已被提出。从学习控制律是否利用当前的输出误差信息来看,迭代学习控制可分为开环控制和闭环控制两种形式;从学习控制律相对于系统输出误差的结构式看,迭代学习控制可分为 P 型, I 型, D 型, 或者它们之中任意两者相结合型以及 PID 型。

考虑系统(7.1),给定一理想信号 $y_d(t)$, $t \in [t_0, T]$, 假设在第 k 次学习中,由控制 $u_k(t)$ 驱动的系统状态为 $x_k(t)$, 产生的系统输出为 $y_k(t)$, 则第 k 次运行时,系统的表达形式为

$$\begin{aligned} \dot{x}_k(t) &= f(t, x_k(t), u_k(t)) \\ y_k(t) &= h(x_k(t)) \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

第 k 次运行时, 系统的输出误差 $e_k(t)$ 可表示为

$$e_k(t) = y_d(t) - y_k(t)$$

于是, 系统(7.1)的开环 PID 迭代学习控制律可描述为

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \Gamma_1 e_k(t) + \Gamma_2 \int_0^t e_k(\tau) d\tau + \Gamma_3 \dot{e}_k(t)$$

闭环 PID 迭代学习控制律可描述为

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \Gamma_1 e_{k-1}(t) + \Gamma_2 \int_0^t e_{k-1}(\tau) d\tau + \Gamma_3 \dot{e}_{k-1}(t)$$

其中开环、闭环, 以及 P 型, I 型, D 型的意义从上式不难理解, 其结构框图如图 7.1 和图 7.2 所示。

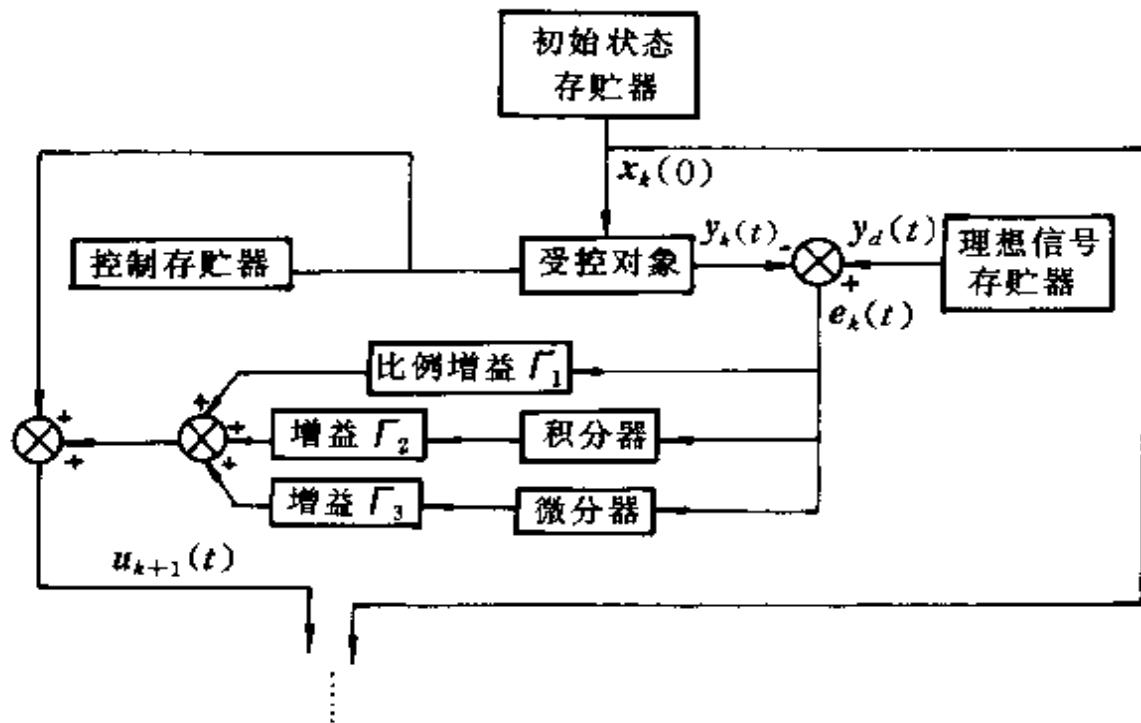


图 7.1 开环 PID 型迭代学习控制结构框图

迭代学习控制是智能控制中具有严格数学描述的一个分支, 同智能控制中的其它分支诸如模糊控制、神经网络控制等相比, 迭代学习控制具有更坚实的理论基础。同传统的控制方法相比, 它不

需要动态系统的精确模型,也不需要参数的精确描述。对那些有着强非线性,强耦合以及不易于建模的实际系统的高精度轨迹控制问题的研究,更能显示出迭代学习控制的优越性。与其它控制方法相结合,可能会成为今后迭代学习控制理论发展的重要方向。对迭代学习控制的深入研究,必将促进自动控制理论及应用的进一步发展。

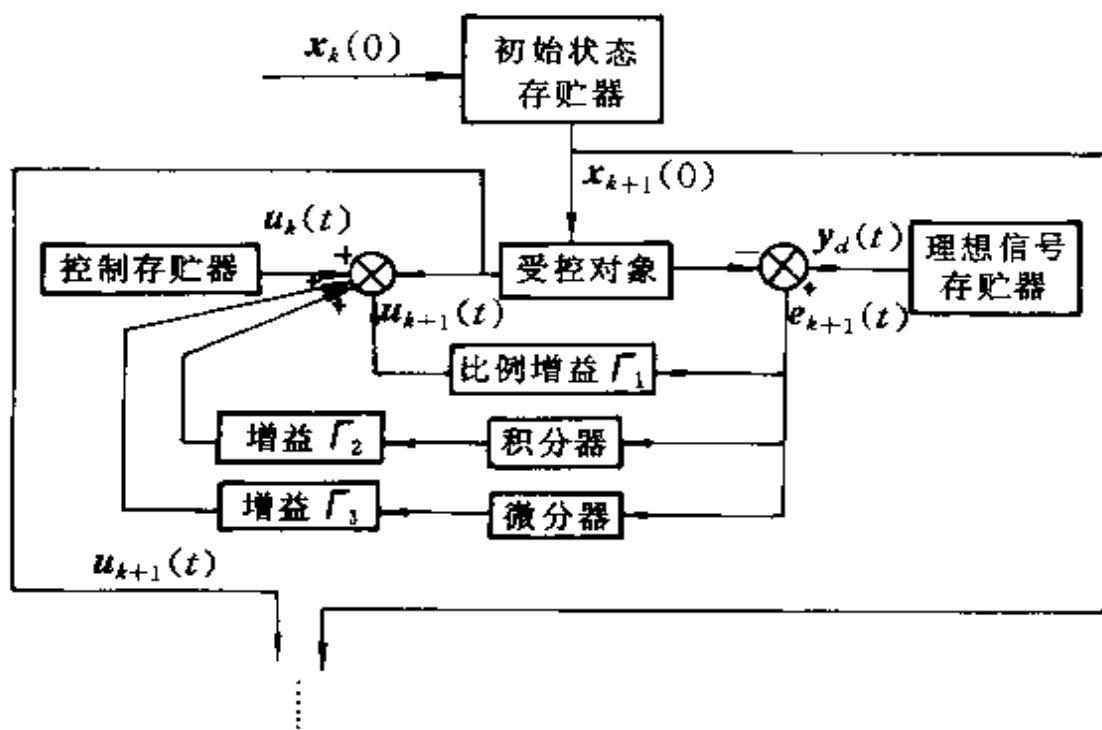


图 7.2 闭环 PID 型迭代学习控制结构框图

7.2 基于相关度的非线性相似系统的迭代学习控制

随着学习控制研究的深入,其它研究方法已开始渗透到学习控制中,进一步推动了学习控制的发展。文献[81~83]对于线性

系统和关于输入和输出是线性的非线性系统给出了一些迭代学习控制方案;文献[81]将相关度的概念用于研究线性系统的迭代学习控制;文献[84]研究了相关度为1的非线性系统的学习控制问题;文献[85]将这一结果推广到相关度大于1的可逆非线性系统,把迭代学习算法的收敛性和非线性系统的相关度联系起来,展示了微分几何方法在迭代学习控制中的应用前景。对于组合大系统,由于互联项的作用,其研究非常困难。文献[86]研究了线性组合大系统的学习控制,但关于非线性组合大系统的学习控制的研究则未曾见到。

最近,文献[87]利用前馈控制研究了非线性控制系统的控制问题,受文献[87]的启发,本节首先对一类具有相似结构的非线性组合大系统增加适当的状态反馈回路,然后对所得闭环系统进行迭代学习控制。研究表明,相似结构能简化非线性组合大系统迭代学习控制问题的理论分析与控制器的工程设计,且迭代初始状态可由理想信号直接确定,便于工程实现。

7.2.1 相似组合系统描述及预备知识

考虑非线性相似组合大系统

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_i = f(x_i) + G(x_i)u_i + H(x) \\ y_i = h(x_i) \quad i = 1, 2, \dots, N \end{array} \right\} \quad (7.2)$$

其中 $x_i \in \mathbb{R}^n$, $u_i, y_i \in \mathbb{R}^m$ 分别是第 i 个子系统的状态、输入和输出; $x = \text{col}(x_1, x_2, \dots, x_N)$, $G(x_i) = (g_1(x_i), g_2(x_i), \dots, g_m(x_i))$, $f(x_i)$, $g_l(x_i)$ ($l = 1, 2, \dots, m$), $H(x)$ 分别是其定义域上的光滑向量场, $H(x)$ 是互联项; $H(x_i) = (h_1(x_i), h_2(x_i), \dots, h_m(x_i))^T$, $h_l(x_i)$ 是其定义域上的 C^∞ 函数。

令

$$\begin{aligned} D_i &= \{x_i(t) | t \in [0, a]\} \quad i = 1, 2, \dots, N \\ D &= D_1 \times D_2 \times \dots \times D_N = \{x(t) | t \in [0, a]\} \end{aligned}$$

如果 $r = \{r_1, r_2, \dots, r_m\}$, 向量 $e(t) = (e_1(t) \ e_2(t) \ \cdots \ e_m(t))^T \in \mathbb{R}^m$, 其中 $e_i(t) (i = 1, 2, \dots, m)$ 是 r_i 次可微的, 记 $e^{(r)}(t) = (e_1^{(r_1)}(t) \ e_2^{(r_2)}(t) \ \cdots \ e_m^{(r_m)}(t))^T$, 并称其为函数向量 $e(t)$ 的 r 阶导数。

