底执行哪条规则？目前，人工智能研究者和知识工程师提出了多种规则冲突的消解策略。例如“多条件原则”就是一个较好的策略，用此原则对上述冲突进行判断，可以看出应先执行规则 R_2，因为它的条件比 R_1 的条件要多。

· **解释设备**：这一机构向用户解释系统的行为。通过这一设备用户可跟踪系统所使用的知识和推理过程，并使用户知道为什么系统需要提供某一信息，以及中间和最后结果是怎样获得的，从而使系统具有透明性，这一性能的好坏将直接关系到系统是否能推广，是否能受到用户的理解和欢迎。一个没有解释设备的专家系统（或者解释功能很差的专家系统）是很难为用户所接受的，由于用户对系统的行为一无所知，从而大大地降低了用户对系统推导的结论的信任程度。

· **学习机制**：这里所要求的机器学习功能只是一种初步的要求，即主要是从黑板上所显示的中间运行结果和状态进行学习，以便改进知识库。目前，知识获取自动化即机器学习是研制和开发专家系统的一个瓶颈问题，具有学习功能的专家系统还很少。尽管有些学习工具已能满足一些系统的某些需要，但就学习能力而言，仍然还是初步的。

· **总控程序**：它通过黑板对整个系统进行控制。这种控制方式对用户使用专家系统显得十分方便。

图 1.1 给出了专家系统的组成结构示意图。

下面我们讨论专家系统的分类问题。目前国内外已开发和研制了许多专家系统，根据不同的出发点，可以把专家系统分成不同的类型。目前，常用的几种分类方法是

1. 依据专家系统的应用领域，可将专家系统分为医疗、地质、化学、交通、管理、军事等类型。

2. 依据专家系统所采用的方法和技术，可将专家系统分为演绎、经验、工具等类型。

3. 依据专家系统所解决的问题类型，可将专家系统分为诊

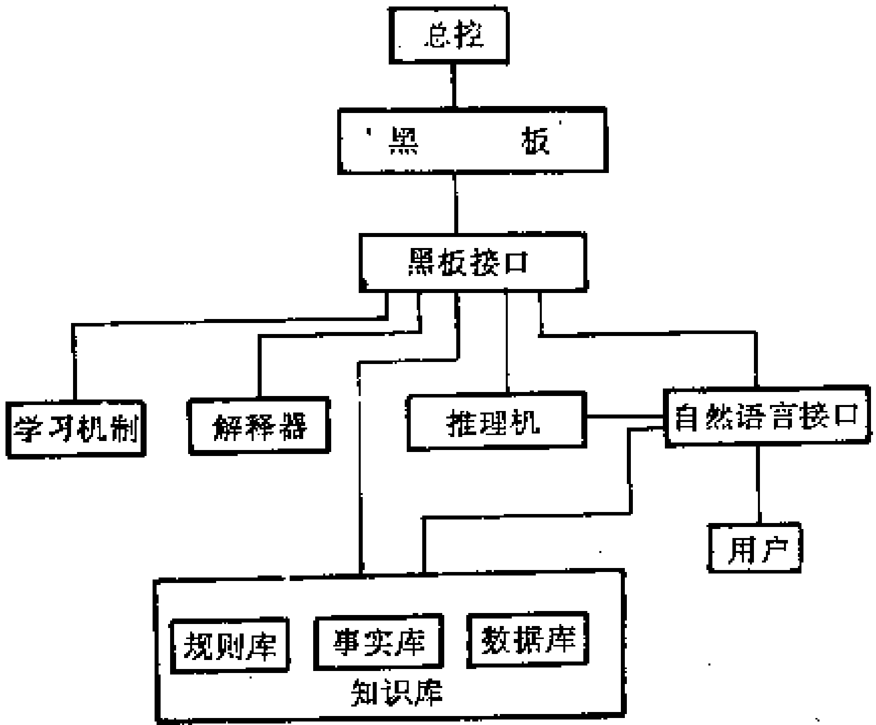


图 1.1 专家系统的组成

断、设计、控制、预测、教学等类型。

最近，Hall 和 Kandel 提出了一种新的分类方法，他们提出根据专家系统的使用情况来对专家系统分类，依据这一观点他们把专家系统分为如下三类：

(1)第一类专家系统：这类系统已为用户接受，并用来处理日常的工作，且已商品化。例如 Dendral，Macsyma 和 *R*1 就是这类系统的代表，这类系统的一个共同特点是它们都不是咨询系统，极少与用户相互作用，系统运行后都给出一个具体的解，且该解的正确性是肯定的和不容置疑的。这些系统都有易处理和定义得很好的问题域，这是许多成功的专家系统的一个重要特征。

(2)第二类专家系统：这类专家系统的特点是具有好的、甚至是专家的性能，但它们没有获得普通用户的接受。这类系统包括咨询和诊断专家系统，它们不解释自己的行为以使用户满意。

这些系统不可能得到专家的接受，因为它们不要求专家(用户)的诊断，只是给出它自己独立得到的解。如果这些系统接受用户的诊断，就可能获得广泛的接受。由这里可以看出，第二类专家

系统并不像第一类专家系统那样获得了足够的领域专家的经验。例如许多医疗咨询系统:MYCIN,CASNET 和 PUFF/Centaur 都是这类专家系统。

对于许多第二类专家系统来说,确定它的解是否正确是一件困难的事,这一点在一些医疗专家系统中显得特别突出,因为有时就是专家也可能不接受系统的诊断结果;有时认为系统给的一个可接受的诊治方案对患者却未必是一个良方。不精确性和不确定性处理是这类系统的一个重要组成部分。看来真正的能处理日常医务工作的医疗专家系统还需要一段时间,而医疗咨询辅助系统会得到快速的发展。

(3)第三类专家系统:这类专家系统连一些有限的接受也没有获得,它们还不是有真正的专家性能。这些系统的主要特征是处理问题的野心太大,因为许多人类的认识机理我们至今也没有搞清楚,要机器来实现并希望取得好的结果可以想见是十分困难的。

Hearsay Ⅰ、Ⅱ 和 AM 系统是这类专家系统的典型代表。这些系统处理的领域比较宽,它们常常要求多知识源,这给集中控制带来了困难。由于问题领域宽,因而搜索的空间也较大,且倾向于采用假设、生成和测试的控制形式。这类系统不像前两类系统那么容易定义。目前,在这类系统中不确定性还不能按一种统一的方式来进行处理。

需要说明一点的是,这类系统尽管有上面的不足和缺点,但它们的优点也是十分明显的,即它们将会对专家系统技术作出重要的贡献。

由上面对三类系统的分析我们可小结如下:随着类别的增加系统的领域将越来越大,且第二、三类专家系统处理不确定性也多于第一类专家系统。领域的不确定性越多,那么研制和开发该领域的专家系统的问题也会越多;需要的知识越多,那么开发出的专家系统存在的问题也可能越多。

第三类专家系统不像一、二类专家系统那么容易定义。而在第

二类专家系统中存在的问题是要与用户作大量的交互作用。第一类专家系统则是一个小型的、集中的且是非咨询的系统。

至于传统专家系统的知识表示与知识获取和机器学习，求解问题的推理机制及控制策略请读者参考有关的资料。

1.2 模糊专家系统

目前，专家系统已经进入第二代，即模糊专家系统，之所以将模糊专家系统称为第二代专家系统，是因为模糊专家系统是超过了第一代(二值逻辑)专家系统的新一代逻辑系统，与第一代专家系统不同的是，第二代专家系统全部采用模糊集、模糊数和模糊关系来表示和处理知识的不确定性和不精确性，输入给系统的可能是一些模糊数和离散的模糊集，规则(即模糊产生式规则)则可能包含模糊数，输出(即推理结果)则可能是一个模糊集。因而我们把凡是在系统中使用模糊集和模糊逻辑来表示和处理知识的不确定性和不精确性的专家系统都称为模糊专家系统。

就专家系统的结构(即组成部分)和设计方法而言，模糊专家系统与传统专家系统是类似的，模糊专家系统主要需要解决的是如下两个问题：

1. 模糊知识表示；
2. 模糊推理方法。

对知识表示而言，由于使用了语言变量以及它的值由上下文相关的模糊集来定义，而模糊集的含义可用各种不同的隶属函数来表示，这些隶属函数的值是由领域专家给出的主观判断。模糊集为这类不确定知识的表示提供了一个有力的武器，它可以处理下列知识的表示：

(1)**模糊谓词**，如“小”，“年轻”，“美好”。

(2)**模糊真值**，如“相当真”，“很真”，“几乎是假的”。

(3)**模糊量词**，如“大部分”，“很多”，“至少 50%”。

(4)**模糊概率**，如“可能”，“不可能”，“不大可能”。

(5)**模糊可能性**，如“很可能”，“几乎不可能”。

(6)**谓词修正词**，如“很”，“或多或少”，“相当”。

由这里可看出，与传统专家系统相比，知识表示能力获得了极大的提高。

对基于知识的系统的模糊推理而言，模糊逻辑提供了一种统一的计算方法。例如广义的肯定前件的假言推理、广义的否定后件的假言推理等推理方法都是基于模糊逻辑的，并在模糊(近似)推理中得到广泛应用。在传统专家系统中，观察事实与规则前件只允许精确匹配，不允许部分匹配，而在模糊专家系统中则允许部分匹配，这就使得它与传统逻辑系统有本质的不同，即模糊逻辑可以提供一种近似和相似的推理机制，而前者仅提供了一种精确推理机制。当然，模糊逻辑也能处理精确推理，实际上，精确推理只是近似(模糊)推理的一种特殊情况。

例如，在模糊专家系统中有如下规则：

$$\text{IF X is } A_k\text{, THEN Y is } B_k \quad k=1,2,\cdots,n \tag{1.2}$$

其中 A_k 和 B_k 是语言变量的语言值，它由属于隶属函数的程度来表示：$\mu_{A_k}(x_i)$ 和 $\mu_{B_k}(y_j)\in[0,1]$，$i=1,2,\cdots,N$，$j=1,2,\cdots,M$。假如我们获得一个观察事实：

$$\text{X is } A' \tag{1.3}$$

这里 A' 不必要与知识库中任何一条规则的前件精确匹配，借助近似推理原则，可获得如下结果：

$$\text{Y is } B' \tag{1.4}$$

这里 $\mu_{A'}(x_i)$，$\mu_{B'}(y_j)$，$\mu_{A_k}(x_i)$ 和 $\mu_{B_k}(y_j)\in[0,1]$，$i=1,2,\cdots,N$，$j=1,2,\cdots,M$。

下面我们简单地介绍采用合成推理规则在广义的肯定前件的假言推理中如何导出上述的结论。对(1.3)的观察事实和(1.2)形式的单个规则，采用合成推理规则所得到的结果为：

$$\mu_{B'}(y_j)=\max_{x_i}(\min(\mu_{A'}(x_i),\mu_{A\to B}(x_i,y_j))) \tag{1.5}$$

这里采用的是 Sup-min 方法。$i=1,2,\cdots,N$，$j=1,2,\cdots,M$。

由于规则可用多种不同的模糊蕴含算子来表示，且除了 Sup-min 方法外，还有其他的合成方法，故我们将(1.5)式表示的结果可更一般地写成如下形式：

$$\mu_{B'}(y_j)=\bigvee_{x_i}(T(\mu_{A'}(x_i),\mu_{A\to B}(x_i,y_j))) \tag{1.6}$$

对不同的应用，用于计算 A' 和 $\{A\to B\}$ 的合取的 T-范数是各不相同的，甚至将(1.6)式推广为用区间值来求解也是可行的。

若有几个如(1.2)的规则，那么可采用如下的两种方法之一来求解：

(1)先求每个规则与事实的推理结果：

$$\mu_{B'_k}(y_j)=\bigvee_{x_i}(T(\mu_{A'_k}(x_i),\mu_{A_k\to B_k}(x_i,y_j))) \tag{1.7}$$

其中，$i=1,2,\cdots,N$，$j=1,2,\cdots,M$，$k=1,2,\cdots,n$

然后对上述结果进行组合：

$$\mu_{B'}(y_j)=\mu_{B'_1}(y_j)\oplus\mu_{B'_2}(y_j)\oplus\cdots\oplus\mu_{B'_n}(y_j) \tag{1.8}$$

其中$\oplus\in\{\vee,\wedge\}$是组合算子，更一般地可写成$\oplus\in\{S,T\}$的形式。

(2)另一种方法是先将规则进行组合，然后再用合成推理规则求出结果：

$$\mu_R(x_i,y_j)=\mu_{A_1\to B_1}(x_i,y_j)\oplus\mu_{A_2\to B_2}(x_i,y_j)\oplus\cdots\oplus\mu_{A_n\to B_n}(x_i,y_j) \tag{1.9}$$

和

$$\mu_{B'}(y_j)=\bigvee_{x_i}(T(\mu_{A'}(x_i),\mu_R(x_i,y_j))) \tag{1.10}$$

从一个观察事实(1.3)和一组规则(1.2)推出结论(1.4)的另一种常用的方法是插值规则：

$$\mu_{B'}(y_i)=\bigvee_{k}(T(r_k,\mu_{B_k}(y_i)))\quad j=1,2,\cdots,M \tag{1.11}$$

其中

$$r_k=\bigvee_{x_i}(T(\mu_{A_k}(x_i),\mu_{A'}(x_i)))\quad k=1,2,\cdots,n;i=1,2,\cdots,n \tag{1.12}$$

实际上，如果我们有一个精确的观察事实：$A'=\{x_i\}$，即

$$\mu_{A'}(x_i)=1 \tag{1.13}$$

那么，我们可得到：

$$r_k=\bigvee_{x_i}\mu_{A_k}(x_i) \tag{1.14}$$

进而得到：

$$\mu_{B'}(y_j)=\bigvee_k\bigvee_{x_i}T(\mu_{A_k}(x_i),\mu_{B_k}(y_j)) \tag{1.15}$$

另一方面，在(1.13)的情况下，若(1.8)是结论的析取组合，那么采用(1.7)的合成推理规则即可得到：

$$\mu_{B'}(y_j)=\bigvee_k\bigvee_{x_i}\mu_{A_k\to B_k}(x_i,y_j) \tag{1.16}$$

当对 T-范数选 min 算子时，对蕴含选 Mamdani 表示($R_c=x\to y=x\wedge y$)时，(1.15)式与(1.16)式是相同的。在其他的情况下，这两者还是有区别的。

1.3 几种主要的模糊推理方法

目前，在模糊专家系统中，常用的主要模糊推理方法有如下几种：

1. 合成推理规则。这种推理方法是 Zadeh 于 1973 年首次提出来的，是目前应用得最为广泛的一种模糊推理方法。它的基本思想是：

先求出规则"IF X is A THEN Y is B"中 A 和 B 的确定关系，然后再将这个关系(是一个二元关系)与观察事实"X is A′"中的 A'(为一元关系)进行合成：

A and B are R

A′

―――――――

$$B'=A'\cdot R \tag{1.17}$$

由于 A 和 B 的关系 R 可有多种不同的表示方法(即有多种不同的

模糊蕴含算子)，以及 A' 和 R 之间的合成也可以采用不同的方法来计算，所以(1.17)的推导结果会有多种不同的形式。

此外，规则也有多种不同的形式，如：

(1)IF X_1 is A_1 and X_2 is A_2 and ... and X_n is A_n THEN Y is B,

(2)IF X_1 is A_1 or X_2 is A_2 or ... or X_n is A_n THEN Y is B,

(3)IF X_1 is A_1 and X_2 is A_2 and ... and X_n is A_n THEN Y is B ELSE Z is C,

(4)IF X_1 is A_1 or X_2 is A_2 or ... or X_n is A_n THEN Y is B ELSE Z is C,

(5)IF X is A THEN Z is C

IF Y is B THEN Z is C

X is A′ OR Y is B′

Z is C′

在这些常见的演绎推理形式下，模糊蕴含算子和合成方法就更复杂。目前，国内外许多人工智能学者和知识工程师都在研究和寻找在各种演绎推理的形式下，什么样的模糊蕴含算子和合成方法在不同的匹配事实情况下(例如 X is A′, X is very A′, X is more or less A′, X is not A′, X is not very A′, X is not more or less A′ 等)，都能推导出满足我们的直觉要求的结果。

2. 直接采用距离、贴近度或某种模糊匹配函数来度量两个模糊变量(即规则前件和观察事实)的匹配程度，当它大于某个阈值(由领域专家事先给定)时，则启动该规则，否则，系统将搜索别的规则。

3. 采用可能性理论来处理模糊推理问题，该方法采用可能性分布来描述语言变量等模糊概念。该方法认为可能性分布是表示模糊概念语义的最佳形式，在推理过程中使用投影原理、特指/合取原理以及必含原理从而推导出一个可能是不精确的结论。

4. 采用真值约束方法来实现模糊推理。该方法引入了一种新

的相容性关系，以及一种新的基于指数运算的蕴含形式，通过将该相容性关系映射到一个真值空间从而推导出结论的不确定性值。

5. 采用区间值模糊集来处理模糊推理问题。由于模糊集的隶属函数常常很难确定，在模糊知识系统中它们均由领域专家根据其经验而主观地给出。而对模糊集给出它的一个区间值隶属度与前者相比，则要相对容易得多。在这种方法中，语言连接词(如AND，OR，IF…THEN 等)可理解为语言命题的区间值表示，因而可用区间值模糊集来表示基于范式(合取范式和析取范式)的模糊蕴含，其中语言连接词、前件、后件均是模糊的。实践证明，许多采用不同点值模糊蕴含算子所推导出的结果均落在基于区间值模糊集方法所推导出的结果中。

此外，还有许多别的处理模糊推理的方法，如采用等价算子(即相互蕴含)作为蕴含算子等。但就目前的理论探讨和应用开发研究中，合成推理规则仍然是采用得最为普遍的一种模糊推理方法。

第二章　专家系统中的模糊数

在模糊专家系统的研究和开发中，常常遇到需要表示模糊数的问题以及需要研究运用这种形式化了的知识来进行推理的方法。实际上，模糊数就是一个模糊集合，例如“明年的经济增长率大约在7%到9%之间”中的“大约在7%到9%之间”就是一个模糊数，我们可用模糊集(0.06,0.07,0.09,0.10)来表示它，该模糊集的隶属函数为：

1. 在区间[0.06,0.10]外其隶属值为0；
2. 在区间[0.07,0.09]上其隶属值为1；
3. 在区间[0.06,0.07]上其隶属值从0到1连续且单调的增加；
4. 在区间[0.09,0.10]上其隶属值从1到0连续且单调的减小。

这样，我们就可以采用一个其底为[0.06,0.10]的梯形来表示上述的模糊数。如果模糊集(a,b,c,d)中间的两个值相等，即$b=c$，则上述梯形就变成为一个以$[a,d]$为底的三角形。

本章主要讨论模糊数的定义以及它的一些主要性质和运算方法，这些知识对研制和开发模糊专家系统都是十分有用的。

2.1　置信区间

一个不确定或模糊的数可以看作是置信区间概念的一个扩充，置信区间只在唯一的级上考虑不确定性，而模糊数是在多个级上甚至更一般地在从0到1的所有级上考虑不确定性，通常我们在1级上考察假设的最大值，而在0级考察假设的最小值。0级给

出了一个约束假设，类似地，α 级给出了一个置信区间 $A_\alpha=[a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}]$，$\alpha\in[0,1]$，它是 α 的一个单调递减函数，即对每个 $\alpha,\alpha'\in[0,1]$，有

$$(\alpha'>\alpha)\Rightarrow(A_{\alpha'}\subset A_\alpha)$$

或者

$$(\alpha'>\alpha)\Rightarrow[a_1^{(\alpha')},a_2^{(\alpha')}]\subset[a_1^{(\alpha)},a_2^{(\alpha)}]$$

由这里可以看出，假设级就可用来表示一个模糊数。需注意的是不要将模糊数与随机数混淆起来，不确定性与随机性是两个不同的和重要的概念，我们可以同时使用它们，但一定要注意它们之间的区别。

在讨论模糊数之前，下面我们先讨论置信区间的一些特征和运算性质。

假定我们得到的信息是属于参考集 R（实数集）的一个不确定值，我们将这个不确定值认定是在 R 的某个闭区间中取值是可行的，该闭区间称为 R 的一个置信区间：$[a_1,a_2]$，这样我们就可得到，该不确定值是一个大于或等于 a_1 和小于或等于 a_2 的一个数。这类语句常常会在研制和开发专家系统的过程中遇到，此时我们采用如下的符号来表示：

$$A=[a_1,a_2]$$

一般说来，数 a_1 和 a_2 是有限，但在有些情况下 $a_1=-\infty$ 和/或 $a_2=\infty$ 也是可能的。还有些时候我们必须采用开区间来表示不确定值的取值范围，如

$]a_1,a_2]$ 或 $(a_1,a_2]$	左边是开的
$[a_1,a_2[$ 或 $[a_1,a_2)$	右边是开的
$]a_1,a_2[$ 或 (a_1,a_2)	左、右都是开的，即开区间

下面我们讨论置信区间的一些运算特性。

· 加法运算

假定 R 中的两个置信区间分别为

$$A=[a_1,a_2] \tag{2.1}$$

和

$$B = [b_1, b_2] \tag{2.2}$$

如果

$$x \in [a_1, a_2] \tag{2.3}$$

和

$$y \in [b_1, b_2] \tag{2.4}$$

这里 x 和 y 均表示一个不确定的值，则有

$$x + y \in [a_1 + b_1, a_2 + b_2] \tag{2.5}$$

我们也可以直接将置信区间作如下的运算：

$$A(+)B = [a_1, a_2](+)[b_1, b_2] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2] \tag{2.6}$$

(2.5)式的证明是平凡的，因为如果 $x \geqslant a_1$ 和 $y \geqslant b_1$，则 $(x+y) \geqslant (a_1+b_1)$；类似地，因为 $x \leqslant a_2$ 和 $y \leqslant b_2$，则有 $(x+y) \leqslant (a_2+b_2)$。

·减法运算

如果 $x \in [a_1, a_2]$ 和 $y \in [b_1, b_2]$，则有 $(x-y) \in [a_1-b_2, a_2-b_1]$。即我们必须用 a_1 减去 $[b_1, b_2]$ 中的最大值，用 a_2 减去 $[b_1, b_2]$ 中的最小值。当然我们也可直接对置信区间作如下运算：

$$A(-)B = [a_1, a_2](-)[b_1, b_2] = [a_1 - b_2, a_2 - b_1]$$

·对一个确定数的换算

如果一个确定数是 R 中的一个单元素集，我们可写作 $l = [l, l]$，这样，我们可以得到两个特殊的置信区间：

$$0 = [0, 0] \tag{2.7}$$

和

$$1 = [1, 1] \tag{2.8}$$

当将一个正数加到置信区间时，此时区间将向右扩张；加入一个负数则区间将向左移动。

·像

如果 $x \in [a_1, a_2]$，则有 $-x \in [-a_2, -a_1]$，因此，如果 A 是一个置信区间，则它的像定义为

$$A^- = [-a_2, -a_1]$$

需注意的是

$$A(+)A^{-}=[a_1,a_2](+)[-a_2,-a_1]$$
$$=[a_1-a_2,a_2-a_1]\neq 0 \tag{2.9}$$

·性质与结构

采用(2.1～2.6)式和(2.9)式，可证明如下的性质是成立的：

$\forall A,B,C\subset R$：

$$A(+)B=B(+)A \quad 交换性 \tag{2.10}$$

$$A(+)(B(+)C)=(A(+)B)(+)C \quad 结合性 \tag{2.11}$$

对于 0 我们还可得到：

$$A(+)0=0(+)A=A \tag{2.12}$$

需注意的是，在集合论的意义上像是不对称的，即

$$A(+)A^{-}=A^{-}(+)A\neq 0 \tag{2.13}$$

这一性质表明：R 中的置信区间集对条件有一个单项结构(半群)，但没有一个群结构，这个独异点是可交换的。

可以很容易地证明：减法运算不是单项的或可结合的。

例 1 考虑下面的数值例子：

$A=[3.52,5.83]$ $B=[-2.24,6.04]$ $C=[-4,-1.17]$

那么

$$A(+)B=[3.52,5.83](+)[-2.24,6.04]$$
$$=[3.52-2.24,5.83+6.04]$$
$$=[1.28,11.87]$$
$$A(-)B=[3.52,5.83](-)[-2.24,6.04]$$
$$=[3.52-6.04,5.83+2.24]$$
$$=[-2.52,8.07]$$
$$(A(+)B)-C=([3.52,5.83](+)[-2.24,6.04])$$
$$(-)[-4,-1.17]$$
$$=[1.28,11.87](-)[-4,-1.17]$$
$$=[1.28+1.17,11.87+4]$$
$$=[2.45,15.87]$$

$$A^{-}=[-5.83, -3.52]$$

$$A(+)A^{-}=[3.52,5.83](+)[-5.83,-3.52]$$
$$=[-2.31,2.31]$$

·乘法运算

如果置信区间在 R^{+}(非负实数集)中,且如果 $x\in[a_1,a_2]$和 $y\in[b_1,b_2]$,则 $x\cdot y\in[a_1\cdot b_1,a_2\cdot b_2]$。因而我们有

$$A(\cdot)B=[a_1,a_2](\cdot)[b_1,b_2]$$
$$=[a_1\cdot b_1,a_2\cdot b_2] \qquad (2.14)$$

当 A 和 B 属于 R 而不是 R^{+}时,因为 a_1,a_2,b_1 和 b_2 可能是负数,所以 A 与 B 相乘所得到的结果就更复杂,表 2.1 给出了两个如下置信区间相乘的各种结果:

$$A(\cdot)B=[a_1,a_2](\cdot)[b_1,b_2] \quad A,B,\subset R$$

表 2.1 两个置信区间相乘的结果

1	$0\leqslant a_1\leqslant a_2$	$0\leqslant b_1\leqslant b_2$	$[a_1\cdot b_1,a_2\cdot b_2]$
2	$0\leqslant a_1\leqslant a_2$	$b_1\leqslant 0\leqslant b_2$	$[a_2\cdot b_1,a_2\cdot b_2]$
3	$0\leqslant a_1\leqslant a_2$	$b_1\leqslant b_2\leqslant 0$	$[a_2\cdot b_1,a_1\cdot b_2]$
4	$a_1\leqslant 0\leqslant a_2$	$0\leqslant b_1\leqslant b_2$	$[a_1\cdot b_2,a_2\cdot b_2]$
5	$a_1\leqslant 0\leqslant a_2$	$b_1\leqslant 0\leqslant b_2$	$[\min(a_1\cdot b_2,a_2\cdot b_1),\max(a_1\cdot b_1,a_2\cdot b_2)]$
6	$a_1\leqslant 0\leqslant a_2$	$b_1\leqslant b_2\leqslant 0$	$[a_2\cdot b_1,a_1\cdot b_1]$
7	$a_1\leqslant a_2\leqslant 0$	$0\leqslant b_1\leqslant b_2$	$[a_1\cdot b_2,a_2\cdot b_1]$
8	$a_1\leqslant a_2\leqslant 0$	$b_1\leqslant 0\leqslant b_2$	$[a_1\cdot b_2,a_1\cdot b_1]$
9	$a_1\leqslant a_2\leqslant 0$	$b_1\leqslant b_2\leqslant 0$	$[a_2\cdot b_2,a_1\cdot b_1]$

表 2.1 中所示的结果可完全表示在如下的式子中:

$A,B\subset R$:

$$A(\cdot)B=[\min(a_1\cdot b_1,a_1\cdot b_2,a_2\cdot b_1,a_2\cdot b_2),$$
$$\max(a_1\cdot b_1,a_1\cdot b_2,a_2\cdot b_1,a_2\cdot b_2)]$$

上式可推广到三个置信区间相乘的情况:

$$
\begin{aligned}
(A(\cdot)B)(\cdot)C = [\min(&a_1 \cdot b_1 \cdot c_1, a_1 \cdot b_1 \cdot c_2, a_1 \cdot b_2 \cdot c_1,\\
&a_1 \cdot b_2 \cdot c_2, a_2 \cdot b_1 \cdot c_1, a_2 \cdot b_1 \cdot c_2,\\
&a_2 \cdot b_2 \cdot c_1, a_2 \cdot b_2 \cdot c_2),\\
\max(&a_1 \cdot b_1 \cdot c_1, a_1 \cdot b_1 \cdot c_2, a_1 \cdot b_2 \cdot c_1,\\
&a_1 \cdot b_2 \cdot c_2, a_2 \cdot b_1 \cdot c_1, a_2 \cdot b_1 \cdot c_2,\\
&a_2 \cdot b_2 \cdot c_1, a_2 \cdot b_2 \cdot c_2)]
\end{aligned}
$$

若计算 $A(\cdot)(B(\cdot)C)$，则会得到与上式相同的结果，因而我们可以看出：在 R 中对 $(\cdot)$ 是可结合的。

表 2.2 给出了 3 个置信区间相乘的结果。

表 2.2 三个置信区间相乘的结果

	$A=[a_1,a_2]$	$B=[b_1,b_2]$	$C=[c_1,c_2]$	$A(\cdot)B(\cdot)C$
1	$0\leqslant a_1\leqslant a_2$	$0\leqslant b_1\leqslant b_2$	$0\leqslant c_1\leqslant c_2$	$[a_1b_1c_1, a_2b_2c_2]$
2	$0\leqslant a_1\leqslant a_2$	$0\leqslant b_1\leqslant b_2$	$c_1\leqslant 0\leqslant c_2$	$[a_2b_2c_1, a_2b_2c_2]$
3	$0\leqslant a_1\leqslant a_2$	$0\leqslant b_1\leqslant b_2$	$c_1\leqslant c_2\leqslant 0$	$[a_2b_2c_1, a_1b_1c_2]$
4	$0\leqslant a_1\leqslant a_2$	$b_1\leqslant 0\leqslant b_2$	$0\leqslant c_1\leqslant c_2$	$[a_2b_1c_2, a_2b_2c_2]$
5	$0\leqslant a_1\leqslant a_2$	$b_1\leqslant 0\leqslant b_2$	$c_1\leqslant 0\leqslant c_2$	$[\min(a_2b_1c_2, a_2b_2c_1),$ $\max(a_2b_1c_1, a_2b_2c_2)]$
6	$0\leqslant a_1\leqslant a_2$	$b_1\leqslant 0\leqslant b_2$	$c_1\leqslant c_2\leqslant 0$	$[a_2b_2c_1, a_2b_1c_1]$
7	$0\leqslant a_1\leqslant a_2$	$b_1\leqslant b_2\leqslant 0$	$0\leqslant c_1\leqslant c_2$	$[a_2b_1c_2, a_1b_2c_1]$
8	$0\leqslant a_1\leqslant a_2$	$b_1\leqslant b_2\leqslant 0$	$c_1\leqslant 0\leqslant c_2$	$[a_2b_1c_2, a_2b_1c_1]$
9	$0\leqslant a_1\leqslant a_2$	$b_1\leqslant b_2\leqslant 0$	$c_1\leqslant c_2\leqslant 0$	$[a_1b_2c_2, a_2b_1c_1]$
10	$a_1\leqslant 0\leqslant a_2$	$0\leqslant b_1\leqslant b_2$	$0\leqslant c_1\leqslant c_2$	$[a_1b_2c_2, a_2b_2c_2]$
11	$a_1\leqslant 0\leqslant a_2$	$0\leqslant b_1\leqslant b_2$	$c_1\leqslant 0\leqslant c_2$	$[\min(a_1b_2c_2, a_2b_2c_1),$ $\max(a_1b_2c_1, a_2b_2c_2)]$
12	$a_1\leqslant 0\leqslant a_2$	$0\leqslant b_1\leqslant b_2$	$c_1\leqslant c_2\leqslant 0$	$[a_2b_2c_1, a_1b_2c_1]$

续表

	$A=[a_1,a_2]$	$B=[b_1,b_2]$	$C=[c_1,c_2]$	$A(\cdot)B(\cdot)C$
13	$a_1\leqslant 0\leqslant a_2$	$b_1\leqslant 0\leqslant b_2$	$0\leqslant c_1\leqslant c_2$	$[\min(a_1b_2c_2,a_2b_1c_2),$ $\max(a_1b_1c_2,a_2b_2c_2)]$
14	$a_1\leqslant 0\leqslant a_2$	$b_1\leqslant 0\leqslant b_2$	$c_1\leqslant 0\leqslant c_2$	$[\min(a_1b_2c_2,a_2b_1c_2,$ $a_1b_1c_1,a_2b_2c_1),$ $\max(a_1b_2c_1,a_2b_1c_1,$ $a_1b_1c_2,a_2b_2c_2)]$
15	$a_1\leqslant 0\leqslant a_2$	$b_1\leqslant 0\leqslant b_2$	$c_1\leqslant c_2\leqslant 0$	$[\min(a_1b_1c_1,a_2b_2c_1),$ $\max(a_1b_2c_1,a_2b_1c_1)]$
16	$a_1\leqslant 0\leqslant a_2$	$b_1\leqslant b_2\leqslant 0$	$0\leqslant c_1\leqslant c_2$	$[a_2b_1c_2,a_1b_1c_2]$
17	$a_1\leqslant 0\leqslant a_2$	$b_1\leqslant b_2\leqslant 0$	$c_1\leqslant 0\leqslant c_2$	$[\min(a_2b_1c_2,a_1b_1c_1),$ $\max(a_2b_1c_1,a_1b_1c_2)]$
18	$a_1\leqslant 0\leqslant a_2$	$b_1\leqslant b_2\leqslant 0$	$c_1\leqslant c_2\leqslant 0$	$[a_1b_1c_1,a_2b_1c_1]$
19	$a_1\leqslant a_2\leqslant 0$	$0\leqslant b_1\leqslant b_2$	$0\leqslant c_1\leqslant c_2$	$[a_1b_2c_2,a_2b_1c_1]$
20	$a_1\leqslant a_2\leqslant 0$	$0\leqslant b_1\leqslant b_2$	$c_1\leqslant 0\leqslant c_2$	$[a_1b_2c_2,a_1b_2c_1]$
21	$a_1\leqslant a_2\leqslant 0$	$0\leqslant b_1\leqslant b_2$	$c_1\leqslant c_2\leqslant 0$	$[a_2b_1c_2,a_1b_2c_1]$
22	$a_1\leqslant a_2\leqslant 0$	$b_1\leqslant 0\leqslant b_2$	$0\leqslant c_1\leqslant c_2$	$[a_1b_2c_2,a_1b_1c_2]$
23	$a_1\leqslant a_2\leqslant 0$	$b_1\leqslant 0\leqslant b_2$	$c_1\leqslant 0\leqslant c_2$	$[\min(a_1b_2c_2,a_1b_1c_1),$ $\max(a_1b_2c_1,a_1b_1c_2)]$
24	$a_1\leqslant a_2\leqslant 0$	$b_1\leqslant 0\leqslant b_2$	$c_1\leqslant c_2\leqslant 0$	$[a_1b_1c_1,a_1b_2c_1]$
25	$a_1\leqslant a_2\leqslant 0$	$b_1\leqslant b_2\leqslant 0$	$0\leqslant c_1\leqslant c_2$	$[a_2b_2c_1,a_1b_1c_2]$
26	$a_1\leqslant a_2\leqslant 0$	$b_1\leqslant b_2\leqslant 0$	$c_1\leqslant 0\leqslant c_2$	$[a_1b_1c_1,a_1b_1c_2]$
27	$a_1\leqslant a_2\leqslant 0$	$b_1\leqslant b_2\leqslant 0$	$c_1\leqslant c_2\leqslant 0$	$[a_1b_1c_1,a_2b_2c_2]$

· 除法运算

在 R^+ 中除法定义为：

$$A(:)B=[a_1,a_2](:)[b_1,b_2]$$
$$=[a_1/b_2,a_2/b_1]$$

如果 $b_1=0$，则上界增加到 $+\infty$，如果 $b_1=b_2=0$，则置信区间扩张到 $+\infty$。

· 倒数

如果 $x\in[a_1,a_2]\subset R_0^+$，则 $1/x\in[1/a_2,1/a_1]$，且

$$A^{-1}=[a_1,a_2]^{-1}=[1/a_2,1/a_1]$$

R 中的倒数则具有如下性质：

1. $0<a_1\leqslant a_2$ $\quad [a_1,a_2]^{-1}=[1/a_2,1/a_1]$
2. $0=a_1<a_2$ $\quad [a_1,a_2]^{-1}=[1/a_2,\infty]$
3. $0=a_1=a_2$ $\quad$ 此时仅有一点，即 ∞
4. $a_1\leqslant a_2<0$ $\quad [a_1,a_2]^{-1}=[1/a_2,1/a_1]$
5. $a_1<a_2=0$ $\quad [a_1,a_2]^{-1}=(-\infty,1/a_1]$
6. $a_1\leqslant 0\leqslant a_2$ $\quad [a_1,a_2]^{-1}=(-\infty,1/a_1]\cup[1/a_2,\infty)$

· 性质与结构

$\forall\ A,B\subset R^+$，有

$$A(\cdot)B=B(\cdot)A \qquad \text{交换性}$$

由(2.14)式可明显地获得这一性质。而结合性则必须进行证明：

$\forall\ A,B,C\subset R^+$，有

$$(A(\cdot)B)(\cdot)C=A(\cdot)(B(\cdot)C)$$

实际上

$$([a_1,a_2](\cdot)[b_1,b_2])(\cdot)[c_1,c_2]$$
$$=[a_1\cdot b_1,a_2\cdot b_2](\cdot)[c_1\cdot c_2]$$
$$=[a_1\cdot b_1\cdot c_1,a_2\cdot b_2\cdot c_2]$$

同时还有

$$[a_1,a_2](\cdot)([b_1,b_2](\cdot)[c_1,c_2])$$
$$=[a_1,a_2](\cdot)[b_1\cdot c_1,b_2\cdot c_2]$$
$$=[a_1\cdot b_1\cdot c_1,a_2\cdot b_2\cdot c_2]$$

因此

$$([a_1,a_2](\cdot)[b_1,b_2])(\cdot)[c_1,c_2]$$
$$= [a_1,a_2](\cdot)([b_1,b_2](\cdot)[c_1,c_2])$$

此外，我们可明显地看出下式是成立的：

$$A(\cdot)1 = 1(\cdot)A = A$$

在集合论的意义下倒数是不对称的，即

$$A(\cdot)A^{-1} = [a_1,a_2](\cdot)[1/a_2,1/a_1]$$
$$= [a_1/a_2,a_2/a_1] \neq 1$$

因此，R^+ 中的置信区间集对乘法运算有一个单项结构（半群），但没有群结构，这个独异点是可交换的。

例 2 让我们看如下的数值例子：

$$A = [2.62,3.55] \quad B = [0.77,4.50] \quad C = [3.11,4.86]$$

那么

$$A(\cdot)B = [2.62,3.55](\cdot)[0.77,4.50]$$
$$= [2.0174,15.9750]$$
$$A(\cdot)B(\cdot)C = [2.0174,15.9750](\cdot)[3.11,4.86]$$
$$= [6.274114,77.638500]$$
$$A(:)B = [2.62,3.55](:)[0.77,4.50]$$
$$= [2.62/4.50,3.55/0.77]$$
$$= [0.58222,4.61038]$$
$$A^{-1} = [1/3.55,1/2.62] = [0.28169,0.38167]$$

对一个非负数 $k \in R^+$，我们可将它写作：

$$k = [k,k]$$

这样，$\forall\ A \in R^-$，有

$$k \cdot A = k \cdot [a_1,a_2]$$
$$= [k,k](\cdot)[a_1,a_2]$$
$$= [ka_1,ka_2]$$

若 $k \in R$ 时，则有

$$k \geqslant 0 \quad k \cdot [a_1,a_2] = [ka_1,ka_2]$$

$$k \leqslant 0 \quad k \cdot [a_1, a_2] = [ka_2, ka_1]$$

此外我们还可看出：在 R 中不存在分配律，例如

$$(A(+)B)(\cdot)C \neq (A(\cdot)C(+)(B(\cdot)C)$$

下面是上述不等式的例子：

$$([3,5](+)[-2,4])(\cdot)[2,6] \neq [1,9](\cdot)[2,6] = [2,54]$$

而

$$\begin{aligned}&([3,5](\cdot)[2,6])(+)([-2,4](\cdot)[2,6])\\ &\quad = [6,30](+)[-12,24] = [-6,54]\end{aligned}$$

显然，两个置信区间是不相等的。

此外，如下的分配律也是不成立的：

$$(A(\cdot)B)(+)C \neq (A(+)C)(\cdot)(B(+)C)$$

· Z(整数)中的置信区间

我们知道：

$$Z = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\} \qquad (2.15)$$

和

$$N = \{0, 1, 2, 3, \cdots\} \qquad (2.16)$$

当 a_1 和 a_2 属于 Z 时，我们总是将置信区间$[a_1, a_2]$看作是以 a_1 和 a_2 为下界和上界的一个整数序列，例如：

$$A = [-3, 2] = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\} \qquad (2.17)$$

对于两个置信区间相加和相乘的运算，我们可分别得到：

如果 $x \in [a_1, a_2]$，$y \in [b_1, b_2]$，那么

$$(x + y) \in [a_1 + b_1, a_2 + b_2]$$

和

如果 $x \in [a_1, a_2]$，$y \in [b_1, b_2]$，那么

$$x \cdot y \in [a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2]$$

其中

$$\begin{aligned}[a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2] = \{&a_1 \cdot b_1, a_1 \cdot b_1 + 1, a_1 \cdot b_1 + 2, \cdots,\\ &a_2 \cdot b_2 - 2, a_2 \cdot b_2 - 1, a_2 \cdot b_2\}\end{aligned}$$

我们可用下面的例子进行验证。

例 3 考虑如下的数值例子：

$$
\begin{aligned}
A &= [-3,2] = \{-3,-2,-1,0,1,2\} \\
B &= [1,4] = \{1,2,3,4\} \\
C &= [3,5] \\
3 &= [3,3]
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

$$
\begin{aligned}
A(+)B &= [-3,2](+)[1,4] \\
&= [-2,6] = \{-2,-1,0,1,2,3,4,5,6\} \\
B(\cdot)C &= [1,4](\cdot)[3,5] \\
&= [3,20] = \{3,4,5,\cdots,18,19,20\} \\
3(\cdot)B &= [3,3](\cdot)[1,4] \\
&= [3,12] = \{3,4,5,\cdots,10,11,12\}
\end{aligned}
$$

下面我们讨论 R 中两个置信区间的取小和取大运算，这里得到的结论对 Z 也是合适的。

对 R 中的两个数 a 和 b，由定义(取小和取大)可得到：

$$
a \wedge b = \min(a,b) = \begin{cases} a & a \leqslant b \\ b & b \leqslant a \end{cases}
$$

$$
a \vee b = \max(a,b) = \begin{cases} b & a \leqslant b \\ a & b \leqslant a \end{cases}
$$

对 R 中的两个置信区间 $A=[a_1,a_2]$和 $B=[b_1,b_2]$，取小和取大运算按如下方法实现：

$$
\begin{aligned}
A(\wedge)B &= [a_1,a_2](\wedge)[b_1,b_2] \\
&= [a_1 \wedge b_1, a_2 \wedge b_2] \\
A(\vee)B &= [a_1,a_2](\vee)[b_1,b_2] \\
&= [a_1 \vee b_1, a_2 \vee b_2]
\end{aligned}
$$

例 4

$$
A = [-3,5] \qquad B = [2,6] \qquad C = [-4,7]
$$

那么

$$
\begin{aligned}
A(\wedge)B &= [-3,5](\wedge)[2,6] \\
&= [-3 \wedge 2, 5 \wedge 6] = [-3,5]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A(\vee)B &= [-3,5](\vee)[2,6] \\
&= [-3 \vee 2, 5 \vee 6] = [2,6] \\
A(\wedge)C &= [-3,5](\wedge)[-4,7] \\
&= [-3 \wedge -4, 5 \wedge 7] = [-4,5] \\
A(\vee)C &= [-3,5](\vee)[-4,7] \\
&= [-3 \vee -4, 5 \vee 7] = [-3,7]
\end{aligned}
$$

置信区间的概念在许多领域有着广泛的应用，在模糊专家系统中，经常使用的模糊数这一概念就是对置信区间的概念进行扩充后所得到的。从下一节起我们将讨论模糊数的概念及有关的性质和运算规则。

2.2 模　糊　数

置信区间是一种采用上下界来约束不确定性范围的方法。下面我们看看置信区间与推测级(the level of presumption)之间的关系。

假定某件工作在5月15日和5月31日之间完成，这是一个置信区间[May 15, May 31]；在另一方面，我们也可以认为这同一件工作可能在5月22日完成，此时，我们用[May 22, May 22]来表示这一置信区间。根据需要我们可对上述两个置信区间分别赋给两个不同的置信级，如对[May 15, May 31]赋值0，而对[May 22, May 22]赋值1，这两个置信级实际上就是推测级，我们可用[0,1]表示它们。除了0和1以外，当然我们还可以赋其他的值，例如$\forall\ \alpha_1,\alpha_2 \in [0,1]$，有

$$(\alpha_1 < \alpha_2) \Rightarrow ([a_1^{(\alpha_2)}, a_2^{(\alpha_2)}] \subset [a_1^{(\alpha_1)}, a_2^{(\alpha_1)}])$$