首先考虑如下的 r 阶 SISO 系统

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (7.3)$$

$$y = (1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0)z$$

其中 z , u , y 分别是系统的状态、输入和输出。考察系统(7.3)的结构易知, 它是 Brunovsky 标准型。

对于系统(7.3), 假设 $y_d(t) (t \in [0, a])$ 是理想输出信号, 下面设计一迭代学习控制律, 使得经过逐次迭代之后, 系统(7.3)的输出能够严格跟踪给定的理想输出信号。

考虑如下的简单迭代控制律

$$u_{k+1} = u_k + L e_k^{(r)}(t) \quad (7.4)$$

其中 $e_k(t) = y_d(t) - y_k(t) (y_k(t))$ 是由第 k 次输入 u_k 产生的输出, $e_k^{(r)}(t) = y_d^{(r)}(t) - y_k^{(r)}(t)$ 是第 k 次迭代输出误差 $e_k(t)$ 的 r 阶导数, L 是迭代增益常数, $z_k = \text{col}(z_{1k}, z_{2k}, \dots, z_{rk})$ 是由第 k 次输入 u_k 驱动的状态, 即第 k 次迭代状态。

引理 7.1 考虑系统(7.3), 如果

$$(1) z_k(0) = (y_k(0) \ \dot{y}_k(0) \ \cdots \ y_k^{(r-1)}(0))^T \quad (7.5)$$

(2) 理想输出 $y_d(t)$ 是 r 次连续可微的;

(3) $|1 - L| < 1$ 。

则当 $k \rightarrow \infty$ 时, 输出误差 $e_k(t) (t \in [0, a])$ 一致收敛于零。

证明 由系统(7.3)的结构及条件(1)知

$$\left. \begin{array}{l} e_k(0) = y_d(0) - y_k(0) = y_d(0) - z_{1k}(0) = 0 \\ \dot{e}_k(0) = \dot{y}_d(0) - \dot{y}_k(0) = \dot{y}_d(0) - \dot{z}_{1k}(0) = \\ \quad \dot{y}_d(0) - z_{2k}(0) = 0 \\ \vdots \\ e_k^{(r-1)}(0) = y_d^{(r-1)}(0) - y_k^{(r-1)}(0) = \dots = 0 \end{array} \right\} \quad (7.6)$$

由(7.6), 条件(1)、条件(2) 及系统(7.3) 的结构有

$$\begin{aligned} e_{k-1}(t) &= y_d(t) - y_{k-1}(t) = \\ &= y_d(t) - z_{1(k+1)}(t) = \\ &= y_d(t) - \underbrace{\int_0^t z_{2(k-1)}(t) dt}_{r=1} - z_{1(k+1)}(0) = \\ &\quad \dots = \\ &= y_d(t) - \underbrace{\int_0^t dt \int_0^t dt \dots \int_0^t}_{r=1} z_{r(k+1)}(t) dt = \\ &\quad \sum_{i=1}^{r-1} \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} z_{i(k+1)}(0) = \\ &= y_d(t) - \underbrace{\int_0^t dt \int_0^t dt \dots \int_0^t}_{r} u_{k-1}(t) dt = \\ &\quad \sum_{i=1}^{r-1} \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} z_{i(k+1)}(0) = \\ &= y_d(t) - \left(\underbrace{\int_0^t dt \int_0^t dt \dots \int_0^t}_{r} u_k(t) dt + \right. \\ &\quad \left. \sum_{i=1}^{r-1} \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} z_{ik}(0) \right) = \\ &= L \underbrace{\int_0^t dt \int_0^t dt \dots \int_0^t}_{r} e_k^{(r)}(t) dt = \\ &= y_d(t) - y_k(t) - Le_k(t) = \\ &= (1-L)e_k(t) \end{aligned}$$

所以

$$e_{k+1}(t) = (1 - L)e_k(t) \quad t \in [0, a], k \geq 0 \quad (7.7)$$

由引理条件(3)即得, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, 误差 $e_k(t)$ ($t \in [0, a]$) 一致收敛于零。
[证毕]

7.2.2 迭代学习控制的收敛性

考虑系统(7.2), 为避免记号上的麻烦, 假设系统(7.2)的每个子系统的输出 $y_i(t)$ 跟踪的理想输出信号是相同的, 且设其为 $y_d(t) = (y_{1d}(t) \ y_{2d}(t) \ \cdots \ y_{md}(t))^T$ 。

首先引入一些基本假设。

假设 7.1 系统(7.2)的孤立子系统在区域 D 上具有一致相关度^[22] $r = \{r_1, r_2, \dots, r_m\}$, 且分布 $\Delta = \text{Span}\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_N\}$ 是一对合分布。

假设 7.2 理想输出 $y_d(t) = (y_{1d}(t) \ y_{2d}(t) \ \cdots \ y_{md}(t))^T$ 在 $t \in [0, a]$ 是 r 次连续可微的, 即 $y_{id}(t)$ 是 r_i ($i = 1, 2, \dots, m$) 次连续可微的。

若假设 7.1 成立, 则由文献[22]可构造区域 D 上的非奇异反馈控制律

$$\begin{aligned} u_i &= -\beta^{-1}(\mathbf{x}_i)\alpha(\mathbf{x}_i) + \beta^{-1}(\mathbf{x}_i) \times \\ &\quad (\mathbf{v}_i - (\psi_{i1}(\mathbf{x}), \psi_{i2}(\mathbf{x}), \dots, \psi_{im}(\mathbf{x}))^T) \\ &\quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (7.8)$$

其中

$$\begin{aligned} \beta(\mathbf{x}_i) &= \\ &\left[\begin{array}{cccc} L_{\mathbf{g}_1}L_f^{r-1}h_1(\mathbf{x}_i) & L_{\mathbf{g}_2}L_f^{r-1}h_1(\mathbf{x}_i) & \cdots & L_{\mathbf{g}_m}L_f^{r-1}h_1(\mathbf{x}_i) \\ L_{\mathbf{g}_1}L_f^{r-1}h_2(\mathbf{x}_i) & L_{\mathbf{g}_2}L_f^{r-1}h_2(\mathbf{x}_i) & \cdots & L_{\mathbf{g}_m}L_f^{r-1}h_2(\mathbf{x}_i) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ L_{\mathbf{g}_1}L_f^{r-1}h_m(\mathbf{x}_i) & L_{\mathbf{g}_2}L_f^{r-1}h_m(\mathbf{x}_i) & \cdots & L_{\mathbf{g}_m}L_f^{r-1}h_m(\mathbf{x}_i) \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$\alpha(\mathbf{x}_i) = (\alpha_1(\mathbf{x}_i) \quad \alpha_2(\mathbf{x}_i) \quad \cdots \quad \alpha_m(\mathbf{x}_i))^T = \\ (L_f^r h_1(\mathbf{x}_i) \quad L_f^r h_2(\mathbf{x}_i) \quad \cdots \quad L_f^r h_m(\mathbf{x}_i))^T$$

$$\psi_i(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{n+1} \times L_{H(\mathbf{x})} L_{f(\mathbf{x})}^{r-1} h_l(\mathbf{x}_i) \quad l = 1, 2, \dots, m$$
(7.9)

其中 v_i 是参考输入信号。

系统(7.9)与系统(7.2)构成的闭环系统为

$$\dot{\mathbf{x}}_i = f(\mathbf{x}_i) - G(\mathbf{x}_i)\beta^{-1}(\mathbf{x}_i)\alpha(\mathbf{x}_i) + G(\mathbf{x}_i)\beta^{-1}(\mathbf{x}_i)v_i + H(\mathbf{x})$$

$$y_i = h(\mathbf{x}_i) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (7.10)$$

对系统(7.10), 考虑如下的迭代学习控制律

$$v_{i,k+1} = v_{i,k} + L e_{i,k}^{(r)} \quad (7.11)$$

其中 $e_{ik} = y_d - y_{ik}$ (y_{ik} 是第 k 次迭代中第 i 个子系统产生的输出) 是第 k 次迭代的输出误差; $e_{ik}^{(r)} = (e_{ik1}^{(r)} \quad e_{ik2}^{(r)} \quad \cdots \quad e_{ikm}^{(r)})^T = y_d^{(r)} - y_{ik}^{(r)}$, $e_{ik}^{(r)}(t)$ 是输出误差 $e_{ik}(t)$ 的 r 阶导数; y_k 是第 k 次迭代中由 u_k 产生的输出; $L = \text{diag}\{L_1, L_2, \dots, L_m\}$ 是常值对角增益阵。

令 $\mathbf{x}_k(t)$ 表示第 k 次迭代的状态变量, $x_k(0)$ 表示第 k 次迭代的初始状态, 构造 D 上的映射 $T = (T_1, T_2, \dots, T_N): x \rightarrow z$ 为

$$T_i \left\{ \begin{array}{l} z_{i1}^1 = h_i(\mathbf{x}_i) \\ z_{i2}^1 = L_f h_i(\mathbf{x}_i) \\ \vdots \\ z_{im}^1 = L_f^{-1} h_i(\mathbf{x}_i) \\ \\ z_i^{m+1} = \begin{bmatrix} \varphi_1(\mathbf{x}_i) \\ \varphi_2(\mathbf{x}_i) \\ \vdots \\ \varphi_{(n-\sum_{j=1}^m r_j)}(\mathbf{x}_i) \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

$$l = 1, 2, \dots, m; i = 1, 2, \dots, N \quad (7.12)$$

其中 $\varphi_i(\cdot)$ 是使得 $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ 在区域 D_i 上非奇异的足够光滑函数, 结合文献[22]知, 如果假设 7.1 成立, 则这样的函数 $\varphi_i(\cdot)$ 是存在的。所以由式(7.12) 定义的 T 是一微分同胚, z 是由 T 定义的局部坐标, 且 $n = (\sum_{i=1}^m r_i)$ 个函数 $\varphi_i(\cdot)$ 可由

$$L_{x_l} \varphi_j(x_i) = 0 \quad l = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n - (\sum_{i=1}^m r_i)$$

确定 $x \in D \quad (7.13)$

假设 7.3 迭代的初始状态 $x_{ik}(0)$ 满足

$$x_{ik}(0) = T_i^{-1}(z_d(0))$$

$$i = 1, 2, \dots, N; k = 1, 2, 3, \dots \quad (7.14)$$

其中 $z_d(0) = \text{col}(y_{1d}(0), \dot{y}_{1d}(0), \dots, y_{1d}^{(r_1)}(0), \dots, y_{md}(0), \dot{y}_{md}(0), \dots, y_{md}^{(r_m)}(0), z^{m+1}(0))$, 这里 $z^{m+1}(0)$ 可在区域 $T(D)$ 上任意选取, $z = T(x)$ 由式(7.12) 给出。

注 7.1 由假设 7.3 可看出, 第 k 次迭代初始状态只与理想输出 $y_d(t)$ 和微分同胚 T 有关。如果 T 已求出, 则 $x_{ik}(0)$ 就可由 $y_d(t)$ 直接求得, 且容许 $z^{m+1}(0)$ 有漂移。

定理 7.1 设相似组合系统(7.2) 满足假设 7.1 ~ 7.3, 且其互联项满足

$$L_{H(x)} L_{f(x)}^{\rho_l} h_l(x_i) = 0 \quad (7.15)$$

$$l = 1, 2, \dots, m; \rho_l = 0, 1, 2, \dots, r_l - 2; i = 1, 2, \dots, N$$

其中 $\tilde{f} = f(x_i) - G(x_i)\beta^{-1}(x_i)\alpha(x_i)$, 则当 $\|I - L\| < 1$ 时, 按照迭代控制律(7.11) 逐次进行迭代(其中初始输入 v_{i0} 可选为 $[0, a]$ 上的任意连续变量), 当迭代次数 $k \rightarrow \infty$ 时, 系统(7.10) 的输出 $y_i(t)$ 在区间 $[0, a]$ 上一致收敛于理想输出 $y_d(t)$ 。

证明 利用坐标变换(7.12) 的结构及假设 7.1 即得, 由式(7.8) 与系统(7.2) 构成的闭环系统为

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\mathbf{z}}_{i1}^l = \mathbf{z}_{i2}^l + L_{H(x)} h_i(\mathbf{x}_i) \\ \dot{\mathbf{z}}_{i2}^l = \mathbf{z}_{i3}^l + L_{H(x)} L_{f(x)}^{-1} h_i(\mathbf{x}_i) \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{z}}_{i(r_l-1)}^l = \mathbf{z}_{ir_l}^l + L_{H(x)} L_{f(x)}^{-1} h_i(\mathbf{x}_i) \\ \dot{\mathbf{z}}_{ir_l}^l = vt \\ \dot{\mathbf{z}}_i^{m+1} = p(\mathbf{z}_i) + q(\mathbf{z}_i)v_n + w(\mathbf{z}) \\ \mathbf{y}_i = \mathbf{z}_i^l \\ l = 1, 2, \dots, m; i = 1, 2, \dots, N \end{array} \right\} \quad (7.16)$$

其中 $\mathbf{z}_i^l = \text{col}(z_{i1}^l, z_{i2}^l, \dots, z_{ir_l}^l)$, $\mathbf{z}_i^{m+1} = \text{col}(z_{i1}^{m+1}, z_{i2}^{m+1}, \dots, z_{i(r_l-1)}^{m+1})$, $\mathbf{z}_i = (z_i^1 \ z_i^2 \ \dots \ z_i^m \ z_i^{m+1}) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{z} = \text{col}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_N)$ ($l = 1, 2, \dots, m$; $i = 1, 2, \dots, N$), $v = (v_{i1} \ v_{i2} \ \dots \ v_{im})^\top$ 是参考输入, $p(\cdot)$, $q(\cdot)$, $w(\cdot)$ 是与 $\varphi_i(\cdot)$ 有关的函数向量。

由定理条件(7.15)得, 系统(7.16)在 \mathbf{z} 坐标下具有如下的结构:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\mathbf{z}}_i^l = \mathbf{A}^l \mathbf{z}_i^l + \mathbf{B}^l v_n \\ \dot{\mathbf{z}}_i^{m+1} = p(\mathbf{z}_i) + q(\mathbf{z}_i)v_n + w(\mathbf{z}) \\ \mathbf{y}_i^l = \mathbf{C}^l \mathbf{z}_i^l \end{array} \right\} \quad (7.17)$$

其中 $l = 1, 2, \dots, m$; $i = 1, 2, \dots, N$

$$\mathbf{A}^l = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{r_l \times r_l}$$

$$\mathbf{B}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}_{r_i+1}, \quad \mathbf{C}' = (1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0)_{1 \times r_i} \quad (7.18)$$

考察系统(7.17)的结构可以看出, 系统(7.17)和系统(7.10)具有相同的输出 $y_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, N$)。注意到系统(7.17)的线性部分正好是一些彼此解耦的 SISO 系统, 且输出 $y_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, N$) 只与系统(7.17)的线性部分有关, 而与其非线性部分无关。所以, 只须研究如下的系统:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\mathbf{z}}_i^t = \mathbf{A}' \mathbf{z}_i^t + \mathbf{B}' v_{it} \\ \mathbf{y}_i^t = \mathbf{C}' \mathbf{z}_i^t \end{array} \right\} \quad (7.19)$$

其中 $\mathbf{A}', \mathbf{B}', \mathbf{C}'$ 由(7.18)确定, $t = 1, 2, \dots, m$; $i = 1, 2, \dots, N$ 。

由坐标变换(7.12)知, $\mathbf{z}_{ik} = \mathbf{T}_i(\mathbf{x}_{ik})$, 所以 $\mathbf{z}_{ik}(0) = \mathbf{T}_i(\mathbf{x}_{ik}(0))$, 结合假设 7.3 有

$$\mathbf{z}_{ik}^t(0) = \begin{bmatrix} z_{i1k}^t(0) \\ z_{i2k}^t(0) \\ \vdots \\ z_{ir_i k}^t(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{id}(0) \\ \dot{y}_{id}(0) \\ \vdots \\ y_{id}^{(r_i-1)}(0) \end{bmatrix} \quad (7.20)$$

$$k = 1, 2, 3, \dots; t = 1, 2, \dots, m; i = 1, 2, \dots, N$$

又由假设 7.2 得, $\mathbf{y}_{id}(t)$ ($y_d(t)$ 的第 t 个发量) 是 r_i 次连续可微的。于是结合增益矩阵 \mathbf{L} 的结构, 由引理 7.1 即得系统(7.10)的第 k 次输出, 即由输入 v_{ik} ($i = 1, 2, \dots, N$) 在第 k 次迭代中产生的输出

$$\mathbf{y}_{ik}(\mathbf{x}_{ik}(t)) = \mathbf{y}_{ik}(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z}_{ik}(t))) = \begin{bmatrix} z_{i1k}^1(t) \\ z_{i2k}^2(t) \\ \vdots \\ z_{ir_i k}^m(t) \end{bmatrix}$$

当 $k \rightarrow \infty$ 时, 在区间 $t \in [0, a]$ 一致收敛于理想输出 $y_d(t)$ 。

[证毕]

定理条件(7.15)实质上是互联大系统经反馈及坐标变换后能按大系统结构解耦的充分条件,这一条件也可用分布的形式表达(见文献[90]),同时文献[90]也提供了系统(7.2)能转化为系统(7.17)的一个充分条件。

7.2.3 迭代学习步骤

现在,我们将给出当理想输出信号为 $y_d(t)$ ($t \in [0, t]$) 时, 系统进行迭代学习控制的具体步骤:

Step 1. 按照式(7.8)设计反馈控制律

$$u_i = -\beta^{-1}(x_i)\alpha(x_i) + \beta^{-1}(x_i)v_i \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Step 2. 求出由 step 1 得出的反馈律与系统(7.2)构成的闭环系统(7.10);

Step 3. 按照(7.12)和(7.13)求出微分同胚 $z = T(x)$, 然后, 由理想输出 $y_d(t)$ 按照式(7.14)给出迭代初始状态;

Step 4. 任给初始输入 $v_{i0}(t)$, 并选取满足 $\|I - L\| < 1$ 的对角增益阵 L ;

Step 5. 对系统(7.10), 利用迭代控制律(7.11)逐次进行迭代, 直到系统(7.10)的输出达到满意的跟踪要求。

注 7.2 利用上述方法可以使系统的输出跟踪理想信号, 每次迭代中系统(7.2)的输入 u_i 和系统(7.10)的输入 v_i 满足如下的关系:

$$\begin{aligned} u_{i(k+1)} &= -\beta^{-1}(x_{i(k+1)})\alpha(x_{i(k+1)}) + \\ &\quad \beta^{-1}(x_{i(k+1)})(\alpha(x_{ik}) + \beta(x_{ik})u_{ik} + Le_{ik}^{(r)}) \end{aligned} \quad (7.21)$$

$$v_{i(k+1)} = v_{ik} + Le_{ik}^{(r)} \quad i = 1, 2, \dots, N$$

这一节对于一类非线性相似组合大系统, 给出了一种简单的

迭代学习控制律，并且迭代初始状态可通过理想输出信号直接确定，同时允许部分初始状态有漂移现象。由于大系统具有相似结构，所以，迭代控制律具有较好的结构，便于工程实现。但由于使用了几何方法，所以对系统限制较强，特别是对大系统互联项要求非常苛刻，下一节的方法则大大放宽了对互联项的约束。

7.3 互 联 结 构 未 知 的 相 似 组 合 系 统 的 迭 代 学 习 控 制

7.3.1 引言

迭代学习控制由于不需要动态系统和参数的精确描述，且具有某种“智能”而受到许多学者的关注。它作为一种新型的控制方法，能够避免传统控制方法的某些缺陷，实用性强，是一项非常有实际意义的研究课题。

近年来，通过迭代学习控制实现对理想信号跟踪的研究已取得了许多成果。现有的结论一般都要求所研究的系统具有某种“可逆性”，然后基于理论上存在的理想输入及理想状态给出相应的迭代收敛算法。然而，在实际系统中，理想状态及理想输入一般都是不可知的，所以，这些基于理想输入及理想状态的迭代收敛算法在实际工程中便无法实施。例如文献[85～87]要求每次迭代的初始状态与理想初始状态相等。上一节的结论及文献[91]表面上放宽了对迭代初始状态的限制，但所得结论本质上是与理想输入及理想状态密切相关的，因而，这些结论只能算是一些理论成果。文献[86]研究了一类时变线性周期大系统。其研究表明，大系统迭代学习控制的研究具有广阔的前景，特别适合于多臂机器人系统的研究，但大系统的各个子系统之间的强交互作用使得问题复杂化，所以这方面的研究成果极小。

本节将对一类具有结构未知交互的相似组合大系统进行分析,这类系统可看作是由一些相似的子系统互联而成的。假设互联项的结构及其界函数都是未知的。在这种情况下,我们给出了一种迭代学习算法,其特点在于:首先,这种算法只与理想输出信号有关,而与理想状态及理想输入无关,克服了现有结果依赖于理想状态及理想输入或者理想初始状态的缺陷,且由于控制是分散的,便于工程实现;其次,它不依赖于互联项及参数的精确模型,不需要互联项的界函数,也不须进行参数辨识,同时大大放宽了对孤立子系统的限制,克服了传统跟踪控制方法的缺陷;最后,由于利用了系统的相似结构,使得控制器的设计及计算量得以简化。