上式表明当α增加时，置信区间决不增大，图2.1表示了这种情况。

由上面的讨论可以看出：将置信区间和推测级结合后可用来定义一个模糊数。一般说来，表示置信区间从0到1的变化曲线有

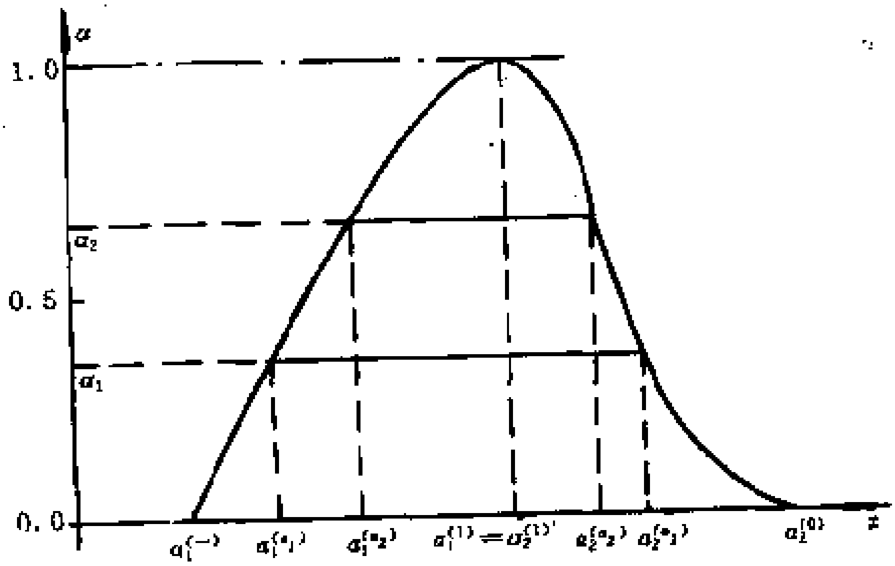


图 2.1 模糊数的定义

两种情况，一种如图 2.1 所示；另一种则如图 2.2 所示。

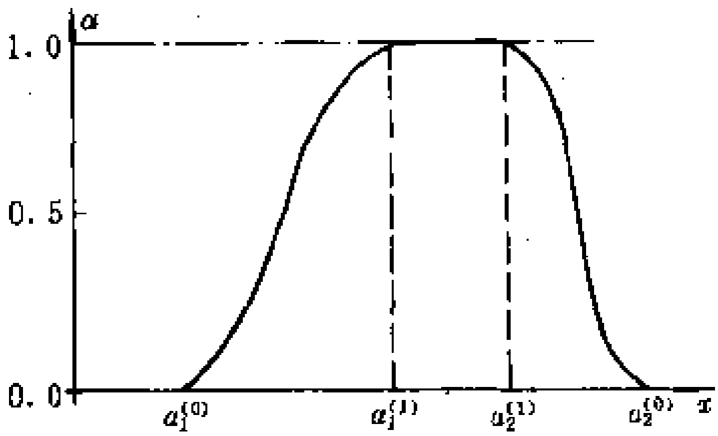


图 2.2 具有一个平坦区域的模糊数

前面我们已说过，模糊数实质上就是一个模糊集合，但反之并不成立，这就是说模糊数是一类特殊的模糊集合，它与普通的一个模糊集还是有区别的。

令 E 是一个参考集(例如 R 或 Z)，一个普通子集 A 由它的特征函数来定义：

$$\mu_A(x) \in \{0,1\} \quad \forall\ x \in E$$

而对同样的参考集，模糊子集 A 则由它的隶属函数来定义：

$$\mu_A(x) \in [0,1] \quad \forall\ x \in E$$

图 2.3 给出了 R 中的一个普通子集，而图 2.4 则给出了 R 中的一个模糊子集。

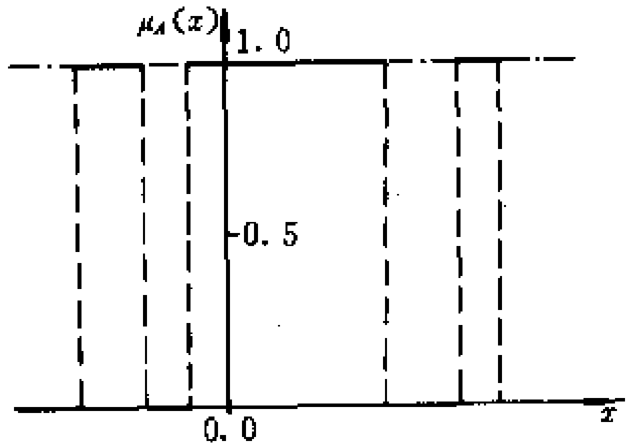


图 2.3　R 中的一个普通子集

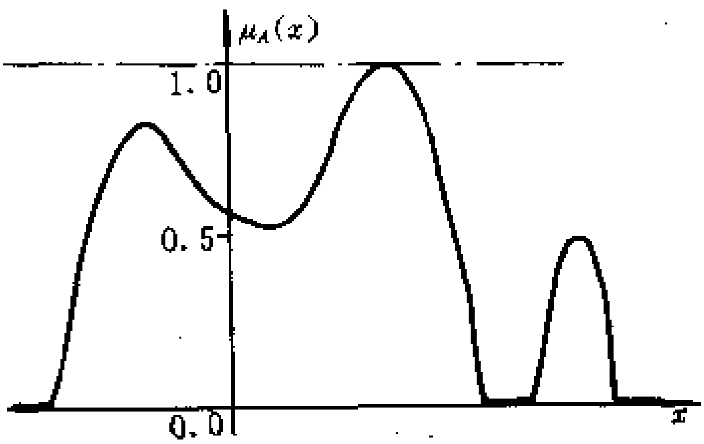


图 2.4　R 中的一个模糊子集

下面我们根据模糊子集的两个性质——凸性和正规性来定义模糊数的概念。

一个模糊子集 $A \subset R$ 是凸的，当且仅当每个普通子集是凸的：

$$A_\alpha = \{x \mid \mu_A(x) \geqslant \alpha\} \quad \alpha \in [0,1]$$

即如果它是 R 的一个闭区间。图 2.5 表示了一个凸模糊子集。

一个模糊子集 $A \subset R$ 是正规的，当且仅当

$$\bigvee_x \mu_A(x) = 1 \quad \forall x \in R$$

上式表明 $\mu_A(x)$ 的最大值为 1，需注意的是这个最大值并不一定是唯一的。图 2.6 给出了一个正规的模糊子集。

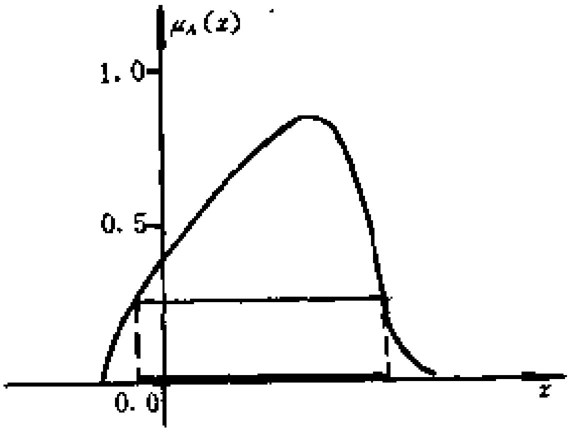


图 2.5　一个凸模糊子集（非正规的）

下面我们就可以给出模糊数的定义：R 中的一个模糊数是 R 的一个模糊子集，且该模糊子集是凸的和正规的，如图 2.7 所示。由这里可以看出：一个模糊数可以看作是置信区间的一个推广。需注意的是一个模糊数与一个随机变量是不同的，随机变量是根据概率理论来定义的，且它是一个客观数据，而模糊数是一个主观数据，它是一种估计，而不是一个度量结果。

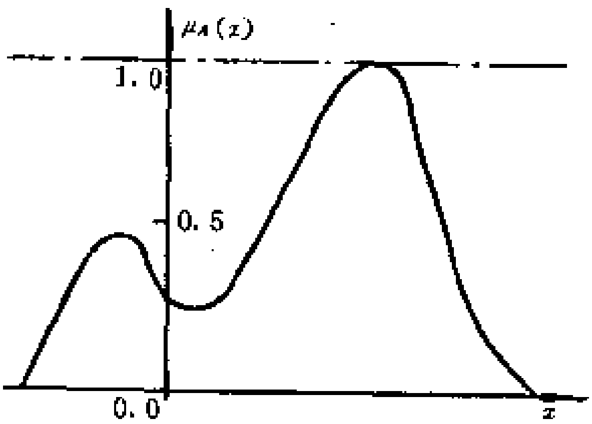


图 2.6　一个模糊子集（正规的）

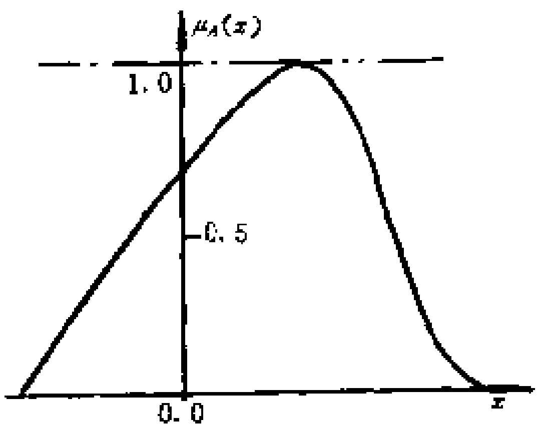


图 2.7　一个凸的和正规的模糊集

2.3　模糊数的加法运算

在 2.1 节我们讨论了置信区间的加法运算规则，而模糊数的加法运算则需逐级进行相同的计算。例如，令 A 和 B 是两个模糊数，A_α 和 B_α 是 α 推测级的两个对应置信区间，$\alpha\in[0,1]$，那么有

$$A_\alpha(+)B_\alpha=[a_1^{(\alpha)},a_2^{(\alpha)}](+)[b_1^{(\alpha)},b_2^{(\alpha)}]$$

$$=[a_1^{(\alpha)}+b_1^{(\alpha)},a_2^{(\alpha)}+b_2^{(\alpha)}] \tag{2.19}$$

如果 $A,B\subset R$,那么对在 α 级的置信区间,我们可以定义如下的普通子集 A_α 和 B_α:

$$A_\alpha=\{x\,|\,\mu_A(x)\geqslant\alpha\} \tag{2.20}$$

$$B_\alpha=\{x\,|\,\mu_B(x)\geqslant\alpha\} \tag{2.21}$$

模糊数的加法运算的另一个定义为:令

$$A,B\subset R\quad\forall\ x,y,z\in R$$

$$\mu_{A(+)B}(z)=\bigvee_{z=x+y}(\mu_A(x)\wedge\mu_B(y)) \tag{2.22}$$

下面我们证明(2.19)式和(2.22)式所描述的是相同的运算。由嵌套及(2.20)式和(2.21)式可得到:

$$A=\bigcup_\alpha\alpha\cdot A_\alpha=\bigcup_\alpha\alpha\cdot[a_1^{(\alpha)},a_2^{(\alpha)}] \tag{2.23}$$

$$B=\bigcup_\alpha\alpha\cdot B_\alpha=\bigcup_\alpha\alpha\cdot[b_1^{(\alpha)},b_2^{(\alpha)}] \tag{2.24}$$

很容易证明(2.19)式和(2.22)式像在 N 中由(2.15~2.18)式所描述的那样,对 Z 中的数也是永真的,这可看如下的两个例子:

$$\mu_A(x)=\begin{cases}1 & x\in[a_1^{(\alpha)},a_2^{(\alpha)}]\\ 0 & x\notin[a_1^{(\alpha)},a_2^{(\alpha)}]\end{cases}$$

$$\mu_B(x)=\begin{cases}1 & x\in[b_1^{(\alpha)},b_2^{(\alpha)}]\\ 0 & x\notin[b_1^{(\alpha)},b_2^{(\alpha)}]\end{cases} \tag{2.25}$$

将(2.22)式应用于每级 α,可得到$\forall\ x,y,z\in R$

$$\mu_{A_\alpha(+)B_\alpha}(z)=\bigvee_{z=x+y}(\mu_{A_\alpha}(x)\wedge\mu_{B_\alpha}(y)) \tag{2.26}$$

对 x 和 y 的所有值有

$$\mu_{A_\alpha}(x)=1\quad\mu_{B_\alpha}(y)=1$$

这样(2.26)式的右边为 1;如果上述条件不满足,则(2.26)式的右边为 0,且由于 $z=x+y$,则有

$$z\in[a_1^{(\alpha)}+b_1^{(\alpha)},a_2^{(\alpha)}+b_2^{(\alpha)}]$$

借助(2.23)式和(2.24)式,可得到如下的结果:

$$A_\alpha(+)B_\alpha=\bigcup_\alpha\alpha\cdot[a_1^{(\alpha)}+b_1^{(\alpha)},a_2^{(\alpha)}+b_2^{(\alpha)}] \tag{2.27}$$

图 2.8 给出了两个模糊数的加法运算结果。

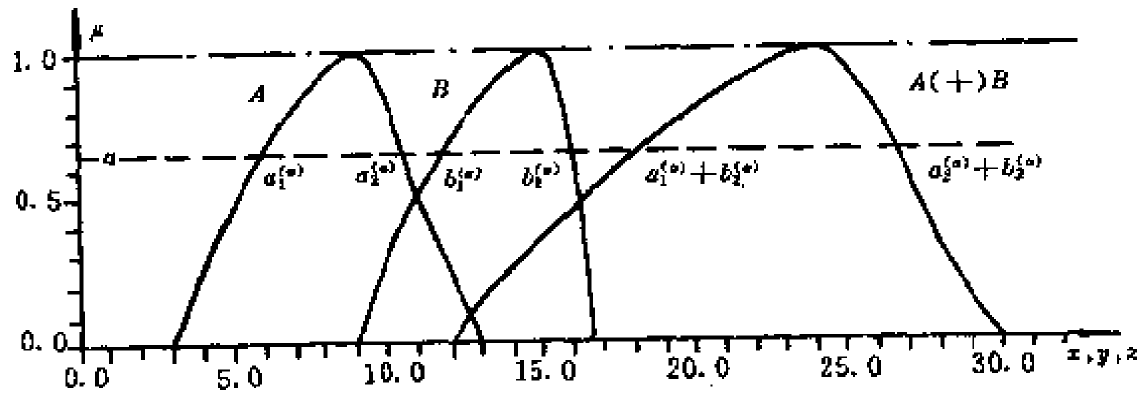


图 2.8　两个模糊数的加法运算

像在 N(自然数集)中由(2.15～2.18)式所证明的那样，(2.19)和(2.25)式对 Z 中的数也是永真的。下面是两个证明实例。

例 5　假设有两个三角模糊数，如图 2.9 所示，现在需要计算

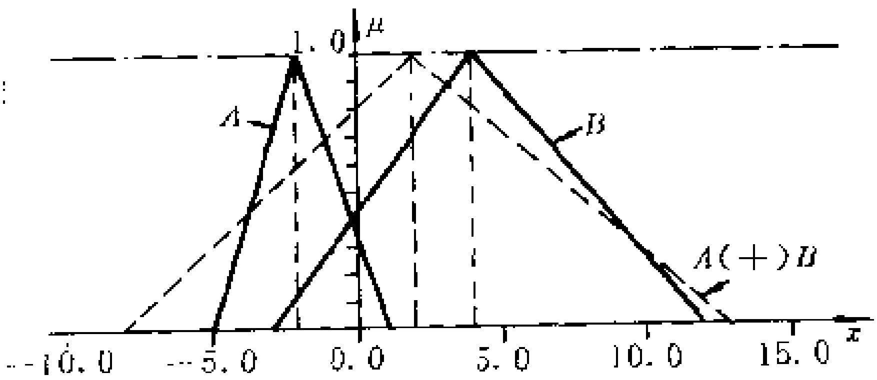


图 2.9　两个三角模糊数的加法运算

它们的和，这里 $\mu_A(x)$和 $\mu_B(x)$定义如下：

$$\forall x \in R$$

$$\mu_A(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant -5\\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{5}{3} & -5\leqslant x\leqslant -2\\ -\dfrac{x}{3}+\dfrac{1}{3} & -2\leqslant x\leqslant 1\\ 0 & 1\leqslant x\end{cases}\tag{2.28}$$

和

$$\mu_B(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant -3\\ \dfrac{x}{7}+\dfrac{3}{7} & -3\leqslant x\leqslant 4\\ -\dfrac{x}{8}+\dfrac{12}{8} & 4\leqslant x\leqslant 12\\ 0 & 12\leqslant x\end{cases}\tag{2.29}$$

为了计算 α 级的置信区间，那么两个三角模糊数相加（在 α 级）所得到的三角模糊数可按如下方式由 α 的函数来描述：

由(2.28)式，

$$\alpha=\frac{a_1^{(\alpha)}}{3}+\frac{5}{3}$$

和

$$\alpha=-\frac{a_2^{(\alpha)}}{3}+\frac{1}{3}$$

因而，在 α 级的置信区间应为

$$A_\alpha=[a_1^{(\alpha)},a_2^{(\alpha)}]=[3\alpha-5,\ -3\alpha+1]\tag{2.30}$$

又由(2.29)式，

$$\alpha=\frac{b_1^{(\alpha)}}{7}+\frac{3}{7}$$

和

$$\alpha=-\frac{b_2^{(\alpha)}}{8}+\frac{12}{8}$$

因此

$$B_\alpha=[b_1^{(\alpha)},b_2^{(\alpha)}]=[7\alpha-3,\ -8\alpha+12]\tag{2.31}$$

将(2.30)式和(2.31)式相加，得到

$$\begin{aligned}A_\alpha(+)b_\alpha&=[a_1^{(\alpha)}+b_1^{(\alpha)},a_2^{(\alpha)}+b_2^{(\alpha)}]\\&=[3\alpha-5,\ -3\alpha+1](+)[7\alpha-3,\ -8\alpha+12]\\&=[10\alpha-8,\ -11\alpha+13]\end{aligned}\tag{2.32}$$

由 $$a_1^{(\alpha)} + b_1^{(\alpha)} = 10\alpha - 8$$

和 $$a_2^{(\alpha)} + b_2^{(\alpha)} = - 11\alpha + 13$$

可得到

$$\mu_{A(+)B}(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant - 8 \\ \dfrac{x}{10} + \dfrac{8}{10} & - 8 \leqslant x \leqslant 2 \\ - \dfrac{x}{11} + \dfrac{13}{11} & 2 \leqslant x \leqslant 13 \\ 0 & 13 \leqslant x \end{cases}$$

例 6 有 N 中的如下两个模糊数

$$A = \frac{0}{0}\,\frac{1}{0.1}\,\frac{2}{0.3}\,\frac{3}{0.8}\,\frac{4}{1}\,\frac{5}{0.7}\,\frac{6}{0.3}\,\frac{7}{0}\,\frac{8}{0}\cdots$$

$$B = \frac{0}{0}\,\frac{1}{0.3}\,\frac{2}{0.6}\,\frac{3}{1}\,\frac{4}{0.7}\,\frac{5}{0.2}\,\frac{6}{0.1}\,\frac{7}{0}\,\frac{8}{0}\cdots$$

为了计算在 α 级的置信区间的和，由(2.19)式可得到表 2.3，因而

$$C = A(+)B$$

即

$$C = \frac{1}{0}\,\frac{2}{0.1}\,\frac{3}{0.3}\,\frac{4}{0.3}\,\frac{5}{0.6}\,\frac{6}{0.8}\,\frac{7}{1}\,\frac{8}{0.7}\,\frac{9}{0.7}\,\frac{10}{0.3}\,\frac{11}{0.2}\,\frac{12}{0.1}\,\frac{13}{0}\cdots \tag{2.33}$$

注意，我们也可采用(2.22)式来计算表 2.3 中所给的和，这样我们可得到如下的结果：

$$\mu_C(1) = (0 \wedge 0.3) \vee (0 \wedge 0.1) = 0$$

$$\mu_C(2) = (0 \wedge 0.6) \vee (0.1 \wedge 0.3) \vee (0.3 \wedge 0) = 0.1$$

$$\mu_C(3) = (0 \wedge 1) \vee (0.1 \wedge 0.6) \vee (0.3 \wedge 0.3) \vee (0.8 \wedge 0) = 0.3$$

$$\mu_C(4) = (0 \wedge 0.7) \vee (0.1 \wedge 1) \vee (0.3 \wedge 0.6) \vee (0.8 \wedge 0.3) \vee (1 \wedge 0) = 0.3$$

$$\mu_C(5) = (0 \wedge 0.2) \vee (0.1 \wedge 0.7) \vee (0.3 \wedge 1) \vee (0.8 \wedge 0.6) \vee (1 \wedge 0.3) \vee (0.7 \wedge 0) = 0.6$$

$$\mu_C(6)=(0\wedge 0.1)\vee(0.1\wedge 0.2)\vee(0.3\wedge 0.7)$$
$$\vee(0.8\wedge 1)\vee(1\wedge 0.6)\vee(0.7\wedge 0.3)$$
$$\vee(0.3\wedge 0)=0.8$$
$$\mu_C(7)=(0\wedge 0)\vee(0.3\wedge 0.3)\vee(0.7\wedge 0.6)$$
$$\vee(1\wedge 1)\vee(0.8\wedge 0.7)\vee(0.3\wedge 0.2)$$
$$\vee(0.1\wedge 0.1)\vee(0\wedge 0)=1$$
$$\mu_C(8)=(0.1\wedge 0)\vee(0.3\wedge 0.1)\vee(0.8\wedge 0.2)$$
$$\vee(1\wedge 0.7)\vee(0.7\wedge 1)\vee(0.3\wedge 0.6)$$
$$\vee(0\wedge 0.3)=0.7$$
$$\mu_C(9)=(0.3\wedge 0)\vee(0.8\wedge 0.1)\vee(1\wedge 0.2)$$
$$\vee(0.7\wedge 0.7)\vee(0.3\wedge 1)\vee(0\wedge 0.6)$$
$$=0.7$$
$$\mu_C(10)=(0.8\wedge 0)\vee(1\wedge 0.1)\vee(0.7\wedge 0.2)$$
$$\vee(0.3\wedge 0.7)\vee(0\wedge 1)=0.3$$
$$\mu_C(11)=(1\wedge 0)\vee(0.7\wedge 0.1)\vee(0.3\wedge 0.2)$$
$$\vee(0\wedge 0.7)=0.2$$
$$\mu_C(12)=(0.7\wedge 0)\vee(0.3\wedge 0.1)\vee(0\wedge 0.2)$$
$$=0.1$$
$$\mu_C(13)=(0.3\wedge 0)\vee(0\wedge 0.1)=0$$

可以看出，上述结果与(2.33)式所给的结果是相同的。

R(实数集)中的一个模糊数可以与 Z(整数集)中的模糊数相加，此时只须将整数模糊数转换为区间中的一个连续模糊数，例如，Z 中有如下一个模糊数：

$$\frac{-7}{0}\ \frac{-6}{0.1}\ \frac{-5}{0.1}\ \frac{-4}{0.2}\ \frac{-3}{0.3}\ \frac{-2}{0.3}\ \frac{-1}{0.5}\ \frac{0}{0.5}\ \frac{1}{0.6}\ \frac{2}{0.8}$$
$$\frac{3}{0.9}\ \frac{4}{1}\ \frac{5}{0.9}\ \frac{6}{0.7}\ \frac{7}{0.4}\ \frac{8}{0.4}\ \frac{9}{0.3}\ \frac{10}{0.2}\ \frac{11}{0.2}\ \frac{12}{0.1}\ \frac{13}{0}\cdots \tag{2.34}$$

图 2.10 给出了该模糊数的直观图形。实际上(2.34)式所给的模糊数就是 R 中的一个模糊数。

表 2.3　α 级置信区间的和

	0	1	2	3	4	5	6	7
1					1			
9					1			
8				1	1			
7				1	1	1		
6				1	1	1		
5				1	1	1		
4				1	1	1		
3			1	1	1	1	1	
2			1	1	1	1	1	
1		1	1	1	1	1	1	
0	1	1	1	1	1	1	1	1
	0	0.1	0.3	0.8	1	0.7	0.3	0

(+)

0	1	2	3	4	5	6	7
			1				
			1				
			1				
			1	1			
		1	1	1			
		1	1	1			
		1	1	1			
	1	1	1	1			
	1	1	1	1	1		
	1	1	1	1	1	1	
1	1	1	1	1	1	1	1
0	0.3	0.6	1.0	0.7	0.2	0.1	0

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
						1						
						1						
					1	1						
					1	1	1	1				
				1	1	1	1	1				
				1	1	1	1	1				
				1	1	1	1	1				
		1	1	1	1	1	1	1	1			
		1	1	1	1	1	1	1	1	1		
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0.1	0.3	0.3	0.6	0.8	1	0.7	0.7	0.3	0.2	0.1	0

下面需要讨论的问题是，如果 A 和 B 是两个模糊数，那么 $A(+)B$ 也是模糊数吗？或者说 $A(+)B$ 也是凸的且是正规的吗？如下的两个定理回答了这一问题。

定理 2.1　如果 A 和 B 是 R 中的两个模糊数，那么 $A(+)B$ 也是 R 中的一个模糊子集，且它是凸的。

证明：考虑 α 级和 α' 级，这里 $\alpha'>\alpha$，那么可有

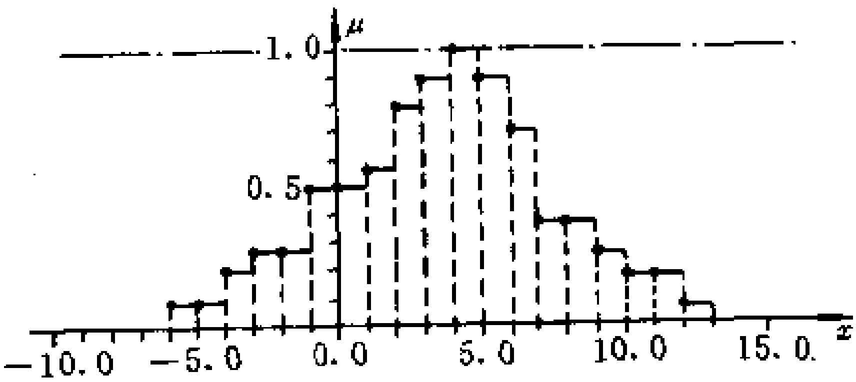


图 2.10　Z 中的一个模糊数

$$A_\alpha=[a_1^{(\alpha)},a_2^{(\alpha)}]$$

$$B_\alpha=[b_1^{(\alpha)},b_2^{(\alpha)}]$$

$$A_{\alpha'}=[a_1^{(\alpha')},a_2^{(\alpha')}]$$

$$B_{\alpha'}=[b_1^{(\alpha')},b_2^{(\alpha')}]$$

$$(\alpha'>\alpha)\Rightarrow([a_1^{(\alpha')},a_2^{(\alpha')}]\subset[a_1^{(\alpha)},a_2^{(\alpha)}])$$

$$(\alpha'>\alpha)\Rightarrow([b_1^{(\alpha')},b_2^{(\alpha')}]\subset[b_1^{(\alpha)},b_2^{(\alpha)}]) \tag{2.35}$$

因而可得到

$$A_\alpha(+)B_\alpha=[a_1^{(\alpha)}+b_1^{(\alpha)},a_2^{(\alpha)}+b_2^{(\alpha)}]$$

和

$$A_{\alpha'}(+)B_{\alpha'}=[a_1^{(\alpha')}+b_1^{(\alpha')},a_2^{(\alpha')}+b_2^{(\alpha')}]$$

对(2.35)式，则有

$$(\alpha'>\alpha)\Rightarrow([a_1^{(\alpha')}+b_1^{(\alpha')},a_2^{(\alpha')}+b_2^{(\alpha')}]$$
$$\subset[a_1^{(\alpha)}+b_1^{(\alpha)},a_2^{(\alpha)}+b_2^{(\alpha)}])$$

由这里可以看出：加法维持了原模糊数的凸性和单调性。

定理 2.2　如果 A 和 B 是 R 中的两个模糊数，则 $A(+)B$ 是 R 中的一个正规模糊子集。

证明：在 $\alpha=1$ 级，我们有

$$A_{\alpha=1}=[a_1^{(1)},a_2^{(1)}]$$

和

$$B_{\alpha=1} = [b_1^{(1)}, b_2^{(1)}]$$

则

$$A_{\alpha=1}(+)B_{\alpha=1} = [a_1^{(1)} + b_1^{(1)}, a_2^{(1)} + b_2^{(1)}] \neq \phi$$

所以 $A(+)B$ 是正规的。

上述两个定理就证明了如果 A 和 B 是 R 中的两个模糊数，那么 $A(+)B$ 也一定是一个模糊数。

模糊数的加法运算具有如下的代数性质：对 R 中的任意模糊数 A，B 和 C，有

$$A(+)B = B(+)A \qquad \text{(交换性)}$$

$$(A(+)B)(+)C = A(+)(B(+)C) \qquad \text{(结合性)}$$

然而，像是不对称的：

$$A(+)A^- = A^-(+)A \neq 0$$

其中

$$\mu_{A_\alpha^-}(x) = [-a_2^{(\alpha)}, -a_1^{(\alpha)}]$$

· **减法运算**

模糊数的加法运算定义也可以扩充到模糊数的减法运算定义：

$\forall\ \alpha \in [0,1]$

$$A(-)B = [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}](-)[b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}]$$

$$= [a_1^{(\alpha)} - b_2^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} - b_1^{(\alpha)}]$$

或者，$\forall\ x, y, z \in R$：

$$\mu_{A(-)B}(z) = \bigvee_{z=x-y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)) \tag{2.36}$$

实际上，减法运算是 B^- 到 A 的像的加法运算，这里，$\forall\ \alpha \in [0,1]$：

$$B_\alpha^- = [-b_2^{(\alpha)}, -b_1^{(\alpha)}]$$

减法运算既不是可结合的也不具有可交换性。下面看两个实际例子。

例 7　图 2.11 给出了两个其形状为三角形的模糊数 A 和 B，$\forall\ x \in R$：

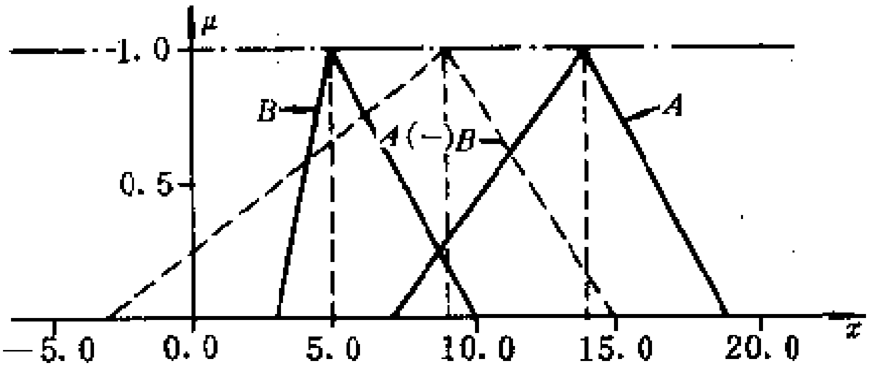


图 2.11 两个模糊数的减法运算

$$\mu_A(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant 7\\ \dfrac{x}{7}-1 & 7\leqslant x\leqslant 14\\ -\dfrac{x}{5}+\dfrac{19}{5} & 14\leqslant x\leqslant 19\\ 0 & 19\leqslant x\end{cases}\tag{2.37}$$

和

$$\mu_B(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant 3\\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{3}{2} & 3\leqslant x\leqslant 5\\ -\dfrac{x}{5}+\dfrac{10}{5} & 5\leqslant x\leqslant 10\\ 0 & 10\leqslant x\end{cases}\tag{2.38}$$

对(2.37)式，令

$$\alpha=\frac{a_1^{(\alpha)}}{7}-1$$

$$\alpha=-\frac{a_2^{(\alpha)}}{5}+\frac{19}{5}$$

则有

$$A_\alpha=[a_1^{(\alpha)},a_2^{(\alpha)}]=[7\alpha+7,-5\alpha+19]$$

对(2.38)式，则有

$$\alpha = \frac{b_1^{(\alpha)}}{2} - \frac{3}{2}$$

$$\alpha = -\frac{b_2^{(\alpha)}}{5} + \frac{10}{5} \tag{2.39}$$

则有

$$B_\alpha = [b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}] = [2\alpha + 3, -5\alpha + 10] \tag{2.40}$$

从(2.39)减去(2.40)式，则得到

$$\begin{aligned} A_\alpha(-)B_\alpha &= [7\alpha + 7, -5\alpha + 19](-)[2\alpha + 3, -5\alpha + 10] \\ &= [7\alpha + 7 - (-5\alpha + 10), -5\alpha + 19 - (2\alpha + 3)] \\ &= [12\alpha - 3, -7\alpha + 16] \end{aligned}$$

因此，如果我们定义

$$a_1^{(\alpha)} - b_2^{(\alpha)} = 12\alpha - 3$$

$$a_2^{(\alpha)} - b_1^{(\alpha)} = -7\alpha + 16$$

则可得到

$$\mu_{A(-)B}(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant -3 \\ \dfrac{x}{12} + \dfrac{3}{12} & -3 \leqslant x \leqslant 9 \\ -\dfrac{x}{7} + \dfrac{16}{7} & 9 \leqslant x \leqslant 16 \\ 0 & 16 \leqslant x \end{cases}$$

例 8 本例更清楚地显示了减法运算的过程，假定 Z 中有如下两个模糊数：

$$A = \frac{-3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4}{0 \quad 0.1 \quad 0.3 \quad 0.7 \quad 0.9 \quad 1.0 \quad 0.5 \quad 0} \cdots$$

$$B = \frac{-2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4}{0 \quad 0.1 \quad 0.6 \quad 1.0 \quad 0.8 \quad 0.3 \quad 0} \cdots$$

表 2.4 给出了 $A(-)B$ 的运算结果。

表 2.4 两个模糊数的减法运算

	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
1						1		
0.9					1	1		
0.8					1	1		
0.7				1	1	1		
0.6				1	1	1		
0.5				1	1	1	1	
0.4				1	1	1	1	
0.3			1	1	1	1	1	
0.2			1	1	1	1	1	
0.1		1	1	1	1	1	1	
0	1	1	1	1	1	1	1	1
	0	0.1	0.3	0.7	0.9	1	0.5	0

(−)

−2	−1	0	1	2	3	4
			1			
			1			
			1	1		
			1	1		
		1	1	1		
		1	1	1		
		1	1	1		
		1	1	1	1	
		1	1	1	1	
	1	1	1	1	1	
1	1	1	1	1	1	1
0	0.1	0.6	1	0.8	0.3	0

−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
								1					
							1	1					
						1	1	1					
					1	1	1	1					
					1	1	1	1	1				
					1	1	1	1	1	1			
					1	1	1	1	1	1			
			1	1	1	1	1	1	1	1			
			1	1	1	1	1	1	1	1			
		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0.1	0.3	0.3	0.7	0.8	0.9	1	0.6	0.5	0.1	0	0

采用(2.36)式即可得到：

$\mu_{A(-)B}(-7)=0\wedge 0=0$

$\mu_{A(-)B}(-6)=(0\wedge 0.3)\vee(0.1\wedge 0)=0$

$\mu_{A(-)B}(-5)=(0\wedge 0.8)\vee(0.1\wedge 0.3)\vee(0.3\wedge 0)=0.1$

$\mu_{A(-)B}(-4)=(0\wedge 1)\vee(0.1\wedge 0.8)\vee(0.3\wedge 0.3)$

$$\vee (0.7 \wedge 0) = 0.3$$

$$\mu_{A(-)B}(-3) = (0 \wedge 0.6) \vee (0.1 \wedge 1) \vee (0.3 \wedge 0.8)$$
$$\vee (0.7 \wedge 0.3) \vee (0.9 \wedge 0) = 0.3$$

$$\mu_{A(-)B}(-2) = (0 \wedge 0.1) \vee (0.1 \wedge 0.6) \vee (0.3 \wedge 1)$$
$$\vee (0.7 \wedge 8) \vee (0.9 \wedge 0.3) \vee (1 \wedge 0)$$
$$= 0.7$$

$$\mu_{A(-)B}(-1) = (0 \wedge 0) \vee (0.1 \wedge 0.1) \vee (0.3 \wedge 0.6)$$
$$\vee (0.7 \wedge 1) \vee (0.9 \wedge 0.8) \vee (1 \wedge 0.3)$$
$$\vee (0.5 \wedge 0) = 0.8$$

$$\mu_{A(-)B}(0) = (0.1 \wedge 0) \vee (0.3 \wedge 0.1) \vee (0.7 \wedge 0.6)$$
$$\vee (0.9 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0.8) \vee (0.5 \wedge 0.3)$$
$$\vee (0 \wedge 0) = 0.9$$

$$\mu_{A(-)B}(1) = (0.3 \wedge 0) \vee (0.7 \wedge 0.1) \vee (0.9 \wedge 0.6)$$
$$\vee (1 \wedge 1) \vee (0.5 \wedge 0.8) = 1$$

$$\mu_{A(-)B}(2) = (0.7 \wedge 0) \vee (0.9 \wedge 0.1) \vee (1 \wedge 0.6)$$
$$\vee (0.5 \wedge 0.8) = 0.6$$

$$\mu_{A(-)B}(3) = (0.9 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0.1) \vee (0.5 \wedge 0.6) = 0.5$$

$$\mu_{A(-)B}(4) = (1 \wedge 0) \vee (0.5 \wedge 0.1) = 0.1$$

$$\mu_{A(-)B}(5) = (0.5 \wedge 0) = 0$$

2.4 模糊数的乘法运算

本节讨论 R^+(非负实数集)和 N(自然数集)中两个模糊数的乘法和除法运算。我们先考虑乘法运算,假定 R^+ 中有两个模糊数 A 和 B,由 α 级我们可有

$$A_\alpha(\cdot)B_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}](\cdot)[b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}]$$
$$= [a_1^{(\alpha)} \cdot b_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} \cdot b_2^{(\alpha)}] \tag{2.41}$$

乘法也可写成如下形式:

$$\forall x,y,z \in R^+:$$

$$\mu_{A(\cdot)B}(z) = \bigvee_{z=x\cdot y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)) \tag{2.42}$$

方程(2.41)和(2.42)式是等价的，这可以按上节证明加法时所采用的相同方法来证明。

例 9 我们仍然采用两个三角模糊数：

$$\forall x \in R^+$$

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant 2 \\ x - 2 & 2 \leqslant x \leqslant 3 \\ -\dfrac{x}{2} + \dfrac{5}{2} & 3 \leqslant x \leqslant 5 \\ 0 & 5 \leqslant x \end{cases} \tag{2.43}$$

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant 3 \\ \dfrac{x}{2} - \dfrac{3}{2} & 3 \leqslant x \leqslant 5 \\ -x + 6 & 5 \leqslant x \leqslant 6 \\ 0 & 6 \leqslant x \end{cases} \tag{2.44}$$

对图 2.12 中的 α 级，采用(2.43)式可有

$$\alpha = a_1^{(\alpha)} - 2 \tag{2.45}$$

和

$$\alpha = -\frac{a_2^{(\alpha)}}{2} + \frac{5}{2}$$

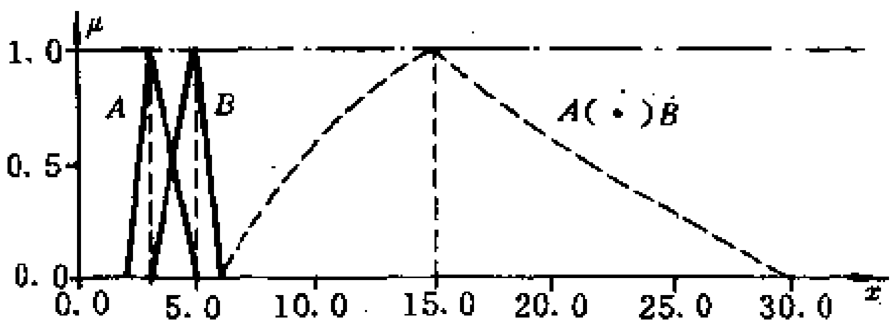


图 2.12 两个模糊数的乘法运算

因此

$$A_\alpha = [\alpha + 2, -2\alpha + 5]$$

采用(2.44)式还可得到

$$\alpha = \frac{b_1^{(\alpha)}}{2} - \frac{3}{2}$$

$$\alpha = -b_2^{(\alpha)} + 6$$

故
$$B_\alpha = [2\alpha + 3, -\alpha + 6]$$

所以,得到的乘法运算结果为:

$$\begin{aligned} A_\alpha(\cdot)B_\alpha &= [(\alpha + 2)(2\alpha + 3), (-2\alpha + 5)(-\alpha + 6)] \\ &= [2\alpha^2 + 7\alpha + 6, 2\alpha^2 - 17\alpha + 30] \end{aligned}$$

现在我们需要求解如下两个方法:

$$2\alpha^2 + 7\alpha + 6 - x = 0 \tag{2.46}$$

和
$$2\alpha^2 - 17\alpha + 30 - x = 0 \tag{2.47}$$

我们仅保留[0,1]中的两个根，对(2.46)式有

$$\alpha = (-7 + \sqrt{1 + 8x})/4$$

对(2.47)式而言则有

$$\alpha = (17 - \sqrt{49 + 8x})/4$$

最后得到的结果为:

$\forall x \in R^+$:

$$\mu_{A(\cdot)B}(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant 6 \\ (-7 + \sqrt{1 - 8x})/4 & 6 \leqslant x \leqslant 15 \\ (17 - \sqrt{49 + 8x})/4 & 15 \leqslant x \leqslant 30 \\ 0 & 30 \leqslant x \end{cases}$$

图 2.12 中也给出了乘法运算所得到的结果曲线,从图 2.12 中可看出:$A(\cdot)B$ 不是一个三角形。

例 10 在 N 中有如下两个模糊数

$$A = \frac{2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6}{0 \ \ 0.4 \ \ 1 \ \ 0.7 \ \ 0} \tag{2.48}$$

$$B=\frac{2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7}{0 \; 0.1 \; 0.8 \; 1 \; 0.3 \; 0} \tag{2.49}$$

采用(2.41)式我们可获得如表 2.5 所示的结果。

表 2.5 N 中两个模糊数相乘的结果

	3	4	5
1		1	
0.9		1	
0.8		1	
0.7		1	1
0.6		1	1
0.5		1	1
0.4	1	1	1
0.3	1	1	1
0.2	1	1	1
0.1	1	1	1
0	1	1	1
	0.4	1	0.2

(•)

3	4	5	6
		1	
		1	
	1	1	
	1	1	
	1	1	
	1	1	
	1	1	
	1	1	1
	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1
0.1	0.8	1	0.3

9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
											1										
											1										
							1	1	1	1	1										
							1	1	1	1	1	1	1	1	1	1					
							1	1	1	1	1	1	1	1	1	1					
							1	1	1	1	1	1	1	1	1	1					
			1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1					
			1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
			1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0.1	0.1	0.1	0.4	0.4	0.4	0.4	0.8	0.8	0.8	0.8	1	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3

因此我们可得到：

$$A(\cdot)B=\frac{8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \quad 12 \quad 13 \quad 14 \quad 15 \quad 16 \quad 17 \quad 18}{0 \; 0.1 \; 0.1 \; 0.1 \; 0.4 \; 0.4 \; 0.4 \; 0.4 \; 0.8 \; 0.8 \; 0.8}$$

$$\frac{19 \quad 20 \quad 21 \quad 22 \quad 23 \quad 24 \quad 25 \quad 26 \quad 27 \quad 28 \quad 29}{0.8 \; 1 \; 0.7 \; 0.7 \; 0.7 \; 0.7 \; 0.7 \; 0.3 \; 0.3 \; 0.3 \; 0.3}$$

$$\frac{30 \quad 31}{0.3 \; 0}$$

下面我们讨论(2.42)式如何运算。参看图2.10,我们是如何将 Z 中的一个模糊数变换成 R 中的一个模糊数,在正规值($\mu=1$)的左边模糊数是单调增加的,而在右边则是单调减少的。运算按如下方式进行:

1. 在左边我们考虑(2.42)式括号中的所有对偶,这里 $x\cdot y\leqslant z$;