总之,本节将给出一种便于实际应用的学习算法及处理结构未知互联项的一种方法,它对于进一步促进大系统的理论研究的深入具有重要的意义。

7.3.2 系统描述及问题叙述

考虑组合大系统

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_i(t) = A_i(t)x_i + B_i(t)u_i(t) + \Delta H_i(x, t, \delta) \\ y_i = C_i(t)x_i \quad i = 1, 2, \dots, N \end{array} \right\} \quad (7.22)$$

其中 $x_i \in \mathbb{R}^n$, $u_i, y_i \in \mathbb{R}^m$ 分别是第 i 个子系统的状态向量、输入和输出; $x = \text{col}(x_1, x_2, \dots, x_N)$, $\delta \in E \subset \mathbb{R}^p$ 是紧集 E 上的 p 维不确定参数,可以是时变的; $\Delta H_i(x, t, \delta)$ 是结构未知的互联项,它可以是时变的,也可以是非线性的,且关于所有变量在其相应研究区域上是连续的。假设研究问题的时间区间为 $[t_0, T]$, 相应的研究区域为

$$D = \{x(t) | t \in [t_0, T]\}$$

定义 7.1 如果存在 $[t_0, T]$ 上的非奇异连续可微函数阵 $P_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, N$) 及连续函数阵 $A(t), B(t), C(t)$, 使得对任意的 $t \in [t_0, T]$,

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\mathbf{P}}_i(t)\mathbf{P}_i^{-1}(t) + \mathbf{P}_i(t)\mathbf{A}_i(t)\mathbf{P}_i^{-1}(t) = \mathbf{A}(t) \\ \mathbf{P}_i(t)\mathbf{B}_i(t) = \mathbf{B}(t) \\ \mathbf{C}_i(t)\mathbf{P}_i^{-1}(t) = \mathbf{C}(t) \quad i = 1, 2, \dots, N \end{array} \right\} \quad (7.23)$$

则称系统(7.22)是相似组合大系统,并称 $\mathbf{P}_i(t)$ 是第*i*个子系统的相似参量。

考察系统(7.22)的孤立子系统

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{A}_i(t)\mathbf{x}_i + \mathbf{B}_i(t)\mathbf{u}_i(t) \\ \mathbf{y}_i = \mathbf{C}_i(t)\mathbf{x}_i \quad i = 1, 2, \dots, N \end{array} \right\} \quad (7.24)$$

容易看出,满足条件(7.23)的组合大系统(7.22)的孤立子系统实质上是一些彼此代数等价的系统,而系统(7.22)则可以看作是由这样一些子系统互联而成的。这种把相同或相似的子系统互联而成的大系统称之为相似组合大系统^[3],这类系统有着极其广泛的实际背景。

本节主要考虑这样一个问题:对于相似组合大系统(7.22),给定一组理想信号 $\mathbf{y}_d(t) = (\mathbf{y}_{1,d}(t), \mathbf{y}_{2,d}(t), \dots, \mathbf{y}_{N,d}(t)) (t \in [t_0, T])$ 。如果可能,试寻求一迭代学习控制律,使得经逐次迭代之后,系统(7.22)的输出能严格跟踪理想信号,即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{y}_{i,k}(t) = \mathbf{y}_{i,d}(t) \quad (t \in [t_0, T]; \quad i = 1, 2, \dots, N)$$

其中 $\mathbf{y}_{i,k}(t)$ 是系统(7.22)的第*i*个子系统在第*k*次迭代中所产生的系统输出。

7.3.3 预备知识

首先,给出本节要用到的一些基本结论。

引理 7.2 设 $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ 及 $f(\mathbf{x}(t), t)$ 都是其定义域上的连续函数, $\Phi(t, t_0)$ 是方程

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} \quad (7.25)$$

的状态转移阵,则

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) = & \Phi(t, t_0) \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, s) \mathbf{B}(s) ds + \\ & \int_{t_0}^t \Phi(t, s) f(\mathbf{x}(s), s) ds \end{aligned}$$

是系统 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} + f(\mathbf{x})$ 满足 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ 的解。

证明 由于 $\Phi(t, t_0)$ 是方程(7.25)的状态转移矩阵, 所以

$$\frac{\partial \Phi(t, s)}{\partial t} = \mathbf{A}(t) \Phi(t, s)$$

$$\Phi(s, s) = \mathbf{I}$$

直接计算可得

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = & \frac{\partial \Phi(t, t_0)}{\partial t} \mathbf{x}_0 + \frac{\partial}{\partial t} \int_{t_0}^t \Phi(t, s) \mathbf{B}(s) \mathbf{u}(s) ds + \\ & \frac{\partial}{\partial t} \int_{t_0}^t \Phi(t, s) f(\mathbf{x}(s), s) ds = \\ & \mathbf{A}(t) \Phi(t, t_0) \mathbf{x}_0 + \Phi(t, t_0) \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t) + \\ & \int_{t_0}^t \frac{\partial \Phi(t, s)}{\partial t} \mathbf{B}(s) \mathbf{u}(s) ds + \\ & \Phi(t, t) f(\mathbf{x}(t), t) + \int_{t_0}^t \frac{\partial \Phi(t, s)}{\partial t} f(\mathbf{x}(s), s) ds = \\ & \mathbf{A}(t) \Phi(t, t_0) \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{A}(t) \Phi(t, s) \mathbf{B}(s) \mathbf{u}(s) ds + \\ & \int_{t_0}^t \mathbf{A}(t) \Phi(t, s) f(\mathbf{x}(s), s) ds + \\ & \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t) + f(\mathbf{x}(t), t) = \mathbf{A}(t) [\Phi(t, t_0) \mathbf{x}_0 + \\ & \int_{t_0}^t \Phi(t, s) \mathbf{B}(s) \mathbf{u}(s) ds - \int_{t_0}^t \Phi(t, s) f(\mathbf{x}(s), s) ds + \\ & \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t) + f(\mathbf{x}(t), t)] = \\ & \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t) + f(\mathbf{x}(t), t) \end{aligned}$$

当 $t = t_0$ 时, 有

$$\mathbf{x}(t_0) = \Phi(t_0, t_0) \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t_0} \Phi(t_0, s) \mathbf{B}(s) \mathbf{u}(s) ds +$$

$$\int_{t_0}^t \Phi(t_0, s) f(x(s), s) ds = x_0$$

所以, $x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, s)B(s)u(s)ds + \int_{t_0}^t \Phi(t, s)f(x(s), s)ds$ 是方程 $\dot{x} = A(t)x + B(t)u + f(x, t)$ 满足 $x(t_0) = x_0$ 的解。

[证毕]

考虑相似参量为 $P_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, N$) 的非线性相似组合系统(7.22), 令

$$z_i = P_i(t)x_i \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (7.26)$$

系统(7.22)在 $z = \text{col}(z_1, z_2, \dots, z_N)$ 坐标下的动态模型为

$$\dot{z}_i = A(t)z_i + B(t)u_i + P_i(t)\Delta H_i(P^{-1}(t)z, t, \delta) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (7.27)$$

其中 $P(t) = \text{diag}(P_1(t), P_2(t), \dots, P_N(t))$ 。由引理 7.2 易知,

$$\begin{aligned} z_i(t) &= \Phi(t, t_0)z(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, s)B(s)u_i(s)ds + \\ &\quad \int_{t_0}^t \Phi(t, s)P_i(s)\Delta H_i(P^{-1}(s)z(s), s, \delta)ds \end{aligned} \quad (7.28)$$

是系统(7.27)的解。

引理 7.3 (Bellman-Gronwall) 设 M 为非负常数, $\varphi(x)$ 和 $g(x)$ 是 $[a, b]$ 上的连续非负函数, 且对任意的 $x \in [a, b]$,

$$\varphi(x) \leq M + \int_a^x g(s)ds$$

则

$$\varphi(x) \leq M \exp\left(\int_a^x g(s)ds\right) \quad x \in [a, b]$$

引理 7.4 设 $s \in [t_0, T]$, f 是一个向量, 则

$$\|f\|_\lambda \leq \|f\|_{\mathcal{X}}$$

7.3.4 主要结果

对于非线性相似组合大系统(7.22), 设 $y_d(t) = (y_{1,d}(t)$

$y_{1,d}(t) \cdots y_{N,d}(t)$ ($t \in [t_0, T]$) 是给定的理想信号, 考虑如下的分散迭代学习控制律及初始状态迭代律

$$\begin{aligned} u_{i,k+1}(t) &= u_{i,k}(t) + L e_{i,k}(t) \\ k &= 1, 2, 3, \dots \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (7.29)$$

$$\begin{aligned} x_{i,k+1}(t_0) &= x_{i,k}(t_0) + P_i^{-1}(t_0) B(t_0) L e_{i,k}(t_0) \\ k &= 1, 2, 3, \dots \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (7.30)$$

其中 $u_{i,k}(t)$ 是第 k 次迭代中第 i 个子系统的输入, $x_{i,k}(t)$ 是第 k 次迭代中第 i 个子系统的状态变量, $e_{i,k}(t) = y_{i,d}(t) - y_{i,k}(t)$ 是第 k 次迭代中第 i 个子系统的输出误差, $y_{i,k}(t)$ 是第 k 次迭代中第 i 个子系统的输出, 首次迭代初始状态 $x_{i,1}(t_0)$ 可在 D 上任意选取, 首次迭代输入 $u_{i,1}(t)$ 可取为任一连续容许控制, L 是 $n \times m$ 阶可调常值学习增益阵。

定理 7.2 考虑满足式(7.23)的非线性相似组合大系统

(7.22), 设 $y_d(t) = \begin{bmatrix} y_{1,d}(t) \\ y_{2,d}(t) \\ \vdots \\ y_{N,d}(t) \end{bmatrix}$ 是理想信号, 它在区间 $[t_0, T]$ 是连续可微的, 如果

(1) 函数 $\Phi(t, s)B(s)$ 在 $(t, s) \in [t_0, T] \times [t_0, T]$ 是连续可微的, 其中 $\Phi(t, s)$ 是系统(7.25)的状态转移阵;

(2) 结构未知互联项 $\Delta H_i(x, t, \delta)$ 对于 $t \in [t_0, T]$ 及 $\delta \in E$ 关于状态变量 x 一致满足 Lipschitz 条件, 即存在常数 $\alpha (\alpha > 0)$, 使得对所有的 $\bar{x}, x \in D$,

$$\|\Delta H_i(x, t, \delta) - \Delta H_i(\bar{x}, t, \delta)\| \leq \alpha \|x - \bar{x}\| \quad (7.31)$$

其中 $i = 1, 2, \dots, N, t \in [t_0, T], \delta \in E$;