2. 右边我们则考虑所以 $x\cdot y\geqslant z$ 的对偶。

为简化起见,我们省去了在对偶中有0出现的情况。对(2.48)和(2.49)式而言,仅对对偶(4,5)有 $\alpha=1$ 存在,故

$$\mu_{A(\cdot)B}(z)=\mu(x\cdot y=20)=\mu(4\cdot 5)=1$$

对20的左边我们采用上面的第一个规则,对大于20的情况将采用规则2,这样就可得到:

$$\mu(9)=\overbrace{(0.4\wedge 0.1)}^{3\times 3}=0.1$$

$$\mu(10)=\overbrace{(0.4\wedge 0.1)}^{3\times 3}=0.1$$

$$\mu(11)=\overbrace{(0.4\wedge 0.1)}^{3\times 3}=0.1$$

$$\mu(12)=\overbrace{(0.4\wedge 0.1)}^{3\times 3}\vee\overbrace{(0.4\wedge 0.8)}^{3\times 4}\vee\overbrace{(1\wedge 0.1)}^{4\times 3}$$
$$=0.4$$

$$\mu(13)=\overbrace{(0.4\wedge 0.1)}^{3\times 3}\vee\overbrace{(0.4\wedge 0.8)}^{3\times 4}\vee\overbrace{(1\wedge 0.1)}^{4\times 3}$$
$$=0.4$$

$$\mu(14)=\overbrace{(0.4\wedge 0.1)}^{3\times 3}\vee\overbrace{(0.4\wedge 0.8)}^{3\times 4}\vee\overbrace{(1\wedge 0.1)}^{4\times 3}$$
$$=0.4$$

$$\mu(15)=\overbrace{(0.4\wedge 0.1)}^{3\times 3}\vee\overbrace{(0.4\wedge 0.8)}^{3\times 4}\vee\overbrace{(1\wedge 0.3)}^{4\times 3}$$

$$\vee \overbrace{(0.4 \wedge 1)}^{3\times 5} \vee \overbrace{(0.7 \wedge 0.1)}^{5\times 3} = 0.4$$

$$\mu(16) = \overbrace{(0.4 \wedge 0.1)}^{3\times 3} \vee \overbrace{(0.4 \wedge 0.8)}^{3\times 4} \vee \overbrace{(1 \wedge 0.3)}^{4\times 3}$$

$$\vee \overbrace{(0.4 \wedge 1)}^{3\times 5} \vee \overbrace{(0.7 \wedge 0.1)}^{5\times 3} \vee \overbrace{(1 \wedge 0.8)}^{4\times 4} = 0.8$$

$$\mu(17) = \overbrace{(0.4 \wedge 0.1)}^{3\times 3} \vee \overbrace{(0.4 \wedge 0.8)}^{3\times 4} \vee \overbrace{(1 \wedge 0.3)}^{4\times 3}$$

$$\vee \overbrace{(0.4 \wedge 1)}^{3\times 5} \vee \overbrace{(0.7 \wedge 0.1)}^{5\times 3} \vee \overbrace{(1 \wedge 0.8)}^{4\times 4} = 0.8$$

$$\mu(18) = \overbrace{(0.4 \wedge 0.1)}^{3\times 3} \vee \overbrace{(0.4 \wedge 0.8)}^{3\times 4} \vee \overbrace{(1 \wedge 0.3)}^{4\times 3}$$

$$\vee \overbrace{(0.4 \wedge 1)}^{3\times 5} \vee \overbrace{(0.7 \wedge 0.1)}^{5\times 3} \vee \overbrace{(1 \wedge 0.8)}^{4\times 4}$$

$$\vee \overbrace{(0.4 \wedge 0.3)}^{3\times 6} = 0.8$$

$$\mu(19) = \overbrace{(0.4 \wedge 0.1)}^{3\times 3} \vee \overbrace{(0.4 \wedge 0.8)}^{3\times 4} \vee \overbrace{(1 \wedge 0.3)}^{4\times 3}$$

$$\vee \overbrace{(0.4 \wedge 1)}^{3\times 5} \vee \overbrace{(0.7 \wedge 0.1)}^{5\times 3} \vee \overbrace{(1 \wedge 0.8)}^{4\times 4}$$

$$\vee \overbrace{(0.4 \wedge 0.3)}^{3\times 6} = 0.8$$

大于 $z=20$ 的有：

$$\mu(21) = \overbrace{(1 \wedge 0.3)}^{4\times 6} \vee \overbrace{(0.7 \wedge 1)}^{5\times 5} \vee \overbrace{(0.7 \wedge 0.3)}^{5\times 6} = 0.7$$

$$\mu(22) = \overbrace{(1 \wedge 0.3)}^{4\times 6} \vee \overbrace{(0.7 \wedge 1)}^{5\times 5} \vee \overbrace{(0.7 \wedge 0.3)}^{5\times 6} = 0.7$$

$$\mu(23) = \overbrace{(1 \wedge 0.3)}^{4\times 6} \vee \overbrace{(0.7 \wedge 1)}^{5\times 5} \vee \overbrace{(0.7 \wedge 0.3)}^{5\times 6} = 0.7$$

$$\mu(24) = \overbrace{(1 \wedge 0.3)}^{4\times 6} \vee \overbrace{(0.7 \wedge 1)}^{5\times 5} \vee \overbrace{(0.7 \wedge 0.3)}^{5\times 6} = 0.7$$

$$\mu(25)=\overbrace{(0.7\wedge 1)}^{5\times 5}\vee\overbrace{(0.7\wedge 0.3)}^{5\times 6}=0.7$$

$$\mu(26)=\overbrace{(0.7\wedge 0.3)}^{5\times 6}=0.3$$

$$\mu(27)=\overbrace{(0.7\wedge 0.3)}^{5\times 6}=0.3$$

$$\mu(28)=\overbrace{(0.7\wedge 0.3)}^{5\times 6}=0.3$$

$$\mu(29)=\overbrace{(0.7\wedge 0.3)}^{5\times 6}=0.3$$

$$\mu(30)=\overbrace{(0.7\wedge 0.3)}^{5\times 6}=0.3$$

$$\mu(z>30)=0$$

下面我们介绍与加法运算中类似的定理。

定理 2.3 如果 A 和 B 是 R^+ 中的两个模糊数，那么 $A(\cdot)B$ 是一个凸的模糊子集。

证明：与 R^+ 中模糊数加法的证明是类似的。

定理 2.4 如果 A 和 B 是 R^+ 中的两个模糊数，那么 $A(\cdot)B$ 是一个正规的模糊子集。

证明：这个证明与加法中的证明也是类似的。

下面我们给出乘法运算的一些代数性质：

$\forall\ A,B,C\subset R^+$：

$$A(\cdot)B=B(\cdot)A \qquad \text{(交换性)}$$

$$(A(\cdot)B)(\cdot)C=A(\cdot)(B(\cdot)C) \qquad \text{(结合性)}$$

特别的

$$A(\cdot)1=1(\cdot)A=A$$

如果用 A^{-1} 表示 A 的倒数，需注意的是倒数是不对称的，即

$$A(\cdot)A^{-1}=A^{-1}(\cdot)A\neq 1$$

这里

$$A_\alpha^{-1}=[1/a_2^{(\alpha)},1/a_1^{(\alpha)}]$$

·除法运算

R^+中的两个模糊数的除法运算定义为

$$A(:)B=[a_1^{(\alpha)},a_2^{(\alpha)}](:)[b_1^{(\alpha)},b_2^{(\alpha)}]$$
$$=[a_1^{(\alpha)}/b_2^{(\alpha)},a_2^{(\alpha)}/b_1^{(\alpha)}] \quad b_2^{(\alpha)}>0 \quad \forall\ \alpha\in[0,1]$$

或者

$\forall\ x,y,z\in R^+$:

$$\mu_{A(:)B}(z)=\bigvee_{z=x/y}(\mu_A(x)\wedge\mu_B(y))$$

由上面的定义可以看出:除法实际上是用倒数来进行乘法运算的,即用

$$B_\alpha^{-1}=[1/b_2^{(\alpha)},1/b_1^{(\alpha)}] \quad b_2^{(\alpha)}>0 \quad \forall\ \alpha\in[0,1] \qquad (2.50)$$

进行乘法运算。需注意的是除法运算不具有结合性或交换性。下面看一个例子。

例11 如图2.13中给定的两个三角模糊数:

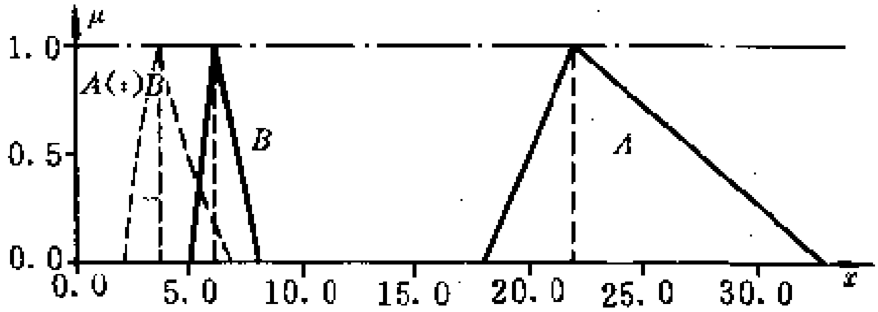


图 2.13 两个模糊数的除法运算

$\forall\ x\in R^+$:

$$\mu_A(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant 18\\ \dfrac{x}{4}-\dfrac{18}{4} & 18\leqslant x\leqslant 22\\ -\dfrac{x}{11}+3 & 22\leqslant x\leqslant 33\\ 0 & 33\leqslant x\end{cases} \qquad (2.51)$$

$$\mu_B(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant 5\\ x-5 & 5\leqslant x\leqslant 6\\ -\dfrac{x}{2}+4 & 6\leqslant x\leqslant 8\\ 0 & 8\leqslant x\end{cases}\tag{2.52}$$

在(2.51)式中，令 $\alpha=a_1^{(\alpha)}/4-18/4$ 和 $\alpha=\dfrac{-a_2^{(\alpha)}}{11}+3$，由这里得到

$$A_\alpha=[4\alpha+18,-11\alpha+33]$$

在(2.52)式中，令 $\alpha=b_1^{(\alpha)}-5$ 和 $\alpha=\dfrac{-b_2^{(\alpha)}}{2}+4$，由这里可有

$$B_\alpha=[\alpha+5,-2\alpha+8]$$

因此

$$A_\alpha(:)B_\alpha=[4\alpha+18,-11\alpha+33](:)[\alpha+5,-2\alpha+8]$$

$$=\left(\frac{4\alpha+18}{-2\alpha+8},\frac{-11\alpha+33}{\alpha+5}\right)$$

所以我们得到

$\forall\ x\in R^+$:

$$\mu_{A(:)B}(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant 9/4\\ \dfrac{8x-18}{2x+4} & 9/4\leqslant x\leqslant 11/3\\ \dfrac{-5x+33}{x+11} & 11/3\leqslant x\leqslant 33/5\\ 0 & 33/5\leqslant x\end{cases}$$

注意：$(A(:)B)(\cdot)B\neq A$，因为

$$A_\alpha(:)B_\alpha=\left[\frac{a_1^{(\alpha)}}{b_2^{(\alpha)}},\frac{a_2^{(\alpha)}}{b_1^{(\alpha)}}\right]$$

$$(A_\alpha(:)B_\alpha)(\cdot)B_\alpha=\left[\frac{a_1^{(\alpha)}}{b_2^{(\alpha)}},\frac{a_2^{(\alpha)}}{b_1^{(\alpha)}}\right](\cdot)[b_1^{(\alpha)},b_2^{(\alpha)}]$$

$$=\left[\frac{a_1^{(\alpha)}b_1^{(\alpha)}}{b_2^{(\alpha)}},\frac{a_2^{(\alpha)}b_2^{(\alpha)}}{b_1^{(\alpha)}}\right]$$

$$\neq[a_1^{(\alpha)},a_2^{(\alpha)}]=A_\alpha$$

这对加法和减法而言也是正确的，即

$$(A(-)B)(+)A \neq A$$

这是因为

$$A_\alpha(-)B_\alpha = [a_1^{(\alpha)} - b_2^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} - b_1^{(\alpha)}]$$

$$\begin{aligned}(A_\alpha(-)B_\alpha)(+)B_\alpha &= [a_1^{(\alpha)} - b_2^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} - b_1^{(\alpha)}](+)[b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}] \\ &= [a_1^{(\alpha)} - b_2^{(\alpha)} + b_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} - b_1^{(\alpha)} + b_2^{(\alpha)}] \\ &\neq [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}]\end{aligned}$$

一个普通数与一个模糊数的乘法运算。

令 A 是 R 中的一个模糊数，k 是一个 $k \in R_0^+$（正实数集）普通数，

$\forall\ A \subset R$：

$$\begin{aligned}k \cdot A_\alpha &= [k,k](\cdot)[a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}] \\ &= [ka_1^{(\alpha)}, ka_2^{(\alpha)}]\end{aligned}$$

或者，$\forall\ x \in R$：

$$\mu_{k \cdot A}(x) = \mu_A(x/k) \tag{2.53}$$

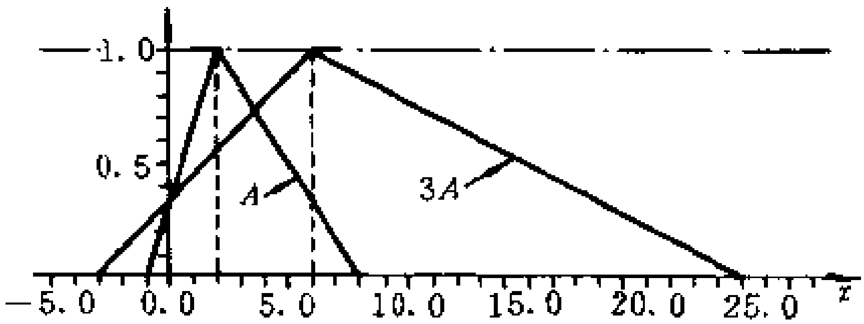


图 2.14　一个普通数与模糊数相乘

例 12　考虑图 2.14 中的例子，$\forall\ x \in R$：

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant -1 \\ x/3 + 1/3 & -1 \leqslant x \leqslant 2 \\ -x/6 + 8/6 & 2 \leqslant x \leqslant 8 \\ 0 & 8 \leqslant x \end{cases}$$

令 $k=3$，采用(2.53)式可得到：

$\forall\ x \in R$:

$$\mu_{3\cdot A}(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant -3 \\ x/9 + 1/3 & -3 \leqslant x \leqslant 6 \\ -x/18 + 4/3 & 6 \leqslant x \leqslant 24 \\ 0 & 24 \leqslant x \end{cases}$$

R^+(非负实数集)中的分配性

下面我们要证明:$\forall\ A,B,C \subset R^+$:

$$(A(+)B)(\cdot)C = (A(\cdot)C)(+)(B(\cdot)C)$$

证明如下:

$$\begin{aligned}(A(+)B)(\cdot)C &= ([a_1^{(\alpha)},a_2^{(\alpha)}](+)[b_1^{(\alpha)},b_2^{(\alpha)}])(\cdot)[c_1^{(\alpha)},c_2^{(\alpha)}] \\ &= [a_1^{(\alpha)} + b_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} + b_2^{(\alpha)}](\cdot)[c_1^{(\alpha)},c_2^{(\alpha)}] \\ &= [a_1^{(\alpha)} \cdot c_1^{(\alpha)} + b_1^{(\alpha)} \cdot c_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} \cdot c_2^{(\alpha)} + b_2^{(\alpha)} \cdot c_2^{(\alpha)}]\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}&(A(\cdot)C(+)(B(\cdot)C) \\ &= ([a_1^{(\alpha)},a_2^{(\alpha)}](\cdot)[c_1^{(\alpha)},c_2^{(\alpha)}]) + ([b_1^{(\alpha)},b_2^{(\alpha)}](\cdot)[c_1^{(\alpha)},c_2^{(\alpha)}]) \\ &= [a_1^{(\alpha)} \cdot c_1^{(\alpha)} + b_1^{(\alpha)} \cdot c_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} \cdot c_2^{(\alpha)} + b_2^{(\alpha)} \cdot c_2^{(\alpha)}]\end{aligned}$$

即

$$(A(+)B)(\cdot)C = (A(\cdot)C) + (B(\cdot)C)$$

相反

$$(A(\cdot)B)(+)C \neq (A(+)C)(\cdot)(A(+)B) \qquad (2.54)$$

因为

$$(a \cdot b) + c \neq a \cdot c + b \cdot c$$

2.5 模糊数的取大和取小运算

假定 A 和 B 是 R 中的两个模糊数:

$$A_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}]$$

和

$$B_\alpha = [b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}]$$

如果$\forall\ \alpha\in[0,1]$：

$$a_1^{(\alpha)}\leqslant b_1^{(\alpha)}\quad 和\quad a_2^{(\alpha)}\leqslant b_2^{(\alpha)}\tag{2.55}$$

我们可以写作 $A\leqslant B$。

如果(2.55)式中的条件或者相反的条件($\geqslant$)不满足，那么 A 和 B 就是不可比较的。此时模糊数没有全序结构(线性次序结构)，它们仅有偏序结构。

两个模糊数 A 和 B 取小所得到的模糊数定义如下：$\forall\ \alpha\in[0,1]$：

$$\begin{aligned}A_\alpha(\wedge)B_\alpha&=[a_1^{(\alpha)},a_2^{(\alpha)}](\wedge)[b_1^{(\alpha)},b_2^{(\alpha)}]\\&=[a_2^{(\alpha)}\wedge b_1^{(\alpha)},a_2^{(\alpha)}\wedge b_2^{(\alpha)}]\end{aligned}\tag{2.56}$$

取大的模糊数定义为：$\forall\ \alpha\in[0,1]$：

$$\begin{aligned}A_\alpha(\vee)B_\alpha&=[a_1^{(\alpha)},a_2^{(\alpha)}](\vee)[b_1^{(\alpha)},b_2^{(\alpha)}]\\&=[a_1^{(\alpha)}\vee b_1^{(\alpha)},a_2^{(\alpha)}\vee b_2^{(\alpha)}]\end{aligned}\tag{2.57}$$

图 2.15 和图 2.16 解释了(2.56)和(2.57)式的定义。

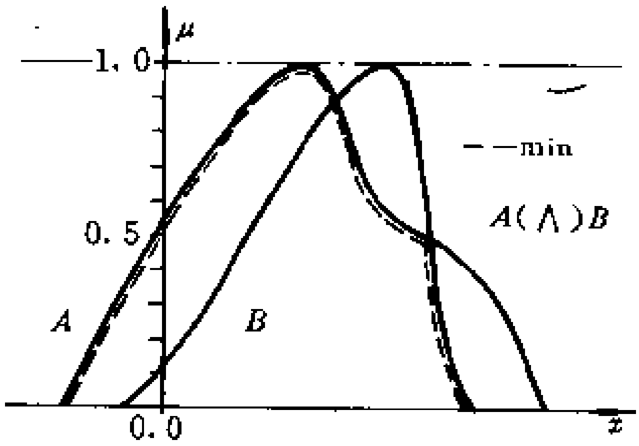


图 2.15 模糊数 A 和 B 的取小

上述运算规则也可用另一种方式来表示：

$\forall\ x,y,z\subset R$：

$$\mu_{A(\wedge)B}(z)=\bigvee_{z=x\wedge y}(\mu_A(x)\wedge\mu_B(y))$$

和

$$\mu_{A(\vee)B}(z)=\bigvee_{z=x\vee y}(\mu_A(x)\vee\mu_B(y))$$

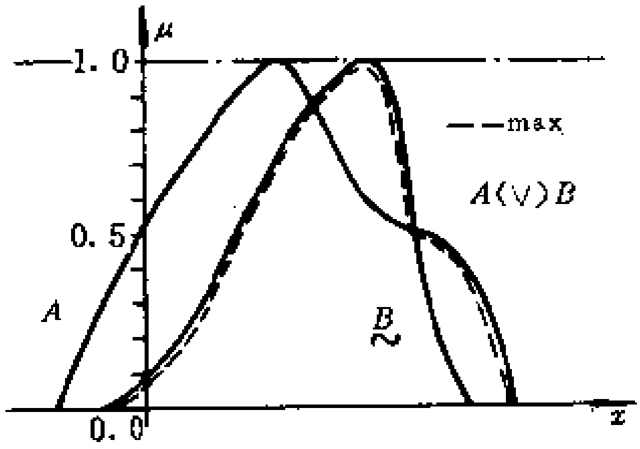


图 2.16 模糊数 A 和 B 的取大

例 13 在图2.17(a)中的两个模糊数 A 和 B 分别为：$\forall x \subset R$：

$$\mu_A(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant -2\\ x/2+1 & -2\leqslant x\leqslant 0\\ -x/6+1 & 0\leqslant x\leqslant 6\\ 0 & 6\leqslant x\end{cases}$$

$$\mu_B(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant -4\\ x/7+4/7 & -4\leqslant x\leqslant 3\\ -x/2+5/2 & 3\leqslant x\leqslant 5\\ 0 & 5\leqslant x\end{cases}$$

那么我们有：$\forall \alpha\in[0,1]$：

$$A_\alpha=[2\alpha-2,\ -6\alpha+6]$$

$$B_\alpha=[7\alpha-4,\ -2\alpha+5]$$

因此对取小则有

$$A_\alpha(\wedge)B_\alpha=[(2\alpha-2)\wedge(7\alpha-4),\ (-6\alpha+6)\wedge(-2\alpha+5)]$$

这样我们可得到：

$$A_\alpha(\wedge)B_\alpha=\begin{cases}[7\alpha-4,\ -2\alpha+5] & 0\leqslant\alpha\leqslant 0.25\\ [7\alpha-4,\ -6\alpha+6] & 0.25\leqslant\alpha\leqslant 0.40\\ [2\alpha-2,\ -6\alpha+6] & 0.40\leqslant\alpha\leqslant 1\end{cases}$$

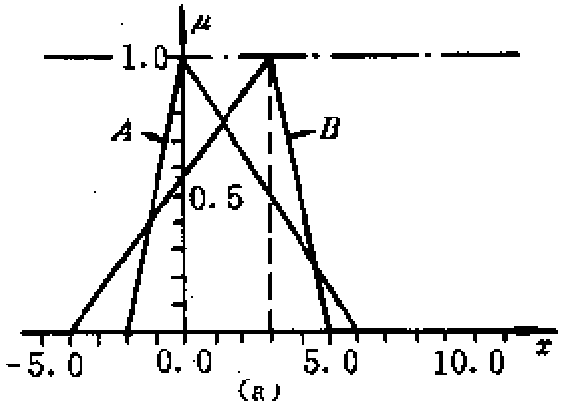


图 2.17(a)　两个三角模糊数 A 和 B

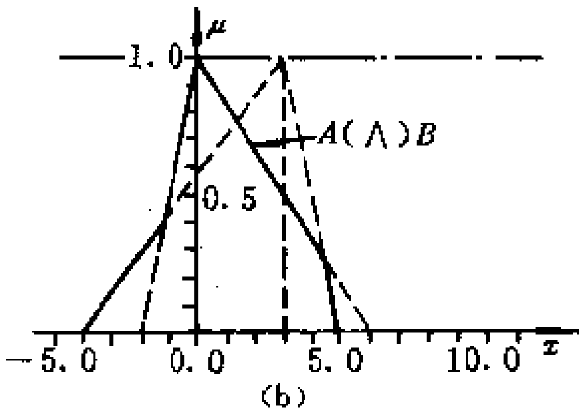


图 2.17(b)　模糊数 A 和 B 的取小

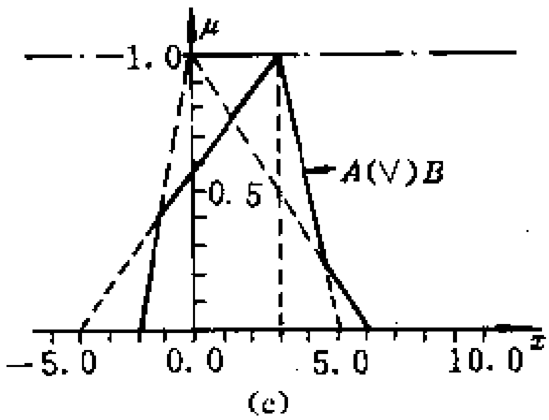


图 2.17(c)　模糊数 A 和 B 的取大

由这里我们可进一步获得如下结果：

$$\mu_{A(\wedge)B}(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant -4\\ \dfrac{x}{7}+\dfrac{4}{7} & -4\leqslant x\leqslant -1.2\\ \dfrac{x}{2}+1 & -1.2\leqslant x\leqslant 0\\ -\dfrac{x}{6}+1 & 0\leqslant x\leqslant 4.5\\ -\dfrac{x}{2}+5/2 & 4.5\leqslant x\leqslant 5\\ 0 & 5\leqslant x\end{cases} \tag{2.58}$$

图 2.17(b)给出了 $A(\wedge)B$ 的结果。

对于取大运算有

$$\begin{aligned}A_\alpha(\vee)B_\alpha&=[(2\alpha-2)\vee(7\alpha-4),\\&\qquad(-6\alpha+6)\vee(-2\alpha+5)]\\&=\begin{cases}[2\alpha-2,\ -6\alpha+6] & 0\leqslant\alpha\leqslant 0.25\\ [2\alpha-2,\ -2\alpha+5] & 0.25\leqslant\alpha\leqslant 0.40\\ [7\alpha-4,\ -2\alpha+5] & 0.40\leqslant\alpha\leqslant 1\end{cases}\end{aligned}$$

最后我们得到如下结果：

$$\mu_{A(\vee)B}(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant -2\\ \dfrac{x}{2}+1 & -2\leqslant x\leqslant -1.2\\ \dfrac{x}{7}+\dfrac{4}{7} & -1.2\leqslant x\leqslant 3\\ -\dfrac{x}{2}+\dfrac{5}{2} & 3\leqslant x\leqslant 4.5\\ -\dfrac{x}{6}+1 & 4.5\leqslant x\leqslant 6\\ 0 & 6\leqslant x\end{cases} \tag{2.59}$$

图 2.17(c)给出了 A 与 B 的取大运算结果。

例 14 下面考虑 Z 中的例子：

$$A=\frac{-2}{0.2}\frac{-1}{0.3}\frac{0}{0.5}\frac{1}{1}\frac{2}{0.5}\frac{3}{0}\frac{4}{0}$$

$$B=\frac{-2}{0}\frac{-1}{0.5}\frac{0}{1}\frac{1}{0.7}\frac{2}{0.6}\frac{3}{0.4}\frac{4}{0.1}$$

很明显，这两个模糊数是不可比较的(见表 2.6)。

另一方面，我们可采用极小集平方和极大集平方来获得取小和取大值，这样，我们可得到表 2.7。

对 R 和 Z 中两个模糊数的取小和取大运算，我们可以容易地得到如下性质：

$$A(\wedge)B=B(\wedge)A \tag{2.60}$$

$$A(\vee)B=B(\vee)A \tag{2.61}$$

$$(A(\wedge)B)\wedge C=A(\wedge)(B(\wedge)C) \tag{2.62}$$

$$(A(\vee)B)\vee C=A(\vee)(B(\vee)C) \tag{2.63}$$

$$A(\wedge)A=A \tag{2.64}$$

$$A(\vee)A=A \tag{2.65}$$

$$A(\vee)(A(\wedge)B)=A \tag{2.66}$$

$$A(\wedge)(A(\vee)B)=A \tag{2.67}$$

$$A(\vee)(B(\wedge)C)=(A(\vee)B)(\wedge)(A(\vee)C) \tag{2.68}$$

$$A(\wedge)(B(\vee)C)=(A(\wedge)B)(\vee)(A(\wedge)C) \tag{2.69}$$

由(2.60)～(2.69)式的特性我们可看出：模糊取小和取大(在 R 或 Z 中)有一个分配格结构。

表 2.6(a) 模糊数的取小

	-2	-1	0	1	2	3
1				1		
0.9				1		
0.8				1		
0.7				1		
0.6				1		
0.5			1	1	1	
0.4			1	1	1	
0.3		1	1	1	1	
0.2	1	1	1	1	1	
0.1	1	1	1	1	1	
0	1	1	1	1	1	1
	0.2	0.3	0.5	1	0.5	0.0

(∧)

-1	0	1	2	3	4
	1				
	1				
	1				
	1	1			
	1	1	1		
1	1	1	1		
1	1	1	1	1	
1	1	1	1	1	
1	1	1	1	1	
1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1
0.5	1	0.7	0.6	0.4	0.1

=

-2	-1	0	1	2	3	4
		1				
		1				
		1				
		1	1			
		1	1			
	1	1	1	1		
	1	1	1	1		
	1	1	1	1		
1	1	1	1	1		
1	1	1	1	1		
1	1	1	1	1	1	1
0.2	0.5	1	0.7	0.5	0	0

$A(\wedge)B=$

-2	-1	0	1	2	3	4
0.2	0.5	1	0.7	0.5	0	0

表 2.6(b) 模糊数的取大

	−2	−1	0	1	2	3
1				1		
0.9				1		
0.8				1		
0.7				1		
0.6				1		
0.5			1	1	1	
0.4			1	1	1	
0.3		1	1	1	1	
0.2	1	1	1	1	1	
0.1	1	1	1	1	1	
0	1	1	1	1	1	1
	0.2	0.3	0.5	1	0.5	0

(∧)

−1	0	1	2	3	4
	1				
	1				
	1				
	1	1			
	1	1	1		
1	1	1	1		
1	1	1	1	1	
1	1	1	1	1	
1	1	1	1	1	
1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1
0.5	1	0.7	0.6	0.4	0.1

=

−2	−1	0	1	2	3	4
			1			
			1			
			1			
			1			
			1	1		
		1	1	1		
		1	1	1	1	
	1	1	1	1	1	
	1	1	1	1	1	
	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
0	0.3	0.5	1	0.6	0.4	0.1

	−2	−1	0	1	2	3	4
$A(\vee)B=$	0	0.3	0.5	1	0.6	0.4	0.1

表 2.7 采用极小集平方和极大集平方获得取小和取大值的方法

A \ B	−2	−1	0	1	2	3	4
−2	0 / 0.2	0.5 / 0.2	1 / 0.2	0.7 / 0.2	0.6 / 0.2	0.4 / 0.2	0.1 / 0.2
−1	0 / 0.3	0.5 / 0.3	1 / 0.3	0.7 / 0.3	0.6 / 0.3	0.4 / 0.3	0.1 / 0.3
0	0 / 0.5	0.5 / 0.5	1 / 0.5	0.7 / 0.5	0.6 / 0.5	0.4 / 0.5	0.1 / 0.5
1	0 / 1	0.5 / 1	1 / 1	0.7 / 1	0.6 / 1	0.4 / 1	0.1 / 1
2	0 / 0.5	0.5 / 0.5	1 / 0.5	0.7 / 0.5	0.6 / 0.5	0.4 / 0.5	0.1 / 0.5
3	0 / 0	0.5 / 0	1 / 0	0.7 / 0	0.6 / 0	0.4 / 0	0.1 / 0
4	0 / 0	0.5 / 0	1 / 0	0.7 / 0	0.6 / 0	0.4 / 0	0.1 / 0

	−2	−1	0	1	2	3	4
$A(\wedge)B=$	0.2	0.5	1	0.7	0.5	0	0

A \ B	−2	−1	0	1	2	3	4
−2	0 / 0.2	0.5 / 0.2	1 / 0.2	0.7 / 0.2	0.6 / 0.2	0.4 / 0.2	0.1 / 0.2
−1	0 / 0.3	0.5 / 0.3	1 / 0.3	0.7 / 0.3	0.6 / 0.3	0.4 / 0.3	0.1 / 0.3
0	0 / 0.5	0.5 / 0.5	1 / 0.5	0.7 / 0.5	0.6 / 0.5	0.4 / 0.5	0.1 / 0.5
1	0 / 1	0.5 / 1	1 / 1	0.7 / 1	0.6 / 1	0.4 / 1	0.1 / 1
2	0 / 0.5	0.5 / 0.5	1 / 0.5	0.7 / 0.5	0.6 / 0.5	0.4 / 0.5	0.1 / 0.5
3	0 / 0	0.5 / 0	1 / 0	0.7 / 0	0.6 / 0	0.4 / 0	0.1 / 0
4	0 / 0	0.5 / 0	1 / 0	0.7 / 0	0.6 / 0	0.4 / 0	0.1 / 0

	−2	−1	0	1	2	3	4
$A(\vee)B=$	0	0.3	0.5	1	0.6	0.4	0.1

2.6 模糊数的卷积

R 中的如下运算称为 max-min 卷积：

$\forall\ x,y,z\in R$：

$$\mu_{A(+)B}(z)=\bigvee_{z=x+y}(\mu_A(x)\ \wedge\ \mu_B(y)) \tag{2.70}$$

$$\mu_{A(-)B}(z) = \bigvee_{z=x-y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)) \tag{2.71}$$

$$\mu_{A(\cdot)B}(z) = \bigvee_{z=x\cdot y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)) \tag{2.72}$$

$$\mu_{A(:)B}(z) = \bigvee_{z=x/y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)) \tag{2.73}$$

$$\mu_{A(\wedge)B}(z) = \bigvee_{z=x\wedge y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)) \tag{2.74}$$

$$\mu_{A(\vee)B}(z) = \bigvee_{z=x\vee y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)) \tag{2.75}$$

表 2.7 中我们给出了当 A 和 B 位于 Z 中时，怎样采用卷积来求 A 和 B 的"∧"和"∨"；下面我们讨论采用同样的方法来处理 A 和 B 的"(+)"和"(−)"运算，看下面的例子。

例 15

$$A = \frac{0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5}{0.1\ 0.5\ 0.9\ 1\ 0.6\ 0.2} \tag{2.76}$$

$$B = \frac{0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6}{0.2\ 0.3\ 1\ 0.8\ 0.7\ 0.1\ 0.1} \tag{2.77}$$

对于 $A(+)B$ 和 $A(-)B$，对每条对角性所进行的 max-min 运算所得到的运算结果列于表 2.8(a)，(b)中。除了 max-min 以外，别种类型的卷积也是可能的，例如：

$\forall\ x,y,z\in R$：

$$\mu_{A(*)B}(z) = \bigvee_{z=x*y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y))$$

这里"$*$"是可使 $z=x*y$ 成立的任何算子，例如 $x*y$ 可以是 x^2+y^2 或者 x 和 y 之间任何其他运算。

下面我们考虑其他类型的卷积，例如 min-max 卷积：

$\forall\ x,y,z\in R$：

$$\mu_{A(*)B}(z) = \bigwedge_{z=x*y} (\mu_A(x) \vee \mu_B(y))$$

在下面的例子中我们取 $*=+$。

例 16 采用(2.76)，(2.77)和(2.78)式，对于 min-max 卷积我们可得到

$$\underset{\text{min-max}}{A(+)B} = \frac{0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11}{0.2\ 0.3\ 0.5\ 0.5\ 0.6\ 0.1\ 0.1\ 0.8\ 0.7\ 0.6\ 0.2\ 0.2}$$

上述例子表明：二个模糊数的任意卷积可以给出一个既不是凸的也不是正规的模糊子集。就(2.70～2.75)式所给的卷积而言，模糊数的卷积都可以得到一个由定理(2.1)和(2.2)所满足的模糊数。

在概率理论中使用的卷积是"和-积"卷积，即

$\forall\ x,y,z\in R$；

表 2.8(a)　对每个对角的max-min运算结果

A \ B	0	1	2	3	4	5	6
0	0.2 / 0.1	0.3 / 0.1	1 / 0.1	0.8 / 0.1	0.7 / 0.1	0.1 / 0.1	0.1 / 0.1
1	0.2 / 0.5	0.3 / 0.5	1 / 0.5	0.8 / 0.5	0.7 / 0.5	0.1 / 0.5	0.1 / 0.5
2	0.2 / 0.9	0.3 / 0.9	1 / 0.9	0.8 / 0.9	0.7 / 0.9	0.1 / 0.9	0.1 / 0.9
3	0.2 / 1	0.3 / 1	1 / 1	0.8 / 1	0.7 / 1	0.1 / 1	0.1 / 1
4	0.2 / 0.6	0.3 / 0.6	1 / 0.6	0.8 / 0.6	0.7 / 0.6	0.1 / 0.6	0.1 / 0.6
5	0.2 / 0.2	0.3 / 0.2	1 / 0.2	0.8 / 0.2	0.7 / 0.2	0.1 / 0.2	0.1 / 0.2

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$A(+)B=$	0.1	0.2	0.3	0.5	0.9	1	0.8	0.7	0.6	0.2	0.1	0.1

(2.78)

表 2.8(b) 对每个对角的 max-min 运算结果

A \ B	0	1	2	3	4	5	6
0	0.2 / 0.1	0.3 / 0.1	1 / 0.1	0.8 / 0.1	0.7 / 0.1	0.1 / 0.1	0.1 / 0.1
1	0.2 / 0.5	0.3 / 0.5	1 / 0.5	0.8 / 0.5	0.7 / 0.5	0.1 / 0.5	0.1 / 0.5
2	0.2 / 0.9	0.3 / 0.9	1 / 0.9	0.8 / 0.9	0.7 / 0.9	0.1 / 0.9	0.1 / 0.9
3	0.2 / 1	0.3 / 1	1 / 1	0.8 / 1	0.7 / 1	0.1 / 1	0.1 / 1
4	0.2 / 0.6	0.3 / 0.6	1 / 0.6	0.8 / 0.6	0.7 / 0.6	0.1 / 0.6	0.1 / 0.6
5	0.2 / 0.2	0.3 / 0.2	1 / 0.2	0.8 / 0.2	0.7 / 0.2	0.1 / 0.2	0.1 / 0.2

	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
$A(-)B=$	0.1	0.1	0.1	0.5	0.7	0.8	0.9	1	0.6	0.3	0.2	0.2

$$\underbrace{\mu_{A(+)B}(z)}_{\text{和-积}} = \sum_{z=x+y} (\mu_A(x) \cdot \mu_B(y))$$

其中

$$\sum_x \mu_A(x) = 1 \quad 和 \quad \sum_y \mu_B(y) = 1$$

这里，μ_A 和 μ_B 是随机集 A 和 B 可能取的概率函数，这些函数通常都是不正规的。在连续的情况下，则用符号$\int$代替上式中的$\sum$。

2.7 L-R 模糊数

在下面的讨论中，我们将如下的函数称为标准函数：

$\forall\ x' \in R; \phi \in [0,1]$：

$$\phi(x') = \begin{cases} F_L(x') & -\infty < x' < 0 \\ 1 & x' = 0 \\ F_R(x') & 0 < x' < \infty \end{cases} \qquad (2.79)$$

这里我们将单调的增加加在 $F_L(x')$ 上，将单调的减少加在 $F_R(x')$ 上，即 $\phi(x')$ 是一个正规的凸函数——一个模糊数。$F_L(x')$ 和 $F_R(x')$ 不必要是对称的，图 2.18 给出了这种性质的函数 $\phi(x')$。

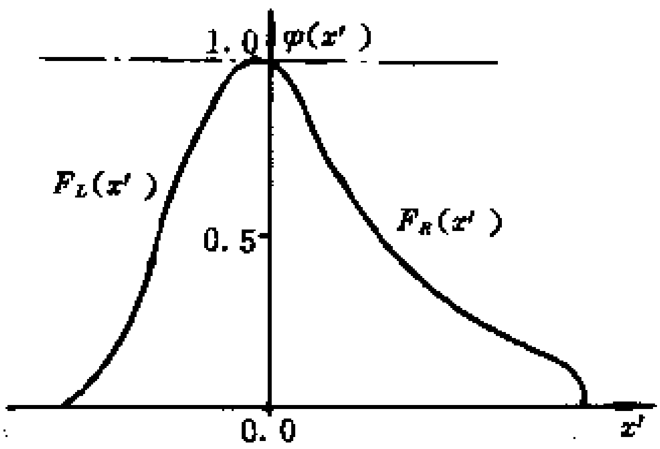


图 2.18 一个凸和正规的 L-R 模糊函数 $\phi(x')$

采用 $\phi(x')$ 可以构造一个如图 2.18 所示的模糊数：$\forall\ x \in R$：

$$\mu(x) = \begin{cases} F_L((x - m_A)/u_A) & -\infty < x \leqslant m_A \\ 1 & x = m_A \\ F_R((x - m_A)/v_A) & m_A \leqslant x < \infty \end{cases}$$

其中 $u_A > 0, v_A > 0$。

当 $m_A < 0$ 时，可左平移曲线，对 $m_A > 0$，则可右平移；如果 $u_A < 1$ 和 $v_A < 1$，可以收缩曲线，若 $u_A > 1$ 和 $v_A > 1$，则可将其扩张。图 2.19 表示 F_L 的扩张和 F_R 的收缩。

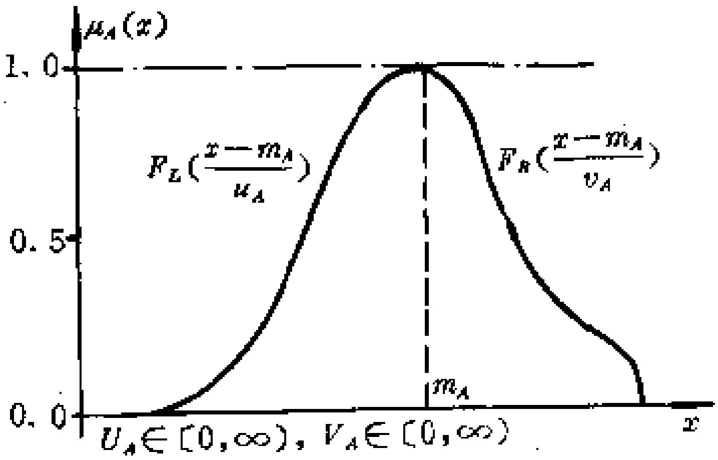


图 2.19 $\phi(x)$的扩张和收缩

模糊数 B 可按同样的方法来构造：

$\forall\, x\in R$：

$$\mu_B(x)=\begin{cases}F_L((x-m_B)/u_B) & -\infty<x\leqslant m_B\\ 1 & x=m_B\\ F_R((x-m_B)/v_B) & m_B\leqslant x<\infty\end{cases}$$

我们采用三元组(m,u,v)来定义模糊数 A 和 B：

$$A=(m_A,u_A,v_A)$$

$$B=(m_B,u_B,v_B)$$

Dubois 和 Prade 证明了对 A 和 B 的加法运算的 max-min 卷积，即$\forall\, x\in R$：

$$\mu_{A(+)B}(z)=\bigvee_{z=x+y}(\mu_A(x)\wedge\mu_B(y))$$

上式相应于

$$\begin{aligned}A(+)B&=(m_A,u_A,v_A)(+)(m_B,u_B,v_B)\\&=(m_A+m_B,u_A+u_B,v_A+v_B)\qquad(2.80)\end{aligned}$$

让我们来检验 Dubois 和 Prade 的证明：对一个任意的级 α，就 A 而言可将 F_L 写作：

$$F_L((x_1-m_A)/u_A)=\alpha$$

取这一函数的反，可得到

$$(x_1-m_A)/u_A=F_L^{-1}(\alpha)$$

或

$$x_1 = m_A + u_A F_L^{-1}(\alpha) \quad \alpha \in [0,1]$$

按同样的方法，考虑 B 的 F_L 的反函数应为：

$$(y_1 - m_B)/u_B = F_L^{-1}(\alpha)$$

或

$$y_1 = m_B + u_B F_L^{-1}(\alpha) \quad \alpha \in [0,1]$$

最后

$$x_1 + y_1 = m_A + m_B + (u_A + u_B) F_L^{-1}(\alpha)$$

按同样的方法，可得到

$$x_2 + y_2 = m_A + m_B + (v_A + v_B) F_R^{-1}(\alpha)$$

Dubois 和 Prade 称这类模糊数为 L-R 模糊数。

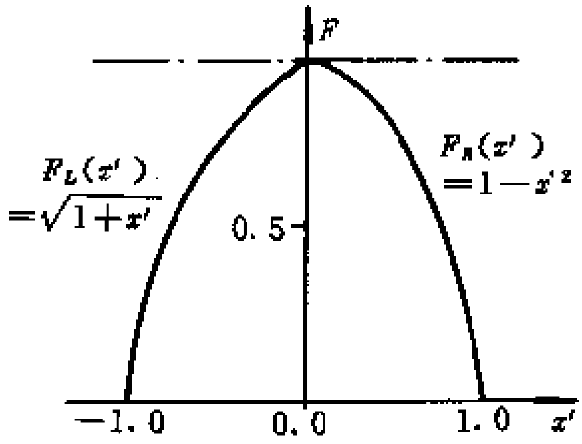


图 2.20　一个 L-R 模糊数

例 17　下面考虑如图 2.20 所示的一个 L-R 模糊数：

$$F_L(x') = \begin{cases} 0 & x' \leqslant -1 \\ \sqrt{1+x'} & -1 \leqslant x' \leqslant 0 \end{cases}$$

$$F_R(x') = \begin{cases} 1 - x'^2 & 0 \leqslant x' \leqslant 1 \\ 0 & x' > 1 \end{cases}$$

现在取具有相同 L-R 族的两个模糊数，其 m、u、v 分别为：

$$m_A = 4 \quad u_A = 2 \quad v_A = 3$$

$$m_B = 8 \quad u_B = 3 \quad v_B = 5$$

这样，可得到如下的两个模糊数：

$$\mu_A(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant 2\\ \sqrt{1+(x-4)/2} & 2\leqslant x\leqslant 4\\ 1 & x=4\\ 1-[(x-4)/3]^2 & 4\leqslant x\leqslant 7\\ 0 & 7\leqslant x\end{cases}$$

$$\mu_B(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant 5\\ \sqrt{1+(x-8)/3} & 5\leqslant x\leqslant 8\\ 1 & x=8\\ 1-[(x-8)/5]^2 & 8\leqslant x\leqslant 13\\ 0 & 13\leqslant x\end{cases}$$

最后，采用(2.80)式可得到：

$$\begin{aligned}A(+)B&=(m_A+m_B,u_A+u_B,v_A+v_B)\\&=(4+8,2+3,3+5)\\&=(12,5,8)\end{aligned}$$

由上式可进一步得到：

$\forall\ x\in R$：

$$\mu_{A(+)B}(x)\begin{cases}0 & x\leqslant 7\\ \sqrt{1+(x-12)/5} & 7\leqslant x\leqslant 12\\ 1 & x=12\\ 1-[(x-12)/8]^2 & 12\leqslant x\leqslant 20\\ 0 & 20\leqslant x\end{cases}$$

这一结果表示在图 2.21 中。

·具有平坦顶部的 L-R 模糊数

这类模糊数如图 2.22 所示，可用两种不同的方式来表示：

1. 选择任意一个 m_A，

$$m_{1A}\leqslant m_A\leqslant m_{2A}$$

2. 为了表示 L-R 模糊数的非单峰性，选择如下 4 个重要的

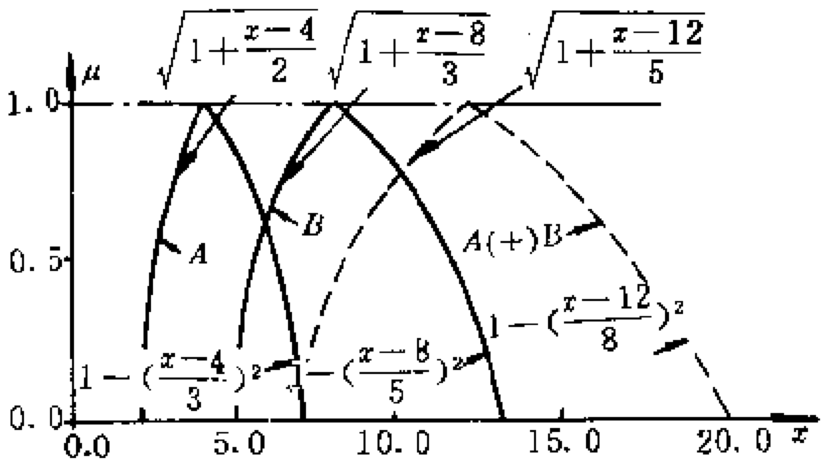


图 2.21　两个 L-R 模糊数的模糊加法运算

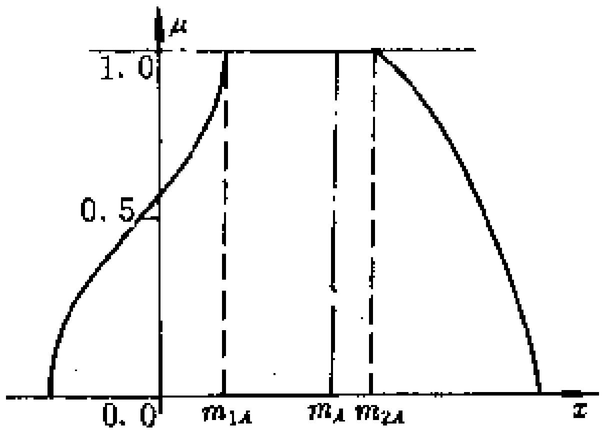


图 2.22　具有平坦顶部的 L-R 模糊数

数：

$$(m_{1A}, m_{2A}, u_A, v_A)$$

这样，两个具有平坦顶部模糊数相加可用下式进行运算：

$$\begin{aligned} A(+)B &= (m_{1A}, m_{2A}, u_A, v_A)(+)(m_{1B}, m_{2B}, u_B, v_B) \\ &= (m_{1A}+m_{1B}, m_{2A}+m_{2B}, u_A+u_B, v_A+v_B) \end{aligned}$$

· **半对称的 L-R 模糊数**

下面讨论如下的一个 L-R 模糊数：

$\forall\ x' \in R$：

$$F_L(x') = F_R(-x')$$

$$F_L(0) = F_R(0) = 1 \tag{2.81}$$

在这种情况下，L-R 类的每个模糊数有

$\forall x \in R$:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} F_L((x - m_A)/u_A) & -\infty < x \leqslant m_A \\ 1 & x = m_A \\ F_R((-x + m_A)/v_A) & m_A \leqslant x < \infty \end{cases}$$

采用(2.81)式所构造的这一类模糊数都称为半对称的 L-R 模糊数。

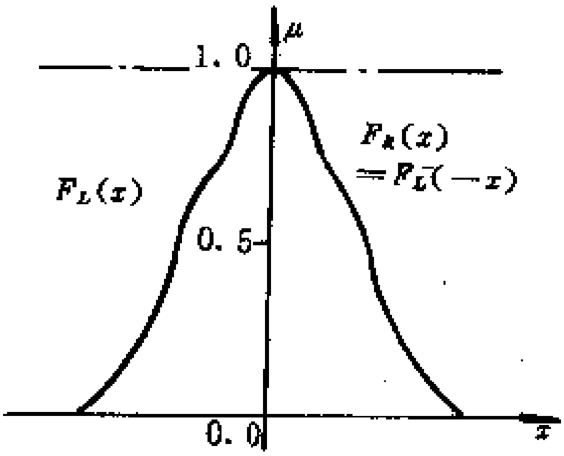


图 2.23　一个对称 L-R 模糊数

图 2.23 给出了一个对称的 L-R 模糊数，图 2.24 给出了两个半对称的 L-R 模糊数的加法运算结果，由图 2.24 可以看出：对加法运算而言，其半对称性和 L-R 性质都将保持不变。

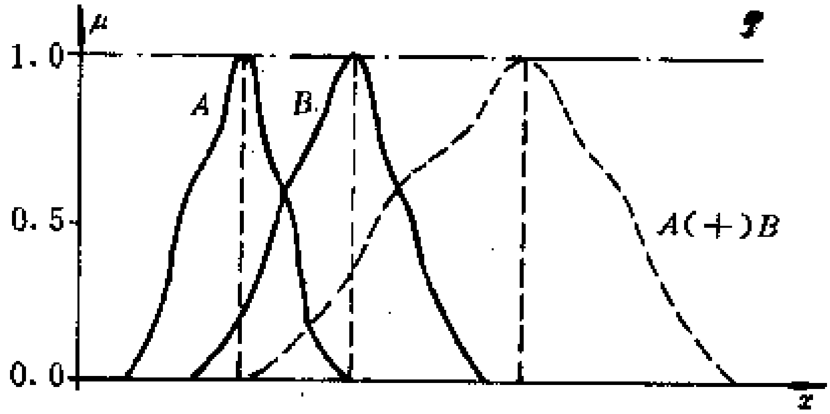


图 2.24　两个半对称 L-R 模糊数的加法运算

· 半对称性 L-R 模糊数的像

如果

$$A=(m_A,u_A,v_A)$$

那么

$$A^-=(-m_A,v_A,u_A)$$

由上式可看出：在一个半对称的 L-R 模糊数的像中，m_A 改变了它的符号，且 u_A 和 v_A 改变了它们之间的位置。

·两个半对称 L-R 模糊数的减法运算

减法运算实际上是它们像的加法运算，根据这一原理可得到：

$$A(-)B=A(+)B^-=(m_A,u_A,v_A)(+)(-m_B,v_B,u_B)$$
$$=(m_A-m_B,u_A+v_B,u_A+u_B)$$

·L-R 模糊数的乘法运算

在这种情况下我们仅考虑 R^+ 中的两个 L-R 模糊数相乘的情况。一般说来（这是很容易证明的）两个 L-R 模糊数相乘的结果不再是一个 L-R 模糊数；这对除法运算、取小运算和取大运算来说也是正确的。

·与一个普通数的乘法运算

一个 L-R 模糊数与一个普通数相乘所得的结果可表示如下：

如果

$$A=(m_A,u_A,v_A)$$

那么

$$k\cdot A=(km_A,ku_A,kv_A)\quad k>0$$
$$k\cdot A=(km_A,-ku_A,-kv_A)\quad k<0$$

2.8 三角模糊数

三角模糊数是一类特殊的半对称 L-R 模糊数，如图 2.25 所示，其中，$A=(a_1,a_2,a_3)$。

令$\forall\ x,a_1,a_2,a_3\in R$：

$$\mu_A(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant a_1\\(x-a_1)/(a_2-a_1) & a_1\leqslant x\leqslant a_2\\(a_3-x)/(a_3-a_2) & a_2\leqslant x\leqslant a_3\\0 & a_3\leqslant x\end{cases}$$

一个三角模糊数可用如下的一个三元组(不要与 L-R 模糊数的定义中所采用的三元组混淆)来表示：

$$A=(a_1,a_2,a_3)$$

在 α 级其置信区间为：

$$\begin{aligned}A_\alpha&=[a_1(\alpha),a_3(\alpha)]\\&=[a_1+\alpha(a_2-a_1),\\&\quad a_3-\alpha(a_3-a_2)]\end{aligned} \tag{2.82}$$

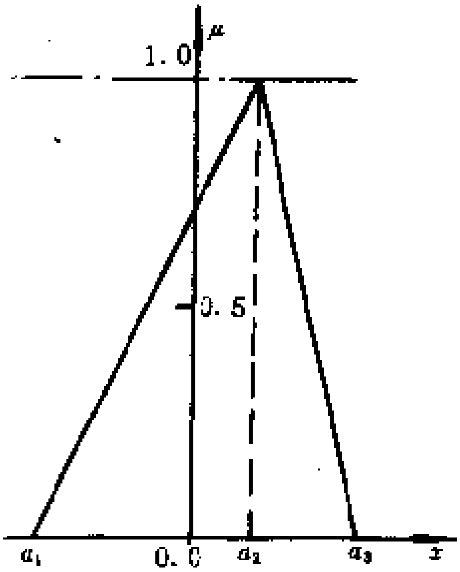


图 2.25 一个三角模糊数

由于三角模糊数就是 L-R 模糊数，因而它与 L-R 模糊数具有相同的性质，即两个三角模糊数相加后仍然得到一个三角模糊数，这可见如下的定理。

定理 2.5 如果 A 和 B 是两个三角模糊数，那么 $A(+)B$ 也是一个三角模糊数。

证明：采用(2.82)式的置信区间表示法可有

$$A_\alpha=[a_1+\alpha(a_2-a_1),a_3-\alpha(a_3-a_2)]$$
$$B_\alpha=[b_1+\alpha(b_2-b_1),b_3-\alpha(b_3-b_2)]$$

那么

$$\begin{aligned}A_\alpha(+)B_\alpha=[&a_1+b_1+\alpha(a_2+b_2-a_1-b_1),\\&a_3+b_3-\alpha(a_3-a_2+b_3-b_2)]\end{aligned}$$

和

$$\forall\ x,a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3\in R,a_1\leqslant a_2\leqslant a_3,b_1\leqslant b_2\leqslant b_3:$$

$$\mu_{A(+)B}(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant a_1 + b_1 \\ \dfrac{x-(a_1+b_1)}{a_2+b_2-a_1-b_1} & a_1+b_1 \leqslant x \leqslant a_2+b_2 \\ 1 & x = a_2+b_2 \\ \dfrac{a_3+b_3-x}{a_3+b_3-a_2-b_2} & a_2+b_2 \leqslant x \leqslant a_3+b_3 \\ 0 & a_3+b_3 \leqslant x \end{cases}$$

因此,对求和运算我们可以写:

$$(a_1,a_2,a_3)(+)(b_1,b_2,b_3) = (a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$$

·三角模糊数的像

对于 $A=(a_1,a_2,a_3)$,其像可写成如下形式:

$$A^- = (-a_3,-a_2,-a_1)$$

对于 α 级则有:

$$A_\alpha^- = [-a_3+\alpha(a_3-a_2),-a_1-\alpha(a_2-a_1)]$$

·三角模糊数的减法运算

三角模糊数的减法运算可看作是如下的加法运算:

$$\begin{aligned} A(-)B = A(+)B^- &= (a_1,a_2,a_3)(+)(-b_3,-b_2,-b_1) \\ &= (a_1-b_3,a_2-b_2,a_3-b_1) \end{aligned}$$

对于 α 级则有

$$\begin{aligned} A_\alpha(-)B_\alpha &= A_\alpha(+)B_\alpha^- \\ &= (a_1-b_3+\alpha(a_2-b_2-a_1+b_3), \\ &\quad a_3-b_1-\alpha(a_3-b_1-a_2+b_2)] \end{aligned}$$

以及

$$\forall\ x,a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3 \in R, a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3, b_1 \leqslant b_2 \leqslant b_3;$$

$$\mu_{A(-)B}(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant(a_1-b_3)\\ \dfrac{x-(a_1-b_3)}{a_2-b_2-(a_1-b_3)} & (a_1-b_3)\leqslant x\leqslant(a_2-b_2)\\ 1 & x=(a_2-b_2)\\ \dfrac{a_3-b_1-x}{a_3-b_1-(a_2-b_2)} & (a_2-b_2)\leqslant x\leqslant(a_3-b_1)\\ 0 & (a_3-b_1)\leqslant x\end{cases}$$

因此，如果 A 和 B 是三角模糊数，那么 A^-，B^-，$A(-)B$ 也是三角模糊数；但是对于 $A(\cdot)B$，A^{-1}，B^{-1}，$A(:)B$，$A(\wedge)B$ 和 $A(\vee)B$，上述结论则是不正确的。

下面我们讨论与三角模糊数和一个普通数相乘有关的定理。

定理 2.6 如果 A 是一个三角模糊数，则 $k\cdot A(k\in R)$ 也是一个三角模糊数，这里

$\forall\ x\in R$：

$$\mu_{k\cdot A}(x)=\mu_A(x/k)\quad k\neq 0$$

证明：假定 $k>0$，由(2.82)可得到

$\forall\ \alpha\in[0,1]$：

$$k\cdot A_\alpha=[ka_1+\alpha(ka_2-ka_1),ka_3-\alpha(ka_3-ka_2)] \tag{2.83}$$

且由(2.83)式又可得到：

$\forall\ x\in R$：

$$\mu_{k\cdot A}(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant ka_1\\ \dfrac{x-ka_1}{ka_2-ka_1} & ka_1\leqslant x\leqslant ka_2\\ 1 & x=ka_2\\ \dfrac{ka_3-x}{ka_3-ka_2} & ka_2\leqslant x\leqslant ka_3\\ 0 & ka_3\leqslant x\end{cases}$$

上式也可写成另一种形式：

$\forall x \in R$:

$$\mu_{k\cdot A}(x)=\begin{cases}0 & (x/k)\leqslant a_1\\ \dfrac{x/k-a_1}{a_2-a_1} & a_1\leqslant (x/k)\leqslant a_2\\ 1 & (x/k)=a_2\\ \dfrac{a_3-x/k}{a_3-a_2} & a_2\leqslant (x/k)\leqslant a_3\\ 0 & a_3\leqslant (x/k)\end{cases}$$

如果 $k<0$,证明是类似的。如果 $k=0$,那么 $k\cdot A=(0,0,0)$,这就是普通数 0,它是一个特殊的三角模糊数。

这里我们将上面的讨论小结如下:

$$k\cdot A=\begin{cases}(ka_1,ka_2,ka_3) & k>0\\ (ka_3,ka_2,ka_1) & k<0\\ (0,0,0) & k=0\end{cases}$$

· 三角模糊数的左移和右移

采用下面的运算可将三角模糊数左移($r<0$)和右移($r>0$)

$\forall x\in R$:

$$\mu_{A(+)r}(x)=\mu_A(x-r)$$

或者

$$\begin{aligned}A(+)r&=(a_1,a_2,a_3)(+)(r,r,r)\\&=(a_1+r,a_2+r,a_3+r)\end{aligned}$$

上式也可以写成

$$\begin{aligned}A_\alpha(+)r&=[a_1+\alpha(a_2-a_1),a_3-\alpha(a_3-a_2)](+)[r,r]\\&=[a_1+r+\alpha(a_2-a_1),a_3+r-\alpha(a_3-a_2)]\end{aligned}$$

· 梯形模糊数

图 2.26 给出了一个梯形模糊数。实际上梯形模糊数是一类特殊的 L-R 模糊数,而三角模糊数又是梯形模糊数的一种特殊情况,这样可用 4 点来描述梯形模糊数:

$$A=(a_1,a_2,a_3,a_4)$$

梯形模糊数的加法运算是很简单的，例如

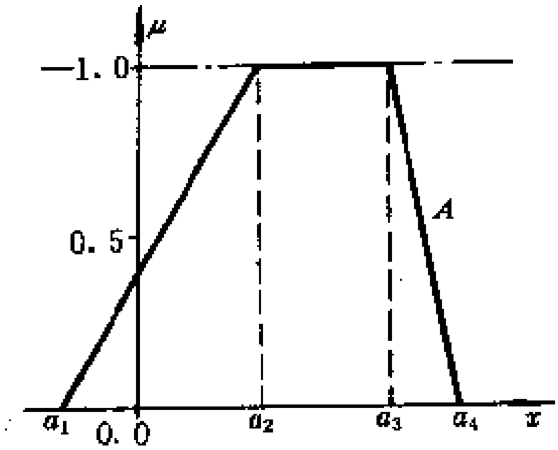


图 2.26　一个梯形模糊数

$$A(+)B=(a_1,a_2,a_3,a_4)(+)(b_1,b_2,b_3,b_4)$$
$$=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3,a_4+b_4)$$

梯形模糊数的像为：

$$A^-=(-a_4,-a_3,-a_2,-a_1)$$

其减法运算则为

$$A(-)B=(a_1-b_4,a_2-b_3,a_3-b_2,a_4-b_1)$$

除了某些特殊情况外，梯形模糊数的(•)，(:)，(∧)，(∨)运算所得到的结果都不再是一个梯形模糊数。

2.9　两个模糊数之间的距离

首先我们考虑 R 中的如下三个置信区间：

$$A=[a_1,a_2] \tag{2.84}$$

$$B=[b_1,b_2] \tag{2.85}$$

$$C=[c_1,c_2] \tag{2.86}$$

目前，有多种方法可用来度量两个模糊数之间的距离：

1. 线性距离

$$d(A,B) = \sum_{i=1}^{n} |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| \tag{2.87}$$

上式称为绝对线性距离，也叫做绝对海明距离。而下式我们称为相对线性(海明)距离：

$$\delta(A,B) = \frac{1}{n} d(A,B) \tag{2.88}$$

如果论域是全体 R，则

$$d(A,B) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\mu_A(x) - \mu_B(x)| dx \tag{2.89}$$

若论域是$[\alpha,\beta]$上的 R(实数集)，则

$$d(A,B) = \int_{\alpha}^{\beta} |\mu_A(x) - \mu_B(x)| dx \tag{2.90}$$

$$\delta(A,B) = \frac{1}{\beta - \alpha}\int_{\alpha}^{\beta} |\mu_A(x) - \mu_B(x)| dx \tag{2.91}$$

2. 加权线性距离

$$d_\omega(A,B) = \sum_{i=1}^{n} \omega(x_i) |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| \tag{2.92}$$

$$\delta_\omega(A,B) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \omega(x_i) |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| \tag{2.93}$$

其中 $\omega(x_i)(i=1,2,\cdots,n)$是分配给 x_i 的权，它们必须满足归一条件，即

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \omega(x_i) = 1 \tag{2.94}$$

当 $\mu_A(x),\mu_B(x)$是连续的，且 $x\in[\alpha,\beta]$，则

$$d_\omega(A,B) = \int_{\alpha}^{\beta} \omega(x) |\mu_A(x) - \mu_B(x)| dx \tag{2.95}$$

$$\delta_\omega(A,B) = \frac{1}{\beta - \alpha}\int_{\alpha}^{\beta} \omega(x) |\mu_A(x) - \mu_B(x)| dx \tag{2.96}$$

此时权函数 $\omega(x)$在区间$[\alpha,\beta]$上也应是连续的。类似地，它们也应满足归一条件：

$$\frac{1}{\beta - \alpha}\int_{\alpha}^{\beta} \omega(x) dx = 1$$

3. 欧氏距离

欧氏距离定义为：

$$e(A,B)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}[\mu_A(x_i)-\mu_B(x_i)]^2} \tag{2.97}$$

而将相对欧氏距离定义为：

$$\varepsilon(A,B)=\frac{1}{\sqrt{n}}e(A,B) \tag{2.98}$$

4. 闵可夫斯基距离

闵可夫斯基距离定义为：

$$m(A,B)=\left[\sum_{i=1}^{n}|\mu_A(x_i)-\mu_B(x_i)|^q\right]^{1/q} \tag{2.99}$$

由上式可以看出：

a. 当 $q=1$ 时，闵可夫斯基距离就变成为线性距离；

b. 当 $q=2$ 时，则闵可夫斯基距离就变为欧氏距离；

c. 当 $q\to\infty$时，则称此时的闵可夫斯基距离为切比雪夫距离。

由这里可以看出：线性距离、欧氏距离和切比雪夫距离都是闵可夫斯基距离的特殊情况。

5. 其他形式的距离

在离散的情况下有：

$$\mathrm{d}(A,B)=\sum_{i=1}^{n}\frac{|\mu_A(x_i)-\mu_B(x_i)|}{|\mu_A(x_i)+\mu_B(x_i)|} \tag{2.100}$$

在连续的情况下，上式将变成如下形式：

$$\mathrm{d}(A,B)=\int_{x\in X}\frac{|\mu_A(x_i)-\mu_B(x_i)|}{|\mu_A(x_i)+\mu_B(x_i)|}\mathrm{d}x \tag{2.101}$$

任何一种距离概念都必须满足如下的条件：一个数值函数 $\mathrm{d}(X,Y)\in R,(X,Y)\in E\times E$ 是一个距离，当且仅当

$\forall\ X,Y,Z\in E$：

$$\mathrm{d}(X,Y)\geqslant 0 \tag{2.102}$$

$$(X=Y)\Rightarrow(\mathrm{d}(X,Y)=0) \tag{2.103}$$

$$\mathrm{d}(X,Y)=\mathrm{d}(Y,X) \tag{2.104}$$

$$d(X,Z) \leqslant d(X,Y) * d(Y,Z) \tag{2.105}$$

其中“ * ”是与距离的概念相关的算子。

对两个模糊数左边的距离(如图 2.27 所示)我们用下式表示:

$$\Delta_l(A,B) = |a_1,b_1|$$

右边的距离则表示为:

$$\Delta_r(A,B) = |a_2,b_2|$$

现在我们用式(2.102～2.105)所示的条件来检验上述的距离概念,令$\forall\ A,B,C \subset R$:

1. $\Delta_l(A,B) \geqslant 0$ 因为$|a_1-b_1| \geqslant 0$
2. $(A=B) \Rightarrow (\Delta_l(A,B)=0)$ 因为$(a_1=b_1) \Rightarrow (|a_1-b_1|=0)$
3. $\Delta_l(A,B) \Rightarrow \Delta_l(B,A)$ 因为$|a_1-b_1|=|b_1-a_1|$
4. $\Delta_l(A,C) \leqslant \Delta_l(A,B)+\Delta_l(B,C)$ 因为$|a_1-c_1| \leqslant |a_1-b_1| + |b_1-c_1|$

Δ_r 的证明也可按上述的方法类似地实现。

将上述两个距离概念可统一地表示成如下的距离:

$$\Delta(A,B) = \Delta_l(A,B) + \Delta_r(A,B)$$

很容易证明:上述加法运算也是满足条件(2.102～2.105)式的。

现在假定类似于(2.84)～(2.86)式的任何区间都是$[\beta_1,\beta_2] \subset R$ 的一个子集,我们将

$$\delta(A,B) = \{1/[2(\beta_2 - \beta_1)]\} d(A,B)$$

定义为正规距离,上式分母中的 2 允许我们得到:

$$0 \leqslant \delta(A,B) \leqslant 1 \tag{2.106}$$

假定有如图 2.27 所示的 R 中的两个模糊数 A 和 B,对于每一级,可写出:

$$\delta(A_\alpha,B_\alpha) = \{1/[2(\beta_2 - \beta_1)]\} d(A_\alpha,B_\alpha)$$

这里 β_1 和 β_2 可是任何简明的值,以便包含所有的 $A_\alpha=0$ 和 $B_\alpha=0$。

如果我们要从 $\alpha=0$ 到 $\alpha=1$ 进行积分运算,可通过对距离求

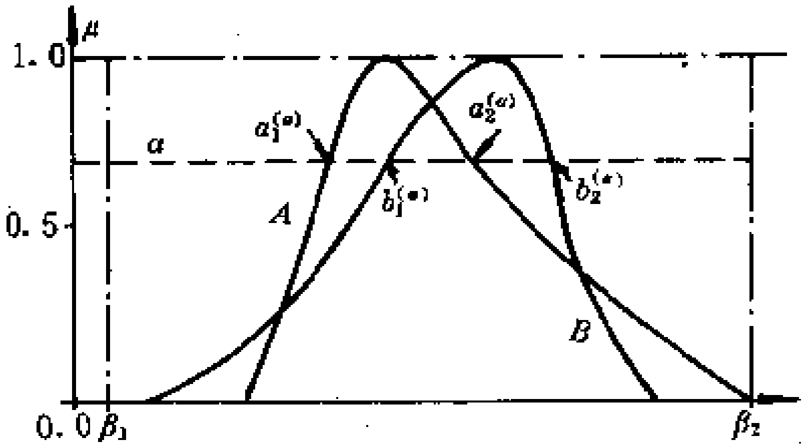


图 2.27 距离概念和两个模糊数之间不相似的程度

和而得到满足(2.106)式的距离：

$$\delta(A,B)=\int_{\alpha=0}^{1}\delta(A_\alpha,B_\alpha)\mathrm{d}\alpha$$

$$=\frac{1}{2}(\beta_2-\beta_1)\int_{\alpha=0}^{1}\Delta(A_\alpha,B_\alpha)\mathrm{d}\alpha$$

$$=\frac{1}{2}(\beta_2-\beta_1)\int_{\alpha=0}^{1}(|a_1^{(\alpha)}-b_1^{(\alpha)}|+|a_2^{(\alpha)}-b_2^{(\alpha)}|)\mathrm{d}\alpha \tag{2.107}$$

(2.107)式给出了两个模糊数之间最一般的距离计算方法。

例 18 令 R 中的两个三角模糊数(如图 2.28(a))是

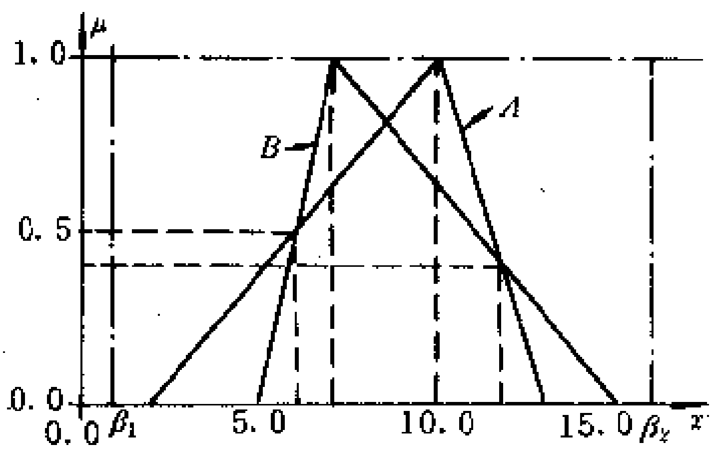
$\forall\ x\in R$：

$$\mu_A(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant 2\\ \dfrac{x}{8}-\dfrac{2}{8} & 2\leqslant x\leqslant 10\\ -\dfrac{x}{3}+\dfrac{13}{3} & 10\leqslant x\leqslant 13\\ 0 & 13\leqslant x\end{cases}$$

或者 $\forall\ \alpha\in[0,1]$：

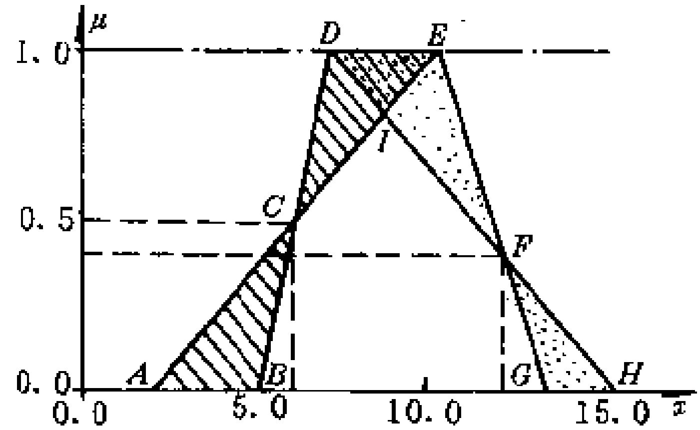
$$A_\alpha=[2+8\alpha,13-3\alpha]$$

和



(a)

图 2.28(a) 两个三角模糊数



(b)

图 2.28(b) 采用区域方法获得的距离 $\delta(A,B)$

$$\mu_B(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant 5\\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{5}{2} & 5\leqslant x\leqslant 7\\ -\dfrac{x}{8}+\dfrac{15}{8} & 7\leqslant x\leqslant 15\\ 0 & 15\leqslant x\end{cases}$$

或者

$$B_\alpha=[5+2\alpha,15-8\alpha]$$

注意：A 和 B 在如下两点相交：

$$2+8\alpha=5+2\alpha \quad \text{给出} \quad \alpha=0.5 \quad \text{和} \quad x=6$$

和

$$13-3\alpha=15-8\alpha \quad \text{给出} \quad \alpha=0.4 \quad \text{和} \quad x=11.8$$

这样即可进一步得到：

$$a_1^{(\alpha)}-b_1^{(\alpha)}=2+8\alpha-5-2\alpha=-3+6\alpha$$

和 $$a_2^{(\alpha)}-b_2^{(\alpha)}=13-3\alpha-15+8\alpha=-2+5\alpha$$

以及

$$\int_{\alpha=0}^{0.5}(-3+6\alpha)\mathrm{d}\alpha+\int_{\alpha=0.5}^{1}(6\alpha-3)\mathrm{d}\alpha$$
$$+\int_{\alpha=0}^{0.4}(-2+5\alpha)\mathrm{d}\alpha+\int_{\alpha=0.4}^{1}(5\alpha-2)\mathrm{d}\alpha=2.8$$

如果我们指定 $\beta_1=2$ 和 $\beta_2=16$，即可得到

$$\delta(A,B)=[1/2(16-2)][2.8]=0.1$$

令人感兴趣的是通过增加三角形的面积可以快速地计算出距离，如图 2.28(b)所示：

$$ABC\text{面积}+CDE\text{面积}+DEF\text{面积}+FGH\text{面积}$$
$$=(3)\cdot(0.5)/2+(3)\cdot(0.5)/2$$
$$+(3)\cdot(0.6)/2+(2)\cdot(0.4)/2$$
$$=2.8$$

从图 2.28(b)可以看出：三角形 DEI 计算了两次，一次在 Δ_l 中，另一次在 Δ_r 中又计算过，这种重复仅在下述情况下才能不出现：

$$[a_1^{(1)},a_2^{(1)}]=[b_1^{(1)},b_2^{(1)}]$$

通过分析可不难看出，在下述情况下：

$\forall\ \alpha\in[0,1]$：

$$A_\alpha=[\beta_1,\beta_1] \qquad B_\alpha=[\beta_2,\beta_2]$$

可得到： $$\delta(A,B)=1$$

上述情况是一种极端的情况。须注意的一点是：如果我们要比较两个模糊数，只要求出它们之间的 δ 值即可。

在例 2.19 中我们研究了一组模糊数之间的相似性。

例 19 让我们计算距离 $\delta(X,Y)$，这里 $X,Y\in\{A,B,C,D,E,F\}$，如图 2.29 所示。我们将它们之间不相似的关系列在表 2.9 中。

为了逐级地进行讨论，我们将每级分解成具有最大相似的子关系，如表 2.10～2.16 所示。

通过检查表 2.10～2.16 可看出：当 $\delta\leqslant 0.06$ 时，A 和 F 是很相似的，D 和 E 以及 E 和 F 之间也是很相似的，然而须注意的是上述结果并不表明 D 和 F 以及 A 和 E 之间也相似，这表明相似性是不传递的。

表 2.9　X 和 Y 不相似的关系

$\delta(x,y)$	A	B	C	D	E	F
A	0	0.09	0.24	0.08	0.13	0.06
B	0.09	0	0.19	0.08	0.08	0.08
C	0.24	0.19	0	0.17	0.17	0.19
D	0.08	0.08	0.17	0	0.06	0.08
E	0.13	0.08	0.17	0.06	0	0.06
F	0.06	0.08	0.19	0.08	0.06	0

表 2.10　$\delta\leqslant 0.06$ 的情况

	A	B	C	D	E	F
A	1					1
B		1				
C			1			
D				1	1	
E				1	1	1
F	1				1	1

	A	F
A	1	1
F	1	1

	B
B	1

	C
C	1

	D	E
D	1	1
E	1	1

	E	F
E	1	1
F	1	1

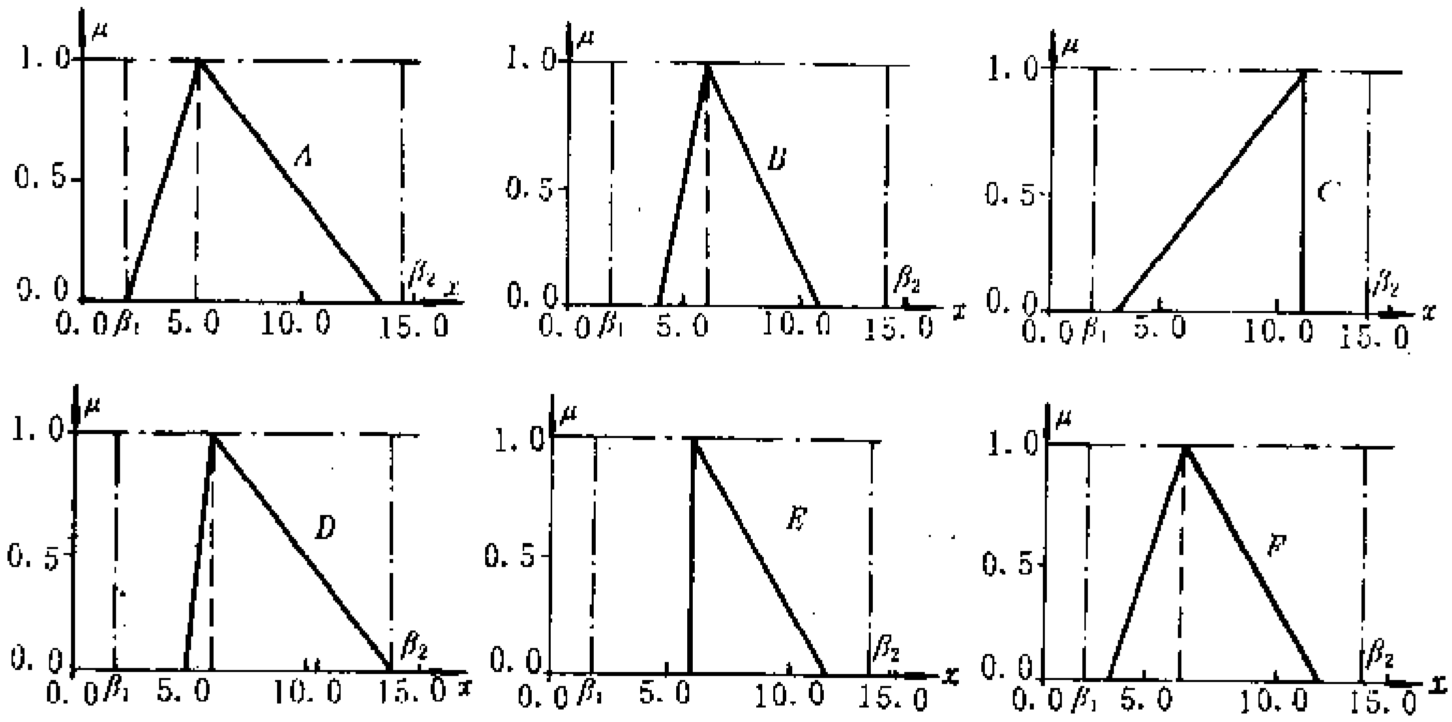


图 2.29 三角模糊数(A,B,C,D,E,F)

表 2.11 $\delta \leqslant 0.08$ 的情况

	A	B	C	D	E	F
A	1			1		1
B		1		1	1	1
C			1			
D	1	1		1	1	1
E		1		1	1	1
F	1	1		1	1	1

	A	D	F
A	1	1	1
D	1	1	1
F	1	1	1

	B	D	E	F
B	1	1	1	1
D	1	1	1	1
E	1	1	1	1
F	1	1	1	1

	C
C	1

表 2.12 $\delta \leqslant 0.09$ 的情况

	A	B	C	D	E	F
A	1	1		1		1
B	1	1		1	1	1
C			1			
D	1	1		1	1	1
E		1		1	1	1
F	1	1		1	1	1

	A	B	D	E
A	1	1	1	1
B	1	1	1	1
D	1	1	1	1
E	1	1	1	1

	B	D	E	F
B	1	1	1	1
D	1	1	1	1
E	1	1	1	1
F	1	1	1	1

	C
C	1

表 2.13　$\delta \leqslant 0.13$ 的情况

	A	B	C	D	E	F
A	1	1		1	1	1
B	1	1		1	1	1
C			1			
D	1	1		1	1	1
E	1	1		1	1	1
F	1	1		1	1	1

	A	B	D	E	F
A	1	1	1	1	1
B	1	1	1	1	1
D	1	1	1	1	1
E	1	1	1	1	1
F	1	1	1	1	1

	C
C	1

表 2.14　$\delta \leqslant 0.18$ 的情况

	A	B	C	D	E	F
A	1	1		1	1	1
B	1	1		1	1	1
C			1	1	1	
D	1	1	1	1	1	1
E	1	1	1	1	1	1
F	1	1		1	1	1

	A	B	D	E	F
A	1	1	1	1	1
B	1	1	1	1	1
D	1	1	1	1	1
E	1	1	1	1	1
F	1	1	1	1	1

	C	D	E
A	1	1	1
B	1	1	1
D	1	1	1

表 2.15　$\delta \leqslant 0.19$ 的情况

	A	B	C	D	E	F
A	1	1		1	1	1
B	1	1	1	1	1	1
C		1	1	1	1	1
D	1	1	1	1	1	1
E	1	1	1	1	1	1
F	1	1	1	1	1	1

	A	B	D	E	F
A	1	1	1	1	1
B	1	1	1	1	1
D	1	1	1	1	1
E	1	1	1	1	1
F	1	1	1	1	1

	B	C	D	E	F
B	1	1	1	1	1
C	1	1	1	1	1
D	1	1	1	1	1
E	1	1	1	1	1
F	1	1	1	1	1

表 2.16　$\delta \leqslant 0.24$ 的情况

	A	B	C	D	E	F
A	1	1	1	1	1	1
B	1	1	1	1	1	1
C	1	1	1	1	1	1
D	1	1	1	1	1	1
E	1	1	1	1	1	1
F	1	1	1	1	1	1

在模糊数中，距离的概念与普通数的差的概念是相同的，须注意的是模糊数并不是线性排序的。

第三章　T-算子与模糊推理

本章在介绍T-范数和T-余范数的基本理论的基础上，着重讨论了一些典型的T-算子的数学特性以及它们在模糊推理中的应用，为模糊专家系统的推理提供了一种更通用和更灵活的模糊推理方法。

3.1　T-算子的定义

T-范数和T-余范数最初是在概率度量空间的研究中被提出来的，采用T-范数和T-余范数就可将概率度量空间中的三角不等式进行扩充；后来，Höhle 和 Alsina 等人将T-范数和T-余范数引入到模糊集理论中，并提出可用T-范数和T-余范数作为模糊集的“交”和“并”；此后，许多学者提出了多种类型的T-算子，甚至给出了生成这些算子的变种的一些方法。

在 Zadeh 提出的合成推理规则中，他所采用的T-算子是“max”和“min”。然而一些理论和实验研究结果表明：在一些情况下其他类型的T-算子可以比 max 和 min 工作得更好，得出的推理结果更符合我们的直觉要求，例如，积算子有时候就比 min 算子更好。另一方面，对给定的模糊推理问题，选择T-算子时我们还要考虑它们的性质，模型的精确要求，计算机是否容易实现等方面的问题，由于这些理由，在模糊专家系统和其他的模糊系统中，我们更感兴趣的是另一些T-算子，而不仅限于 max 和 min 算子。

T-范数，T-余范数和否定函数分别用来计算模糊集的交，并和补的隶属值。许多学者对T-算子给出了不同的定义，我们这里采用最一般和通用的T-算子定义。

定义 1 令 $T:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$，$T$ 是一个 T-范数，当且仅当对所有 $x,y,z\in[0,1]$，有

(1.1) $T(x,y)=T(y,x)$ （交换性）

(1.2) $T(x,y)\leqslant T(x,z)\quad y\leqslant z$ （单调性）

(1.3) $T(x,T(y,z))=T(T(x,y),z)$ （结合性）

(1.4) $T(x,1)=x$

一个 T-范数是阿基米德的，当且仅当

(1.5) $T(x,y)$ 是连续的

(1.6) $T(x,x)<x\ \forall\ x\in(0,1)$

一个阿基米德 T-范数是严格的，当且仅当

(1.7) $T(x',y')<T(x,y)\quad x'<x,y'<y$

$\forall\ x',y',x,y\in(0,1)$

定义 2 令 $T^*:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$，$T^*$ 是一个 T-余范数，当且仅当对所有的 $x,y,z\in[0,1]$，有

(2.1) $T^*(x,y)=T^*(y,x)$ （交换性）

(2.2) $T^*(x,y)\leqslant T^*(x,z)\quad y\leqslant z$ （单调性）

(2.3) $T^*(x,T^*(y,z))=T^*(T^*(x,y),z)$ （结合性）

(2.4) $T^*(x,0)=x$

一个 T-余范数是阿基米德的，当且仅当

(2.5) T^* 是连续的

(2.6) $T^*(x,x)>x,\forall\ x\in(0,1)$

一个阿基米德 T-余范数是严格的，当且仅当

(2.7) $T^*(x',y')<T^*(x,y)\quad x'<x\ y'<y$

$\forall\ x',y',x,y\in(0,1)$

注意，对一个 T-范数 T 和 T-余范数 T^*

$T(0,0)=0\qquad T(1,1)=1$

$T^*(0,0)=0\qquad T^*(1,1)=1$

定义 3 令 $N:[0,1]\to[0,1]$，N 是一个否定函数，当且仅当

(3.1) $N(0)=1\quad N(1)=0$

(3.2) $N(x)\leqslant N(y)$ $x\geqslant y$ （单调性）

一个否定函数是严格的，当且仅当

(3.3) $N(x)$是连续的

(3.4) $N(x)<N(y)$ $x>y$ $\forall\, x,y\in[0,1]$

一个严格的否定函数是对合的，当且仅当

(3.5) $N(N(x))=x$ $\forall\, x\in[0,1]$

3.2 一些典型的 T-算子

本节我们将介绍常用的 11 种 T-算子集以及它们的一些相应性质，全部列于表 3.1 中。

1. Zadeh 的 T-算子

Zadeh 提出的三个 T-算子是使用得很广泛的三个 T-算子，它们分别定义为

$$T_1(x,y)=\min(x,y) \tag{3.1(a)}$$

$$T_1^*(x,y)=\max(x,y) \tag{3.1(b)}$$

$$N_1(x)=1-x \tag{3.1(c)}$$

2. Goguen 和 Bandler 等人提出的称为概率算子的 T-算子定义如下：

$$T_2(x,y)=x\cdot y \tag{3.2(a)}$$

$$T_2^*(x,y)=x+y-xy \tag{3.2(b)}$$

$$N_2(x)=1-x \tag{3.2(c)}$$

3. 称为 Lukasiewicz 逻辑的 T-算子定义为

$$T_3(x,y)=\max(x+y-1,0) \tag{3.3(a)}$$

$$T_3^*(x,y)=\min(x+y,1) \tag{3.3(b)}$$

$$N_3(x)=1-x \tag{3.3(c)}$$

这一组 T-算子是由 Giles 等人提出来的。

表 3.1　11 种 T-算子及它们的有关性质

N	$T_N(x,y)$	$T_N^*(x,y)$	$N_N(x)$	说明
1	$\min(x,y)$	$\max(x,y)$	$1-x$	Zadeh
2	$x\cdot y$	$x+y-xy$	$1-x$	Goguen, Bendler
3	$\max(x+y-1,0)$	$\min(x+y,1)$	$1-x$	Giles
4	$\dfrac{xy}{x+y-xy}$	$\dfrac{x+y-2xy}{1-xy}$	$1-x$	
5	$\begin{cases} x & \text{if } y=1 \\ y & \text{if } x=1 \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$	$\begin{cases} x & \text{if } y=0 \\ y & \text{if } x=0 \\ 1 & \text{否则} \end{cases}$	$1-x$	Weber
6	$\dfrac{\lambda xy}{1-(1-\lambda)(x+y-xy)}$	$\dfrac{\lambda(x+y)+xy(1-2\lambda)}{\lambda+xy(1-\lambda)}$	$1-x$	Hamacher $\lambda\to0,\to T_5$ 和 T_5^* $\lambda=1,\to T_2$ 和 T_2^* $\lambda\to\infty,\to T_4$ 和 T_4^*
7	$\max(1-((1-x)^p+(1-y)^p)^{1/p},0)$	$\min((x^p+y^p)^{1/p},1)$	$1-x$	Yager $p=1,\to T_3$ 和 T_3^* $p\to\infty,\to T_1$ 和 T_1^*
8	$\dfrac{1}{1+((\frac{1}{x}-1)^\lambda+(\frac{1}{y}-1)^\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}}$	$\dfrac{1}{1+((\frac{1}{x}-1)^{-\lambda}+(\frac{1}{y}-1)^{-\lambda})^{\frac{-1}{\lambda}}}$	$1-x$	Dombi $\lambda\to0,\to T_5$ 和 T_5^* $\lambda=1,\to T_4$ 和 T_4^* $\lambda\to\infty,\to T_1$ 和 T_1^*
9	$\dfrac{xy}{\max(x,y,\lambda)}$	$1-\dfrac{(1-x)(1-y)}{\max(1-x,1-y,\lambda)}$	$1-x$	Dubois 和 Prade $\lambda=0,\to T_1$ 和 T_1^* $\lambda=1,\to T_2$ 和 T_2^*
10	$\max\left(\dfrac{x+y-1+\lambda xy}{1+\lambda},0\right)$	$\min(x+y+\lambda xy,1)$	$\dfrac{1-x}{1+\lambda x}$	Weber $\lambda\to-1,\to T_5$ 和 T_5^* $\lambda=0,\to T_3$ 和 T_3^* $\lambda\to\infty,\to T_2$ 和 T_2^*
11	$\max((1+\lambda)(x+y-1)-\lambda xy,0)$	$\min(x+y+\lambda xy,1)$	$1-x$	Yu Yandong $\lambda\to-1,\to T_2$ 和 T_2^* $\lambda=0,\to T_3$ 和 T_3^* $\lambda\to\infty,\to T_5$ 和 T_5^*

4. 另一类 T-算子定义为：

$$T_4(x,y)=\frac{xy}{x+y-xy} \qquad (3.4(a))$$

$$T_4^*(x,y)=\frac{x+y-2xy}{1-xy} \qquad (3.4(b))$$

$$N_4(x)=1-x \qquad (3.4(c))$$

5. Weber 提出的一组 T-算子定义为：

$$T_5(x,y)=\begin{cases} x & y=1 \\ y & x=1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \qquad (3.5(a))$$

$$T_5^*(x,y)=\begin{cases} x & y=0 \\ y & x=0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \qquad (3.5(b))$$

$$N_5(x)=1-x \qquad (3.5(c))$$

这组算子是不连续的。

6. Hamacher 提出的一组 T-算子定义为

$$T_6(x,y)=\frac{\lambda xy}{1-(1-\lambda)(x+y-xy)} \qquad (3.6(a))$$

$$T_6^*(x,y)=\frac{\lambda(x+y)+xy(1-2\lambda)}{\lambda+xy(1-\lambda)} \qquad (3.6(b))$$

$$N_6(x)=1-x \qquad (3.6(c))$$

注意，对 T_6 和 T_6^* 有如下的限制：

(i)当 $\lambda\to 0$ 时，有 $T_5\to T_5, T_6^*\to T_5^*$

(ii)当 $\lambda=1$ 时，有 $T_6=T_2, T_6^*=T_2^*$

(iii)当 $\lambda\to\infty$时，有 $T_6=T_4$，以及 $T_6^*\to T_4^*$

7. Yager 提出的一组 T-算子定义为

$$T_7(x,y)=\max(1-((1-x)^p+(1-y)^p)^{1/p},0) \qquad (3.7(a))$$

$$T_7^*(x,y)=\min((x^p+y^p)^{1/p},1) \qquad (3.7(b))$$

$$N_7(x)=1-x \qquad (3.7(c))$$

这里需注意的是

(i) 当 $p=1$ 时，$T_6=T_3, T_6^*=T_3^*$

(ii) 当 $p\to\infty$时，$T_6\to T_1$，以及 $T_6^*\to T_1^*$

8. Dombi 提出的 T-算子定义为：

$$T_8(x,y)=\frac{1}{1+\left(\left(\frac{1}{x}-1\right)^{\lambda}+\left(\frac{1}{y}-1\right)^{\lambda}\right)^{1/\lambda}} \tag{3.8(a)}$$

$$T_8^*(x,y)=\frac{1}{1+\left(\left(\frac{1}{x}-1\right)^{-\lambda}+\left(\frac{1}{y}-1\right)^{-\lambda}\right)^{-1/\lambda}} \tag{3.8(b)}$$

$$N_8(x)=1-x \tag{3.8(c)}$$

注意：

(i) 当 $\lambda\to 0$ 时，$T_8\to T_5, T_8^*\to T_5^*$

(ii) 当 $\lambda=1$ 时，$T_8=T_4, T_8^*=T_4^*$

(iii) 当 $\lambda\to\infty$，$T_8\to T_1$，以及 $T_8^*\to T_1^*$

9. Dubois 和 Prade 也给出了如下的一组 T-算子定义：

$$T_9(x,y)=\frac{xy}{\max(x,y,\lambda)} \tag{3.9(a)}$$

$$T_9^*(x,y)=1-\frac{(1-x)(1-y)}{\max(1-x,1-y,\lambda)} \tag{3.9(b)}$$

$$N_9(x)=1-x \tag{3.9(c)}$$

需注意的是

(i) 对 $\lambda=0$，有 $T_9=T_1, T_9^*=T_1^*$

(ii) 对 $\lambda=1$，有 $T_9=T_2, T_9^*=T_2^*$

10. Weber 还提出了另一组 T-算子，它们定义为：

$$T_{10}(x,y)=\max\left(\frac{x+y-1+\lambda xy}{1-\lambda},0\right) \tag{3.10(a)}$$

$$T_{10}^*(x,y)=\min(x+y+\lambda xy,1) \tag{3.10(b)}$$

$$N_{10}(x)=\frac{1-x}{1+\lambda x} \tag{3.10(c)}$$

对这组算子需注意的是

(i) 对 $\lambda=0$，有 $T_{10}=T_3, T_{10}^*=T_3^*$

(ii) 对 $\lambda\to-1$ 时，有 $T_{10}\to T_5, T_{10}^*=T_2^*$

(iii) 当 $\lambda\to\infty$ 时，有 $T_{10}\to T_2$，以及 $T_{10}^*=T_5^*$

11. Yu Yandong 提出的 T-算子定义为：

$$T_{11}(x,y)=\max((1+\lambda)(x+y-1)-\lambda xy,0) \tag{3.11(a)}$$

$$T_{11}^*(x,y)=\min(x+y+\lambda xy,1) \tag{3.11(b)}$$

$$N_{11}(x)=1-x \tag{3.11(c)}$$

这里要注意的是

(i) 当 $\lambda\to-1$ 时，有 $T_{11}\to T_2, T_{11}^*\to T_2^*$

(ii) 当 $\lambda=0$ 时，有 $T_{11}=T_3, T_{11}^*=T_3^*$

(iii) 当 $\lambda\to\infty$ 时，有 $T_{11}\to T_5$，以及 $T_{11}^*\to T_5^*$

3.3 T-算子的性质

本节介绍 T-算子的一些重要数学性质。由定义可知，T 和 T^* 具有如下两个重要的性质：

P_1：**交换性**：

$$T(x,y)=T(y,x) \tag{3.12(a)}$$

$$T^*(x,y)=T^*(y,x) \tag{3.12(b)}$$

P_2：**结合性**：

$$T(x,T(y,z))=T(T(x,y),z) \tag{3.13(a)}$$

$$T^*(x,T^*(y,z))=T^*(T^*(x,y),z) \tag{3.13(b)}$$

此外，T-算子还具有如下的性质：

P_3：**分配性**：

$$T(x,T^*(y,z))=T^*(T(x,y),T(x,z)) \tag{3.14(a)}$$

$$T^*(x,T(y,z))=T(T^*(x,y),T^*(x,z)) \tag{3.14(b)}$$

P_4:吸收性:

$$T(T^*(x,y),x) = x \tag{3.15(a)}$$

$$T^*(T(x,y),x) = x \tag{3.15(b)}$$

P_5:幂等性:

$$T(x,x) = x \tag{3.16(a)}$$

$$T^*(x,x) = x \tag{3.16(b)}$$

为简洁起见,本节省略了所有性质的证明。

定理 1

$$\text{分配性} \Rightarrow \text{吸收性} \Rightarrow \text{幂等性} \Rightarrow \begin{cases} T = T_1 \\ T^* = T_1^* \end{cases}。$$

根据定理 1 可看出:所有的 T-范数和 T-余范数都不满足性质 P_3,P_4 和 P_5,除 T_1 和 T_1^* 以外。

排中律可表示为:

$$P_6: T(x,N(x)) = 0 \tag{3.17(a)}$$

$$P_7: T^*(x,N(x)) = 1 \tag{3.17(b)}$$

定理 2 如果 T 和 T^* 满足 P_6 和 P_7,那么它们就不满足 P_3,P_4 和 P_5。

由表 3.2 可看出,仅 (T_3,T_3^*,N_3),(T_5,T_5^*,N_5),(T_{10},T_{10}^*,N_{10}) 和 (T_{11},T_{11}^*,N_{11}) 满足 P_6 和 P_7,因而它们没有性质 P_3,P_4 和 P_5,注意,仅在 $\lambda>0$ 时 (T_{11},T_{11}^*,N_{11}) 才有性质 P_6 和 P_7。

De Morgan 定律可表示为:

$$P_8: N(T(x,y)) = T^*(N(x),N(y)) \tag{3.18(a)}$$

$$P_9: N(T^*(x,y)) = T(N(x),N(y)) \tag{3.18(b)}$$

定理 3 如果 $N(x)$ 是对合的,那么(3.18(a))式和(3.18(b))式是相等的,且下面的等式也是成立的:

$$P_{10}: T(x,y) = N(T^*(N(x),N(y))) \tag{3.19(a)}$$

$$P_{11}: T^*(x,y) = N(T(N(x),N(y))) \tag{3.19(b)}$$

所有的 T-算子均满足 De Morgan 定律。注意,(T_{10},T_{10}^*,N_{10}) 是在满足 $x+y+\lambda xy \geqslant 1$ $(\lambda \neq 0)$ 的条件下才满足 De Morgan 定律的。

表 3.2　T-算子的性质

T, T^*, N	分配性	幂等性	排中性	吸收性	结合性	交换性	De Morgan 定律
T_1, T_1^*, N_1	∘	∘		∘	∘	∘	∘
T_2, T_2^*, N_2					∘	∘	∘
T_3, T_3^*, N_3			∘		∘	∘	∘
T_4, T_4^*, N_4					∘	∘	∘
T_5, T_5^*, N_5			∘		∘	∘	∘
T_6, T_6^*, N_6					∘	∘	∘
T_7, T_7^*, N_7					∘	∘	∘
T_8, T_8^*, N_8					∘	∘	∘
T_9, T_9^*, N_9					∘	∘	∘
T_{10}, T_{10}^*, N_{10}			∘		∘	∘	∘ (3)
T_{11}, T_{11}^*, N_{11}			∘ (2)		∘	∘	∘

(1)仅在 $x+y+\lambda xy \geqslant 1 (\lambda \neq 0)$.