(3) $\|I_m - C(t)B(t)L\| < 1$ 。则当系统(7.22)按照迭代律(7.29)和式(7.30)进行迭代时, 其输出 $y_{i,k}(t)$ 在区间 $[t_0, T]$ 一致严格跟踪理想输出信号 $y_{i,d}(t)$, 即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \| \mathbf{y}_{i,d}(t) - \mathbf{y}_{i,k}(t) \| = 0 \quad t \in [t_0, T] \quad i = 1, 2, \dots, N$$

证明 由系统(7.22)的相似结构及变换(7.26)知, 系统(7.22)可表示为如下形式:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}_i &= \mathbf{A}(t)\mathbf{z}_i + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}_i(t) + \mathbf{P}_i(t)\Delta\mathbf{H}_i(\mathbf{P}^{-1}(t)\mathbf{z}_i, t, \delta) \\ \mathbf{y}_i &= \mathbf{C}(t)\mathbf{z}_i \end{aligned} \right\} \quad (7.32)$$

其中 $\mathbf{P}(t) = \text{diag}\{\mathbf{P}_1(t), \mathbf{P}_2(t), \dots, \mathbf{P}_N(t)\}$ 。

由式(7.30)知

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{i,k+1}(t_0) &= \mathbf{z}_{i,k}(t_0) + \mathbf{B}(t_0)\mathbf{L}\mathbf{e}_{i,k}(t_0) \\ k &= 1, 2, 3, \dots \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (7.33)$$

考虑系统(7.32), 结构上一节的分析知

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{i,k}(t) &= \Phi(t, t_0)\mathbf{z}_{i,k}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, s)\mathbf{B}(s)\mathbf{u}_{i,k}(s)ds + \\ &\quad \int_{t_0}^t \Phi(t, s)\mathbf{P}_i(s)\Delta\mathbf{H}_i(\mathbf{P}^{-1}(s)\mathbf{z}_k(s), s, \delta)ds \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{z}_k = \text{col}(\mathbf{z}_{1,k}, \mathbf{z}_{2,k}, \dots, \mathbf{z}_{N,k})$ 。由迭代学习律(7.29)和式(7.33)并结合定理7.2中的条件(1)有

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{i,k+1}(t) &= \\ &\Phi(t, t_0)\mathbf{z}_{i,k+1}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, s)\mathbf{B}(s)\mathbf{u}_{i,k+1}(s)ds + \\ &\int_{t_0}^t \Phi(t, s)\mathbf{P}_i(s)\Delta\mathbf{H}_i(\mathbf{P}^{-1}(s)\mathbf{z}_{k+1}(s), s, \delta)ds = \\ &\Phi(t, t_0)\mathbf{z}_{i,k}(t_0) + \Phi(t, t_0)\mathbf{B}(t_0)\mathbf{L}\mathbf{e}_{i,k}(t_0) + \\ &\int_{t_0}^t \Phi(t, s)\mathbf{B}(s)\mathbf{u}_{i,k}(s)ds + \int_{t_0}^t \Phi(t, s)\mathbf{B}(s)\mathbf{L}\mathbf{e}_{i,k}(s)ds + \\ &\int_{t_0}^t \Phi(t, s)\mathbf{P}_i(s)\Delta\mathbf{H}_i(\mathbf{P}^{-1}(s)\mathbf{z}_k(s), s, \delta)ds = \\ &\Phi(t, t_0)\mathbf{z}_{i,k}(t_0) + \Phi(t, t_0)\mathbf{B}(t_0)\mathbf{L}\mathbf{e}_{i,k}(t_0) - \\ &\int_{t_0}^t \frac{\partial(\Phi(t, s)\mathbf{B}(s))}{\partial s} \mathbf{L}\mathbf{e}_{i,k}(s)ds + \Phi(t, s)\mathbf{B}(s)\mathbf{L}\mathbf{e}_{i,k}(s)|_{t_0}^t = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^t \Phi(t,s) P_i(s) (\Delta H_i(P^{-1}(s) z_{k+1}(s), s, \delta)) = \\
& \Delta H_i(P^{-1}(s) z_k(s), s, \delta) ds = \\
& z_{i,k}(t) + B(t) L e_{i,k}(t) - \int_{t_0}^t \frac{\partial(\Phi(t,s) B(s))}{\partial s} L e_{i,k}(s) ds + \\
& \int_{t_0}^t \Phi(t,s) P_i(s) (\Delta H_i(P^{-1}(s) z_{k+1}(s), s, \delta)) = \\
& \Delta H_i(P^{-1}(s) z_k(s), s, \delta) ds
\end{aligned} \tag{7.34}$$

所以, 对所有的 $i = 1, 2, \dots, N$ 。

$$\begin{aligned}
z_{i,k+1}(t) - z_{i,k}(t) = \\
B(t) L e_{i,k}(t) - \int_{t_0}^t \frac{\partial(\Phi(t,s) B(s))}{\partial s} L e_{i,k}(s) ds
\end{aligned} \tag{7.35}$$

由定理 7.2 的条件(2) 知, 对任意的 $t \in [t_0, T]$ 。

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_{t_0}^t \Phi(t,s) P_i(s) (\Delta H_i(P^{-1}(s) z_{k+1}(s), s, \delta)) = \right. \\
& \left. \Delta H_i(P^{-1}(s) z_k(s), s, \delta) ds \right\| \leqslant \\
& b_1 \int_{t_0}^t \| z_{k+1}(s) - z_k(s) \| ds
\end{aligned} \tag{7.36}$$

其中 $b_1 = \alpha \max_{t, s \in [t_0, T]} \{ \| \Phi(t, s) \| \| P_i(t) \| \| P^{-1}(t) \| \}$ 是一常数,

由式(7.35)、(7.36) 及引理 7.4 得

$$\begin{aligned}
& \| z_{i,k+1}(t) - z_{i,k}(t) \|_x \leqslant \\
& \max_{t \in [t_0, T]} \{ \| B(t) L \| \} \| e_{i,k}(t) \|_{xT} + \\
& \max_{t, s \in [t_0, T]} \left\{ \left| \frac{\partial(\Phi(t,s) B(s))}{\partial s} \right| \right\} \| L \| \int_{t_0}^t e^{-\lambda(t-s)} \| e_{i,k}(s) \|_x ds + \\
& b_1 \int_{t_0}^t e^{-\lambda(t-s)} \| z_{k+1}(t) - z_k(t) \|_x ds \leqslant \\
& [a_1 + \frac{a_2}{\lambda} (1 - e^{-\lambda(T-t_0)})] \| e_{i,k}(t) \|_{xT} +
\end{aligned}$$

$$b_1 \int_{t_0}^t e^{-\lambda(t-s)} \| z_{k+1}(s) - z_k(s) \|_\lambda ds \quad (7.37)$$

其中

$$a_1 = \max_{t \in [t_0, T]} \{ \| \mathbf{B}(t) \mathbf{L} \| \}$$

$$a_2 = \max_{t, s \in [t_0, T]} \left\{ \frac{\partial(\Phi(t, s) \mathbf{B}(s))}{\partial s} \right\} + \|\mathbf{L}\|$$

都是常数, 由于式(7.37)对所有的*i* = 1, 2, ..., *N*及*t* ∈ [t₀, *T*]均成立, 所以

$$\begin{aligned} \| z_{k+1}(t) - z_k(t) \|_\lambda &\leqslant \\ &\left[a_1 + \frac{a_2}{\lambda} (1 - e^{-\lambda(T-t_0)}) \right] \| e_k(t) \|_{xT} + \\ &b_1 \int_{t_0}^t e^{-\lambda(t-s)} \| z_{k+1}(s) - z_k(s) \|_\lambda ds \end{aligned} \quad (7.38)$$

由式(7.38)及引理7.3即得

$$\begin{aligned} \| z_{k+1}(t) - z_k(t) \|_\lambda &\leqslant \\ &\left[a_1 + \frac{a_2}{\lambda} (1 - e^{-\lambda(T-t_0)}) \right] \exp \left(\int_{t_0}^t b e^{-\lambda(t-s)} ds \right) \| e_k(t) \|_{xT} \leqslant \\ &\left[a_1 + \frac{a_2}{\lambda} (1 - e^{-\lambda(T-t_0)}) \right] \exp \left(\frac{b}{\lambda} (1 - e^{-\lambda(T-t_0)}) \right) \| e_k(t) \|_{xT} \end{aligned} \quad (7.39)$$

其中 $e_k(t) = (e_{1,k}^\top(t), e_{2,k}^\top(t), \dots, e_{N,k}^\top(t))^\top$ 。

由 $e_{i,k}(t) = y_{i,d}(t) - y_{i,k}(t)$ 知, 对所有的*i* = 1, 2, ..., *N*和*k* = 1, 2, 3, ... 有 $e_{i,k+1}(t) = e_{i,k}(t) - \mathbf{C}(t)(z_{i,k+1}(t) - z_{i,k}(t))$, 再结合式(7.35)得