(2)仅在 $\lambda > 0$.

还有一些其他的重要性质可用如下的不等式来描述：

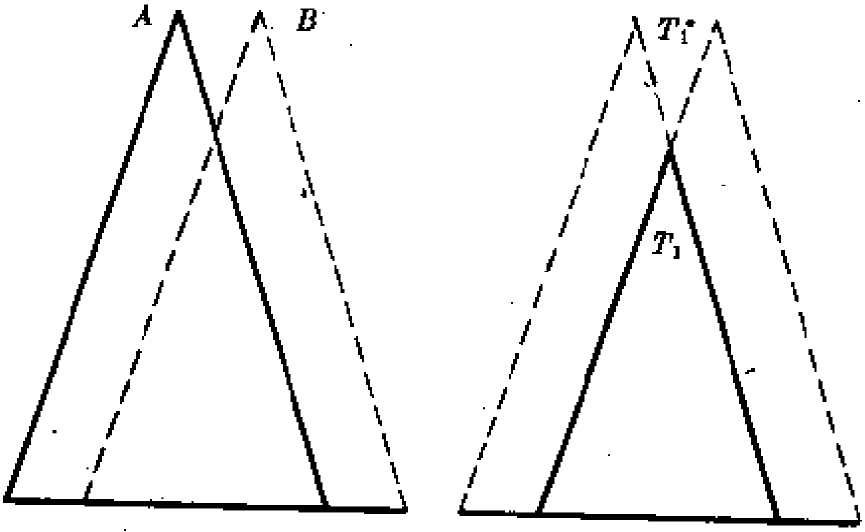
$$P_{12}: T_5(x,y) \leqslant T(x,y) \leqslant T_1(x,y) \quad (3.20(a))$$

$$P_{13}: T_1^*(x,y) \leqslant T^*(x,y) \leqslant T_5^*(x,y) \quad (3.20(b))$$

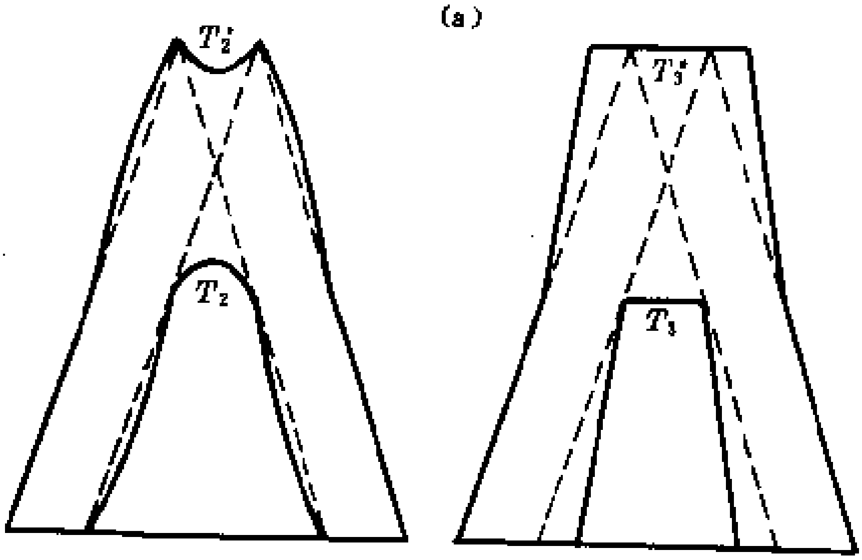
$$P_{14}: T_5(x,y) < T_3(x,y) < T_2(x,y) < T_4(x,y) < T_1(x,y) \quad (3.21(a))$$

$$P_{15}: T_1^*(x,y) < T_4^*(x,y) < T_2^*(x,y) < T_3^*(x,y) < T_5^*(x,y) \quad (3.21(b))$$

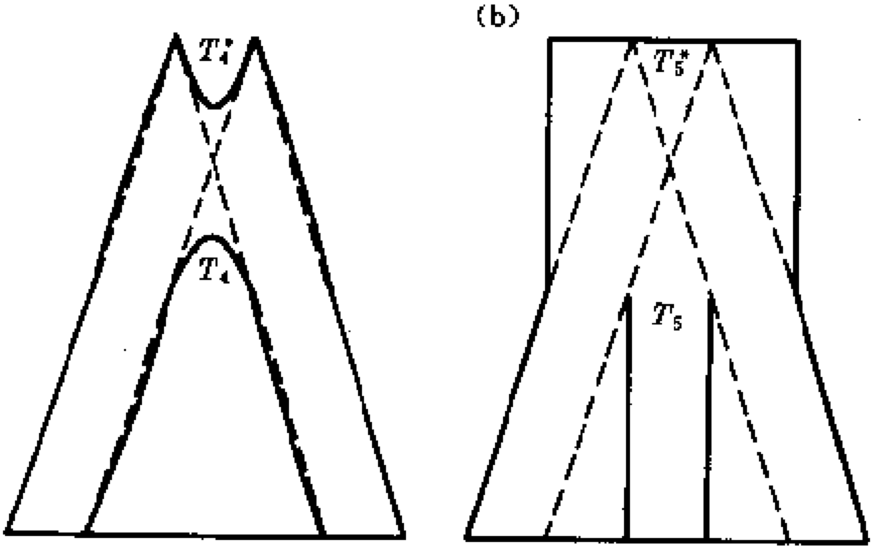
在图 3.1 中，我们采用三角模糊数证明了上述结果。



(a)



(b)



(c)

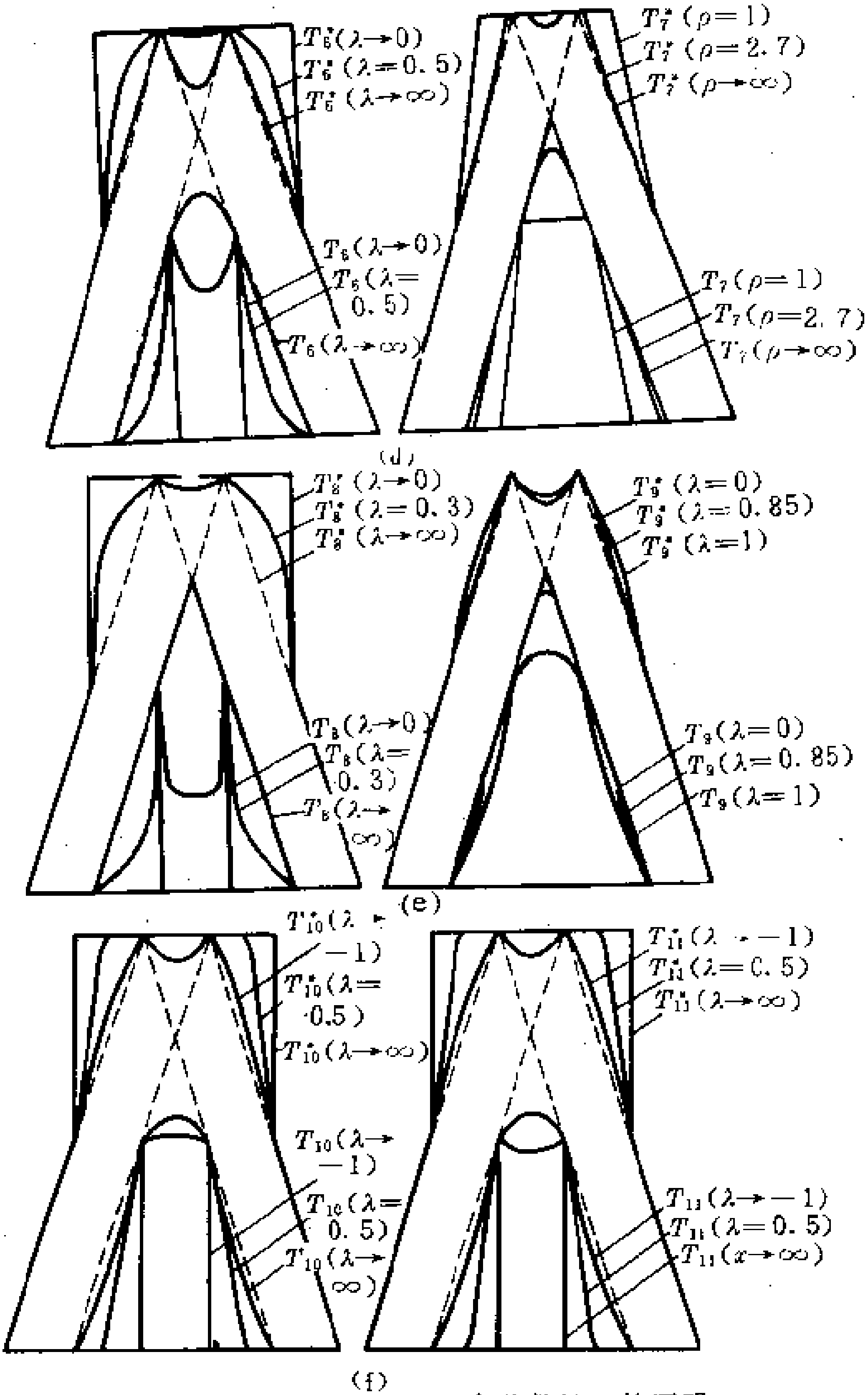


图 3.1 T-范数和 T-余范数性 .的证明

3.4 基于 T-算子的模糊推理方法

在传统的模糊推理方法中，广泛地使用着 max 和 min 算子，本节将讨论将前面所讨论的一些 T-算子用于模糊推理中，会得到一些新的有意义的结论。

因为人脑的思维常常含有一些模糊概念，因而这种推理就不能采用经典的二值逻辑来模拟，只能采用模糊集来模拟。例如，在如下的模糊推理中：

蕴含： IF x is A，THEN y is B

事实： x is A′

结论： y is B′

其中，x 和 y 是语言变量，如位置、速度、压力和温度等等，A，A'，B 和 B' 分别是论域 X、X、Y 和 Y 上的模糊集，例如 SMALL，MEDIUM，HIGH 和 VERY LOW 等等。

这种推理称为广义的肯定前件的假言推理，当 $A'=A$ 时，推得的结果为 $B'=B$，此时上述推理就成为经典的假言推理。

另一种应用得十分广泛的推理形式就是广义的否定后件的假言推理，其形式为：

蕴含： IF x is A，THEN y is B

事实： y is B′

结论： x is A′

类似地，当 $B'=\overline{B}$，和 $A'=\overline{A}$ 时，上述推理就退化为经典的否定后件的假言推理。

在设计模糊逻辑控制器时，也可以采用上述的推理形式来实现，例如

蕴含：IF control condition A，THEN control action B

事实： control condition A′

结论： control action B′

假定在一个模糊控制系统中有如下的规则集：

Rule 1：IF x is A_1，THEN y is B_1

Rule 2：IF x is A_2，THEN y is B_2

⋮

Rule i：IF x is A_i，THEN y is B_i

⋮

Rule N：IF x is A_N，THEN y is B_N

也可以将上述控制规则集写成如下的形式：

$$\bigcup_{i=1}^{N} \text{IF x is } A_i\text{, THEN y is } B_i$$

其中，x 和 y 是语言变量，A_i 和 B_i 分别是论域 X 和 Y 上的模糊集。

为了实现上述的控制规则，如果 A_i 和 B_i 之间的模糊关系可表示为论域 $X\times Y$ 上的 $R_{A_i\to B_i}$，那么它的隶属函数可用 T-范数表示如下：

$$\mu_{R_{A_i\to B_i}}(x,y)=T(\mu_{A_i}(x),\mu_{B_i}(y)) \quad x\in X \quad y\in Y \tag{3.22}$$

上述的蕴含函数是广义的 Mamdani 蕴含函数，如果采用 Zadeh 的蕴含关系，则有

(1) $$R_{A_i\to B_i}=(A_i\times B_i)\cup(\overline{A}_i\times Y) \tag{3.23(a)}$$

$$\mu_{R_{A_i\to B_i}}(x,y)=T^*(T(\mu_{A_i}(x),\mu_{B_i}(y)),N(\mu_{A_i}(x))) \tag{3.23(b)}$$

(2) $$R_{A_i\to B_i}=(X\times B_i)\cup(\overline{A}_i\times Y) \tag{3.24(a)}$$

$$\mu_{R_{A_i\to B_i}}(x,y)=T^*(\mu_{B_i}(y),N(\mu_{A_i}(x))) \tag{3.24(b)}$$

当然，也可以采用其他类型的蕴含方法。到底选择哪一种蕴含，要由问题领域的具体要求来确定。

蕴含函数的一般形式可用 $f_{\to}(\cdot,\cdot)$ 来定义，这样，我们就有

$$\mu_{A_i\to B_i}(x,y)=f_{\to}(\mu_{A_i}(x),\mu_{B_i}(y)) \tag{3.25}$$

那么，总的模糊关系 R 则为

$$\mu_R(x,y)=\mathop{*}_{i=1}^{N}(\mu_{R_{A_i\to B_i}}(x,y)) \tag{3.26}$$

给定一个前件 A'（控制条件）和一个模糊关系（专家的知识），那么结论 B' 就可由图 3.2 所示的广义的肯定前件的假言推理推导出来。

图 3.2　广义的肯定前件的假言推理

采用合成推理规则，结论 B' 由前件 A' 和模糊关系 R 的计算按如下方式实现：

$$B'=A'\circ R \tag{3.27(a)}$$

$$\mu_{B'}(y)=\mathop{\mathrm{Sup}}_{x}T(\mu_{A'}(x),\mu_{R_{A_i\to B_i}}(x,y)) \tag{3.27(b)}$$

基于(3.25)，(3.26)和(3.27(b))式，广义的肯定前件的假言推理推导结论的计算方法可表示为

$$\mu_{B'}(y)=\mathrm{Sup}T(\mu_{A'}(x),\mathop{*}_{i=1}^{N}(f_{\to}(\mu_{A_i}(x),\mu_{B_i}(y)))) \tag{3.28}$$

如果 $N=1$，且 $f_{\to}(\cdot,\cdot)=(22)$ 式，那么(3.28)式可进一步简化成如下形式：

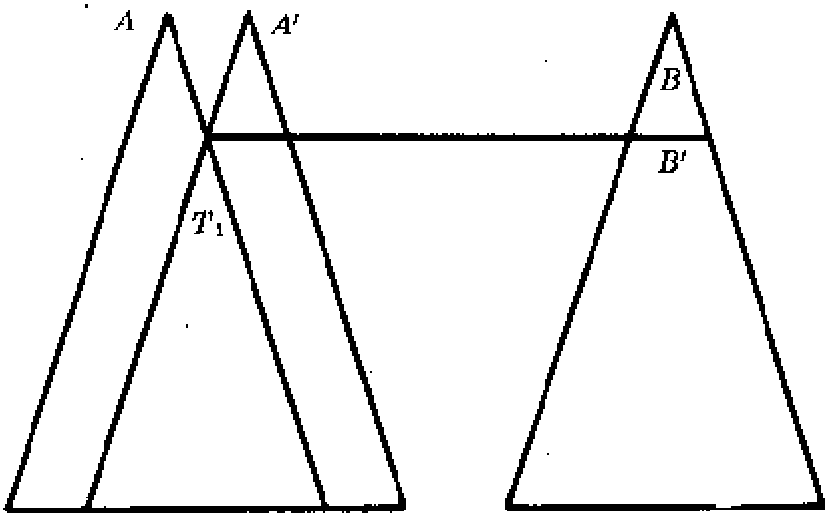
$$\mu_{B'}(y)=T(\alpha,\mu_B(y)) \tag{3.29}$$

其中，$\alpha=\mathop{\mathrm{Sup}}_{x}T(\mu_{A'}(x),\mu_{A_1}(x))$

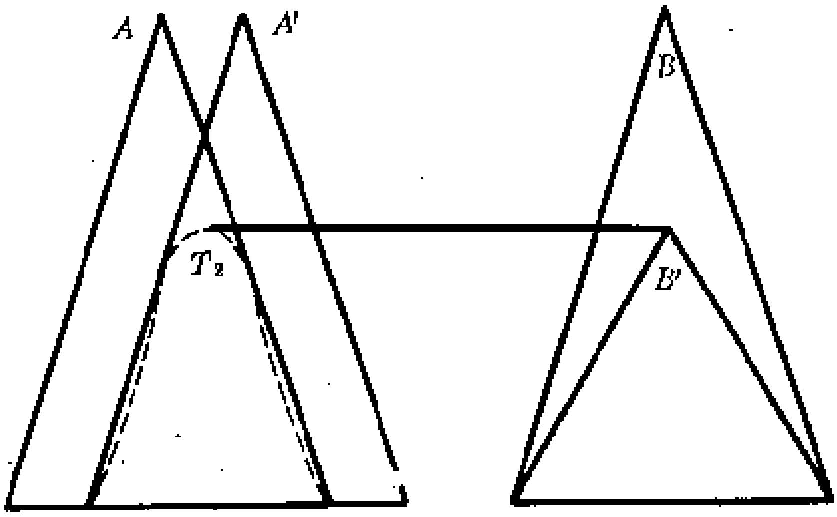
如果 A' 和 A_1 是有限模糊集，那么则有

$$\alpha=\bigvee_{x}T(\mu_{A'}(x),\mu_{A1}(x))$$

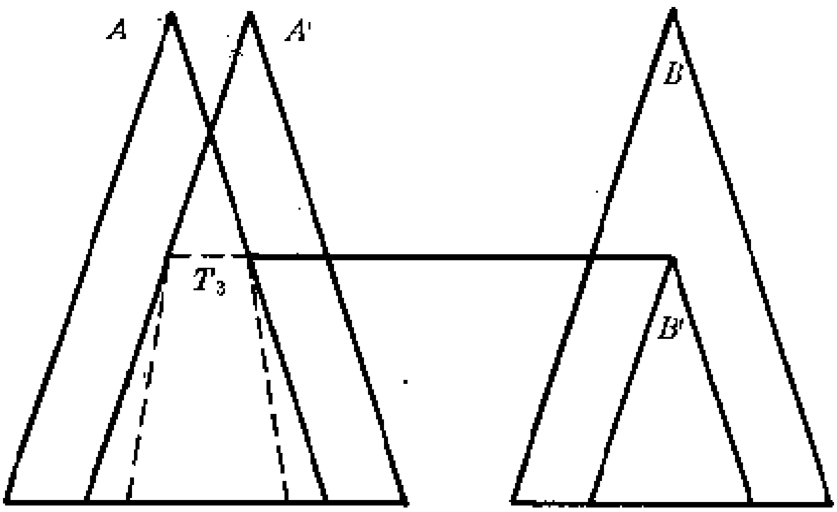
假定 $A(=A_1)$，A' 和 B 是三角模糊数，用 T_1 至 T_5 来代替(3.29)式中的 T，即可得到 5 种不同的模糊推理方法，如图 3.3 所示。



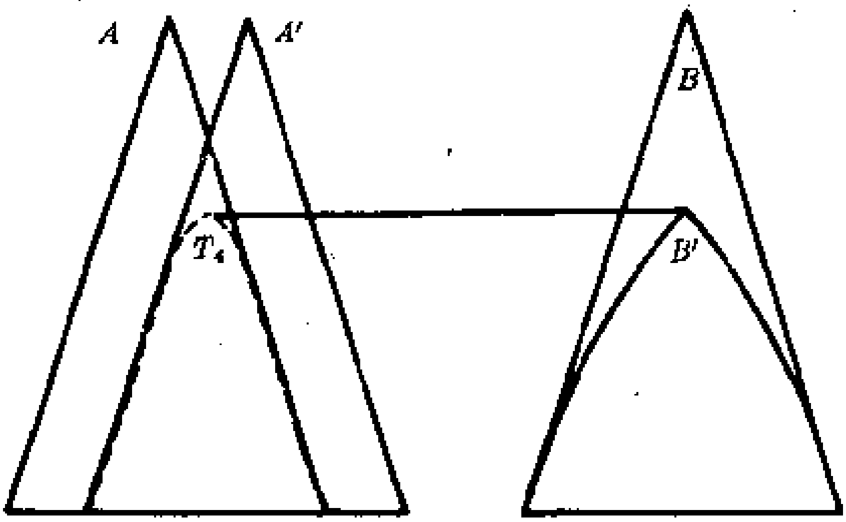
(a)



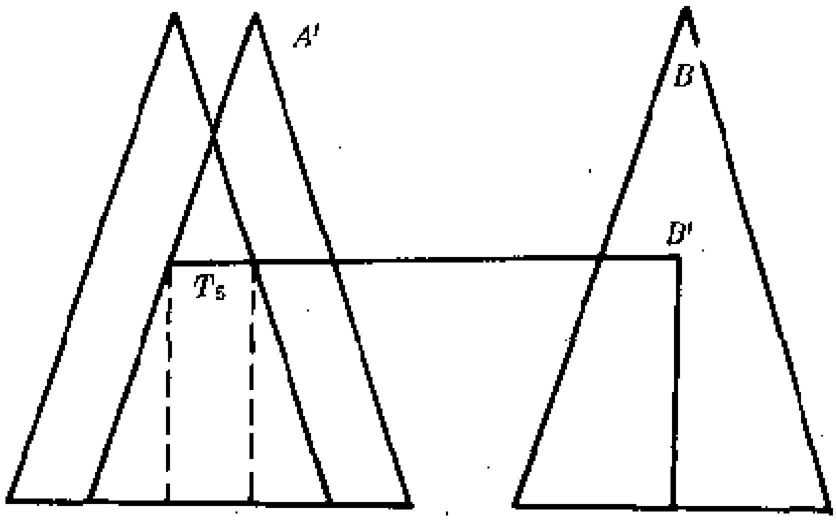
(b)



(c)



(d)



(e)

图 3.3　采用 T_1，T_2，T_3，T_4，T_5 的模糊推理

由本节和前几节的讨论可看出，T-算子是设计模糊专家系统中模糊推理的一个有效且灵活的工具，根据实际问题领域的要求，可从上述 T-算子集中选择符合要求的 T-算子来进行模糊推理，从而推导出满足系统要求的结论。

3.5 生成 T-算子的方法

本节介绍在给定的 T-范数(或 T-余范数)的基础上,生成一种新的 T-范数(或 T-余范数)的方法。

方法 1 令 $T:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$,如果存在一个递减且连续的函数 $f:[0,1]\to[0,\infty]$,且 $f(1)=0$,那么

$$T(x,y)=f^{(-1)}(f(x)+f(y)) \qquad x,y\in[0,1]$$

就是一个 T-范数。其中 $f^{(-1)}$是 f 的伪倒数,定义为:

$$f^{(-1)}(x)=\begin{cases}f^{-1}(x) & x\in[0,f(0)]\\ 0 & x\in[f(0),\infty]\end{cases}$$

注意:T 是阿基米德 T-范数,且如果 $f(0)\to\infty$,则 T 是严格的。

令 $T^*:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$,如果存在一个递增且连续的函数 $g:[0,1]\to[0,\infty]$,$g(0)=0$,那么

$$T^*(x,y)=g^{(-1)}(g(x)+g(y)) \qquad x,y\in[0,1]$$

就是一个 T-余范数。其中 $g^{(-1)}$是 g 的伪倒数,定义为:

$$g^{(-1)}(x)=\begin{cases}g^{-1}(x) & x\in[0,g(1)]\\ 1 & x\in[g(1),\infty]\end{cases}$$

类似地,T^*是一个阿基米德 T-余范数,且如果 $g(1)\to\infty$,则 T^*是严格的。

下面是两个实际例子。

例 1

$$f(x)=\left(\frac{1}{x}-1\right)^{\lambda} \quad g(x)=\left(\frac{1}{x}-1\right)^{-\lambda} \quad \lambda>0 \quad 且\ x\in[0,1]$$

$$f^{(-1)}(x)=\frac{1}{1+x^{\frac{1}{\lambda}}} \quad g^{(-1)}(x)=\frac{1}{1+x^{-\frac{1}{\lambda}}}$$

$$T(x,y)=f^{(-1)}\left(\left(\frac{1}{x}-1\right)^{\lambda}+\left(\frac{1}{y}-1\right)^{\lambda}\right)$$

$$= \frac{1}{1+\left(\left(\frac{1}{x}-1\right)^{\lambda}+\left(\frac{1}{y}-1\right)^{\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}}$$

类似地

$$T^*(x,y) = \frac{1}{1+\left(\left(\frac{1}{x}-1\right)^{-\lambda}+\left(\frac{1}{y}-1\right)^{-\lambda}\right)^{-\frac{1}{\lambda}}}$$

这里生成的 T-范数和 T-余范数就是前面介绍的由 Dombi 提出的 T_8 和 T_8^*，因为 $f(0)\to\infty, g(1)\to\infty$，所以它们是严格的阿基米德 T-范数和 T-余范数。

例 2

$$f(x) = 1 - x, g(x) = x, \qquad x \in [0,1]$$

$$f^{(-1)}(x) = \begin{cases} 1-x & x \in [0,1] \\ 0 & x \in [1,\infty] \end{cases}$$

$$g^{(-1)}(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1] \\ 1 & x \in [1,\infty] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} T(x,y) &= f^{(-1)}(f(x)+f(y)) = f^{(-1)}(2-x-y) \\ &= \begin{cases} x+y-1 & x+y-1 \geqslant 0 \\ 0 & x+y-1 \leqslant 0 \end{cases} \\ &= \max(x+y-1,0) \end{aligned}$$

类似地

$$T^*(x,y) = \min(x+y,0)$$

这就是前面介绍的 T_3 和 T_3^*，因为 $f(0)=1, g(1)=1$，所以它们不是严格的阿基米德 T-范数和 T-余范数。

方法 2 令 $T:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$，如果 T' 是 T-范数，且 $f(x)$ 在 R 的一个区段上是严格单调的，且 $f(1)=1$，那么

$$T(x,y) = f^{-1}(T'(f(x),f(y))$$

就是一个 T-范数。

令 $T^*:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$，如果 T'^* 是一个 T-余范数，且

$g(x)$在 R 的一个区段上是严格单调的，且 $g(0)=0$，那么

$$T^*(x,y) = g^{-1}(T'^*(g(x),g(y))$$

就是一个 T-余范数。

例 3

$$T'(x,y) = xy \quad f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$$

$$T(x,y) = f^{-1}\left(\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}\right)$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}} = xy$$

这是 T_2，它生成了它自己。

例 4

$$T'^* = x + y - xy, \quad g(x) = x^2 \quad x \in [0,1]$$

$$g^{-1}(x) = x^{\frac{1}{2}}$$

$$T^*(x,y)=g^{-1}(x^2+y^2-x^2y^2)$$

$=(x^2+y^2-x^2y^2)^{\frac{1}{2}}$这是一个 T-余范数。

第四章　模糊数据的综合处理

在研制和构造模糊专家系统时，由于领域专家在向知识工程师提供他求解问题的一些经验、技巧和窍门时，以及知识工程师为建造模糊专家系统而获得的一些观察事实和用户提供的有关信息常常要涉及到大量甚至冗余的非模糊和模糊的数据，为了更好地理解这些数据的含义并将它们正确和恰当地反映在模糊专家系统中，就需要对这些非模糊的和模糊的数据进行有效的综合处理，以便从大量甚至是冗余的数据中获取有效的信息。这对于建造高性能的知识系统是一个十分有用的工具。

4.1　非模糊数据的综合

在许多情况下，人们对大量的非模糊数据常常采用求其平均值的方法来对它们进行综合，这种方法可以帮助理解数据的内容或含义，但它的缺点是太简单，综合的结果有时与实际情况相去甚远。这里给出一种语言综合的新方法，它不像平均值方法那样简单，所得结果更接近于实际。下面先讨论与模糊量词有关的概念。

在人类的思维和决策过程中，常常使用一些模糊的语言，例如"大部分人出席了上午的会议"，"约 80%的西红柿是红的"，"大约 5 个人没有来上课"等等，这类语句的模糊性主要是由"大部分"，"约 80%"和"大约 5"这类模糊量词所导致的(此外还有模糊谓词如"红"等)，通常，我们将模糊量词分为两类：即绝对量词和相对量词。绝对量词表示总量本质上是绝对的，例如"大约 5"、"至少 10"等，这类量词与元素的数量是密切相关的，它的值可用非负实数集 R^+ 的一个模糊子集 Q 来表示，对任意 $r \in R^+$，$Q(r)$ 表示值 r 满足

由 Q 所表示的模糊概念的程度。在一般情况下，我们均假定这类量词是正规的，即在 R^+ 中至少存在一个元素，它满足 Q 的程度为 1。相对量词则表示总量本质上是相对的，例如"大部分"和"约 80%"等，这类量词可用单位区间的一个模糊子集来表示。

需要注意的是"许多(*many*)"这个量词是一个特殊的模糊量词，它既可以作为绝对量词，也可以作为相对量词在模糊语句中出现，它到底属于哪类量词，这要取决于模糊语句所处的上下文来决定。

假定我们要综合的数据是如下的一个集合：$D=\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}$，对这组数据进行综合可按如下的三个步骤来实现：

1. 选定一个综合因子 S；
2. 选定一个"一致性的程度"Q(模糊量词)；
3. 对综合的正确性进行评价。

即对给定的数据集 D，我们可以假定任意一个看上去是合适的综合因子 S，以及任意一个"一致性的程度"Q，而用 T 来表示在选定 S 和 Q 的情况下，语句 R(由 S 和 Q 构成的)的真值。例如，如果 D 是表示人的年龄的一个数据集，要对该组数据进行综合时，S 和 Q 可分别选为"S＝大约 25 岁"和"Q＝大部分"，那么 T 就表示语句"R＝大部分人约 25 岁"的真值，它是用来检验综合的正确性的，其大小在单位区间[0,1]中取值，T 的值愈接近 1，则表明综合的语句愈正确。

注意，对同一组要综合的数据，S 和 Q 可有多种选择，但每种选择其 T 值是不相同的。例如，假定 $D=\{25,13,37,42,17,43,56,48,19,35\}$，此时根据 D 就有两种选择 S 和 Q 的方法：

1. S＝约 15 岁，Q＝有些人，由此得到 R 为：有些人约 15 岁；
2. S＝中年人，Q＝大部分(人)，由此得到 R 为：大部分人是中年人。

当确定 S 和 Q 之后，如何计算 T 的值呢？

(Ⅰ)首先讨论 Q 是相对量词的情况，此时可按如下的 3 个步

骤来确定 T：

1. 对数据集 D 中的每个元素，计算 $S(d_i),i=1,2,\cdots,n$，得到 d_i 满足 S 的程度；

2. 令 $r=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}S(d_i)$，得到 D 中满足 S 的数量；

3. $T=Q(r)$，得到该语句的真值。

例 1　假定有 8 个人，他们的年龄为 $D=\{25,37,22,35,32,39,23,30\}$，此时假定将 S 选为"大约 30 岁"，Q 为"大部分(人)"，"大约 30"的值定义为模糊子集 S，其隶属函数定义为如下形式：

$$S(d_i)=\exp\{-[(d_i-30)/6.6]^2\}$$

这样，即可得到

$$\begin{array}{ll}
d_1=25 & S(d_1)=0.56 \\
d_2=37 & S(d_2)=0.32 \\
d_3=22 & S(d_3)=0.23 \\
d_4=35 & S(d_4)=0.56 \\
d_5=32 & S(d_5)=0.91 \\
d_6=39 & S(d_6)=0.15 \\
d_7=23 & S(d_7)=0.32 \\
d_8=30 & S(d_8)=1
\end{array}$$

所以

$$\begin{aligned}r&=(0.56+0.32+0.23+0.56+0.91+0.15+0.32+1)/8\\&=0.63\end{aligned}$$

如果用户对"大部分"采用 $Q(r)=r^2$ 这一模糊集来定义的话，则

$$T=Q(0.63)=0.40$$

这样，即得到对 D 中的"大部分(人)"而言，综合"大约 30 岁"的有效性在给定"大部分(人)"和"大约 30 岁"定义的条件下为 0.40，即语句"大部分人约 30 岁"的真值为 0.40。

如果对 D 选取不同的综合因子 S，那么当然就会得到不同的结果。例如对例 1 中 D 将 S 选为"至少 25 岁"，而 Q 仍然选"大部

分（人）”，那么我们就会得到：由于

$$S(d_i) = \begin{cases} 1 & d_i \geqslant 25 \\ 0 & d_i < 25 \end{cases}$$

则有

$$S(d_1) = S(d_2) = S(d_4) = S(d_5) = S(d_6) = S(d_8) = 1$$

$$S(d_3) = S(d_7) = 0$$

故

$$r = (1 + 1 + 0 + 1 + 1 + 1 + 0 + 1)/8 = 0.75$$

所以

$$T = Q(0.75) = 0.56$$

显然，对数据集 D 进行综合时，采用语句“大部分人至少 25 岁”比采用“大部分人约 30 岁”更合适。

（Ⅱ）当 Q 是绝对量词时，r 按如下式子进行计算：

$$r = \sum_{i=1}^{n} S(d_i)$$

另两个步骤与相对量词的计算方法相同。

4.2 隶属函数的计算

上一节讨论了非模糊数据的综合处理问题，本节将讨论模糊数据的综合处理方法。

一个模糊的数据就是一个模糊数，它可由一个模糊集合来表示，为使讨论更直观，我们不将它的隶属函数定义成一种函数表达式的形式，而是将它定义成可用一个四元数组(a,b,α,β)描述的梯形来表示，也就是说，一个模糊数可用一个梯形所表示的模糊区间来表示，该隶属函数具有的性质将在下面讨论。

对一组给定的语言数据所表示的模糊数进行综合时，可按如下三个步骤来实现：

1. 采用如下的两种计算方法中的一种计算该组模糊数的平

均值(仍然是一个模糊数)的隶属函数：

a. 平均隶属函数计算法；

b. 加权平均隶属函数计算法。

2. 根据语言近似的原理，从给定的语言术语集中选择一个术语，它的含义与平均值的隶属函数相同或是最接近的。我们这里采用欧氏距离来度量一个语言术语与平均值隶属函数之间的相似程度。

3. 为了判断某个平均值作为一组数据综合结果的好坏，采用离差变量 T(在单位区间中取值)来判断综合结果的可靠性：

$$T=\frac{S}{R}$$

其中，S 是标准变差，它定义为方差的平方根，R 是语言术语 L_i 的范围长度。当 T 越接近 0 时，则表明数据越密集，即综合的结果越可靠。

下面几节将对上述三个问题逐步展开讨论。

4.2.1 平均隶属函数

如果 $\{x_i\}$ 是一个实数序列，$i=1,2,\cdots,n$，那么 $\{x_i\}$ 的平均值定义为：

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \tag{4.1}$$

当量词模糊时，为了进行上述计算，就必须对上述定义进行扩充。为了完成这一任务，首先需要定义在平均值的计算中所采用的模糊代数运算(包括加法、乘法和除法)。一个模糊数 N(其隶属函数为 $\mu_N(x)$)定义在实数集 R 上，为便于实际应用，将其进一步地定义为一个梯形，用一个四元数组(a,b,α,β)来表示，其中

$[a,b]$是一个闭区间，其上的隶属函数为 1。

$a-\alpha$ 是 x 的最小值，此时 $\mu_N(x)=0$。

$b+\beta$ 是 x 的最大值，此时也有 $\mu_N(x)=0$。

注意，一个普通数在上述表示法中表示为$(a,a,0,0)$，一个非

模糊的区间(a,b)用上述表示法表示则应写作$(a,b,0,0)$。

令 $\tilde{m}=(a,b,\alpha,\beta)$，$\tilde{n}=(c,d,\gamma,\delta)$，表 4.1 给出了采用梯形来描述模糊数的一些运算法则。

表 4.1 模糊数的基本运算法则

	运算	结 果	条 件
1	$-\tilde{n}$	$(-d,-c,\delta,\gamma)$	所有 $\tilde{n}$
2	$\frac{1}{\tilde{n}}$	$\left(\frac{1}{d},\frac{1}{c},\frac{\delta}{d(d+\delta)},\frac{\gamma}{c(c-\gamma)}\right)$	$\tilde{n}>0,\tilde{n}<0$
3	$e^{\tilde{n}}$	$(e^c,e^d,e^c(1-e^{-\gamma}),e^d(e^\delta-1))$	$\tilde{n}>0$
4	$\lg\tilde{n}$	$(\lg c,\lg d,\lg\frac{c}{c-\gamma},\lg\frac{d+\delta}{d})$	$\tilde{n}>0$
5	$\tilde{m}+\tilde{n}$	$(a+c,b+d,\alpha+\gamma,\beta+\delta)$	所有 $\tilde{m},\tilde{n}$
6	$\tilde{m}-\tilde{n}$	$(a-d,b-c,\alpha+\delta,\beta+\gamma)$	所有 $\tilde{m},\tilde{n}$
7	$\tilde{m}\times\tilde{n}$	$(ac,bd,a\gamma+c\alpha-\alpha\gamma,b\delta+d\beta+d\beta+\beta\delta)$	$\tilde{m}>0,\tilde{n}>0$
8		$(ad,bc,d\alpha-a\delta+\alpha\delta,-b\gamma+c\beta-\beta\gamma)$	$\tilde{m}<0,\tilde{n}>0$
9		$(bc,ad,b\gamma-c\beta+\beta\gamma,-d\alpha+a\delta-\alpha\delta)$	$\tilde{m}>0,\tilde{n}<0$
10		$(bd,ac,-b\delta-d\beta-\beta\delta,-a\gamma-c\alpha+\alpha\gamma)$	$\tilde{m}<0,\tilde{n}<0$
11	$\tilde{m}\div\tilde{n}$	$\left(\frac{a}{d},\frac{b}{c},\frac{a\delta+d\alpha}{d(d+\delta)},\frac{b\gamma+c\beta}{c(c-\gamma)}\right)$	$\tilde{m}>0,\tilde{n}>0$
12		$\left(\frac{a}{c},\frac{b}{d},\frac{c\alpha-a\gamma}{c(c-\gamma)},\frac{a\beta-b\delta}{d(d+\delta)}\right)$	$\tilde{m}<0,\tilde{n}>0$
13		$\left(\frac{b}{d},\frac{a}{c},\frac{b\delta-d\beta}{d(d+\delta)},\frac{a\gamma-c\alpha}{c(c-\gamma)}\right)$	$\tilde{m}>0,\tilde{n}<0$
14		$\left(\frac{b}{c},\frac{a}{d},\frac{-b\gamma-c\beta}{c(c-\gamma)},\frac{-a\delta-d\alpha}{d(d+\delta)}\right)$	$\tilde{m}<0,\tilde{n}<0$
15	$\tilde{m}^{\tilde{n}}$	$(a^c,b^d,a^c-(a-\alpha)^{c-\gamma},(b+\beta)^{d+\delta}-b^d)$	$\tilde{m}\in[1,\infty),\tilde{n}>0$
16		$(b^c,a^d,b^c-(b+\beta)^{c-\gamma},(a-\alpha)^{d+\delta}-a^d)$	$\tilde{m}\in[1,\infty),\tilde{n}<0$
17		$(a^d,b^c,a^d-(a-\alpha)^{d+\delta},(b+\beta)^{c-\gamma}-b^c)$	$\tilde{m}\in[0,1],\tilde{n}>0$
18		$(b^d,a^c,b^d-(b+\beta)^{d+\delta},(a-\alpha)^{c-\gamma}-a^c)$	$\tilde{m}\in[0,1],\tilde{n}<0$

$\tilde{m}\triangleq(a,b,\alpha,\beta)$，$\tilde{n}\triangleq(c,d,\gamma,\delta)$

因此，给定 n 个模糊集 $\tilde{m}_i, i=1,2,\cdots,n$，每个模糊集分别由 $(a_i,b_i,\alpha_i,\beta_i)$ 定义，那么平均隶属函数应为

$$\tilde{\tilde{m}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tilde{m}_i \tag{4.2}$$

其中 $\tilde{n}=(n,n,0,0)$

我们可将(4.2)式写成另一种形式：

$$\tilde{\tilde{m}} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}b_i, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\beta_i\right) \tag{4.3}$$

例 2 为了检验某个医疗方法的有效性，抽样调查了患者的许多情况。一个抽样是了解患者的起床情况，假定三个患者的回答是：Dawn，Early-Morning 和 Mid-Morning，在此情况下如何计算其平均隶属函数呢？

假定与时间有关的术语集如表 4.2 所示，那么对给定的三个时间术语 Dawn，Early-Morning 和 Mid-Morning，其平均隶属函数应为：

$$\begin{aligned}\tilde{\tilde{m}} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tilde{m}_i = \frac{1}{3}(5.3+7+8.8, 6.5+8.25\\ &\quad +10.5, 0.75+0.5+0.5, 0.75+0.5+1)\\ &= (7.03, 8.43, 0.58, 0.75)\end{aligned}$$

图 4.1 给出了上述计算的图形解释。

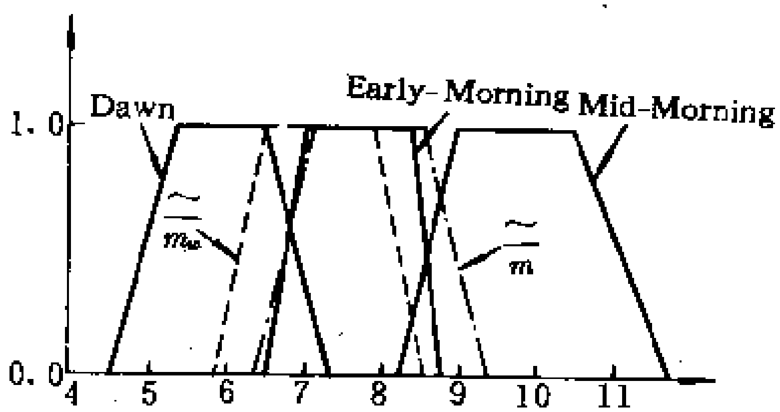


图 4.1 三个时间术语的平均隶属函数和加权平均隶属函数

表 4.2 语言术语集(模糊数)表示

Dawn	(5.3,6.5,0.75,0.75)
Early-Morning	(7,8.25,0.5,0.5)
Morning	(6.5,12,0.5,1)
Mid-Morning	(8.8,10.5,0.5,1)
Lete-Morning	(10.4,12,0.25,0)
Noon-Hour	(12,13,0.25,0.25)
Early-Afternoon	(13,14,0.25,0.25)
Mid-Afternoon	(14,16,0.25,0.25)
Late-Afternoon	(16,17.5,0.25,0.25)
Dusk	(17.5,19,0.25,0.5)
Evening	(19,20.5,0.25,0.5)
Night	(21,5.5,0.5,0.5)
Late-Night	(23.5,0.5,0.5,0.5)
Midnight-Hour	(23.75,0.5,0.25,0.25)
Late-Late-Night	(0.5,1.5,0.25,0.25)
Wee-Hours	(2,4.5,0.5,1)

4.2.2 加权平均隶属函数

平均隶属函数还可以反映这样一个事实,即某些数据比另一些数据更有价值。如果$\{x_i\}$是一个实数序列,$i=1,2,\cdots,n$,$\{w_i\}$是每个数相应的权值,那么$\{x_i\}$的加权平均被定义为:

$$\bar{x}_w = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} w_i \qquad (4.4)$$

当$\{x_i\}$是模糊序列时,应对上式进行修改,加权平均隶属函数应按如下方式计算:在给定 n 个模糊集 $\tilde{m}_i$ 的情况下,每个分别定

义为$(a_i,b_i,\alpha_i,\beta_i)$，其相应的权值为 q_i，$i=1,2,\cdots,n$，那么

$$\tilde{\tilde{m}}_w=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}w_ia_i,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}w_ib_i,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}w_i\alpha_i,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}w_i\beta_i\right) \tag{4.5}$$

其中，每个权值都是正规的：

$$w_i=\frac{ng_i}{\sum_{i=1}^{n}g_i} \tag{4.6}$$

例 3 若对例 2 中的 Dawn，Early-Morning 和 Mid-Morning 的权值分别为 0.8，0.6 和 0.3，求其加权平均隶属函数。

由(4.6)式可得到

$$w_1=\frac{3\times 0.8}{0.8+0.6+0.3}=1.4$$

$$w_2=\frac{3\times 0.6}{0.8+0.6+0.3}=1.06$$

$$w_3=\frac{3\times 0.3}{0.8+0.6+0.3}=0.53$$

进而由(4.5)式可得到

$$\begin{aligned}\tilde{\tilde{m}}_w&=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}w_ia_i,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}w_ib_i,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}w_i\alpha_i,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}w_i\beta_i\right)\\&=\frac{1}{3}[(1.4\times 5.3+1.06\times 7+0.53\times 8.8),\\&\quad(1.4\times 6.5+1.06\times 8.25+0.53\times 10.5),\\&\quad(1.4\times 0.75+1.06\times 0.5+0.53\times 0.5),\\&\quad(1.4\times 0.75+1.06\times 0.5+0.53\times 1)]\\&=(6.52,7.82,0.62,0.71)\end{aligned}$$

在图 4.1 中我们可将上述两个例子的计算结果进行比较，可以看出加权平均隶属函数$\tilde{\tilde{m}}_w$ 相对于平均隶属函数$\tilde{\tilde{m}}$而向左移动了，这是因为模糊集 Dawn 有较高的权值的结果。

4.3 语言近似

对一组模糊数据，如果我们已经计算出其平均隶属函数或加权平均隶属函数，那么我们就可以从语言术语集中选择一个其含义与平均隶属函数或加权平均隶属函数的含义相同或接近的语言术语来表示 $\tilde{\tilde{m}}$（或 $\tilde{\tilde{m}}_w$）。我们将这种方法称为语言近似。

为解决寻找与 $\tilde{\tilde{m}}_w$ 相同或最接近的语言术语问题，Bonissone 在特征选择和模式识别的基础上提出了一个较好的方法。术语集中的每一个元素可用具有如下特性的模式 P_i 来表示

1. 模糊集的基数；
2. 集合的模糊性度量；
3. 隶属分布的因素和倾斜度。

然后用第二章我们介绍的求两个模糊集之间的距离公式即可求出 $\tilde{\tilde{m}}_w$ 与语言术语之间的距离，当然应选这一值最小的那个语言术语作为 $\tilde{\tilde{m}}_w$ 的语言术语。

由于用距离来度量两个模糊数之间的差异，在离散情况下需求和，而在隶属函数是连续的情况时则需积分，特别是在论域的元素很多时，求和和求积都遇到极大的困难，因而有时候可用计算它们之间的贴近度来代替计算它们之间的距离。

常用的计算两个模糊数之间的贴近度有如下几种方法：

1. 格贴近度

假定有限论域 U 上有两个模糊子集 A 和 B，则

$$A \cdot B = \bigvee_{x \in U} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(x))$$

$$A \odot B = \bigwedge_{x \in U} (\mu_A(x) \vee \mu_B(x))$$

分别称为 A 与 B 的内积和外积，内积先取小后取大，外积则相反，先取大后取小。

格贴近度定义为

$$\sigma(A,B) = \frac{1}{2}[A \cdot B + (1 - A \odot B)] \tag{4.7}$$

2. 海明贴近度

$$\sigma_H(A,B) = 1 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| \tag{4.8}$$

或

$$\sigma_H(A,B) = 1 - \frac{1}{b-a}\int_a^b |\mu_A(x) - \mu_B(x)| \mathrm{d}x \tag{4.9}$$

3. 欧氏贴近度

$$\sigma_E(A,B) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} [\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)]^2} \tag{4.10}$$

或

$$\sigma_E(A,B) = 1 - \frac{1}{\sqrt{b-a}}\left(\int_a^b [\mu_A(x) - \mu_B(x)]^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2} \tag{4.11}$$

4. 贴近度-Ⅰ

$$\sigma(A,B) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \min(\mu_A(x_i), \mu_B(x_i))}{\sum_{i=1}^{n} \max(\mu_A(x_i), \mu_B(x_i))} \tag{4.12}$$

5. 贴近度-Ⅱ

$$\sigma(A,B) = \frac{2\sum_{i=1}^{n} \min(\mu_A(x_i), \mu_B(x_i))}{\sum_{i=1}^{n} \mu_A(x_i) + \sum_{i=1}^{n} \mu_B(x_i)} \tag{4.13}$$

6. 贴近度-Ⅲ

$$\sigma(A,B) = \frac{\bigwedge_{x\in U}(\mu_A(x) \wedge \mu_B(x)) + \bigvee_{x\in U}(\mu_A(x) \wedge \mu_B(x))}{\bigwedge_{x\in U}(\mu_A(x) \vee \mu_B(x)) + \bigvee_{x\in U}(\mu_A(x) \vee \mu_B(x))} \tag{4.14}$$

对于 Bonissone 提出的方法，假定我们采用梯形即一个四元

数组(a,b,α,β)来表示模糊集的话，就不需要采用 Bonissone 所定义的模式来选择语言术语，对加权平均隶属函数 $\tilde{\tilde{m}}_w$，我们可直接用欧氏距离来度量某个语言术语与$\tilde{\tilde{m}}_w$的距离：

$$d_1(L_i,\tilde{\tilde{m}}_w)=[q_1^2(a_i-q_w)^2+q_2^2(b_i-b_w)^2+q_3^2(\alpha_i-\alpha_w)^2 \\ +q_4^2(\beta_i-\beta_w)^2]^{1/2} \tag{4.15}$$

其中，$(a_i,b_i,\alpha_i,\beta_i)$和$(a_w,b_w,\alpha_w,\beta_w)$分别是模糊集 L_i（语言术语）和 $\tilde{\tilde{m}}_w$ 的表示，q_1,q_2,q_3 和 q_4 是参数 a,b,α,β 的权，权给出了 a,b,α,β 的重要程度（或可靠性程度）。

例 4 在前一节的例 2 中，若我们取 $q_1=q_2=1.25,q_3=q_4=0.75$，对 $\tilde{\tilde{m}}$而言，最接近的（采用欧氏距离）语言术语应按如下方法计算。

在例 2 中我们已算出：

$$\tilde{\tilde{m}}=(7.03,8.43,0.58,0.75)$$

$\tilde{\tilde{m}}$对三个语言术语的欧氏距离分别为：

$$\begin{aligned} &d_1(\text{Early-Morning},\tilde{\tilde{m}}) \\ &\quad=[1.25^2(7-7.03)^2+1.25^2(8.25-8.43)^2 \\ &\quad+0.75^2(0.5-0.58)^2+0.75^2(0.5-0.75)^2]^{1/2}=0.30 \\ &d_1(\text{Dawn},\tilde{\tilde{m}} \\ &\quad=[1.25^2(5.3-7.03)^2+1.25^2(6.5-8.43)^2 \\ &\quad+0.75^2(0.75-0.58)^2+0.75^2(0.75-0.75)^2]^{1/2}=3.24 \\ &d_1(\text{Mid-Morning},\tilde{\tilde{m}} \\ &\quad=[1.25^2(8.8-7.03)^2+1.25^2(10.5-8.43)^2 \\ &\quad+0.75^2(0.5-0.58)^2+0.75^2(1-0.75)^2]^{1/2}=3.41 \end{aligned}$$

由上述运算结果可知：由于 Early-Morning 与 $\tilde{\tilde{m}}$最近（在欧氏距离情况下），故将$\tilde{\tilde{m}}$用语言术语“Early-Morning”表示。

4.4 变差计算

采用平均值的方法可以帮助我们理解数据，但它只能提供一个粗略的说明，并不能提供关于数据分布的描述。为了判断将平均值作为对数据进行综合的结果好坏，我们必须要知道这些数据(梯形)与平均值(梯形)的相对位置。这样一种情况是很可能出现的，即两组数据具有相同的平均值，而其变差却是不同的。例如，我们仍然采用表 4.2 所定义的时间术语来描述患者的作息时间：A 组的三名患者的起床时间分别为 Dawn，Early-Morning 和 Mid-Morning，B 组的三名患者的起床时间分别为 Dawn，Dawn 和 Late-Morning，直觉上，这两组抽样都有同样的语言平均值：Early-Morning，但 B 组抽样在语言数据中却有较大的变差性。

表 4.3 给出了语言平均和采用语言近似来标记该平均值的计算结果，在计算中所采用的 q_i 与例 4 中的 q_i 相同，对两组抽样的语言平均值，得到的语言术语是相同的，即都为 Early-Morning，尽管 $\tilde{\tilde{m}}_A=(7.0,8.4,0.58,0.75)$ 和 $\tilde{\tilde{m}}_B=(7.0,8.3,0.58,0.5)$(如图 4.2 和图 4.3 所示)的模糊表示(梯形)稍为有点不同，但从另一方面看，图形又清楚地表示出抽样 A 对平均值的变差要比抽样 B

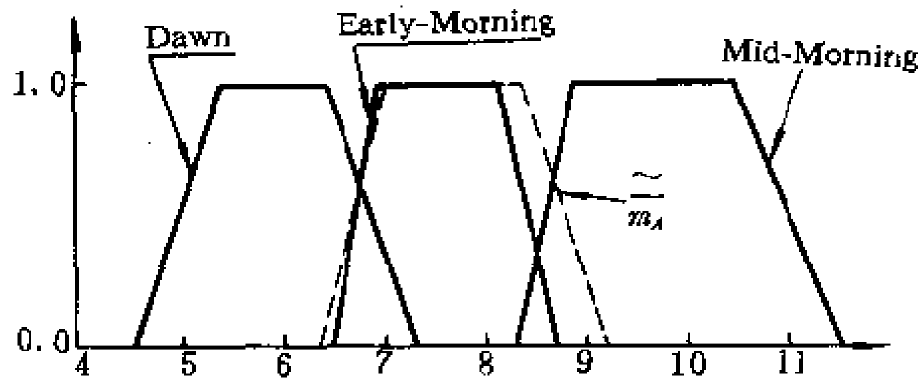


图 4.2 抽样 A 的变差

表 4.3　平均值与语言近似的计算结果

	A		B	
	模糊集	语言术语	模糊集	语言术语
抽样	(5.3,6.5,0.75,0.75)	Dawn	(5.3,6.5,0.75,0.75)	Dawn
	(7.0,8.25,0.5,0.5)	Early-Morning	(5.3,6.5,0.75,0.75)	Dawn
	(8.8,10.5,0.5,1)	Mid-Morning	(10.5,12,0.25,0)	Late-Morning
$\tilde{m}$	(7.0,8.4,0.58,0.75)	Early-Morning	(7.0,8.3,0.58,0.5)	Early-Morning
S^2	11.11		30.02	
T	0.45	Medium	0.73	High

对 $\tilde{m}_B$ 的变差小，因而我们可以得出对 A 组抽样得到的综合结果比 B 组抽样得到的综合结果更可靠。

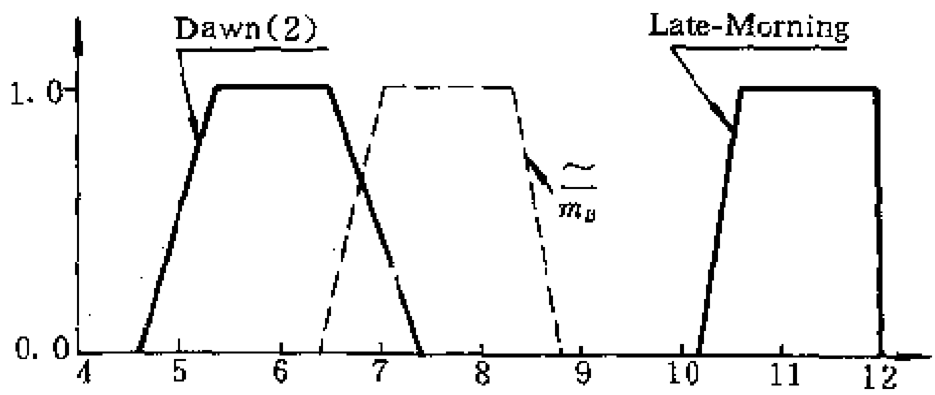


图 4.3　抽样 B 的变差

方差是用来度量变差性(或离差)的最好方法，方差的概念是这样定义的：如果 x_i 是一个实数序列，$i=1,2,\cdots,n$，那么 $\{x_i\}$ 的方差定义为

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \tag{4.16}$$

其中 $\bar{x}$ 是$\{x_i\}$的平均值。

将上述定义进行扩张就可得到语言值序列的方差：

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}[d_1(L_i,\tilde{\tilde{m}})]^2$$

这里 d_1 是欧氏距离，$\tilde{\tilde{m}}$是语言平均值，L_i 是语言术语的语言值。

例 5 比较 A 组样本和 B 组样本的方差，并验证 A 组综合结果比 B 组综合结果更可靠。

对 A 组样本在例 4 中我们已计算出：

$$d_1(\text{Dawn},\tilde{\tilde{m}}_A) = 3.24$$

$$d_1(\text{Early-Morning},\tilde{\tilde{m}}_A) = 0.30$$

$$d_1(\text{Mid-Morning},\tilde{\tilde{m}}_A) = 3.41$$

其样本方差为：

$$S_A^2 = \frac{1}{3-1}(3.24^2 + 0.30^2 + 3.41^2) = 11.11$$

仿照例 4 中的计算方法可得到 B 组抽样有：

$$d_1(\text{Dawn},\tilde{\tilde{m}}_B) = 3.13$$

$$d_1(\text{Late-Morning},\tilde{\tilde{m}}_B) = 6.36$$

其样本方差则为：

$$S_B^2 = \frac{1}{3-1}(3.13^2 + 3.13^2 + 6.36^2) = 30.02$$

像所预期的那样，$S_A^2<S_B^2$，说明 A 组抽样的综合结果比 B 组抽样的综合结果更可靠。

由于不同的抽样有不同的方差，为便于比较，我们需将方差规范化，为此引进一个离差量度 T，若方差的 T 值越接近 0，则表示该数组越密集。离差量度 T 定义为：

$$T = \frac{S}{R} \tag{4.17}$$

其中，S 是标准变差，它被定义为方差的平方根，R 是论域上语言

值 L_i 范围的长度，即

$$R=\max_i\{b_i+\beta_i\}-\min_i\{a_i-\alpha_i\} \quad i=1,2,\cdots,n \tag{4.18}$$

其中，$(a_i,b_i,\alpha_i,\beta_i)$是表示模糊集(它的标记是 L_i)的四元数组。

例 6 计算上述例子中 A 组抽样和 B 组抽样的离差。

首先计算出语言 L(包括 A 组的 Dawn，Early-Morning，Mid-Morning 和 B 组的 Late-Morning)的范围长度：

$$\begin{aligned}R &=\max\{6.5+0.75,8.25+0.5,10.5+1,12+0\}\\ &\quad -\min\{5.3-0.75,7-0.5,8.8-0.5,10.5-0.25\}\\ &=\max\{7.25,8.75,11.5,12.0\}\\ &\quad -\min\{4.55,6.5,8.3,10.25\}\\ &=12-4.55=7.45\end{aligned}$$

这样，A 组的离差为

$$T_A=\frac{S_A}{R}=\frac{\sqrt{S_A^2}}{R}=\frac{\sqrt{11.11}}{7.45}=\frac{3.33}{7.45}=0.447$$

B 组的离差则为：

$$T_B=\frac{S_B}{R}=\frac{\sqrt{S_B^2}}{R}=\frac{\sqrt{30.02}}{7.45}=\frac{5.479}{7.45}=0.735$$

由上述计算结果可以看出：T_A 比 T_B 更接近 0，故 A 组的综合结果比 B 组的综合结果更可靠。

我们也可以给被综合的语言数据的离差选择一个合适的语言描述，也就是说离差度量可以转换为一个模糊变量，表 4.4 给出了 7 个用来描述离差大小的模糊集，例如模糊集“Low”的隶属函数就用梯形表示(其他也相同)，其模糊值用一个四元数组(0.2，0.3，0.05，0.075)表示。须注意的是这些值都是系统设计者事先主观定义的。

表 4.4 语言离差度量的模糊值

Very-Low	(0,0.15,0,0.1)
Low	(0.2,0.3,0.05,0.075)
Rather-Low	(0.35,0.44,0.075,0.05)
Medium	(0.45,0.55,0.05,0.05)
Rather-High	(0.56,0.65,0.05,0.075)
High	(0.7,0.8,0.075,0.05)
Very-High	(0.85,1,0.1,0)

为了得到语言值，可按如下方式获得：给定一个确定的值 T 和一个语言术语集 $L_i, i=1,2,\cdots,n$，检测语言术语为 T 时的隶属值 $\mu_{L_i}(T)$，选择具有最高隶属值的语言术语。

例如，对例 6 而言，表 4.4 给出对 A 组抽样来说，由于

$$\mu_{\text{Medium}}(0.447) \approx 1.0$$

故对 A 组抽样的离差选用“Medium”这一语言术语。而对 B 组抽样来说，由于

$$\mu_{\text{High}}(0.735) = 1.0$$

所以对 B 组抽样的离差选用“High”这一语言术语。

第五章　模糊产生式规则的匹配计算

在模糊专家系统中，模糊产生式规则的前件与用户所提供的事实之间的匹配计算是一个重要的问题。目前，有多种方法可以处理前件与事实的匹配计算问题，例如第二章和第三章所介绍的在讨论两个模糊数之间的距离和贴近度时所采用的计算方法等等。本章将在 Zadeh 的真值关系的概念基础上，从另一个角度详细讨论模糊专家系统中前件与事实的匹配计算问题，下一章将讨论加权模糊匹配的计算问题。

5.1　前件与事实之间的真值关系

目前，人工智能工作者和知识工程师研制和开发的专家系统我们都可以基本上将它们看作是一些分类系统，或者反过来说，采用人工智能技术所构造的分类系统称为专家分类系统。

在专家系统中，分类规则集可一般地表示成如下形式：

IF X_1 is A_{11} and X_2 is A_{12} and … and X_n is A_{1n}
　THEN Class is C_1
IF X_1 is A_{21} and X_2 is A_{22} and … and X_n is A_{2n}
　THEN Class is C_2
　⋮
IF X_1 is A_{m1} and X_2 is A_{m2} and … and X_n is A_{mn}
　THEN Class is C_m

其中，每个规则最多有 n 个前件命题，$C_1, C_2, \cdots, C_m$ 是类型名，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是属性名，$A_{11}, A_{12}, \cdots, A_{mn}$ 是属性值。属性值可以精确地给出，但有时要专家清楚地描述它又会使专家感到十分困难，

换句话说，分类规则的前件命题有的是精确的命题，而有的则可能是不精确的命题。

为了实现对象的分类，就需要有与分类规则的前件部分相关的断言，与对象相关的断言是由用户提供的。由于用户的局限性，他提供的断言可能是精确的，也可能是不精确的。所有分类规则的结论部分都是精确的命题。

在前面几章我们已讨论过，由于在专家系统中出现了不精确性，我们可以采用模糊集理论来表示和处理系统中的这些不精确知识。这样，在系统运行时，确定哪个规则与当前数据库匹配都是按照从 0 到 1 的连续区间来考查的，也就是说，在模糊专家系统中，前提与事实之间的匹配程度是在[0,1]之间取值，而传统的专家系统是在{0,1}之中取值，这表明模糊专家系统允许部分匹配。而传统的专家系统是不允许部分匹配的。

为了计算不精确的断言与不精确的前件之间的部分匹配的程度，除了我们前面已经介绍过的方法外，还有一些学者也提出了一些不同的计算方法，如 Carol 提出的采用可能性/必要性两个度量来量化部分匹配，Leung 将可能性和必要性组合成一个单一的量度来表示部分匹配等等。

由于一个精确的断言可看作是一个不精确断言完全收缩的结果(参考后面的图例)，因此，一个检测不精确断言和不精确前件匹配的计算方法也应该可以用来计算精确断言和不精确前件的匹配问题。

由于领域专家知识的特殊性，规则前件中的语句可能是精确的，也可能是不精确的、同样，用户提供的事实(断言)可能是精确的，也可能是不精确的。这样，规则的前件与事实匹配就会出现如下四种情况：

1. 精确的前件语句与精确断言；

2. 精确的前件语句与不精确的断言；

3. 不精确的前件语句与精确断言；

4. 不精确的前件语句与不精确的断言。

由这里可以看出，模糊专家系统与传统的专家系统是不同的，在传统专家系统中，匹配仅是上述第一种情况，匹配的结果仅取“yes”或“no”，而模糊专家系统不仅具有上述特征，它还允许部分匹配，即匹配的结果不是在{0,1}中取值，而是在[0,1]中取值。

本节我们先讨论规则的前件与断言之间的真值关系。给定一个断言(在综合数据库中)和模糊产生或规则前件中的命题，那么断言“X is A^*”中的 A^* 与命题“X is A”中的 A 就存在某种确定的关系，我们将这种关系称为真值关系(用 TR 表示)，并定义为“给定 X is A^* 后，语句 X is A 的真值”。对于非模糊的 A^* 和 A 而言，TR 完全可以用“yes”和“no”来表示 A^* 是否是与 A 相同的符号。Zadeh 将模糊的 A^* 和 A 的真值定义为：

$$\begin{aligned}\mathrm{TR}(A^*,A) &= \mathrm{Truth}\ (X \text{ is } A \mid X \text{ is } A^*) \\ &= \int \mu_{A^*}(x)/\mu_A(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

这里，$\mu_{A^*}(x)$表示 x 属于 A^* 的程度，$\mu_A(x)$表示 x 属于 A 的程度。对任意 $i\in[0,1]$，有 $\mu_A(x)=i$ 和 $x\in X$ 使得

$$\mu_{TR}(i) = \max_i \mu_{A^*}(x)$$

A 和 A^* 可以是模糊集，也可以是普通集合，普通集合可看作是一个特殊的模糊集合，它的隶属度要么是 0，要么是 1。而 TR 通常是[0,1]的一个模糊集。

由于在计算机上由两个连续模糊集 A 和 A^* 计算出连续的 TR 相当麻烦，因而我们仅考虑单位区间[0,1]中的 11 个点的离散集合：

{0,0.1,0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,0.7,0.8,0.9,1.0}

这样，TR 就可描述为：

1. 当 A 不精确时，TR 是论域{0,0.1,0.2,…,1.0}中的一个模糊集，且可由上面的定义计算获得。

2. 当 A 精确时，TR 是论域{0,1}中的一个模糊集。由于对精

确的 A 不允许部分匹配，故 TR 只能是$\{1/0,0/1\}$或$\{0/0,1/1\}$，因此，一个计算得到的 TR 不是$\{0/0,1/1\}$，就应将它变换成$\{1/0,0/1\}$。

例 1 假定有如下的一个规则和断言：

IF X is A THEN Y is B （规则）

X is A* （断言）

对 $X=[10,20,30,40]$，假定离散和不精确的 A 为 $A=\{1/10,0.6/20,0.6/30,0.2/40\}$，离散和不精确的 A^* 为 $A^*=\{1/10,0.4/20,0.7/30,0.8/40\}$，那么我们则可得到：

$$\begin{aligned}\mathrm{TR}(A^*,A)&=\{1/1,0.4/0.6,0.7/0.6,0.8/0.2\}\\&=\{1/1,0.7/0.6,0.8/0.2\}\end{aligned}$$

例 2 对精确的 A

$$A=\{0/10,1/20,1/30,1/40\}$$

和不精确的 A^*

$$A^*=\{0.5/10,0.7/20,1/30,0.8/40\}$$

则有

$$\mathrm{TR}=\{0.5/0,1/1\}$$

应将这一结果变换为

$$\mathrm{TR}=\{1/0,0/1\}$$

5.2 匹配程度的计算

由于 TR 表示了 A^* 和 A 之间的关系，那么我们就可用它来评估规则前件与断言相匹配的程度。为了表示它们之间的匹配程度，我们用-1 和 1 之间的一个值来表示它们的匹配结果，这里

$+1$ 表示前件 A 完全为断言所满足，即 $A=A^*$ 或 A^* 完全为 A 所包含。

-1 表示断言 A^* 完全不满足前件 A，即前件的否定$(1-A)$完全为 A^* 所满足。

0 表示中间状态，即 A^* 满足 A 和 $1-A$ 的程度是相同的。

为讨论的方便，我们将匹配程度(DM)用两个新的参数 M_+ 和 M_- 表示，它们分别定义为

$$M_+ = \max\{\min(\mu_d, \mu_n)\}$$
$$M_- = \max\{\min(1-\mu_d, \mu_n)\}$$

其中，μ_d 和 μ_n 分别是 TR 的分母和分子，M_+ 度量 A 和 A^* 覆盖的程度，而 M_- 则度量 $1-A$ 和 A^* 所覆盖的程度，因此，M_+ 提供了 DM 的可靠性，而 M_- 提供了 DM 的不可靠性。

M_+ 和 M_- 也可以直接由 A 和 A^* 计算得到：

$$M_+ = \max\{\min(\mu_A, \mu_{A^*})\}$$
$$M_- = \max\{\min(1-\mu_A, \mu_{A^*})\}$$

很明显，$0 \leqslant M_+, M_- \leqslant 1, M_+ + M_- \geqslant 1$。

图 5.1(a)～(e)给出了不精确的 A，不精确的 A^*，$1-A$ 以及它们相应的 TR，M_+ 和 M_- 的图形表示。A，A^* 和 $1-A$ 的原始情况表示在图的左边，X 轴表示可能的对象值，Y 轴则表示对象值在 A，A^* 和 $1-A$ 中的隶属度。我们可以看出，M^+ 相应于 A^* 和 A 相交点中的极大值，类似地，M_- 则相应于 A^* 和 $1-A$ 的相交点中的极大值。

(a)～(e)的右图给出了根据左图的 A，A^* 和 $1-A$ 所计算出的 TR 值，X 轴和 Y 轴分别表示 A 和 A^* 的隶属度。M_+ 是 μ_n 和 μ_d 的交点中的极大值，M_- 则是 μ_n 和 $1-\mu_d$ 的交点中的极大值。不难看出，M_+ 和 M_- 从左图和从右图计算出的结果是相同的，这也就说明从左图和从右图计算出的 DM 也是相同的。

在图 5.1(a)中，A^* 完全为 A 所包含，因此由前面的定义可得出：匹配程度为+1。对 A^* 和 A，$M_- \leqslant 0.5$，而 $M_+ = 1$。当 $A^* = A$ 时，$M_- = 0.5$(即 P 点)，$M_+ = 1$，且 DM=1。当 A^* 收缩时，M_- 点将从 P 点向 Q 点移动。如果 A^* 完全收缩后，它就成为一个精确的点(见图 5.2(a))，此时 $M_- = 0$(点 Q)，$M_+ = 1$。因为在图 5.2(a)中，A^* 所在的点对 A 而言其隶属度为 1，A^* 完全满足 A，所以 DM

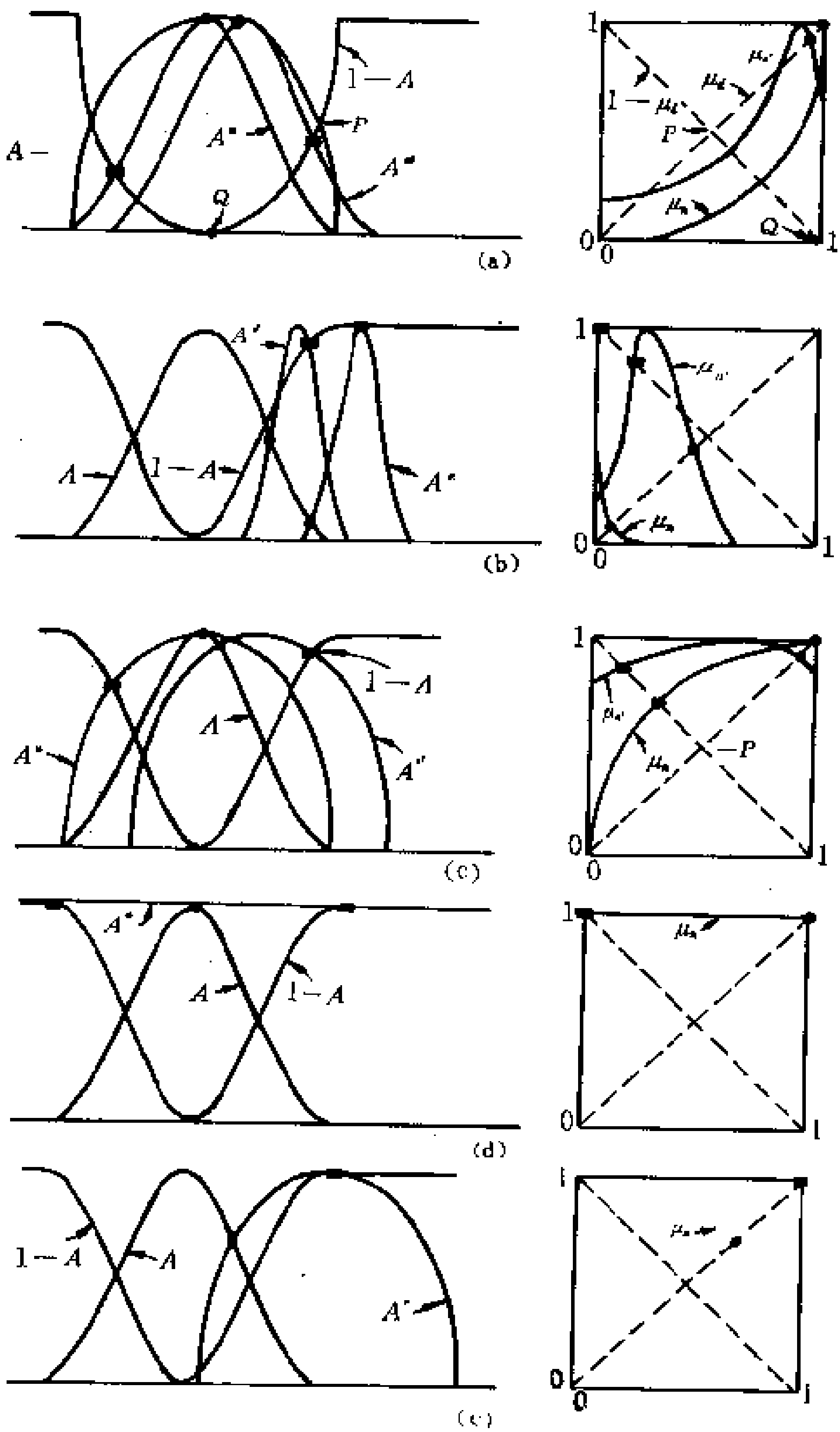


图 5.1　不精确的 A^* 与 A 的各种匹配情况

$=1$。如果 A^* 处在两个极端情况($A^*=A$ 和精确的 A^*)的中间状况时,DM 仍为 1。如果 A^* 向右移动到 $A^{*'}$,此时 M_+ 将减小,而 M_- 将增加,所以 DM 的值将减小。对 $A^{*'}$ 和 A,有 $M_+\geqslant 0.5$,$M_-\leqslant 0.5$。

在图 5.1(b)中,A^* 完全为 $1-A$ 所包含,因此由定义应得到 $\mathrm{DM}=-1$。如果 A^* 向左移动到 $A^{*'}$,此时 M_+ 减小,而 M_- 的值将要增加,所以 DM 的值将要增加。对图 5.1(b)的情况,$M_+\leqslant 0.5$,$M_-\geqslant 0.5$。

在图 5.1(c)中,A^* 和 $A^{*'}$ 为 A 所包含的部分大于 A^* 和 $A^{*'}$ 为 $1-A$ 所包含的部分,所以 DM 的值应为正的,M_- 点位于 P 点($M_-=0.5$)和 R 点($M_-=1$)之间,且 $M_+\geqslant M_-\geqslant 0.5$。

图 5.1(d)是图 5.1(c)的一种特殊情况,这里 M_+ 和 M_- 都为 1。我们可以把图 5.1(d)中的 A^* 看成是图 5.1(c)中的 A^* 完全膨胀的结果。图 5.1(d)中的 A^* 可以解释为"%不知道",且 A 与 A^* 的匹配程度为 0。

图 5.1(e)是图 5.1(c)的相反情况,在(e)中 $M_-\geqslant M_+\geqslant 0.5$,且匹配程度为负值。

从上面的分析以及对 M_+ 和 M_- 的边界值要求匹配程度应是连续的条件下,可以得出如下结果:

1. 如果 $M_+\geqslant 0.5$ 和 $M_-\leqslant 0.5$,匹配程度为

$$\mathrm{DM}=2\times M_+-1 \tag{5.1}$$

2. 如果 $M_+\geqslant 0.5$ 和 $M_-\geqslant 0.5$,匹配程度应为

$$\mathrm{DM}=2\times(M_+-M_-) \tag{5.2}$$

3. 如果 $M_+\leqslant 0.5$ 和 $M_-\geqslant 0.5$,则匹配程度为

$$\mathrm{DM}=-(2\times M_--1) \tag{5.3}$$

当 M_- 小于 0.5 时,仅由 M_+ 来确定 DM(匹配程度),类似地,当 $M_+\leqslant 0.5$ 时,则仅由 M_- 来确定 DM,否则,DM 取决于 M_+ 和 M_- 的差。

对边界值 $M_+=0.5$ 和 $M_-=0.5$,DM 可以采用上面 3 个计算

方法中的任意一个来计算，所得结果是相同的：

$$DM = 2 \times M_{+} - 1 = 2 \times 0.5 - 1 = 0$$

$$DM = 2 \times (M_{+} - M_{-}) = 2 \times (0.5 - 0.5) = 0$$

$$DM = -(2 \times M_{-} - 1) = -(2 \times 0.5 - 1) = 0$$

当 $M_{+}=1$ 和 $M_{-}=0.5$ 时，DM 采用(5.1)式或(5.2)式计算所得的结果也是相同的：

$$DM = 2 \times M_{+} - 1 = 2 \times 1 - 1 = 1$$

$$DM = 2 \times (M_{+} - M_{-}) = 2 \times (1 - 0.5) = 1$$

当 $M_{+}=0.5$ 和 $M_{-}=1$ 时，DM 采用(5.2)式或(5.3)式计算所得的结果也是相同的：

$$DM = 2 \times (M_{+} - M_{-}) = 2 \times (0.5 - 1) = -1$$

$$DM = -(2 \times M_{-} - 1) = -(2 \times 1 - 1) = -1$$

在图 5.1(a)的情况下使用(5.1)式，则 A^{*} 和 A 之间的匹配程度为

$$DM = 2 \times M_{+} - 1 = 2 \times 1 - 1 = 1$$

假定对于 $A^{*\prime}$ 和 A 有 $M_{+}=0.9, M_{-}=0.4$，那么 A 与 $A^{*\prime}$ 的匹配程度为：

$$DM = 2 \times M_{+} - 1 = 2 \times 0.9 - 1 = 0.8$$

(5.2)式可应用于图 5.1(c)～(e)的情况，对图 5.1(c)中的 A^{*} 和 A，$M_{+}=1$ 和 $DM=2\times(1-M_{-})$。当 $M_{-}=0.7$ 时则 $DM=2\times(1-0.7)=0.6$。对 $A^{*\prime}$ 和 A 而言，其 M_{+} 小于 A^{*} 和 A 之间的 M_{+} 值，而 $A^{*\prime}$ 和 A 之间的 M_{-} 值则大于 A^{*} 和 A 之间的 M_{-} 值，且 $M_{+} \geqslant M_{1}$。假定 $M_{+}=0.9$ 和 $M_{-}=0.8$，则可得到

$$DM = 2 \times (M_{+} - M_{-}) = 2 \times (0.9 - 0.8) = 0.2$$

在图 5.1(d)的情况下

$$DM = 2 \times (M_{+} - M_{-}) = 2 \times (1 - 1) = 0$$

在图 5.1(e)的情况下，当 $M_{+}=0.7$ 和 $M_{-}=1$ 时，有

$$DM = 2 \times (M_{+} - M_{-}) = 2 \times (0.7 - 1) = -0.6$$

(5.3)式可应用于图 5.1(b)的情况，A 与 A^* 的匹配程度为

$$\mathrm{DM}=-(2\times M_{-}-1)=-(2\times 1-1)=-1$$

如果对图 5.1(b)中的 $A^{*'}$和 A，$M_{+}=0.4$ 和 $M_{-}=0.7$，则有

$$\mathrm{DM}=-(2\times M_{-}-1)=-(2\times 0.7-1)=-0.4$$

图 5.2(a)～(e)给出了不精确的 A 与精确的 A^* 的各种匹配情况。精确的 A^* 可以看作是不精确的 A^*完全收缩的结果。图 5.2(a)和图 5.2(b)分别表示 A^*完全为 A 和 $1-A$ 所包含，在图 5.2(c)中，由于 A^* 为 A 所包含的部分大于 A^* 为 $1-A$ 所包含的部分，所以 DM 应为正值。在图 5.2(d)中，A^* 为 A 和 $1-A$ 所包含的部分相同，由定义可知在这种情况下 DM 应为 0。图 5.2(e)是图 5.2(b)相反的情况。

对图 5.2 所有的情况：

(a) $\mathrm{DM}=1$

(b) $\mathrm{DM}=-1$

(c) $0<\mathrm{DM}<1$

(d) $\mathrm{DM}=0$

(e) $-1<\mathrm{DM}<0$

$M_{-}=1-M_{+}$，且第二种情况(即 $M_{+}\geqslant 0.5$ 和 $M_{-}\geqslant 0.5$)不可能出现，而 $\mathrm{DM}=-(2\times M_{-}-1)$应变为：

$$\mathrm{DM}=-\{2\times(1-M_{+})-1\}=2M_{+}-1$$

所以，DM 仅需用 $\mathrm{DM}=2\times M_{+}-1$ 来计算。对精确的 A^*(具有一个元素)和不精确的 A，M_{+}相应于 A^*在模糊集 A 中的隶属度，而 DM 则表示 A^* 在 A(其大小由[0,1]变为[−1,1]中的隶属度。

在 A 是精确的值时，不管 A^*是精确的还是不精确的，都不允许部分匹配，且 TR 应为{1/0,0/1}或{0/0,1/1}，因此可能的 DM 值仅能为+1 或−1。对精确的 A，$\mathrm{DM}=2\times M_{+}-1$ 也成立，对 TR ={1/0,0/1}，$M_{+}=0$ 和 $M_{-}=1$ 且 DM 为−1。对 TR={0/0,1/1}，$M_{+}=1$ 和 $M_{-}=0$，则 DM 为 1。

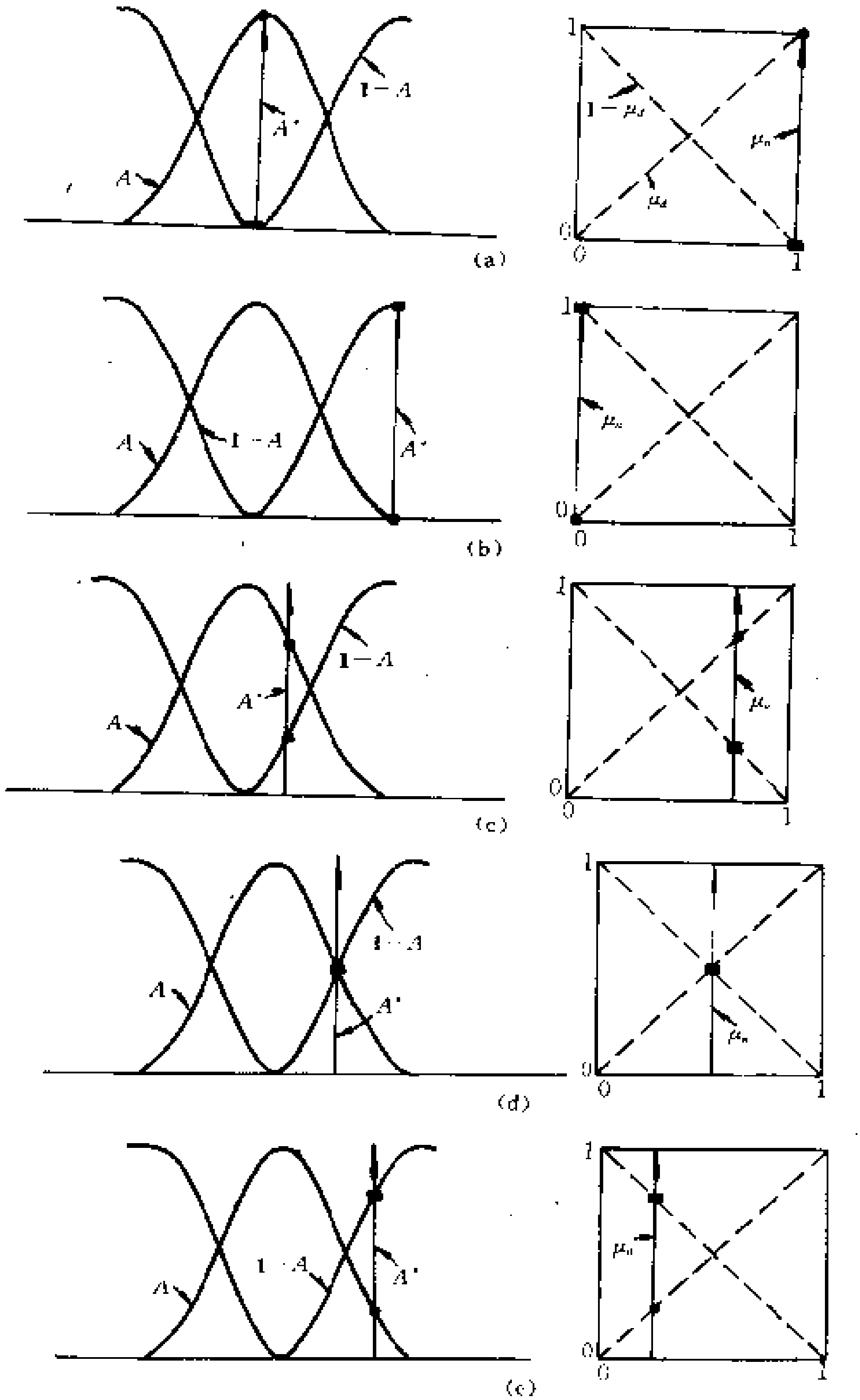


图 5.2 不精确的 A 与精确的 A 的各种匹配情况

如果将匹配的程度范围改为从 0 到 1，这里 1 表示前件完全被满足，0 表示前件完全不被满足，0.5 则表示中间状态。此时计算 DM 的(5.1)～(5.3)式应加 1 后再除以 2，这样(5.1)式～(5.3)式就变成如下的形式：

如果 $M_+ \geqslant 0.5$，$M_- \leqslant 0.5$，则

$$DM_{[0,1]} = M_+ \tag{5.4}$$

如果 $M_+ \geqslant 0.5$，$M_- \geqslant 0.5$，则

$$DM_{[0,1]} = (M_+ - M_-) + 0.5 \tag{5.5}$$

如果 $M_+ \leqslant 0.5$，$M_- \geqslant 0.5$，则

$$DM_{[0,1]} = 1 - M_- \tag{5.6}$$

这里 $DM_{[0,1]}$表示匹配程度在[0,1]中取值。

对图 5.2 的 5 种情况，由于 $M_- = 1 - M_+$，所以精确断言 A^* 和一个不精确前件 A 之间的匹配程度 $DM_{[0,1]}$可用 $DM_{[0,1]} = M_+$ 计算，所以 $DM_{[0,1]}$相应于 A^* 在模糊集 A 中的隶属度。此外，无论 A^* 是不精确的还是精确的值时，对一个精确的 A 而言，$DM_{[0,1]} = M_+$ 也是成立的。