$$e_{k+1}(t) =$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{e}_k(t) = \text{diag} \left\{ \underbrace{\mathbf{C}(t), \mathbf{C}(t), \dots, \mathbf{C}(t)}_N \right\} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{1,k+1}(t) - \mathbf{z}_{1,k}(t) \\ \mathbf{z}_{2,k+1}(t) - \mathbf{z}_{2,k}(t) \\ \vdots \\ \mathbf{z}_{N,k+1}(t) - \mathbf{z}_{N,k}(t) \end{bmatrix} = \\
& \mathbf{e}_k(t) = \text{diag} \left\{ \underbrace{\mathbf{C}(t), \mathbf{C}(t), \dots, \mathbf{C}(t)}_N \right\} \begin{bmatrix} \mathbf{B}(t)\mathbf{L}\mathbf{e}_{1,k}(t) \\ \mathbf{B}(t)\mathbf{L}\mathbf{e}_{2,k}(t) \\ \vdots \\ \mathbf{B}(t)\mathbf{L}\mathbf{e}_{N,k}(t) \end{bmatrix} = \\
& \left[\int_{t_0}^t \frac{\partial(\Phi(t,s)\mathbf{B}(s))}{\partial s} \mathbf{L}\mathbf{e}_{1,k}(s) ds \right] \\
& \left[\int_{t_0}^t \frac{\partial(\Phi(t,s)\mathbf{B}(s))}{\partial s} \mathbf{L}\mathbf{e}_{2,k}(s) ds \right] + \\
& \quad \vdots \\
& \left[\int_{t_0}^t \frac{\partial(\Phi(t,s)\mathbf{B}(s))}{\partial s} \mathbf{L}\mathbf{e}_{N,k}(s) ds \right] \\
& \left[\int_{t_0}^t \Phi(t,s)\mathbf{P}_1(s)(\Delta\mathbf{H}_1(\mathbf{P}^{-1}(s)\mathbf{z}_{k+1}(s), s, \delta) - \right. \\
& \quad \left. - \Delta\mathbf{H}_1(\mathbf{P}^{-1}(s)\mathbf{z}_k(s), s, \delta)) ds \right. \\
& \left[\int_{t_0}^t \Phi(t,s)\mathbf{P}_2(s)(\Delta\mathbf{H}_2(\mathbf{P}^{-1}(s)\mathbf{z}_{k+1}(s), s, \delta) - \right. \\
& \quad \left. - \Delta\mathbf{H}_2(\mathbf{P}^{-1}(s)\mathbf{z}_k(s), s, \delta)) ds \right. \\
& \quad \vdots \\
& \left[\int_{t_0}^t \Phi(t,s)\mathbf{P}_N(s)(\Delta\mathbf{H}_N(\mathbf{P}^{-1}(s)\mathbf{z}_{k+1}(s), s, \delta) - \right. \\
& \quad \left. - \Delta\mathbf{H}_N(\mathbf{P}^{-1}(s)\mathbf{z}_k(s), s, \delta)) ds \right. \\
& (\mathbf{I}_{Nm} - \text{diag} \left\{ \underbrace{\mathbf{C}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{L}, \mathbf{C}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{L}, \dots, \mathbf{C}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{L}}_N \right\}) \mathbf{e}_k(t) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{diag}\{\underbrace{\mathbf{C}(t), \dots, \mathbf{C}(t)}_N\} \left[\begin{array}{c} \int_{t_0}^t \frac{\partial(\Phi(t,s)\mathbf{B}(s))}{\partial s} \mathbf{L}\mathbf{e}_{1,k}(s) ds \\ \int_{t_0}^t \frac{\partial(\Phi(t,s)\mathbf{B}(s))}{\partial s} \mathbf{L}\mathbf{e}_{2,k}(s) ds \\ \vdots \\ \int_{t_0}^t \frac{\partial(\Phi(t,s)\mathbf{B}(s))}{\partial s} \mathbf{L}\mathbf{e}_{N,k}(s) ds \end{array} \right] - \\ & \text{diag}\{\underbrace{\mathbf{C}(t), \dots, \mathbf{C}(t)}_N\} \times \\ & \left[\begin{array}{c} \int_{t_0}^t \Phi(t,s)\mathbf{P}_1(s)(\Delta\mathbf{H}_1(\mathbf{P}^{-1}(s)\mathbf{z}_{k+1}(s), s, \delta) - \\ \Delta\mathbf{H}_1(\mathbf{P}^{-1}(s)\mathbf{z}_k(s), s, \delta)) ds \\ \int_{t_0}^t \Phi(t,s)\mathbf{P}_2(s)(\Delta\mathbf{H}_2(\mathbf{P}^{-1}(s)\mathbf{z}_{k+1}(s), s, \delta) - \\ \Delta\mathbf{H}_2(\mathbf{P}^{-1}(s)\mathbf{z}_k(s), s, \delta)) ds \\ \vdots \\ \int_{t_0}^t \Phi(t,s)\mathbf{P}_N(s)(\Delta\mathbf{H}_N(\mathbf{P}^{-1}(s)\mathbf{z}_{k+1}(s), s, \delta) - \\ \Delta\mathbf{H}_N(\mathbf{P}^{-1}(s)\mathbf{z}_k(s), s, \delta)) ds \end{array} \right] \end{aligned}$$

于是, 上式两边取范数, 并由式(7.36), 式(7.39)得

$$\begin{aligned} & \| \mathbf{e}_{k+1}(t) \|_{xT} \leqslant \| (\mathbf{I}_m - \\ & \text{diag}\{\underbrace{\mathbf{C}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{L}, \mathbf{C}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{L}, \dots, \mathbf{C}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{L}}_N\} \| \| \mathbf{e}_k(t) \|_{xT} + \\ & a_2 b_2 \left(\int_{t_0}^t e^{-\lambda(t-s)} ds \right) \| \mathbf{e}_k(t) \|_{xT} + \\ & b_1 b_2 \int_{t_0}^t e^{-\lambda(t-s)} \| \mathbf{z}_{k+1}(s) - \mathbf{z}_k(s) \|_{xs} ds \leqslant \\ & \| \mathbf{I}_m - \mathbf{C}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{L} \| \| \mathbf{e}_k(t) \|_{xT} + \\ & a_2 b_2 \frac{1}{\lambda} (1 - e^{-\lambda(T-t_0)}) \| \mathbf{e}_k(t) \|_{xT} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & b_1 b_2 [a_1 + \frac{a_2}{\lambda} (1 - e^{-\lambda(T-t_0)})] \exp\left\{\frac{b_1}{\lambda} (1 - e^{-\lambda(T-t_0)})\right\} \times \\
 & \left(\int_{t_0}^t e^{-\lambda(t-s)} ds\right) \|e_k(t)\|_{xt} \leqslant \\
 & (\|\mathbf{I}_m - \mathbf{C}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{L}\| + \frac{1}{\lambda} [a_2 b_2 (1 - e^{-\lambda(T-t_0)}) + \\
 & b_1 b_2 [a_1 + \frac{a_2}{\lambda} (1 - e^{-\lambda(T-t_0)})] \exp\left\{\frac{b_1}{\lambda} (1 - e^{-\lambda(T-t_0)})\right\} \times \\
 & (1 - e^{-\lambda(T-t_0)})]) \|e_k(t)\|_{xt}
 \end{aligned}$$

其中 $b_2 = \max_{t \in [t_0, T]} \{\|\mathbf{C}(t)\|\}$ 。由定理 7.2 条件(3) 及 $\lambda (\lambda > 0)$ 的任意性知, 可选取充分大的 λ 使得

$$\begin{aligned}
 & \|\mathbf{I}_m - \mathbf{C}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{L}\| + \frac{1}{\lambda} [a_2 b_2 (1 - e^{-\lambda(T-t_0)}) + \\
 & b_1 b_2 [a_1 + \frac{a_2}{\lambda} (1 - e^{-\lambda(T-t_0)})] \exp\left\{\frac{b_1}{\lambda} (1 - e^{-\lambda(T-t_0)})\right\} \times \\
 & (1 - e^{-\lambda(T-t_0)})] = \rho < 1
 \end{aligned}$$

于是, 由 $\|e_{k+1}(t)\|_{xt} \leqslant \rho \|e_k(t)\|_{xt}, (k = 1, 2, 3, \dots)$ 即得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|e_k(t)\|_{xt} = 0 \quad t \in [t_0, T]$$

再由 λ 范数的定义知在 $[t_0, T]$ 上, $e_k(t)$ 一致趋于零, 即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|y_{i,d}(t) - y_{i,k}(t)\| = 0 \quad t \in [t_0, T], i = 1, 2, \dots, N$$

故当 $k \rightarrow \infty$ 时, $y_k(t)$ 关于 t 在 $[t_0, T]$ 上一致收敛于 $y_d(t)$ 。

注 7.3 迭代律(7.29)、(7.30) 中的增益矩阵 L 与 i 无关, 这一点不仅能简化理论分析, 也能给控制器的工程设计带来方便, 而且由于系统具有相似结构, 所以, 按照迭代控制律(7.29) 进行学习, 不会增大所得结论的保守性。另外, 定理 7.2 条件(3) 与 i 无关, 易于检验。从上述定理 7.2 的证明及所得结论可以看出, 相似结构能大大简化组合大系统的理论分析及工程设计。

注 7.4 由于本节给出的迭代学习算法及所得结论均与理想输入和理想状态无关, 首次迭代初始状态及首次迭代输入可任意选取, 且迭代控制律是分散的, 所以, 这种算法便于工程设计, 是一

种实用化的迭代学习算法。

注 7.5 传统跟踪控制器^[92,93]的设计方法一般要知道互联项的精确模型,或者至少要知道不确定交互项的界函数,且对孤立子系统均有很强的限制。由上述定理 7.2 知,我们采用的迭代学习跟踪方法能够避免这些缺陷。另外,本节的结论稍加修正即可推广到一般组合大系统,此外,迭代律(7.29)、(7.30) 中的增益矩阵 L 一般与 i 有关,且迭代增益阵可以推广到时变的情形

第八章 复杂相似系统的研究展望

非线性相似组合大系统是具有广泛实际背景的复杂系统之一。其研究不仅具有重大的理论价值，而且具有重大的实际工程意义。由于这类系统的研究国内外均未曾有人涉猎，无先前经验可借鉴，大多数工作都属于探索性的，可以想像其研究将是非常困难的，所以，对这类系统的深入研究将是一项长期而艰苦的工作。但近期的研究及已取得的成果表明，非线性相似组合大系统的研究具有极其光辉的前景。

本书的第一章至第七章对一类具有相似结构的非线性相似组合大系统进行了一些探索，得到了一系列富有创造性的结论。由于非线性相似组合大系统的研究刚刚开始，所以，这些结果只能算是一些初步的成果，大量的问题有待进一步研究。

(1) 相似结构的提出是基于生物系统及其它自然演化而形成的系统，包括一些人为设计的系统，这类系统在运行过程中需要有较好的协调性，所以，协调控制的研究是相似系统研究的一个重要问题。目前，关于这一问题的研究尚属空白。更进一步的问题还可以考虑全息协调控制。

这一问题的提出是基于对诸如体操运动员、机器人等一些实际系统的考虑。体操运动员只有动作协调，才能顺利完成一些高难动作，其姿势才能更加优美。机器人系统的道理也是一样的。再比如用两个或两个以上的直升飞机吊运一物体，各个直升机必须相互协调，否则，有可能造成灾难性的后果。再加之大系统的分散性，协调控制的研究显得尤为重要。

(2) 文献[3]指出相似结构与全息特性有着本质的联系。本书

对非线性相似组合大系统的研究进一步说明了这一结论的正确性,但本书所提出的全息是基于控制器结构意义上的全息,如何从控制方式上研究全息控制,即通过局部控制整体将是全息控制的核心研究课题,也是相似系统研究的最重要的问题之一。关于这一问题,对于线性相似组合大系统已得出了一些较好的结果,但对于非线性相似组合大系统,问题则要复杂得多,其研究可能是非常困难的,至今还未得到有意义的结论。

对于线性相似组合系统,可以利用系统的相似结构及线性系统的特性,借助一种线性坐标变换,得到一个中间系统,然后通过对中间层次的控制,实现对整个相似组合大系统的控制。这个中间系统既要较之于原系统更易于分析和设计,也不应提高所得结论的保守性。然而,对于非线性相似组合大系统,直接利用相似组合线性系统的思想来研究可能是比较困难的,甚至是不可能的。这就必须进一步探求新的方法甚至新的研究工具。