5.3 与其他匹配计算方法的比较

本节将讨论所给出的匹配计算方法与其他匹配计算方法之间的特性和优缺点。特别是在前件不精确而断言是精确的时候对各种匹配计算方法所得到的结果进行比较。

1. 与 Leung 方法的比较

在 Leung 提出的方法中，为了计算匹配程度，他将“可能性”和“必要性”合并成一个量，这样，A^* 和 A 之间的部分匹配按如下方法进行计算：

$$
\begin{aligned}
&\text{IF} \quad N(A|A^*) > 0.5 \\
&\text{THEN} \quad DM_{[0,1]} = P(A|A^*) \\
&\text{ELSE} \quad DM_{[0,1]} = \{N(A|A^*) + 0.5\} \times P(A|A^*)
\end{aligned} \tag{5.7}
$$

其中，$P(A|A^*)$是在给定 A 的情况下，A^* 的可能性，$N(A|A^*)$则是在给定 A 的情况下，A^* 的必要性。

下面是 A^* 和 A 之间可能性和必要性度量的计算公式：

$$P(A|A^*) = \max\{\min(\mu_A, \mu_A^*)\}$$

$$N(A|A^*) = 1 - P(1 - A|A^*)$$

注意，在 Leung 的方法中，由于 $P(A|A^*)$和 $N(A|A^*)$的取值范围在 0 和 1 之间，所以匹配程度的取值范围也应在 0 和 1 之间。

通过比较我们可看出，可能性度量相应于我们前面定义的 M_+，而必要性度量则等于 $1-M_-$。

在图5.1(a)和5.2(a)的情况下，$M_- \leqslant 0.5$(即$N(A|A^*) \geqslant 0.5$)，采用 Leung 的方法计算出的 $DM_{[0,1]}$与采用(5.4)式所得到的 $DM_{[0,1]}$是相等的，因为两种计算方法都是采用下式来计算的：

$$P(A|A^*) = \max\{\min(\mu_A, \mu_A^*)\} = M_+$$

但是，在不精确的 A^*完全为 $1-A$(图 5.1(b)所示)所包含时，两种方法所得到的计算结果是不同的。例如，在 $A^*=1-A$ 的情况下，由定义应得到 $DM_{[0,1]}$为 0，采用(5.5)式或(5.6)式所得到的 $DM_{[0,1]}$符合这一要求：

$$M_+=0.5, \quad M_-=1$$

$$\begin{aligned} DM_{[0,1]} &= (M_+ - M_-) + 0.5 \\ &= (0.5-1)+0.5=0 \qquad \text{采用(5.5)式} \\ DM_{[0,1]} &= 1-M_- = 1-1=0 \qquad \text{采用(5.6)式} \end{aligned}$$

但采用(5.7)式(即采用 Leung 的方法)所得到的结果却不符合上述要求：

$$P(A|A^*)=0.5, \quad N(A|A^*)=0$$

$$\begin{aligned} DM_{[0,1]} &= \{N(A|A^*)+0.5\} \times P(A|A^*) \\ &= \{0+0.5\} \times 0.5 \\ &= 0.25 \end{aligned}$$

当 A^*是精确值和 A 是不精确值时(即图 5.2(a)～(e)的各种

情况)，计算出的$DM_{[0,1]}$值应与A^*在A中的隶属度相等，这是因为A^*可以看作是某个论域中的一个元素，而A则可看作是同一个论域中的一个模糊集。对图5.2(a)～(e)的所有情况，采用我们的方法所得到的结果满足这一要求，但采用Leung的方法仅满足图5.2(a)～(d)，而在图5.2(e)的情况下采用Leung的方法则不满足上述要求，例如，假定$M_+=0.2$，即A^*在A中隶属度为0.2，采用(5.4)式或(5.6)式得到的$DM_{[0,1]}$是等于上述隶属度的：

$$DM_{[0,1]} = M_+ = 1 - M_- = 0.2$$

而采用(5.7)式所得到的$DM_{[0,1]}$却不等于A^*在A中的隶属度：

$$P(A|A^*)=0.2 \quad N=(A|A^*)=0.2$$

$$\begin{aligned} DM_{[0,1]} &= \{N(A|A^*)+0.5\}\times P(A|A^*) \\ &= \{0.2+0.5\}\times 0.2 \\ &= 0.14 \end{aligned}$$

2. 与Ogawa方法的比较

在Ogawa的方法中，A包含A^*的程度用来表示A与A^*的部分匹配程度。A包含A^*的程度(用$INC(A,A^*)$表示)用下式计算：

$$DM_{[0,1]} = INC(A,A^*) = \frac{\sum \min\{\mu_A(x_i),\mu_A^*(x_i)\}}{\sum \mu_A(x_i)} \tag{5.8}$$

当规则和事实不确定的时候，$DM_{[0,1]}$按下式进行计算：

$$CF_a \times INC(A,A^*) \times CF_r$$

其中，CF_a和CF_r分别表示断言和规则的可靠性(或确实性)，它们的值满足：$0\leqslant CF_a, INC(A,A^*), CF_r \leqslant 1$。

在图5.2(a)所给的A和A^*的情况下，即$M_+=1$和$M_-\leqslant 0.5$，此时按我们的方法应得到$DM_{[0,1]}$为1，但采用(5.8)式计算时，除$A=A^*$的情况$DM_{[0,1]}$仍为1外，其他情况采用(5.8)式计算时$DM_{[0,1]}$均小于1。例如对任意x_i，使得$\mu_A(x_i)\geqslant\mu_{A^*}(x_i)$，

$$\sum \min\{\mu_A(x_i),\mu_{A^*}(x_i)\} = \sum \mu_{A^*}(x_i) < \sum \mu_A(x_i)$$

由(5.8)式可知,INC(A,A^*)显然小于 1。

在 $A^*=1-A$ 时,对任意 x_i,

$$\min\{\mu_A(x_i),\mu_{1-A}(x_i)\} \geqslant 0$$

因此,INC(A,A^*)是不等于 0 的。

对图 5.1(c)和(d)的 A^* 和 A 而言,按我们的方法应得到 $DM_{[0,1]}$小于 1,但采用(5.8)式计算则得到 INC(A,A^*)=1,这显然是不正确的,例如对任意的 x_i,使得 $\mu_A(x_i)=\mu_{A^*}(x_i)$,则

$$\sum \min\{\mu_A(x_i),\mu_{A^*}(x_i)\} = \sum \mu_A(x_i)$$

再由(5.8)式,显然得到 INC(A,A^*)=1。

对精确的 A^* 值和不精确的 A 值(如图 5.2(a)~(e)),INC(A,A^*)不等于 A^* 在 A 中的隶属度。例如,当 $M_+=0.2$(即 A^* 在 A 中的隶属度为 0.2)时,INC(A,A^*)的计算结果是小于 0.2 的:

$$\sum \min\{\mu_A(x_i),\mu_{A^*}(x_i)\} = 0.2$$

$$\sum \mu_A(x_i) > 1$$

所以

$$\mathrm{INC}(A,A^*) < 0.2$$

最后,在结束这一节的讨论时,对规则的前件中含有"合取"或"析取"的情况作一简单的讨论。

如果一个规则的前件由几个用"合取"符号连接起来的命题组成,为了计算规则总的匹配程度,就应对这些命题的匹配程度进行组合:

$$DM_{总} = f(DM_1,DM_2,\cdots,DM_{n+1})$$

其中,DM_i 是前件中第 i 个命题与它相应的断言的匹配程度。对 f 的缺省函数定为"取小"值。

如果规则前件中的命题是用"析取"符号连接起来的,那么可以将这一规则分裂为多个规则,例如

IF (X_1 is $A_{i1}$and X_2 is A_{i2}) or (IF X_1 is A_{j1} and X_3 is A_{j3})

THEN Class is C

这一规则就可分裂成如下两个规则：

IF X_1 is A_{i1} and X_2 is A_{i2} THEN Class is C

IF X_1 is A_{j1} and X_3 is A_{j3} THEN Class is C

具有 k 个析取项的析取规则的匹配程度可按如下方式进行计算：

$$DM_{总} = g(DM_1, DM_2, \cdots, DM_k)$$

其中，$DM_i(i=1,2,\cdots,k)$表示第 i 个析取项与它对应的断言的匹配程度。对 g 的缺省函数我们定为“取大”值。

为了表示分类的确定值，需要用到分类规则最后的 DM，DM 越大，则该对象归于该规则所指示的那一类的可能性就越大。

5.4 几个例子

本节讨论在几个实际例子中，运用本章所介绍的计算规则前件与事实的匹配程度的方法来处理实际例子的计算问题。

例 3 在一个风险分析专家系统中，有如下两个模糊产生式规则：

Rule 1 IF Load size is Very Heavy
and Frequency of life is High
THEN Task risk is Extremely High

Rule 2 IF Load size is Very Heavy
and Frequency of lift is Medium
and Horizontal distance away from the body is Close
and Height is Low
THEN Task risk is High

规则 1 有两个属性，它的风险类型是“Extremely High”，规则

2 有 4 个不精确的属性:Very Heavy,Medium,Close 和 Low,当规则 2 的前件部分被满足后,赋值给它的风险类型应为"High"。

假定用户给出的断言为:

Load size is 35kg,Frequeucy of lift is High,Horizontal distance away from the body is zocm,Height is More-or-less Low

那么规则 2 最后的匹配程度应为

f{DM (35kg,Very Heavy),DM (High,Medium),
DM (20cm,Close),DM (More-or-less Low,Low)}

而规则 1 的匹配程度则为

f{DM (35kg,Very Heavy),DM (High,High)}

这里,DM(x,y)表示断言 x 和前件中的一个属性值 y 之间的匹配程度,f 是组合多个 DM 的一个数学函数。

在上面的各种匹配中,DM (35kg,Very Heavy)和 DM (20cm,Close)是精确断言与一个不精确前件命题之间的匹配程度,DM (35kg,Very Heavy)可以直接由 35kg 在模糊集 Very Heavy 中隶属度而得到,例如,如果 35kg 在"Very Heavy"中隶属度为 0.9,那么 DM(在[-1,+1]的区间中取值)的计算结果为

$$\mathrm{DM}=2\times M_t-1=2\times 隶属度-1=2\times 0.9-1=0.8$$

若 DM 在[0,1]中取值,那么 DM (35kg,Very Heavy)应为

$$\mathrm{DM}_{[0,1]}=M_+=隶属度=0.9$$

类似地,DM (20cm,Close)也可以由 20cm 在模糊集"Close"中的隶属度来确定。

DM (High,Medium),DM (More-or-less low,Low)和 DM (High,High)都是不精确的断言与不精确的前件命题的匹配程度,它们都可以采用节 2 所描述的方法来进行计算。假定分类系统仅有上述的两条规则,且规则 1 的 DM 大于规则 2 的 DM,那么任务风险将是"Extremely High"。

例 4 在从数据库进行信息检索时,使用的"询问"和数据库

中的“记录”可分别看作是一个分类规则和被分类的一些对象，将记录取来并与一个咨询语句(分类规则)进行匹配，这样，对每个记录，我们都可得到它的匹配程度。由这里可以看出，采用咨询语句从数据库进行信息检索可以被看作是一个特殊的专家分类系统。

如果匹配程度大于预先设置的某个阈值，那么记录就取出放在输出文件上，否则就删除它再调用下一个记录。最后的输出文件则包含了所有的与咨询语句匹配的记录。

假定有一个数据库(如表 5.1 所示)和一个如下的询问语句：

Find all men who are tall and weight over 150 lbs

这一询问语句可以转换成如下的分类规则：

IF Sex is Male and Height is Tall and weight is >150Ibs

THEN Class is Yes

表 5.1 一个简单的数据库

Name	Sex	Height	Weight
Michael	Male	More-or-less Tall	Heavy
John	Male	6′1″	170lbs
Mary	Female	Short	Light
Mark	Male	Very Tall	Moderate
Judy	Female	5′6″	140lbs

上述规则的第一个属性值可以为 Michael，John 和 Mark 所满足，第二个属性值“Tall”是一个不精确的值，第三个属性值“>150 lbs”是一个精确的值。对于 Michael，最后的匹配程度为：

f{DM (Male,Male),DM (More-or-less Tall,Tall),
DM (Heavy,>150lbs)}

DM (Male,Male)是精确断言与精确前件命题的匹配程度，其值为 1，DM(More-or-less Tall,Tall)是不精确前件命题与不精确断言的匹配程度，DM(Heavy,7150lbs)是不精确命题与精确断言之

间的匹配程度。对于 Judy，其匹配程度为：

f{DM (Female，Male)，DM(5′6″，Tall)，DM(140 lbs，>150 lbs)}

其中，DM(Female，Male)＝－1，DM(5′6″，Tall)是精确断言与不精确前件命题的匹配程度，它等于 5′6″在模糊集“Tall”中的隶属度，DM (140 lbs，>150 lbs)则是两个精确命题之间的匹配程度，显然在[－1，1]区间中它应取－1，在[0，1]区间中它应取 0。

例 5 基于知识的决策。决策可以看作是一个分类系统，基于知识的决策系统可以看作是一个专家分类系统。例如，假定我们要决定是否需要割草，决定要割草的规则如下：

Rule 1 IF Grass is Long and Season is Growing
THEN Need is yes

Rule 2 IF Grass is Short or Season is Winter
THEN Need is No

假定 Grass 和 Season 的不精确属性值集分别是{Long，Medium，Short}和{Growing，Non-growing}，图 5.3 和图 5.4 给出了属性值的图形表示。需注意的是“Winter”是描述 Season 的论域中的一个非模糊的子集。对“Need”的可能类型名为“Yes”和“No”。

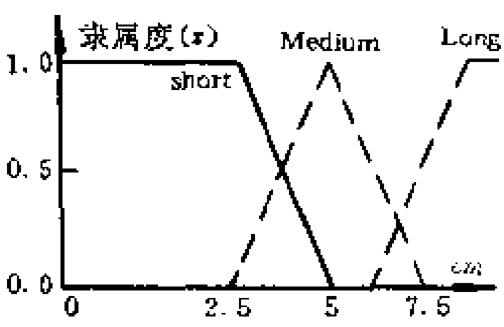


图 5.3 Grass 的属性值

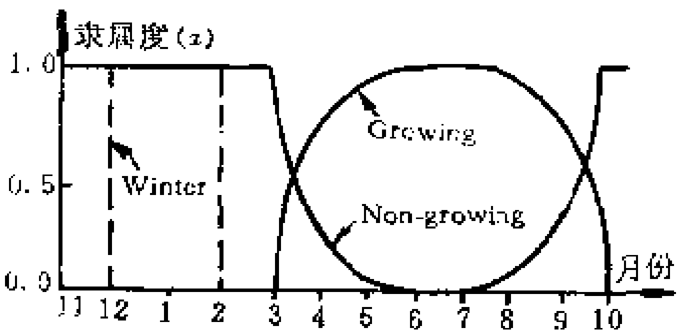


图 5.4 Season 的属性值

一个细心的用户会对“Grass”的高度进行仔细的检测并提供一个精确的数据给分类系统，例如 8cm 长，这样 DM (8cm，Long)和 DM (8c Short)就都是精确断言和不精确前件命题之间的匹配

配程度。

但在大多数情况下，用户对"Grass"的高度只是提供一个不精确的断言，比如说给出"Grass is Long"，这样，匹配计算就是对两个不精确的命题进行运算。

假定数据是 12 月 12 日，那么 DM(December 12,Growing)就是一个不精确的前件命题与一个精确断言之间的匹配程度，若在[—1,1]区间中取值，则 DM(December 12,Growing)＝—1。而 DM (December 12,Winter)则是两个精确命题之间的匹配程度，若在[—1,1]中取值则应为 1。

规则 2 是一个析取规则，我们可将它分裂成如下两个规则：

Rule 2-1　IF Grass is Short
　　　　　THEN Need is No

Rule 2-2　IF Season is Winter
　　　　　THEN Need is No

由于 DM(December 12,Winter)＝1，所以 Rule 2-2 完全被满足，进而得到该专家分类系统所做的决策是不需要割草。

本章我们讨论了断言和规则前件匹配程度的计算方法。一般说来，断言与模糊产生式规则有四个可能的匹配模式，即精确断言与精确前件，精确断言与不精确前件，不精确断言与精确前件，不精确断言与不精确前件。采用本章给出的方法可以一致地计算任何组合类型的匹配程度。

特别是对于精确断言与不精确前件之间的匹配，采用本章给出的方法所计算的结果就等于精确断言在不精确前件中的隶属度，对于任何计算断言与模糊产生式规则的前件的方法来说，这是一个基本的要求，但我们提到的有些方法就不满足这一要求。

采用这一方法计算出的匹配程度(DM)还可以与确定性因子(MYCIN 系统中采用的)进行组合，为了表示断言和规则的不确定性，每个断言可以赋给一个确定性因子 CF_a，每个规则也赋给一个确定性因子 CF_r，若模糊产生式规则中有多个命题的话(每个命

题之间用"*and*"联结)，那么每个命题与它相应的断言的匹配程度 $DM_{[0,1]}$ 应修改为 $CF_a \times DM_{[0,1]}$，那么最后该规则总的分类不确定值应为：

$$CF_r \times f(CF_{a_1} \times DM_{1[0,1]}, CF_{a_2} \times DM_{2[0,1]}, \cdots, CF_{a_n} \times DM_{n[0,1]})$$

其中，$DM_{i[0,1]}(i=1,2,\cdots,n)$ 是第 i 个前件命题与它相应的断言的 $DM_{[0,1]}$。

第六章　加权模糊匹配的计算方法

上一章我们讨论了在模糊专家系统中，在引进 Zadeh 的真值关系的概念基础上，实现模糊产生式规则前件与事实匹配的计算问题。本章将从另一个角度出发来讨论同一个问题，即在模糊集和可能性理论的概念基础上，通过引进估价模糊产生式规则的前件（模式）中原子（命题）的相对重要性的权值来实现模糊模式匹配，匹配的情况可运用模糊集理论中的“取小”和“取大”运算的加权形式来获得。本章所介绍的方法还可以扩充到可变权的情况。

6.1　模糊模式匹配

为了使我们的讨论不仅仅局限于模糊产生式规则的匹配，在本章的讨论中我们将两个匹配对象分别称为模式和数据（当然可以把它理解成如上一章所说的规则前件与断言）。

模式匹配实际上是处理描述一些要求的模式与数据库中某个数据的匹配问题。最简单的情况是查找和检索的数据与表达在模式中的规范说明相一致，这是完全匹配的情况。

当数据含有不精确性和不确定性时，或者当模式包含模糊说明时，此时在模式和数据之间的匹配自然就成了某种程度的匹配，在这种情况下，一个模糊要求（在模式中）可能或多或少被满足，或者说，如果考查的数据是模糊的话，那么我们就不能完全确定一个明确的要求是否成立（相应于模糊断言与精确的前件匹配）。

为了评价数据和模式之间的一致性，我们采用在[0,1]区间内取值的可能性度量和必要性度量来计算它们之间的相容程度，这种模糊模式匹配需要考虑附加在数据分量和模式上的语义表示。

在下面的讨论中假定一个模式呈与/或树状表示，树叶相应于称为原子的基本分量，为简便起见，还假定这些原子不是变量。

模糊模式匹配的基本思想是给模式中的每个原子附加模糊集中的一个隶属函数，以此来限制那些与原子或多或少相容的值，这些值属于表示原子所指属性范围的指定域，例如，“*tall*”可以看作是一个高度的值，它相应于这个论域的一个模糊子集。我们也可用一个标准元素的离散集合来取代数值标度，数据用表来表示，表中的元素都用可能性分布来描述，用以表示数据中的不精确性和不确定性。

由上述的分析可以看出，一个模糊模式表示了边界不明显的一类对象，而一个模糊数据则表示了一个无法得到其精确描述的对象。令 P 和 D 分别表示一个模式原子和具有相同属性的数据分量，要将这两者进行比较。P 和 D 均在域 U 上表达它们的含义，令 μ_P 是原子 P 的隶属函数，π_D 是 D 的可能性分布，两者均是从 U 到[0,1)的映射。令 u 是 U 中的一个元素，那么 $\mu_P(u)$ 就表示值 u 和 P 的含义之间的相容性程度。$\mu_P(u)=1$ 表示 u 与 P 是完全相容(一致)的，而 $\mu_P(u)=0$ 则表示 u 与 P 是完全不相容的。相应地，$\pi_D(u)$理解为 u 是描述由数据模拟的对象属性值的可能性程度，D 是可能性值的一个模糊集，而 P 则是相容值的一个模糊集。例如，$\pi_D(u)=1$ 表示 u 是完全可能的，而 $\pi_D(u)=0$ 则表示 u 是完全不可能作为对象的属性值。在下面的讨论中，我们假定 μ_P 和 π_D 总是正规的，即总存在一个值，它与 P 是完全相容的，在 D 中总存在一个值是完全可能的。

前面我们讨论了模糊模式匹配的基本原理，下面我们讨论匹配的基本表示方法。当用 P 表示的值 u 的集合是普通集合，D 表示 U 中的一个精确值 $d\in U$，只要 $d\in P$，则基本匹配就是成功的。当 P 是一个模糊集时，匹配程度就变为隶属度 $\mu_P(d)$。更一般地，当 D 不精确时，那么隶属度也就变为不精确，而被定义为[0,1]区间中的一个模糊数，称为 D 对于 P 的相容性程度(用 $\mu_P(D)$表

示)，隶属函数 $\mu_{P|D}$定义为

$$\mu_{P|D}(\alpha)=\mathrm{Sup}\{\pi(u)/\mu_P(u)=\alpha\} \quad \forall\ \alpha\in[0,1] \tag{6.1}$$

这个值是 Zadeh 首先提出来的，他把 $\mu_P(D)$解释为在给定一个描述事实的真实状态的参考谓词 D 的情况下，谓词 P 的模糊真值。图 6.1 给出了当 D 和 P 是梯形模糊值时的隶属函数。

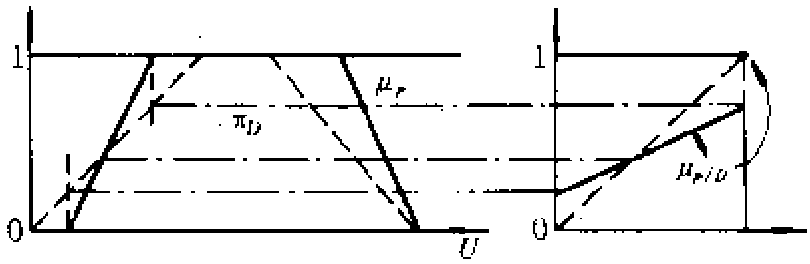


图 6.1 D、P 是梯形模糊数的隶属函数

尽管 $\mu_P(D)$表示了 P 和 D 之间匹配程度的有关信息，但它的运算却十分困难，虽然从理论上看它的解释是十分清楚的，但用户对这个模糊值的理解却显得比较困难。因此，为了计算一个模式原子 P 与其对应的 D 的相容性，我们采用另外两个度量即匹配的可能性程度 $\pi(P,D)$和匹配的必要性(确实性)程度 $N(P,D)$来表示 P 与 D 的相容性。这两个度量分别定义为

$$\pi(P,D)=\mathrm{Sup}\ \min(\mu_P(u),\pi_D(u)) \tag{6.2}$$

$$N(P,D)=\inf_{u\in U}\max(\mu_P(u),(1-\pi_D(u)) \tag{6.3}$$

其中，$\pi(P,D)$给出了 P 和 D 表示的是同一个值 u 的可能性所达到的程度，也可以将 $\pi(P,D)$理解为与 P 相容的值的模糊集与 D 的可能值的模糊集的覆盖程度；$N(P,D)$则给出了 D 值是与 P 相容的值的确实性达到的程度，换句话说，$N(P,D)$可理解为 D 的可能取值的集合为与 P 相容的值集所包含的程度。我们知道：一个事件的确实性就相应于该相反事件的不可能性，我们把这一关系定义成如下的形式：

$$N(P,D)=1-\pi(\overline{P},D) \tag{6.4}$$

其中，$\mu_{\bar{P}}=1-\mu_P$ 是与 P 相容的值的模糊集的补集的隶属函数。很明显，总可得到 $\pi(P,D)\geqslant N(P,D)$。此外值得注意的是，当 μ_F 是表示 μ_P 和 μ_D 的 U 的一个普通子集的隶属函数时，则有 $N(F,F)=1$，否则我们仅有 $N(F,F)\geqslant\frac{1}{2}$。实际上，当两个相同的符号均含有模糊意义时，往往不能完全确定它们指的是同一值集。但在任何情况下，均可得到 $N(S(F),F)=1$，其中，$S(F)$（F 的支持集）定义为 $S(F)=\{u\in U,\mu_F(u)>0\}$。

$\pi(P,D)$和 $N(P,D)$取值 0 和 1 这种极端的情况也是有用的，对 U 的任何模糊集 F，令 $F^0=\{u\in U|\mu_F(u)=1\}$是 F 的核，支集 $S(F)$如上所定义，则可以得到：

(a)$\pi(P,D)=0$　　当且仅当 $S(P)\cap S(D)=\phi$

(b)$\pi(P,D)=1$　　当且仅当 $P^0\cap D^0\neq\phi$

(c)$N(P,D)=1$　　当且仅当 $S(D)\subseteq P^0$

注意，(c)式在模糊集之间定义了一种比普通包含更强的包含关系，即 $\pi_D\leqslant\mu_P$，在通常情况下我们仅有 $N(P,D)\geqslant 0.5$。表 6.1 给出了当 P 和/或 D 是精确的，不精确的(非模糊)或模糊值时，$\pi(P,D)$和 $N(P,D)$各自在[0,1]区间中的取值情况。

需要说明的是，当 D 是精确值时，则 $\pi(P,D)=N(P,D)=\mu_P(D)$，且是[0,1]区间中的一个正规实数。当 D 是不精确值但是非模糊值时，则 $\mu_P(D)$是[0,1]的一个子集，而 $\pi(P,D)$和 $N(P,D)$则分别是集合 $\mu_P(D)$的最小上界和最大下界，在更一般的情况下，如果 τ 是 $\mu_P(D)$的一个模态值(即 $\mu_{P|D}(\tau)=1$)，那么 τ 将是 P 和 D 之间匹配程度的一个很好的纯量指标，即模糊量的一个很好的代表值。

下面的结论表明，对偶$(\pi(P,D),N(P,D))$是 $\mu_P(D)$的一个合理的近似。

表 6.1　$\pi(P,D)$和 $N(P,D)$的取值情况

<table>
<tr><td rowspan="2">P</td><td colspan="3">D</td></tr>
<tr><td>精确
$D=(d)$</td><td>不精确
(非模糊)</td><td>模糊</td></tr>
<tr><td>精确
$P=\{P\}$</td><td>$\pi=N=\begin{cases}1 & P=d\\0 & P\neq d\end{cases}$</td><td>$N=0$
$\pi=\begin{cases}1 & P\in D\\0 & 否则\end{cases}$</td><td>$N=0$
$\pi=\pi_D(P)$</td></tr>
<tr><td>不精确
(非模糊)</td><td>$\pi=N=\begin{cases}1 & d\in P\\0 & d\notin P\end{cases}$</td><td>$N=\pi=\begin{cases}1 & D\leqslant P\\0 & D\cap P=\phi\end{cases}$
$\pi=1,N=0$,否则</td><td>$N>0\Rightarrow\pi=1$</td></tr>
<tr><td>模糊</td><td>$\pi=N=\mu_P(d)$</td><td>$\pi\geqslant N$</td><td>$\pi\geqslant N$</td></tr>
</table>

定理 1　对所有的 P,D 和 τ，当 $\mu_{P|D}(\tau)=1$ 时，则有不等式 $N(P,D)\leqslant\tau\leqslant\pi(P,D)$成立。

证明　$\pi(P,D)$和 $N(P,D)$可由 $\mu_P(D)$按如下方式获得：

$$\begin{aligned}\pi(P,D) &= \pi(\mathrm{TRUE}\,|\,\mu_P(D))\\ N(P,D) &= N(\mathrm{TRUE}\,|\,\mu_P(D))\end{aligned}\tag{6.5}$$

其中，TRUE 是[0,1]的一个模糊集，且有 $\mu_{\mathrm{TRUE}}(u)=u,\forall\ u\in[0,1]$。(6.5)式的第一个式子可进一步写为

$$\pi(P,D) = \operatorname*{Sup}_{u\in[0,1]}\min(u,\mu_{P|D}(u)) \geqslant \min(\tau,\mu_{P|D}(\tau)) = \tau$$

类似地

$$\begin{aligned}N(P,D) &= \inf_{u\in[0,1]}\max(u,1-\mu_{P|D}(u))\\ &\leqslant \max(\tau,1-\mu_{P|D}(\tau)) = \tau\end{aligned}$$ □

由这里可以看出：$[N(P,D),\pi(P,D)]$是 τ 的取值范围，它提供了关于 $\mu_P(D)$的不精确信息。

总之，$\pi(P,D)$和 $N(P,D)$不是两种相似的度量，它们各自有清楚和精确的语义，它们对应着原子灵活匹配的性质。

6.2 匹配计算

假定模糊值的隶属函数是梯形的，因为从实际应用的效果看，梯形隶属函数是很有效的，即使对隶属函数的形状作一点修改，对结果的估计也不会有显著的影响。

与前几章一样，梯形函数也用四元数组(a,b,c,d)表示，图6.2给出了它的图形表示，其中c和d是非负的数。

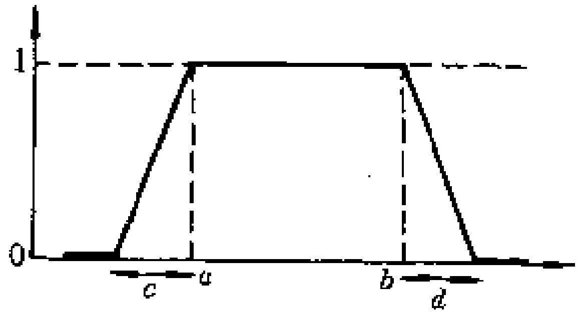


图 6.2　梯形((a,b,c,d))函数的表示

我们可以有$a=b,c=0$或$d=0$，因此精确值和不精确的值都可用四元数组(a,b,c,d)表示。令P和D是两个模糊值，其隶属函数均是梯形，分别表示为(a_1,b_1,c_1,d_1)和(a_2,b_2,c_2,d_2)。可能性度量和必要性度量((6.2)和(6.3)式)可直接由值的实际表示计算出来，看图6.3和图6.4中直线的交点即是$\pi(P|D)$和$N(P|D)$。

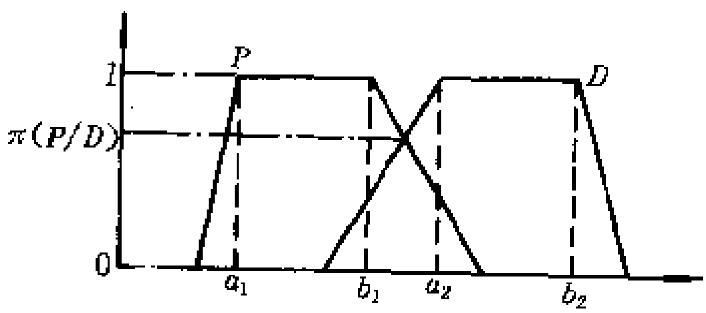


图 6.3　求$\pi(P|D)$的方法

为了获得整个模式和所有数据之间两个总的度量，就需分别

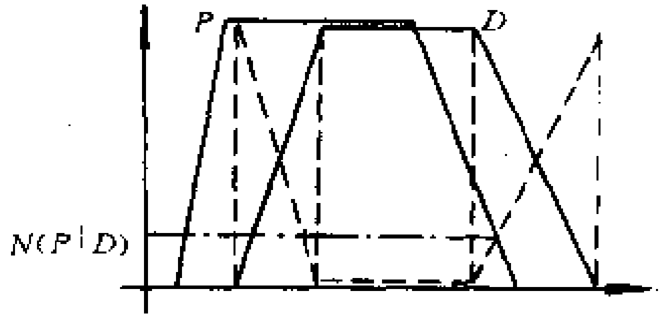


图 6.4　求 $N(P|D)$ 的方法

将原子的可能性和必要性度量进行组合，当模式表示的是合取关系时，即 P_1 and P_2 and … and P_n，则采用"min"运算来实现组合，以分别保持可能性和必要性度量的语义，实际上，我们有

$$\pi(P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_n, D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_n) = \min_{i=1,2,\cdots,n} \pi(P, D) \tag{6.6}$$

$$N(P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_n, D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_n) = \min_{i=1,2,\cdots,n} N(P, D) \tag{6.7}$$

这里，P_i 和 D_i 是定义在同一定义域 U_i 上的，"×"表示两个模糊集 F_i 和 F_j 的笛卡尔积：

$$\mu_{F_i \times F_j}(u_i, u_j) = \min(\mu_{F_i}(u_i), \mu_{F_j}(u_j)) \quad \forall\, u_i \in U_i \quad \forall\, u_j \in U_j \tag{6.8}$$

当模式表示的是原子之间的"析取"关系时，即 P_1 or P_2 or … or P_n，那么(6.6)式和(6.7)式中的"min"运算将换成"max"运算，用 $P_1 + P_2 + \cdots + P_n$ 来代替 $P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_n$，其中"+"是"×"($F + G = \overline{F \times G}$)的对偶。更一般地，对其结构是 and/or 树这种基本要求的模式也可以采用上述方法来进行处理。

需要说明的是，论域 U 中的两个值 u_1 和 u_2 即使它们不相等，我们也可以把它们看作是近似相等的。例如，如果模式中表明"要求是 40 岁的人"，而相应于这个人的数据"39 岁"在某些情况下可将它看作是对这一要求近似地匹配。我们可以采用一个模糊关系 R 来表示这种近似相等的情况，R 是自反的和对称的，即$\forall\, u \in U$，

$\mu_R(u,u)=1$，和$\forall\ u_1\in U,\forall\ u_2\in U,\mu_R(u_1,u_2)=\mu_R(u_2,u_1)$。如果 u_1 和 u_2 越接近，则 $\mu_R(u_1,u_2)$的值越接近于 1。

我们可将 $\mu_R(u_1,u_2)$看作是 u_1 与 u_2 的匹配程度，R 被称为邻近或容许关系。当模式 P 是 U 的任意子集（可能是模糊的），而数据保持为一个（精确的）常量 u 时，在计算匹配程度时可将 R 考虑进去（R 被忽略时，$\pi(P,\{u\})=N(P,\{u\})=\mu_P(u)$），这可用扩充子集 $P\circ R$ 代替 P 来实现：

$$\mu_{P\cdot R}(u)=\operatorname*{Sup}_{u'\in U}\min(\mu_P(u'),\mu_R(u,u'))\ \forall\ u\in U \qquad (6.9)$$

不等式$\forall\ u\in U,\mu_{P\cdot R}(u)\geqslant\mu_P(u)$表明：$P\circ R$ 是大于 P 的。粗略地说，$P\circ R$ 组合了 P 中的元素以及 P 以外的但是接近 P 的元素。在一般情况下，对 D 和 P 之间考虑了 R 的匹配可用 $\pi(P\circ R,0)$ 和 $N(P\circ R,D)$来进行分类。很显然，一个容许关系可以附加在一个变量的域上，而且，在计算一个数据与一个复合模式的匹配时可以加进不同的容许关系。

正如 Dubois 和 Prade 所指出的那样，在一个混合模式中考虑各种基本要求的相对重要性的一个可行的方法就是采用容许关系，当基本模式 P 不重要时，均可运用容许关系 R 将其扩充为 $P\circ R$。下面我们将讨论采用另一种模拟重要性的权值方法。

在一般情况下，一个表达了某种要求的模式在匹配时是与整个数据库进行匹配，从用户的观点看，令他感兴趣的是找到一个数据，它与模式具有最好的相容度量。下面我们就从这个角度来描述模糊模式匹配系统。

在具体匹配过程中可能会出现如下几种情况（见表 6.1）：

(a) 没有数据与模式相匹配，其可能性度量和必要性度量为 0；

(b) 有一个或多个数据与模式匹配，且可能性程度和必要性程度为正值。在这种情况下，需要将数据进行分类，每个数据都用一对偶程度值来表示，为了实现几个数据对一个模式的分类，需要考虑如下的情况：

(i) 必要性程度比可能性程度更重要，因为当必要性程度为正值时，可以肯定数据与要求是匹配的。

(ii) 如果对所有的数据均得到匹配的必要性程度为 0，而可能性程度为 1，这表明模式中所表示的要求对于所能得到的数据而言太精确了，这样我们可以改进关于数据的知识。

(iii) 通常，我们按照如下方法对匹配对偶进行排序：(π,N)大于(π',N')，当且仅当 $\pi>\pi'$ 和 $N\geqslant N'$，或者 $\pi\geqslant\pi'$ 和 $N>N'$。然而还存在这样一些情况，如 $\pi(P,D)>\pi(P,D')$和 $N(P,D)<N(P,D')$，其中 P 和 D 表示复合模式和数据，上面排序给出的结果只是一个偏序。因而可以获得一些与模式匹配得更好的一些数据，为了区分这些数据，我们可以采用一个精确度量来完成这一任务。D 越精确，则 $\pi(P,D)$和 $N(P,D)$越接近 0，但反之则不成立。值得注意的是如果 D' 和 D 是上述偏序中的最大元素，则有

$$N(P,D)<N(P,D')<\pi(P,D')<\pi(P,D)$$

上式表明从精确性方面（即 $\pi(P,D)-N(P,D)>\pi(P,D')-N(P,D')$）看，$D'$ 是最好的数据，从必要性观点看也是如此，然而，是否精确的数据比不精确的数据更可取，这要由实际情况来决定。

对用户来说，提供被检索数据的一个加权集可能仍觉得不充分，如果存在不确定性，就需要对不确定性的原因进行解释。例如通过给属性 i 附加更多信息的方法来增强对使 $\pi(P,D)>0$ 的数据 D 的匹配精确性的解释，也就是说，将这个值限制在 D_i 的真子集 D'_i 内，使得 $N(P_i,D'_i)>0$。

6.3 重要性的处理

上一节我们讨论了在复合合取的模式情况下，分别采用“min”运算来组合原子的可能性和必要性变量（见(6.6)和(6.7)式），这种方式假定相应于原子模式的要求具有同样的重要性。在采用“min”或“max”运算来进行组合时，Dubois 和 Prade 提出了一

种很好的"加权"方法。

令 $F_1,F_2,\cdots,F_n$ 是 U 上的几个模糊集，其隶属函数分别为 $\mu_{F_1},\mu_{F_2},\cdots,\mu_{F_n}$，Zadeh 将这些模糊集的并集和交集（即 $\bigcup_i F_i$ 和 $\bigcap_i F_i$）分别定义为：

$$\mu_{\bigcup_i F_i}=\max_i \mu_{F_i} \qquad \mu_{\bigcap_i F_i}=\min_i \mu_{F_i}$$

还有一种组合隶属函数的方法是

$$\mu_{+_n F_i}=n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\mu_{F_i}$$

上式对隶属函数进行综合权衡的考虑，其值是介于并集和交集之间的一种折衷值。

上述组合隶属函数的一个特点是将 $F_1,F_2,\cdots,F_n$ 看作具有相同重要性的集合，但是在实际应用中，有些 F_i 可能比另一些 F_j 显得不那么重要，例如当 $\mu_{F_i}(u)=0$ 时，$\mu_{\bigcap F_i}(u)$ 就不应该仅仅由于 μ_{F_i} 也应该为 0。

在通过算术平均进行综合权衡组合时，通过凸和可以很容易地在组合中对重要性进行赋值：

$$\mu_{+_n F_i}(u)=\sum_{i=1}^{n}P_i\cdot\mu_{F_i}(u) \quad \forall\, u\in U \tag{6.10}$$

其中，$P_1,P_2,\cdots,P_n$ 是非负数，且 $\Sigma P_i=1$，它表示模糊集 $F_1,F_2,\cdots,F_n$ 中各 F_i 的相对重要性。注意，这种组合运算既不包含交也不包含并。为了得到加权运算的另一种形式（即含有"min"和"max"运算），我们可把(6.10)式看作是定义在$\{1,2,\cdots,n\}$上的一个模糊事件 ϕ_u 的概率，ϕ_u 是包含 u 的 F_i 的（模糊）集合，P_i 是$\{1,2,\cdots,n\}$上的一个概率分布，因而有

$$\mu_{+_n F_i}=\mathrm{prob}(\phi_u)$$

当把概率 prob 换成可能性变量和必要性变量时，按与(6.10)式相似的形式可得到：

$$\pi(\phi_u)=\max_{i=1,2,\cdots,n}\min(\mu_{F_i}(u),w_i) \tag{6.11}$$

$$N(\phi_u) = \min_{i=1,2,\cdots,n} \max(\mu_{F_i}(u), 1 - w_i) \tag{6.12}$$

将(6.11)和(6.12)式与(6.2)和(6.3)式进行比较，可看出前者是后者的离散形式。在(6.11)和(6.12)式中，w_i 定义了$\{1,2,\cdots,n\}$上的一个可能性分布，主要功能是对重要性起加权的作用。很明显，(6.11)式得到的是 F_i 的一个加权析取，而(6.12)式得到的则是一个加权合取。

下面我们讨论上述方法在模式匹配中的应用问题。令 $w_1,w_2,\cdots,w_n$ 分别是模式 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 的重要性程度，且假定$\forall\ i, w_i \in [0,1]$，$w_i$ 越大，则表示 P_i 越重要，同时我们还假定 $\max_{i=1,2,\cdots,n} w_i = 1$(正规性)即最重要的原子的重要性为 1。这样，如果 s_i 表示一个数据分量与原子 P_i 的匹配程度，那么该数据与整个模式(P_1 and P_2 and … and P_n)在考虑了重要性赋值的情况下，其匹配程度可写成如下形式：

$$s = \min_{i=1,2,\cdots,n} \max(1 - w_i, s_i) \tag{6.13}$$

这里 s 表示在多大程度上我们可以肯定重要性要求(由 w_i 定义)的模糊集包含在由数据分量 D_i 所可能(必然)满足的要求的模糊集中，此时数据分量 D_i 通过 $s_i = \pi(P_i, D_i)$(或 $N(P_i, D_i)$)来定义，$i = 1,2,\cdots,n$。如果所有的 w_i 都等于 1(表明同等重要)，则可得到 $s = \min_{i=1,2,\cdots,n} s_i$，而在 $w_i = 0$ 时，则不考虑原子 P_i 的匹配。因此在一个合取模式中，对于不同原子的不同重要性，我们不再采用(6.6)式和(6.7)式，而是采用(6.13)式以及 $s_i = \pi(P_i, D_i)$，$i = 1, 2,\cdots,n$ 和 $s_i = N(P_i, D_i)$，$i = 1,2,\cdots,n$ 来计算数据和整个模式的匹配程度。下面的例子解释了这一原理。

实际上，在(6.13)式中引进权的概念就相当于将模式 P_i 修改为 P_i^*，使得

$$\mu_{P_i}^*(u) = \max(\mu_{P_i}(u), 1 - w_i)$$

并采用对称组合运算(这也是一种取小运算)来组合它们。实际上，下面的等式是正确的：

$$\min_{i=1,2,\cdots,n} \max(1 - w_i, \pi(P_i, D_i)) = \min_{i=1,2,\cdots,n} \pi(P_i^*, D_i) \tag{6.14}$$

$$\min_{i=1,2,\cdots,n} \max(1 - w_i, N(P_i, D_i)) = \min_{i=1,2,\cdots,n} N(P_i^*, D_i) \tag{6.15}$$

这通过简单的运算就可得到验证。

因此，采用(6.6)和(6.7)式以及上述的公式，根据 s_i 是否是它们自身的可能性或必要性程度，组合公式(6.13)式将会得出匹配的可能性或必要性程度。

类似的结论在加权析取的组合中也是正确的(相应于(6.13)式)：

$$s = \max_{i=1,2,\cdots,n} \min(w_i, s_i)$$

相应于(6.14)和(6.15)式可得到

$$\max_{i=1,2,\cdots,n} \min(w_i, \pi(P_i, D_i)) = \max_{i=1,2,\cdots,n} \pi(P_{i*}, D_i)$$
$$\max_{i=1,2,\cdots,n} \min(w_i, N(P_i, D_i)) = \max_{i=1,2,\cdots,n} N(P_{i*}, D_i)$$

其中 $\mu_{P_{i*}} = \min(\mu_{P_i}(u), w_i)$。

例 1

某个车库存放着一些等待拍买的旧车，所涉及的不同属性包括车龄、价格、耗油率和车速，而获得的数据表示在表 6.2 中。

表 6.2 与属性相关的数据

	车龄	价格	耗油率	车速
$V1$	新	贵	经济	相当快
$V2$	不到 3 年	45000 左右	相当经济	180～200
$V3$	很新	50000 到 60000 之间	高	快
$V4$	5 年左右	不到 20000	8～9	180
$V5$	5～10 年	10000 左右	高	相当快
$V6$	旧	便宜	经济	不很快
$V7$	新	32000～40000	很经济	140 到 160 之间

表中每一行对应着一组对偶(((模糊)值)(属性名)),例如第一行就相应于

$V1$:((新,车龄)(贵,价格)(经济,耗油率)(相当快,车速))

每个属性有一个定义域,它由属性所有可能取的值的集合而构成。例如,属性"车龄"的定义域为区间[0,20],在表 6.2 中 4 个属性的定义域都是连续的。

现在考虑如下的问题:一个想买车的人会以不同的原则来挑选,因而对不同的买主,他所取的原则也会是不同的,例如有的人把价格看作是最重要的,而有的人则喜欢买跑得快的车等等,这样,对一个具体的买车人而言,有些原则可能比另一些原则更重要,此时买主就可采用通常的加权模式来表示他的要求。假定某买主有如下的要求:

P:(((新,车龄)0.8) and ((适中,价格)0.5) and ((很经济,耗油率)1) and ((快,车速)0.2))

这个模式表明最重要的特性是低的耗油率(权值为 1),按重要性的逆减顺序依次是:车龄,价格和车速。按 6.2 节所给的方法可得到模糊值的隶属函数:

1. 属性:车龄,定义域:[0,20]

新	(0 1 0 1)
很新	(1 2 1 1)
5 年左右	(5 5 1 1)
旧	(10 15 2 5)
不到 3 年	(0 3 0 0)

2. 属性:销售价,定义域:[5000,100000]

昂贵的	(80000 100000 5000 0)
45000 左右	(44000 46000 1000 1000)
10000 左右	(9000 11000 1000 1000)
便宜	(5000 10000 0 5000)
50000 到 60000 之间	(50000 60000 5000 5000)

适中　　　　　　　　(35000 60000 5000 5000)