(3) 非线性相似组合大系统的难点之一是互联项的处理。对于线性相似组合大系统,可以借助系统的相似结构充分利用系统之间的互联特性,但对于非线性相似组合大系统,至少从目前看,很难完全利用互联项中的有利因素以抵消其中的不利因素。由于对于非线性组合大系统,根本无法判断互联项对所研究的问题是有利的还是有害的,因而寻求较好的方法以求最大限度地降低所得结论的保守性,提高系统的鲁棒性能将是非线性相似组合大系统的长期研究课题。

下面就互联项对整个大系统性能的影响作一些分析说明。

1) 考虑特殊的非线性互联系统

$$\begin{aligned} \dot{z} &= f(z) + \psi(z, \xi) \\ \xi &= Ax + Bu \end{aligned} \quad | \quad (8.1)$$

其中 $\psi(z, 0) = 0$, A , B 是适当维数的常值矩阵, $col(z, \xi)$ 是系统的状态, u 是系统的输入, $\psi(z, \xi)$ 是互联项。

系统(8.1)实际上是一特殊的级联系统。对于系统(8.1),假设 (A, B) 是可控阵对,即使当孤立子系统

$$\dot{z} = f(z)$$

是全局渐近稳定时,整个系统(8.1)可否镇定也有可能完全取决于系统的互联项 $\psi(z, \xi)$,这一点可通过下面的例子得到验证。

例 8.1

$$\dot{z} = -z + yz^2$$

$$\xi_1 = \xi_2$$

$$\xi_2 = u$$

$$y = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$$

其中 $z, \xi_1, \xi_2, u, y \in \mathbb{R}$ 分别表示系统的状态、输入和输出。

2) 考虑下面的简单例子。

例 8.2

$$\dot{x} = -x + u + x^2 k e^{-t} \quad (8.2)$$

其中 $x, u \in \mathbb{R}$ 分别是系统的状态和输入, k 是未知常数, $x^2 k e^{-t}$ 可视为扰动。

显然,系统(8.2)的名义系统

$$\dot{x} = -x + u \quad (8.3)$$

可用状态反馈

$$u = -x - x^3 \quad (8.4)$$

镇定。但如果将反馈(8.4)作用于系统(8.2),得到的闭环系统为

$$\dot{x} = -x + x^2 k e^{-t}$$

其显式解为

$$x(t) = \frac{2x(0)}{(2 - kx(0))e^t + kx(0)e^{-t}} \quad (8.5)$$

由上式知,式(8.5)的分母当 $t = \frac{1}{2} \ln \frac{kx(0)}{kx(0) - 2}$ 时为零。可以看出,当 $kx(0) > 2$ 时,在有限时间内 $x(t)$ 即可达到无穷大。

上述分析表明,尽管扰动项 $x^2 k e^{-t}$ 中含有一个以指数衰减的

因子 e^{-t} , 但它对系统的性能仍有着较大的影响。

由(1)可以看出, 对一些特殊的非线性组合系统, 互联项的作用可能会直接决定系统的特性; (2)表明了非线性系统的复杂性。从中可以看出, 非线性组合大系统中, 非线性不确定互联项可能会对整个系统的性能产生很大的影响。这一切表明, 寻求较好的处理互联项的方法, 以降低所得结论的保守性, 需要进行长期不懈的研究和探索。

(4) 如何对于互联项及孤立子系统均含有“非匹配”不确定性的非线性相似组合大系统设计出一种具有相似结构的观测器也是一个重要研究课题。

非线性系统观测器的设计是控制系统的难点之一, 至于非线性组合大系统, 问题则更复杂。本书第四章所给出的结论或者要求系统满足“匹配条件”, 或者要求系统具有相关阶。这些条件和限制都是比较严格的。今后的研究应着眼于一般的非线性相似组合大系统, 适当放宽这些约束。

(5) 关于迭代学习控制, 本文只对一类极特殊的非线性相似组合大系统进行了研究。解决了迭代初始状态问题, 给出了迭代控制算法的收敛条件。如果系统为一般的不确定非线性相似组合大系统, 如何得到一种能解决迭代初始状态的迭代学习控制方案还须进一步探索。许多其它学习控制问题, 诸如迭代学习的鲁棒性、稳定性、重复学习控制等问题也值得进一步分析研究。其着眼点应放在如何利用系统的相似结构来研究系统, 以进一步发现相似结构的新特征。与其它传统控制方法的有机结合, 可能是一条有效的研究途径。

目前, 迭代学习控制的应用主要限于机器人系统, 可否将其应用于更广泛的一些实际系统值得进一步分析和研究。造成这种现象的原因可能是由于迭代学习控制方法本身所限, 所以, 进一步的研究则是对迭代学习控制方法的改进, 以放宽对迭代学习条件的

限制和约束。对这一问题的深入思考,可能会产生迭代学习控制理论的新突破。

上述这些问题,其中有些还只是朦胧的想法,有些作者曾考虑过,有的正在进行探索,有的基本上已找到了答案,有些可能是非常困难的,需要化大力气,长期研究。相信这些问题的成功解决对于促进复杂相似大系统的深入研究是非常有益的。同时,对这些问题的更进一步思考,也可能会带来许多新的其它问题,它必将对控制理论的深入发展产生积极的影响。

总之,非线性相似组合大系统的研究刚刚开始,上面所提到的问题是相似系统控制问题中极少的一部分,许多问题诸如非线性相似组合大系统的能控、能观性、结构分析、最优控制、调节器问题等等均未曾研究,大量的问题还须进行深入的探讨。结合一些新的研究方法和新的理论,诸如与相似性相关的分形理论和混沌理论以及神经网络理论等,可能会给相似系统控制问题的研究找到新的突破口。

尽管非线性相似组合大系统的控制问题是非常复杂的,但已有的研究成果及本书所做的一些初步研究工作已清晰地表明,从系统的控制理论角度出发,结合全息生物学的特征,研究具有相似结构的非线性组合大系统的控制与设计问题是非常有意义的,它不但开辟了自动控制理论的一个全新的研究方向,同时,也从方法论的角度对控制理论的研究者们思维的开拓提供了一种可供借鉴的有效途径。可以预见,非线性相似组合大系统的研究具有极其广阔前景,它必将对促进一般复杂大系统的研究起到积极的推动作用。

参考文献

- 1 Albert Beneveniste and Karl J. Åström. Meeting the challenge of computer science in the industrial application of control: an introductory discussion to the special issue. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1993, 38(7): 1004~1010
- 2 黄琳,秦化淑,郑应平. 复杂控制系统理论:构想与前景. *自动化学报*, 1993, 19(2): 129~137
- 3 张嗣瀛. 复杂控制系统的对称性及相似性结构. *控制理论与应用*, 1994, 11(2): 231~237
- 4 中科院《复杂性研究》编委会. 复杂性研究. 北京:科学出版社, 1993
- 5 Zhihua Qu and Darren M. Dawson. Robust control of cascaded and individually feedback linearizable nonlinear systems. *Automatica*, 1994, 30(6): 1057~1064
- 6 Zhihua Qu and Darren M. Dawson. Lyapunov direct design of robust tracking control for classes cascaded nonlinear uncertain systems without matching conditions. *The 30th IEEE Conference on Decision and Control*. Brighton, U. K., 2521~2526, 1991
- 7 Yang G H and Zhang S Y. Stabilizing controllers for uncertain symmetric composite systems. *Automatica*, 1995, 31(2): 337~340
- 8 Sundaresan M K and Elbana R M. Qualitative analysis and decentralized controller synthesis for a class of large scale systems with symmetrically interconnected subsystems. *Automatica*, 1991, 27(2): 383~388
- 9 张嗣瀛,杨光红. 一类复杂控制系统的全息控制. *控制与决策*, 1996, 11(4): 501~505
- 10 Lin Shi and Sunil K. Singh. Decentralized control for interconnected uncertain systems: extensions to higher-order uncertainties. *Int. J. Contr.*, 1993, 57(6): 1453~1468
- 11 Zheng Y F and Luh J Y. Constrained relations between two coordinated industrial robots. *Proc. of the Conference on Intelligent System and*

- Machines. Rochester, Mich., 1983, 116~125
- 12 Sacks R and Decarlo R. Interconnected Dynamical Systems. New York: Marcel Dekker 1981
- 13 Darwish M et al. Un exemple d'un système dynamique complexe. Le réseaux d'énergie électrique, Internal Report LASS, Toulouse, France, Nov. 1979
- 14 Sepulcher R, Jankovic M and Koktovic P V. Constructive nonlinear control. New York: Springer-Verlag 1997
- 15 周美立. 相似学. 北京:中国科学技术出版社, 1993
- 16 Yi Lin. Multi-level systems. Int. J. sys. sci., 1989, 20(10): 1875~1889
- 17 Gille J C, Wegrzyn S and Vidal P. On developmental systems; multi-level and parallel development. Automatica, 1994, 30(11): 1757~1760
- 18 Lunze J. Stability analysis of large-scale systems composed of strongly connected similar subsystems. Automatica, 1989, 25(6): 561~570
- 19 Bergen A R. Results on complementary coupling of similar systems. Proc. Int. Symposium on Circuits and Systems. Tokyo, 1979, 412~416
- 20 张颖清. 全息胚学说与全息生物学. 大自然探索, 1988, 7(1): 119~124
- 21 李莱田. 全息医学. 济南: 山东科学技术出版社, 1991
- 22 Albert Isidori. Nonlinear control system. Berlin: Springer, 1989
- 23 Nijmeijer H, Van der Schaft A. Nonlinear dynamical control systems. New York: Springer-Verlag, 1990
- 24 程代展. 非线性系统的几何理论. 北京: 科学出版社, 1988
- 25 严星刚. 双线性系统的无反馈解耦线性化. 纯粹数学与应用数学, 11(2): 21~28
- 26 严星刚, 杨峻松, 张嗣瀛. 非线性奇异控制系统的解耦线性化. 控制理论与应用, 13(6): 833~837
- 27 杨光红. 一类复杂相似组合系统的鲁棒控制: [博士论文]. 东北大学,

- 1993
- 28 Kanellakopoulos I, Koktovic P V and Morse A S. A toolkit for nonlinear feedback design. *System & Control Lett.*, 1992, 18(1): 83~92
 - 29 陈禹六. 大系统理论及应用. 北京: 清华大学出版社, 1988
 - 30 Sundaresan M K. Generation of Multi level control and estimation schemes for large scale systems: a perturbational approach. *IEEE Trans. Syst. Man and Cybern.*, 1977, SMC-7, PP. 145~512
 - 31 Wen-June Wang et al. Stabilization of large scale systems with nonlinear perturbations via local feedback. *Int. J. Syst. Sci.*, 1989, 20(6): 1003~1010
 - 32 廖晓晰. 稳定性的数学理论及应用. 武汉: 华中师范大学出版社, 1988
 - 33 严星刚, 林辉, 戴冠中. 基于微分同胚的非线性系统解耦线性化. 纯粹数学与应用数学, 1998, 14(3): 93~98
 - 34 Xinggang Yan et al. Robust stability of nonlinear large-scale composite systems with uncertain parameters. *The 13th IFAC World Congress*, 1996, Sanfransco, USA, 61~66
 - 35 严星刚, 井元伟, 张嗣瀛. 一类参数不确定非线性系统的鲁棒稳定性. *控制理论与应用*, 1986, 13(6): 395~399
 - 36 Zhiming Gong. Decentralized robust control of uncertain interconnected systems with prescribed degree of exponential convergence. *IEEE Trans. Automatic Control*, 1995, 40(5): 1363~1385
 - 37 Han M C and Chen Y H. Decentralized control design: uncertain systems with strong interconnections. *Int. J. of Contr.*, 1995, 61(6): 1363~1385
 - 38 Magdi S Mahmoud, Mohamed F Hassan, and Mohamed G Darwish. *Large scale control systems: theories and techniques*. Marcel Dekker, Inc. New York, 1985
 - 39 Qu Z. Global stabilization of nonlinear systems with a class of unmatched uncertainties. *System & Control Lett.*, 1992, 18(3): 301~307
 - 40 Hahn W. *Stability of motion*. New york: Spring-Verlag, 1967
 - 41 高为炳, 程勉, 夏小华. 非线性控制系统的发展. *自动化学报*, 1991, 17

- (6):513~523
- 42 韩正之等. 非线性控制系统的特性(Ⅱ). 控制与决策, 1994, 9(6):471~478
- 43 Sundaresan M K , and Elbanna R M Design of decentralized observation schemes for large-scale interconnected systems: some new results. Automatica, 1990, 26(4): 789~796
- 44 Hunt L R and Madanpal S Verma. Observer for nonlinear systems in steady state. IEEE Trans. Automatic contr., 1994, 39(10): 2113~2118
- 45 Sekhar Raghavan and Hedrick J Karl. Observer design for a class for nonlinear systems. Int J of Contr., 1994, 59(2):515~528
- 46 Viswanadham N and Ramakrishna A. Decentralized estimation and control for interconnected systems. Large Scale Syst. , 1982, 3(4):255~266
- 47 Deleon J M, and Chorot T. On observers for a class of nonlinear systems. Proc. of the 30th Conference on Decision and Control, Brighton, England, December 1991. 457~458
- 48 Christopher Edwards and Sarah K Spurgeon. On the development of discontinuous observers. Int. J. Contr., 1994, 59(5):1211~1229
- 49 Cheng-fa Cheng, Wen-june Wang and Yu-ping Lin. Robust observer synthesis for nonlinear large-scale systems. Int. J. Syst. Sci., 1994, 25(6): 1053~1066
- 50 Rafael A Garcia and Carlos E. D'attellis. Trajectory tracking in nonlinear systems via nonlinear reduced-order observers. Int. J. Contr., 1995, 62(3):685~715
- 51 卢强,孙元章. 电力系统非线性控制. 北京:科学出版社,1993
- 52 陈彭年,韩正之,张钟俊. 非线性控制系统镇定的若干进展. 控制理论与应用, 1995, 12(4):401~409
- 53 Schoenwald D A and zgüner Ü . Robust stability of nonlinear sytems with parametric uncertainty. IEEE Trans. on Automatic Control, 1994, 38(4):1751~1755

- 54 Bernard Brogliato and Alexander Trofino Neto. Practical stability of a class of nonlinear systems with partially known uncertainties. *Automatica*, 1995, 31(1): 145~150
- 55 Huseyin O, Sezer M E and Siljak D D . Robust decentralized control using output feedback. *IEE, Part-D.*, 1980, 129(3): 310~314
- 56 Chai W, Nank Loh and Poo A N. Stabilizing uncertain discrete -time systems by observer-based control. *Int. J. Syst. Sci.*, 1994, 25(1): 761 ~769
- 57 Delepaut C, Bastin G and Gevers M. Stabilization of nonlinear systems by means of state estimate feedback. Proceeding of the 28th IEEE Conference on Decision and Control. Florida, 1989. 1042~1046
- 58 Nicosia S, Tomei P and Tornambe A. Observer-based control for a class of nonlinear systems. *Int. J. Contr.*, 1990, 50(6): 553~566
- 59 严星刚,吕兴业,张嗣瀛. 基于状态观测器的非线性相似组合大系统的镇定设计. *自动化学报*, 1997, 23(5): 584~590
- 60 Sekhar Raghavan and Karl Hedrick J. Observer design for a class of nonlinear systems. *Int. J. Contr.*, 1994, 25(6): 1053~1066
- 61 Da-zhong Zheng. Decentralized output stabilization of interconnected systems using output feedback. *IEEE Trans. Autmat. Contr.*, 1989, 34(1): 1297~1300
- 62 Izchak Lewkowicz and Raphal Sivan. Stability robustness of almost linear state equations. *IEEE Trans. Autmat. Contr.*, 1993, 38(2): 262~266
- 63 Han M C and Chen Y H. Decentralized robust control design for systems with strong interconnections. Proceeding of the 1993 American Control Conference, 1993. 3279~3283
- 64 Abdul-Amir A. et al. Composite systems stabilization by decentralized output control. Proceedings of American Control Conference, Chicago, Illinois, 1992, Vol. 2: 1168~1171
- 65 Rodellar J, Leitmann G and Ryan E P. Output feedback control of uncertain coupled systems. *Int. J. Contr.*, 1993, 58(2): 445~457

- 66 Saberi A and Khalil H. Decentralized stabilization of interconnected systems using output feedback. *Int. J. Contr.*, 1985, 41(6): 1461~1475
- 67 Christopher Edwards and Sarah K Spurgeon. Sliding mode stabilization of uncertain systems using only output information. *Int. J. Contr.*, 1995, 62(5): 1129~1144
- 68 Emelyanov S V, et al. Discontinuous output feedback stabilizing an uncertain MIMO plant. *Int. J. of Contr.*, 1992, 55(1): 83~107
- 69 Dawson D M, Qu Z. and Carroll J C. On the state observation and output feedback problems for nonlinear uncertain dynamical systems. *Systems & Control Lett.*, 1992, 18(2): 217~222
- 70 Hassan K Khalil and Farzad Esfandiari. Semiglobal stabilization of a class of nonlinear systems using output feedback. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1993, 38(9): 1412~1415
- 71 Kwanghee Nam. An output feedback stabilization scheme using the filtered coordinate transformation. *IEEE Trans. on Automatic control*, 1995, 40(11): 2089~2093
- 72 Tsinias J and Kalouptsidis N. Output feedback stabilization. *IEEE Trans. on Automatic control*, 1990, 35(8): 951~954
- 73 Sandeep Jain and Farshad Khorrami. Decentralized adaptive output feedback design for large-scale nonlinear systems. *IEEE Trans. on Automatic control*, 1997, 42(5): 729~735
- 74 Magdi S Mahmoud. Stabilizing control for a class of uncertain interconnected systems. *IEEE Trans. on Automatic control*, 1994, 39(12): 2484~2488
- 75 Sandeep Jain and Farshad Khorrami. Decentralized adaptive control of a class of large-scale interconnected nonlinear systems. *IEEE Trans. on Automatic control*, 1997, 42(2): 136~154
- 76 Marino R and Tomei P. Global adaptive output feedback control of nonlinear systems-Part 1: Nonlinear parameterization. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 38(1): 33~48
- 77 严星刚, 张嗣瀛. 不确定非线性组合大系统的分散输出反馈鲁棒镇定.

- 自动化学报, 1999, 24(2): 226~229
- 78 Xing-Gang Yan et al. Decentralized output feedback robust stabilization for a class of nonlinear interconnected systems with similarity. IEEE Trans. on Automatic Control, 1998, 43(2): 294~299
- 79 John Tsinias. A generalization of Vidyasagar's theorem on stability using state detection. Syst. & control Lett., 1991, 17(1): 37~42
- 80 Fu K S. Learning control system-review and outlook. IEEE Trans. AC, 15, 1970
- 81 Porter B and Mohamed S S. Iterative learning control of partially multivariable plants with initial state shifting. Int. J. Sys. Sci., 1991, 22(2): 229~235
- 82 Hak-Sung Lee and Zeungnam Bien. Study on robustness of iterative learning control with non-zero initial error. Int. J. of Contr., 1996, 64(3): 345~359
- 83 Tae-Jeong Jang et al. Iterative learning control for discrete-time nonlinear systems. Int J of Syst Sci., 1994, 25(7): 1179~1181
- 84 Hauser J E. Learning control for a class of nonlinear systems. Proc. 26th CDC, Los Angeles, CA, 1987. 859~860
- 85 Hyun-sik Ahn, Chong Ho Choi and Kwang-Bas Kim. Iterative learning control for a class of nonlinear systems. Automatica, 1993, 29(6): 1575~1578
- 86 Dong-Hwan Hwang, Byung Kook Kim and Zeungnam Bien. Decentralized iterative learning control methods for large-scale linear dynamical systems. Int. J. syst. sci., 1993, 24(12): 2239~2254
- 87 Tae-Jeong, Chong-Ho Choi and Packard A. Iterative learning control in feedback systems. Automatica, 1995, 31(2): 243~248
- 88 Notker Amann et al. Iterative learning control using optimal feedback and feedforward actions. Int. J. of Contr., 1996, 65(2): 277~293
- 89 Arimoto S et al. Bettering operation of dynamic systems by learning: A new control theory for servomechanism and mechatronics systems. Proc. of 23rd IEEE CDC, Las Vegas, 1984. 1064~1069

-
- 90 姜斌, 刘晓平, 张嗣瀛. 相似组合非线性系统的输出跟踪. 信息与控制, 1995, 24(2): 65~70
- 91 Chien Chern Cheah and Danwei Wang. A model reference learning control scheme for a class of nonlinear systems. Int. J. Control., 1997, 66 (2): 271~287
- 92 Cheng-Jyi Mao and Jyun-Hau Yang. Decentralized output tracking for linear uncertain interconnected systems. Automatica, 1995, 31(1): 151 ~154
- 93 Sunil K Singh. Decentralized variable structure control for tracking in nonlinear systems. Int J Contr., 1990, 52(4): 811~831
- 94 林辉. 迭代学习控制理论研究: [博士论文]. 西北工业大学, 1993
- 95 Xing Gang Yan and Guan-Zhong Dai. Decentralized output feedback robust control for nonlinear large scale systems. Automatica, 1998, 34 (11): 1469~1472