3. 属性:耗油率,定义域:[5,15]

经济　　　　　　　　(6 7 0.5 1)

相当经济　　　　　　(7 8 1 1)

很经济　　　　　　　(5 6 0 0.5)

高　　　　　　　　　(9 15 0.5 0)

4. 属性:车速,定义域:[100,250]

快　　　　　　　　　(180 200 20 20)

相当快　　　　　　　(150 180 20 20)

不很快　　　　　　　(120 140 10 10)

140 到 160 之间　　　(140 160 20 20)

在这个例子中,与模式 P 匹配获得的结果是

$$\pi(P,V1)=0.5 \qquad \pi(P,V2)=0.3$$

$$\pi(P,V6)=0.2 \qquad \pi(P,V7)=0.8$$

和

$$N(P,V7)=0.5$$

所有其他的 $\pi(P,V_i)$ 和 $N(P,V_i)$ 均等于 0。

在模式 P 中,当不同的要求具有相同的重要性时,采用公式(6.6)和(6.7)可得到如下结果:

$$\pi(P,V1)=0 \qquad \pi(P,V2)=0.3$$

$$\pi(P,V6)=0 \qquad \pi(P,V7)=0.5$$

以及所有其他的匹配程度($\pi(P,V_i)$ 和 $N(P,V_i)$)均为 0。

由上面的讨论可以看出,在对重要性不加权的情况下,仅有 2 辆汽车 $V2$ 和 $V7$ 可供用户挑选。而在加权的情况下则有 4 辆汽车可供挑选($V1$,$V2$,$V6$ 和 $V7$)。的确,在加权的情况下,买主可能对 $V1$ 车颇感兴趣,因为买主没有把价格作为他购买旧车的重要条件。而且,7 号车可能对买主更感兴趣,因为在加权情况下 $N(P,V7)=0.5$。这是因为买主在购买时并不首先看重车速。由此可进一步得出:这类在挑选过程中十分有用的信息,在标准的模糊模式

匹配方法中是无法表达出来的，只有采用加权的模糊模式匹配方法才能包含和处理这类信息。

6.4 可变权的处理

在上一节所讨论的例子中，重要性的权值是一个常数，它不会因为所考虑对象属性的取值而变化，这种限制在模糊产生式规则的匹配处理中可能会产生一些错误的结果。例如，价格的重要性仅仅在某个确定的取值范围内才是有效的，当价格很高时，单这项指标就应该考虑拒绝买这辆车，而不会考虑它的重要性权值了。

为了克服重要性的权值是一个常数所带来的局限性，我们将重要性的权值定义成相关属性值的一个函数，即令 $s(P_i)$ 是与原子 P_i 相联系的模糊集的一个支集，且假定加权函数 w_i 至少在 $s(P_i)$ 上是常数，并对 P_i 外的值其加权函数值是增加的，且有可能在属性定义域的边界上达到 1，见图 6.5。

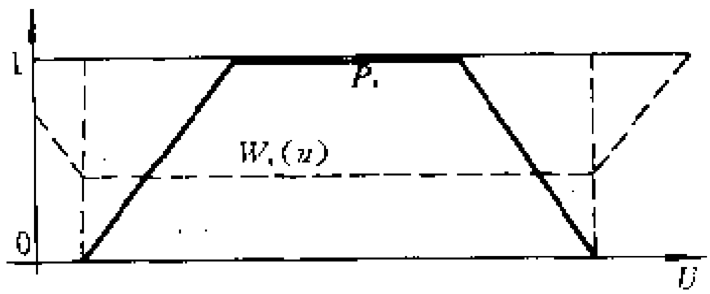


图 6.5 加权函数的取值情况

当 D_i 为一精确值 u_0 时，即 $\mu_{D_i}(u_0)=1, \forall\ u\neq u_0, \mu_{D_i}(u)=0$，则有

$$\pi(P_i,D_i) = N(P_i,D_i) = \mu_{P_i}(u_0)$$

且(6.13)式变成如下形式

$$\min_{i=1,2,\cdots,n} \max(1-w_i(u_0),\mu_{P_i}(u_0)) \tag{6.16}$$

经过上述处理后，即将模式 P_i 修改成另一个模式 P_i^*，使得

$$\mu_{P_i^*}(u) = \max(1 - w_i(u), \mu_{P_i}(u))$$

需注意的是,P_i^* 的支集是大于 P_i 的支集的,但整个属性的定义域就不再是在常数 w_i 的情况下所给出的定义域了,因而,加权过程实际上可看作是在模式中加入某个容许限度的另一种方法。

更一般地,当 D_i 为一个模糊属性值时,则(6.16)式分裂为两个量,即

$$\min_{i=1,2,\cdots,n} \max(1 - \pi(w_i, D_i), \pi(P_i, D_i))$$

和

$$\min_{i=1,2,\cdots,n} \max(1 - N(w_i, D_i), N(P_i, D_i))$$

其中,$\pi(w_i,D_i)$和 $N(w_i,D_i)$采用(6.2)式和(6.3)式计算即可得到,方法是将 μ_{P_i} 换为 w_i,$\pi(w_i,D_i)$和 $N(w_i,D_i)$就是在某个域中有其属性值的对象的可能性程度和必要性程度,在此域中对象的属性 i 具有不同的重要性。注意,当 w_i 是常数时,仍旧保持 $w_i=\pi(w_i,D_i)=N(w_i,D_i)$。

6.5 模糊部分匹配

在前面的讨论中,通过对原子和数据分量之间基本的可能性和必要性匹配程度的合取组合,给定了总的模式匹配的结果,只有在所有的数据分量与其相应的模式原子相匹配时才能得到上述结果。而在实际应用中,可能会出现这种情况,即只有部分原子与其相应的数据分量匹配成功,例如在加权模糊模式匹配中,只要最重要的原子匹配成功就可以了。所以加权模糊模式匹配可以看成是部分匹配的一种特殊情况。本节我们将讨论借助于合适的分配权来定义模糊部分匹配。

部分匹配的概念可严格地定义为:当一个数据(有若干分量)与一个模式(有几个原子)相匹配时,k/n 匹配成功表示在 n 个原子中至少有 k 个原子与其相应的数据分量匹配成功。当 $k=n$ 时就

变成标准的模糊模式匹配了，则在(6.13)式中，$w_i=1,\forall\ i=1,2,\cdots,n$。

在一般的情况下，k/n 匹配是将权值 $w_i=1$ 分配给 k 个原子，其他的 $n-k$ 个原子的权值则令其为 0。任何原子都可赋给为 1 的权值，这样，对原子的任何 k 元组都可赋给 $w_i=1$ 的权值，并可找出这样一个 k 元组，使得这样定义的总的加权匹配获得成功，即给出$\{1,2,\cdots,n\}$的一个排列 σ，k-匹配的程度可定义为：

$$S(k)=\max_{\sigma}\min_{i=1,2,\cdots,k} s_{\sigma(i)} \tag{6.17}$$

当 $k=1$ 时，可得到

$$S(1)=\max_{i=1,2,\cdots,n} s_i$$

这就是析取组合。采用小于或等于 k 的整数集$[0,k]$的特征函数，那么(6.17)式还可写成另一种形式：

$$S(k)=\max_{\sigma}\min_{i\geqslant 1}\max(1-\mu_{[0,k]}(i),s_{\sigma(i)})$$

这样，k/n 匹配的概念就可以扩充为模糊部分匹配(SP-匹配)，将$[0,k]$转换为一个模糊整数 I，即一个整数的模糊集，且有

$$\mu_I(0)=1,\quad \mu_I(i)\geqslant\mu_I(i+1)$$

在此基础上，SP-匹配程度可表示为

$$S(I)=\max_{\sigma}\min_{i\geqslant 1}\max(1-\mu_I(i),s_{\sigma(i)}) \tag{6.18}$$

当 $I=[0,n]$时，s_i 由取小运算进行组合。析取组合(至少有一个原子是匹配的)可采用 $I=[0,1]$来获得。在下面的讨论中，我们假定 $\mu_I(1)=1$，即我们对“至少有 0 个原子是匹配的”情况不感兴趣。

需要说明的是，这里定义的模糊整数 I 表示模糊集 F 的模糊基数$|F|$，即 $I=|F|$，且有

$$\mu_{|F|}(i)=\mathrm{Sup}\{\alpha\}\,|F|\geqslant i)\quad i=0,1,2,\cdots$$

容易验证：$\mu_{|F|}(0)=1$，且在 F 的支集上是递减的。

在下面的讨论中，将 $\mu_I(i)$记为 w_i，用以强调模糊部分匹配的程度和加权匹配的程度之间形式上的一致。计算 SP-匹配程度的(6.18)式的缺点在于它是高度组合的，下面的定理极大地简化了

它的运算。

定理 2 令 $\bar{\sigma}$ 是$\{1,2,\cdots,n\}$的一个排列，使得 $s_{\bar{\sigma}(1)}\geqslant s_{\bar{\sigma}(2)}\geqslant\cdots\geqslant s_{\bar{\sigma}(n)}$，那么对 $\bar{\sigma}$ 而言，(6.18)式中的“$\max\limits_{\sigma}$”运算可以省去，即

$$S(I)=\min_{i}\max(1-w_i,s_{\bar{\sigma}(i)}) \tag{6.19}$$

证明 令 σ 是$\{1,2,\cdots,n\}$的任何一个排列，且令 k 是其中最大的整数，使得$\forall\ i<k$，有 $s_{\sigma(i)}=s_{\bar{\sigma}(i)}$。$k$ 也可能为 1。设 j 满足 $\sigma(j)=\bar{\sigma}(k)$，则 j 被 $j=\bar{\sigma}^{-1}(\bar{\sigma}(k))$唯一地定义。由 $\sigma'(i)=\sigma(i),\forall\ i\neq k,j$，$\sigma'(k)=\sigma(j)$，$\sigma'(j)=\sigma(k)$可定义一个新的排列。注意到 $j>k$，$s_{\sigma(j)}>s_{\sigma(k)}$以及 $w_k\geqslant w_j$，我们可以证明

$$\min_{i}\max(1-w_i,s_{\sigma(i)})\leqslant\min_{i}\max(1-w_i,s_{\sigma'(i)}) \tag{6.20}$$

实际上，令 $a=\min\limits_{i\neq k,j}\max(1-w_i,s_{\sigma(i)})$，则(6.20)式又可写成如下形式：

$$\min(a,\max(1-w_k,s_{\sigma(k)}),\max(1-w_j,s_{\sigma(j)}))$$
$$\leqslant\min(a,\max(1-w_k,s_{\sigma(j)}),\max(1-w_j,s_{\sigma(k)})$$

此式成立是由于

$$\max(1-w_k,s_{\sigma(k)})$$
$$\leqslant\min\ (\max(1-w_j,s_{\sigma(j)}),\max(1-w_j,s_{\sigma(k)}),$$
$$\max(1-w_k,s_{\sigma(j)}))$$

最多经过 n 步后，σ 就变为 $\bar{\sigma}$，由于“取大”再也不会降低它的值，所以 $\bar{\sigma}$ 是(6.18)式的最大值。

由定理 2 可看出，SP-匹配的程度很容易由(6.19)式获得，而(6.19)式与前面讨论的加权总匹配程度在对原子进行适当重组时(就像定理 2 中表述的那样)的表达式是完全一样的。

令 K 是匹配成功的基本模式的模糊集，K 中的基本模式 P_i 的隶属程度为 $\mu_K(P_i)=s_i$，很容易验证：在上面的讨论中已定义过的 K 的模糊基数$|K|$与最佳排序 $\bar{\sigma}$ 是密切相关的，即

$$\mu_{|K|}(i)=s_{\bar{\sigma}(i)}\qquad i=1,2,\cdots,n$$

因而(6.19)式可写成如下形式：

$$S(I)=\min_{i}\max(1-\mu_I(i),\mu_{|K|}(i))$$

上式可解释为 I 在 $|K|$ 中的包含程度，换句话说，上式也可解释为在什么样的程度上，可以肯定匹配成功的基本模式的模糊集至少包含(模糊)基数 I 的一个子集。

本章讨论了模糊模式匹配的一些概念，在模糊专家系统中，匹配的概念实际上是使用得最多的基本概念之一，因为在模糊专家系统中主要的问题是“怎样理解所存储的知识”？模糊模式匹配是对模拟人类思维的符号的语义概念进行匹配的一种尝试，即符号之间的比较通过考虑他们各自由模糊集所描述的含义来实现。

在管理模糊咨询以及不完全或模糊信息数据库方面，模糊模式匹配技术是特别有用的。每个对象的每个属性的可能取值可用可能性分布表示在一个数据库中，而对于属性值的语言约束以及包含模糊比较器的模糊咨询也可用模糊集表示，这样，采用可能性度量和必要性度量，我们就可计算出可能或多或少满足一个咨询的对象集以及或多或少肯定满足该咨询的对象集合。

对近似推理模糊模式匹配也显示出了强大的生命力，例如假定我们有如下规则：

IF X_1 is A_1 and X_2 is A_2 and … and X_n is A_n

THEN X is B

而匹配事实为：

X_1 is A'_1 and X_2 is A'_2 and … and X_n is A'_n

其中 A_i 和 A'_i 是限制变量 X_i 可能取值的模糊集，那么由上述规则和匹配事实系统可以得出：“X is B”成立的确信程度为 $\min_{i=1,2,\cdots,n} N(A_i,A'_i)$，其可能成立的程度则为 $\min_{i=1,2,\cdots,n}\pi(A_i,A'_i)$。

在一个规则的基本条件显示出不同的重要性时，可以采用加权组合技术来解决这一问题。而当规则“IF … THEN…”的条件具有相同的重要性时，则结论“X is B”的确定性 C 可由那些条件成立的总确定性与规则本身的确定性 C_R 进行组合而得到：

$$C(\text{X is B}) = [\min_{i=1,2,\cdots,n} N(A_i, A'_i)] * C_R$$

其中“ * ”是组合算子(在 MYCIN 系统中,“ * ”是乘号),当条件是非等同重要时,上式则自然地变成如下形式:

$$C(\text{X is B}) = [\min_{i=1,2,\cdots,n} \max(N(A_i, A'_i), 1 - w_i)] * C_R$$

除此之外,模糊模式匹配技术在许多领域中都有广泛的应用。

第七章　不确定性的更新算法

本章讨论在模糊专家系统中一种处理不确定性的方法。该系统是一个基于规则的模糊产生式系统，所有的数据和规则都具有不同程度的可信度值。主要研究在规则的前件与数据匹配时，执行该规则的全过程中，系统内与该规则相关部分的不确定性是如何更新的？讨论分两部分进行，第一部分讨论如何确定规则前件最后的可信度，这包括：

1. 对模式进行求值；
2. 求出规则前件的可信度；
3. 将规则和规则前件的可信度进行组合。

第二部分讨论在演绎推理系统(即按一定的顺序执行规则)和归纳推理系统(规则是并行执行的)中，如何维护系统的存储器。

7.1　不确定性的表示

工作存储器中的数据是按存储单元组织的，每个存储单元包括一个或多个属性。例如存储单元“ANIMAL”就可能具有三个属性：“WEIGHT”，“SIZE”和“COLOR”，对这些属性赋给不同的值，就可表示不同的“动物”，为了区分一个存储单元中所表示的不同动物，我们可给该存储单元赋一个时间标记(TT)，只要存储单元的内容一变化，标记(TT)也随着变化，这样就可用(TT)来表示某个“动物”是什么时候在系统中生成的。假定某个动物的(TT)值为 128，即 ANIMAL(128)，那么 128 的时间标记会自动赋给 ANIMAL(128) 的所有属性，一旦属性值发生变化，则 ANIMAL(128) 将得到新的时间标记，旧的时间标记也就自然删掉了。

一个属性的值可以是一个字符串，数字，模糊数或一个离散的模糊集。假定对 ANIMAL(128)我们有：

$$\mathrm{WEIGHT}=120\mathrm{kg}$$

$$\mathrm{COLOR}=\text{白色}$$

$$\mathrm{SIZE}=\left\{\frac{s_1}{\text{小}},\frac{s_2}{\text{中}},\frac{s_3}{\text{大}}\right\} \tag{7.1}$$

其中“SIZE”是一个离散的模糊集，且 $s_i\in[0,1]$，$1\leqslant i\leqslant 3$。

每个属性都附有一个可信程度(即 cf-值)，如果 w 是一个属性，那么 $cf(w)$表示我们对所给 w 值的可信度。可信度的值可以是

(i)区间[0,1]中的某个数；

(ii)对偶值 L(低)和 U(高)，这里 $0\leqslant L\leqslant U\leqslant 1$；

(iii)区间[0,1]中的一个模糊数；

(iv)对偶模糊数 $\bar{L}$和 $\bar{U}$。

我们这里仅讨论可信程度是区间[0,1]中的某个 cf-值。其他的情况下面的章节将要讨论。假定对 ANIMAL(128)有 $cf(\mathrm{WEIGHT})=0.7$，$cf(\mathrm{SIZE})=0.8$，$cf(\mathrm{COLOR})=0.9$，那么这个存储单元可完整地表示为

$$\begin{aligned}&\mathrm{ANIMAL}(128)\\&\quad \mathrm{WEIGHT}=(120,0.7)\\&\quad \mathrm{COLOR}=(\text{白色},0.9)\\&\quad \mathrm{SIZE}=\left(\left\{\frac{0.3}{\text{小}},\frac{0.6}{\text{中}},\frac{0.9}{\text{大}}\right\},0.8\right)\end{aligned} \tag{7.2}$$

注意，在 ANIMAL(128)中，我们对模糊集“SIZE”的可信度为0.8，而对动物的大小是“小”的可信度为 0.3，是“中”的可信度为 0.6，是“大”的可信度为 0.9。如果一个属性的值是一个模糊数 $\bar{N}$，则我们对该值的可信度为 $cf(\bar{N})$，而对属于 $\bar{N}$的任意实数 x 的可信度则是 x 属于 $\bar{N}$的隶属函数值。对于离散模糊集的元素而言，其缺省的 cf-值为 1，其它的缺省 cf-值均为 0。在 ANIMAL(128)

中，缺省时有 cf(WEIGHT)$=cf$(SIZE)$=cf$(COLOR)$=1$，而 cf(小)$=cf$(中)$=cf$(大)$=0=s_i$，$1\leqslant i\leqslant 3$。

每个规则 R 有条件可信度 $cf(R|\beta)$ 和无条件的可信度 $cf(R)$，$cf(R|\beta)$ 表示根据规则前件(β)的最终可信度得出我们对 R 的后件可信度，而 $cf(R)$ 则是与前件可信度无关的后件可信度。

在模糊专家系统(FES)中，我们所面临的问题是在规则执行的每个循环周期中，需要处理上述的这些 cf-值以获得工作存储器中所有属性最后的 cf-值。下面我们先介绍一些基本概念，然后再讨论如何求规则左边最后的 cf-值，以及在执行一个规则后，系统是如何对工作存储器进行修改的。

令 T 是任意的 T-范数，C 是任意的 T-余范数。一个 T-范数 T 是一个映射 $T:[0,1]\times[0,1]\rightarrow[0,1]$，它满足：

(i)$T(a,b)=T(b,a)$

(ii)$T(0,0)=0 \quad T(a,1)=a$

(iii)$T(a,b)\leqslant T(c,d) \qquad a\leqslant c$ 和 $b\leqslant d$

(iv)结合性

这些公理能够推出集合“交”运算的一些基本性质。最小的 T-范数为：

$$T_L(a,b)=\begin{cases}a & b=1\\ b & a=1\\ 0 & \text{否则}\end{cases}$$

基本的 T-范数有 $T_L(a,b)$，$\mathrm{LAND}(a,b)=\max(a+b-1,0)$，$\mathrm{PAND}(a,b)=ab$ 以及 $\min(a,b)$，它们之间的关系满足如下的不等式：

$$T_L(a,b)\leqslant \mathrm{LAND}(a,b)\leqslant \mathrm{PAND}(a,b)\leqslant \min(a,b)$$

T-范式被认为是模拟模糊集“交”运算的专用函数。

一个 T-余范数 C 是一个 C 函数：$[0,1]\times[0,1]\rightarrow[0,1]$，它满足：

(i)$C(a,b)=C(b,a)$

(ii)$C(1,1)=1 \quad C(a,0)=a$

(iii)$C(a,b)\leqslant C(c,d) \quad a\leqslant c$ 和 $b\leqslant d$

(iv)结合性

这些公理可以推出集合"并"运算的一些基本性质。最大的 T-余范数为：

$$C_u(a,b)=\begin{cases}a & b=0\\ b & a=0\\ 1 & \text{否则}\end{cases}$$

基本的 T-余范数有 $\max(a,b)$，$\mathrm{POR}(a,b)=a+b-ab$，$\mathrm{LOR}(a,b)=\min(a+b,1)$ 和 $C_u(a,b)$，它们之间的关系满足如下的不等式：

$$\max(a,b)\leqslant \mathrm{POR}(a,b)\leqslant \mathrm{LOR}(a,b)\leqslant C_u(a,b)$$

T-余范数被看作是模拟模糊集"并"运算的专用函数。

由于 T 和 C 是可结合的，故可将它们扩张到有 n 个自变量的情况，即可定义 $T(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $C(x_1,x_2,\cdots,x_n)$。对 T 和 C 通常选取的是

1. max 和 min；

2. 概率 AND 和概率 OR；

3. Lukasiewicz AND 和 OR。

当将 Lukasiewicz 的 AND 和 OR 扩展到有 n 个自变量的情况时，可得到：

$$\mathrm{LAND}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\max\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-n+1,0\right) \tag{7.3}$$

$$\mathrm{LOR}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\min\left(\sum_{i=1}^{n}x_i,1\right) \tag{7.4}$$

当概率的 AND 和 OR 扩展到有 n 个自变量的情况时，则有：

$$\mathrm{PAND}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}x_i \tag{7.5}$$

$$\mathrm{POR}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i<j}x_ix_j+\cdots+(-1)^{n+1}x_1\cdots x_n \tag{7.6}$$

假定 Ω 是一个基本结果空间，P 是定义在 Ω 上的一个概率，A_i 是事件，其概率值为 $P(A_i)=x_i$，$1\leqslant i\leqslant n$，那么

$$\mathrm{LAND}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\leqslant P\left[\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right]\leqslant\min(x_1,x_2,\cdots,x_n)\tag{7.7}$$

和

$$\max(x_1,x_2,\cdots,x_n)\leqslant P\left[\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right]\leqslant\mathrm{LOR}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\tag{7.8}$$

(7.7)式表示 A_i 的相交"最大"和"最小"的可能概率值分别由"min"和"LAND"给出，而(7.8)式则表示 A_i 的并的"最大"和"最小"的可能概率值分别由"LOR"和"max"给出。

在引入"AND"和"OR"算子后，可将上述的概率写成如下的等式：

$$\mathrm{AND}(x_1,x_2,\cdots,x_n,\Gamma)=\begin{cases}\mathrm{PAND}(x_1,x_2,\cdots,x_n)+\Gamma(\min(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\ \qquad-\mathrm{PAND}(x_1,x_2,\cdots,x_n)) & \Gamma\geqslant 0\\ \mathrm{PAND}(x_1,x_2,\cdots,x_n)+\Gamma(\mathrm{PAND}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\ \qquad-\mathrm{LAND}(x_1,x_2,\cdots,x_n)) & \Gamma\leqslant 0\end{cases}\tag{7.9}$$

和

$$\mathrm{OR}(x_1,x_2,\cdots,x_n,\Gamma)=\begin{cases}\mathrm{POR}(x_1,x_2,\cdots,x_n)+\Gamma(\mathrm{LOR}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\ \qquad-\mathrm{POR}(x_1,x_2,\cdots,x_n)) & \Gamma\geqslant 0\\ \mathrm{POR}(x_1,x_2,\cdots,x_n)+\Gamma(\mathrm{POR}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\ \qquad-\max(x_1,x_2,\cdots,x_n)) & \Gamma\leqslant 0\end{cases}\tag{7.10}$$

其中，$-1\leqslant\Gamma\leqslant 1$。使用这些算子，我们可将(7.7)式和(7.8)式中的概率写成如下形式：

$$P\left[\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right]=\mathrm{AND}(x_1,x_2,\cdots,x_n,\Gamma)\tag{7.11}$$

$$P\left[\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right]=\mathrm{OR}(x_1,x_2,\cdots,x_n,\Gamma)\tag{7.12}$$

其中，Γ 是事件之间相关性的一个量度，或者看作是集合 A_i 之间覆盖的程度。(7.11)式表示存在某个 Γ 值(在 −1 和 1 之间)，使得 A_i 的交的概率等于(7.9)式，而(7.12)式则表明存在某个 Γ 值(在 −1 和 1 之间)，使得 A_i 的并的概率等于(7.10)式，这样，采用 AND 和 OR 算子，我们就可用(7.11)式和(7.12)式中的等式代替(7.7)式和(7.8)式中的不等式，而不需要其他的独立假设。

如果事件的肯定联系尽可能多，或者说集合的覆盖尽可能高，则 $\Gamma=1$，且 AND＝min 和 OR＝max；如果事件的否定联系尽可能多，或集合有最小的覆盖，则 $\Gamma=-1$，且 AND＝LAND 和 OR＝LOR。如果事件是独立的，则 $\Gamma=0$。因此，在下面的讨论中，我们用(0,1]中的一个 Γ 值来表示肯定联系，而用[−1,0)中的一个 Γ 值来表示否定联系。函数 AND 和 OR 是与交的 min-PAND-LAND 和并的 LOR-POR max 相关联的最简单的(分段线性)函数。

在模糊专家系统中，Γ 值的选择是由用户实现的，AND 和 OR 算子的主要应用是确定前件的可信度。在确定前件的可信度时，我们常常知道联系是肯定的还是否定的，但几乎不知道 Γ 在(0,1]中或在[−1,0)中所取的是个什么值。尽管如此，此过程仍然是有用的，因为在没有精确值时，在肯定联系的情况下系统可默认 $\Gamma=1$，而在否定联系的情况下系统可默认 $\Gamma=-1$。

假定每个 A_i 相应于模糊专家系统中的某个模糊逻辑断言，假如 A_i 可以是规则前件中的一个模式，设 x_i 表示对 A_i 的可信度(或是 A_i 为真的概率)，令 CONF[]是[]中的可信度，我们希望求得 CONF[A_1 AND … AND A_n]和 CONF[A_1 OR … OR A_n]，CONF[]的这两个值是确定前件可信度的基本要素，根据概率理论我们可得到：

$$\mathrm{LAND}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\leqslant \mathrm{CONF}[A_1\ \mathrm{AND}\ \cdots\ \mathrm{AND}\ A_n]\leqslant \min(x_1,x_2,\cdots,x_n) \tag{7.13}$$

和

$$\max(x_1,x_2,\cdots,x_n) \leqslant \mathrm{CONF}[A_1 \text{ OR } \cdots \text{ OR } A_n]$$
$$\leqslant \mathrm{LOR}(x_1,x_2,\cdots,x_n) \qquad (7.14)$$

现在我们可用某个 T-范数和 T-余范数来分别求出(7.13)式和(7.14)式中的可信度：

$$\mathrm{CONF}[A_1 \text{ AND } \cdots \text{ AND } A_n] = \mathrm{AND}(x_1,x_2,\cdots,x_n,\Gamma) \qquad (7.15)$$

$$\mathrm{CONF}[A_1 \text{ OR } \cdots \text{ OR } A_n] = \mathrm{OR}(x_1,x_2,\cdots,x_n,\Gamma) \qquad (7.16)$$

对断言之间的肯定联系用 $\Gamma>0$ 表示，否定联系则用 $\Gamma<0$ 表示。对两个断言(或事件)，(7.15)式和(7.16)式可简化为：

$$\mathrm{CONF}[\mathrm{A}_1 \text{ AND } \mathrm{A}_2] = \mathrm{AND}(x_1,x_2,\Gamma) \qquad (7.17)$$

$$\mathrm{CONF}[\mathrm{A}_1 \text{ OR } \mathrm{A}_2] = \mathrm{OR}(x_1,x_2,\Gamma) \qquad (7.18)$$

如果 $\Gamma \neq -1,0,1$，则 $\mathrm{AND}(x_1,x_2,\Gamma)$ 和 $\mathrm{OR}(x_1,x_2,\Gamma)$ 分别满足 T-范数和 T-余范数的除结合性外的所有条件。

7.2 规则左边的可信度计算

我们首先描述三个用以确定规则左边的可信度问题，然后详细讨论规则左边的可信度与模式的可信度、前件的可信度和规则的先验可信度之间所具有的函数关系。

在模糊专家系统中，规则可表示成如下形式：

IF [] * [] * … * []

THEN … (7.19)

其中，[]是一个模式，“ * ”则表示是 AND 或 OR，前件的可信度是综合规则前件中所有模式的可信度，而规则左边的可信度则是将前件的可信度与规则的先验可信度进行组合所得到的结果。注意，这里不将规则看成是像假言推理中的逻辑蕴含，而是将规则看成是在前件的可信度超过某个阈值时，它是如何修改工作存储器的一个描述。

一个模式的结构是

(i)一个单一属性 A;

(ii)$A(R)L$,其中 A 是一个属性,L 是一个文字,R 是某种关系;

(iii)$A(R)B$,其中 A 和 B 是属性,R 是某种关系。

采用 R 来比较属性值时可将文字 L 看成一个常量,L 的 cf-值总为 1。令 $cf(A)=a$ 和 $cf(B)=b$,给出工作存储器中的数据 A 和 B,在上述三种情况下,模式的可信度可按如下方式进行计算:

(i)$\psi(A)=a$

(ii)$\psi(A(R)L)=\psi(a,\mathrm{ARL},1)$ (7.20)

(iii)$\psi(A(R)B)=\psi(a,\mathrm{ARB},b)$

其中,ψ 是一个在[0,1]中取值的函数,它确定模式最后的可信度,ARL(ARB)是关系 R 的值,该值也在[0,1]中,它通过对 A 和 L(A 和 B)的值进行比较而获得。R 可以是一个比较数字或字符串的二元关系(其值为 0 或 1),也可以是一个比较模糊数或离散模糊集的模糊关系(其值在[0,1]中)。例如,令 R 是模糊数之间某个模糊等价关系,那么 ARB 就是两个模糊数 A 和 B 之间相等的一个量度。相等和不相等的关系,二元和模糊关系都由模糊专家系统提供,但用户有构造其它在模式中使用的关系的选择权。

ψ 函数对输入属性的 cf-值与比较结果进行组合,以计算出模式的可信度。令 α 是模式最后的可信度,$r=\mathrm{ARL}$ 或 $r=\mathrm{ARB}$,则有

$$\psi(a,r,b)=\alpha \tag{7.21}$$

所有的 a,r,b 的值均在[0,1]中,把 $b=1$ 代入 $\psi(a,r,b)$ 中,就可得到 $\psi(a,r,1)$。在一般情况下,将 ψ 选为"min",当然也可以将 ψ 函数定义成其他的形式。在定义 ψ 函数时有两种方法,一种是对所有的模式我们只定义一种 ψ 函数,另一种方法则是依据在模式中所使用的关系 R 而采用不同的 ψ 函数。

在对所有的模式求值后,规则就变成

$$\text{IF } \alpha_1 * \alpha_2 * \cdots * \alpha_n \quad \text{THEN} \cdots \tag{7.22}$$

其中,α_i 是我们对第 i 个模式的可信度。如果前件最后的可信度用

β表示，那么

$$\mathrm{CONF}[\alpha_1 * \alpha_2 * \cdots * \alpha_n] = \beta \tag{7.23}$$

CONF 函数的选择我们将在下面讨论。在求出前件的可信度后，就可将它与规则的先验可信度进行组合，以得到规则左边最后的可信度，然后将这一可信度赋给规则的后件。

还有一个问题即规则的阈值也需要说明一下，在系统的运行过程中，低于阈值的规则是不被执行的。令 $\tau \in [0,1]$是规则的阈值，它由用户设定，在缺省的情况下一般将 τ 选为 0.5。系统的阈限过程：

1. 如果 $\beta > \tau$，那么该规则被执行，并将规则的先验可信度与前件的可信度进行组合，并将其值赋给规则的后件；

2. 如果 $\beta \leqslant \tau$，则不执行该规则。

这种方法是对前件的可信度设置阈值。另外一种方法是对规则左边最后的可信度设置阈值(即对前件的可信度与规则的先验可信度进行组合后所得到的可信度设置阈值)。假定 $\beta > \tau$，令

$$\theta(cf(R|\beta), \beta) = r \tag{7.24}$$

这是规则左边最后的可信度，$cf(R|\beta)$是规则的先验可信度，θ 函数将前件可信度与规则的先验可信度组合为 r，它就是规则结论(后件)的可信度。对 θ 函数的选择可选用“min”，或“相乘”，或者其他的形式，这将是下面要讨论的问题。

一、模式的可信度计算

本节主要讨论如何确定 ψ 函数的结构。ψ 函数有如下两个基本特性：

1. $\psi(a,r,b) \leqslant \min(a,r,b)$； (7.25)

2. $\psi(a,r,b)$对 a,r,b 是非减的。 (7.26)

第一个性质表示模式最后的可信度不会超过输入的可信度，它是对 A 和 B 进行比较所得到的可信度；第二个性质表示当 A 或 B 的可信度增加时，或者对 A 和 B 进行比较所得到的可信度增加时，那么模式的可信度将不会减少。

关于 ψ 函数结构的第一个基本假设为：

$$\psi = H(r,\Delta) \tag{7.27}$$

$$\Delta = F(a,b) \tag{7.28}$$

这里 $F(a,b)=\Delta\in[0,1]$是输入属性的组合可信度，而 H 则把它与 r 进行组合从而得出模式最后的可信度。这表明 ψ 仅是对输入可信度和 A 与 B 进行比较的结果进行组合的一个函数。

在基于概率的基础上，H 最简单的结构形式为

$$\psi(a,r,b) = \mathrm{AND}(r,\Delta,\Gamma) \tag{7.29}$$

上式是这样得到的：假定模式的结构是 A(R)B，令 $\mathscr{A}(\mathscr{B})$是输入到模式中的所有可能属性，且令 $\mathscr{D}=\mathscr{A}\times\mathscr{B}$，给定 $cf(A)=a$，$cf(B)=b$，$\Delta=F(a,b)$和 $\mathrm{ARB}=r$，定义：

$$\mathrm{C}_1=\{(\mathrm{X},\mathrm{Y})\in\mathscr{D}\,|\,\mathrm{XRY}=\mathrm{r}\}$$

$$\mathrm{C}_2=\{(\mathrm{X},\mathrm{Y})\in\mathscr{D}\,|\,\mathrm{F}(\mathrm{cf}(\mathrm{X}),\mathrm{cf}(\mathrm{Y}))=\Delta\}$$

假定 P 是 $\mathscr{D}$ 上的一个概率，且 $P[C_1]=r$ 和 $P[C_2]=\Delta$，采用(7.11)式我们就可得到(C_1 AND C_2)的概率：

$$\mathrm{P}[\mathrm{C}_1\cap\mathrm{C}_2] = \mathrm{AND}(\mathrm{r},\Delta,\Gamma)$$

在模糊集的情况下，我们也会得到这一结果。定义 $\mathscr{D}$ 上的两个模糊子集 INPUT 和 RELATION，其隶属函数分别为 $\mu_{\mathrm{I}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})=\mathrm{F}(\mathrm{cf}(\mathrm{X}),\mathrm{cf}(\mathrm{Y}))$和 $\mu_{\mathrm{R}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})=\mathrm{XRY}$，这样我们就可得到模糊集 OUTPUT：

$$\mathrm{OUTPUT} = (\mathrm{INPUT}) \cap (\mathrm{RELATION})$$

对“OUTPUT”的隶属函数我们选择：

$$\mathrm{AND}(\mu_{\mathrm{R}}(\mathrm{X},\mathrm{Y}),\mu_{\mathrm{I}}(\mathrm{X},\mathrm{Y}),\Gamma)$$

注意在(7.29)式中，如果 $r=1$，那么对任何 $\Gamma\in[-1,1]$有 $\psi(a,1,b)=F(a,b)$。

采用两个更合理的假设，可以得出 F 一定是一个 T-范数(除不满足结合性外)，这两个假设为：

$$\psi(a,r,b) = \psi(b,r,a) \tag{7.30}$$

$$\mathrm{LAND}(a,r,b) \leqslant \psi(a,r,b) \tag{7.31}$$

(7.30)式表示对输入属性的可信度而言，ψ 是对称的，而(7.31)式则表示 ψ 的最小值是 a，r 和 b 的 Lukasiewicz AND。采用(7.7)式从概率的角度出发也可证明第二个假设是正确的，令 $r=1$，故 $\psi(a,1,b)=F(a,b)$，假定(7.25)、(7.26)和(7.30)式均成立，再运用(7.31)式我们即可得到：

$$a = \mathrm{LAND}(a,1,1) \leqslant \mathrm{F}(a,1) \leqslant a \tag{7.32}$$

所以除结合性外，F 是满足 T-范数的所有条件的。

如果不采用(7.30)和(7.31)式所给的假设，也可采用如下的关于 ψ 的假设。考虑一个模式：

$$[\mathrm{N} = \mathrm{N}] \tag{7.33}$$

这里关系 R 是“相等”，N 是某个属性的值，那么关系 NRN=[N=N]的值将为 1。如果 $cf(N)=n$，则此模式的可信度应为 $\psi(n,1,n)$，此时 $\psi(n,1,n)$应等于 n，即

$$\psi[\mathrm{N} = \mathrm{N}] = \mathrm{cf}(\mathrm{N}) \tag{7.34}$$

而上式蕴含着 $F(n,n)=n$，因为 $r=1$，故 F 是等幂的，可直接得到 $F=\min$，这样我们即可将这一假设写成如下形式：

$$\psi(a,1,b) = a \tag{7.35}$$

只要 $a=b$ 就可得出上述结果。当 R 是“相等”关系时，要使(7.34)式成立，就必须使 F 为“min”。

关于 ψ 的基本假设可小结如下：

(1) (7.25)式和(7.26)式

(2) $\psi(a,r,b)=\mathrm{H}(r,F(a,b))$

(3) $\mathrm{H}(\mathrm{r},\Delta)=\mathrm{AND}(\mathrm{r},\Delta,\Gamma)$

(4) $\psi[\mathrm{N}=\mathrm{N}]=\mathrm{cf}(\mathrm{N})$

那么

$$\psi(a,r,b) = \mathrm{AND}(r,\Delta,\Gamma) \quad \Delta = \min(a,b) \tag{7.36}$$

当 $\Gamma=1$ 时，则有 $\psi=\min$。另外我们也可将 r 和 Δ 看成是相互独立的，当 $\Gamma=0$ 时，则可得到概率的 AND。

二、前件可信度的计算

对某个 T-范数 T 和 T-余范数 C，我们有

$$\mathrm{CONF}[\alpha_1 \text{ AND } \alpha_2] = \mathrm{T}(\alpha_1, \alpha_2) \tag{7.37}$$

$$\mathrm{CONF}[\alpha_1 \text{ OR } \alpha_2] = \mathrm{C}(\alpha_1, \alpha_2) \tag{7.38}$$

上两式中由于方括号涉及到模式的联系，所以如何使用它是相当重要的。假如我们要求

$$\begin{aligned}&\mathrm{CONF}[(\alpha_1 \text{ OR } \alpha_2) \text{ AND } \alpha_3]\\&\quad = \mathrm{CONF}[(\alpha_1 \text{ AND } \alpha_2) \text{ OR } (\alpha_2 \text{ AND } \alpha_3)]\end{aligned} \tag{7.39}$$

和

$$\begin{aligned}&\mathrm{CONF}[\alpha_1 \text{ OR } (\alpha_2 \text{ AND } \alpha_3)]\\&\quad = \mathrm{CONF}[(\alpha_1 \text{ OR } \alpha_2) \text{ AND } (\alpha_2 \text{ OR } \alpha_3)]\end{aligned} \tag{7.40}$$

则有

$$\mathrm{T}[\mathrm{C}(\alpha_1, \alpha_2), \alpha_3] = \mathrm{C}(\mathrm{T}(\alpha_1, \alpha_3), \mathrm{T}(\alpha_2, \alpha_3)) \tag{7.41}$$

和

$$\mathrm{C}(\alpha_1, \mathrm{T}(\alpha_2, \alpha_3)) = \mathrm{T}(\mathrm{C}(\alpha_1, \alpha_2), \mathrm{C}(\alpha_1, \alpha_3)) \tag{7.42}$$

若加入如下的合理假设：T 和 C 是连续的，且 $T(x,x)$和 $C(x,x)$是严格递增的，那么必有 $T=\min$ 和 $C=\max$。由于我们不打算对“AND”总使用 min，对“OR”总使用 max，因而我们不假定(7.39)和(7.40)式总是成立的。

在计算前件的可信度时，应考虑模式之间的先验联系，例如考虑规则：

IF([SIZE is small] OR [SIZE is large]) AND POSITION is center

THEN … (7.43)

在上述规则中，模糊数是属性“SIZE”和“POSITION”的值，而“small”，“large”和“center”都是由模糊数所定义的文字。令 α_1，α_2 和 α_3 分别是我们对第一个，第二个和第三个模式的可信度，模式[SIZE is small]和[SIZE is large]具有否定的联系，如果一个为真，那么另一个必为假，因此，我们采用 Lukasiewicz OR，并可得

到：

$$\mathrm{CONF}[\alpha_1\ \mathrm{OR}\ \alpha_2] = \mathrm{LOR}(\alpha_1,\alpha_2) \tag{7.44}$$

同时，我们可认为“对象的大小”与它的“位置”是不相关的，这样就可采用概率 AND 来组合“SIZE”与“POSITION”的可信度，由此即可得到规则前件的可信度：

$$\beta = \alpha_3\min(\alpha_1+\alpha_2,1) \tag{7.45}$$

通常我们假定

$$\mathrm{CONF}[\alpha_1\ \mathrm{AND}\ \alpha_2] = \mathrm{AND}(\alpha_1,\alpha_2,\Gamma) \tag{7.46}$$

$$\mathrm{CONF}[\alpha_1\ \mathrm{OR}\ \alpha_2] = \mathrm{OR}(\alpha_1,\alpha_2,\Gamma) \tag{7.47}$$

对(7.43)式所给的规则而言，首先使用 $\mathrm{OR}(\alpha_1,\alpha_2,-1)$，然后再使用 $\mathrm{AND}(\alpha_1,\alpha_2,0)$。

如果关于模式所使用的括号如(7.43)式所示，则可采用(7.46)和(7.47)式来获得前件的可信度。当所有的模式是由“AND”连接时，则有

$$\mathrm{CONF}[\alpha_1\ \mathrm{AND}\ \alpha_2\cdots\mathrm{AND}\ \alpha_n] = \mathrm{AND}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\Gamma) = \beta \tag{7.48}$$

这里 Γ 是所有模式之间相互关联的一个量度，它的值是 $0<\Gamma\leqslant 1$，因为在一个“好”的规则中，模式应是肯定联系的，如果模式 P_1 与前件中的另一个模式 P_2 是否定联系的，那么这个规则将不会被启动(不是一个“好”的规则)，因为当 P_1 趋向于为真时(即 α_1 接近 1)，P_2 则趋向于假(即 α_2 接近 0)，那么 β 将接近 0，此时规则将不会超过阈值。在(7.48)式中，在缺省的情况下令 $\Gamma=1$，和 CONF=min，当然也可以令 $\Gamma=0$，而采用概率 AND 来进行计算。一般说来，一个模糊专家系统应有多个算子可供用户选择用来计算前件的可信度。

三、规则左边可信度的计算

假定有一个规则 $\mathscr{R}$，其条件可信度为 $cf(\mathscr{R}|\beta)$，它大于阈值，前面已经讨论过，$cf(\mathscr{R}|\beta)$实际上就是对规则后件的可信度，即以前件的可信度 β 为条件，由规则右边(后件)所实现的动作的可信

度。即使 β 等于 1 的时候，$cf(\mathscr{R}|\beta)$的值也不一定等于 1。假定

$$cf(\mathscr{R}|\beta) = f(\beta) \tag{7.49}$$

这里 $f(\beta)\in[0,1]$，$f(0)=0$，且 f 是非减的函数，(7.49)式表示规则后件的可信度是前件可信度的一个非减函数。条件可信度的一个重要和有用的函数形式为：

$$f(\beta) = \begin{cases} 0.9 & 0.9 \leqslant \beta \leqslant 1 \\ 0.7 & 0.6 \leqslant \beta < 0.9 \\ 0 & 0 \leqslant \beta < 0.6 \end{cases} \tag{7.50}$$

(7.50)式表示：

(1)如果前件的可信度是高的($0.9\leqslant\beta\leqslant1$)，那么后件的可信度也是高的(0.9)；

(2)如果前件的可信度是中等的($0.6\leqslant\beta<0.9$)，那么后件的可信度为中(0.7)；

(3)如果前件的可信度是低的($0\leqslant\beta<0.6$)，那么后件的可信度为 0。

下面讨论将前件的可信度与规则的先验条件可信度进行组合的 θ 函数的形式，讨论是在模糊集的技术基础上进行的。我们可将 $cf(\mathscr{R}|\beta)$看成是一个条件模糊集，令 V 是输入到 $\mathscr{R}$ 左边的一个可能的属性向量，例如对(7.43)式所示的规则，我们有 $V=(\overline{N},\overline{M})$，其中 $\overline{N}$ 是“SIZE”的一个模糊数，$\overline{M}$ 是“POSITION”的一个模糊数，设 $\mathscr{A}_0$ 是所有可能的向量 V，令 0 是 $\mathscr{R}$ 右边可能输出的一个属性向量，0 的输出依赖于左边所使用的 V 值，因此，设 $\mathscr{A}_1$ 是 $\mathscr{A}_0$ 中所有 V 所获取的 0，一个固定的右边确定了 $\mathscr{A}_1$，但如果我们改变右边的动作则可获得不同的 $\mathscr{A}_1$。

对 $\mathscr{A}_0$ 中的每个 V，我们有一个关于 $\mathscr{A}_1$ 的条件模糊集，其隶属函数为

$$\mu(0|V) = f(\beta) \tag{7.51}$$

这里 β 是前件可信度，0 是在给定输入 V 的情况下的结果输出，如果(7.51)式中给出的 0 与 V 无关，则我们令 $\mu(0|V)$等于 0。

$\mathscr{A}_0$ 的子集是另一个模糊集，其隶属函数为

$$\mu(V)=\beta \tag{7.52}$$

这里 β 是对输入 V 而言的前件可信度，采用 $\mu(V)$ 我们将不以条件模糊集为条件来获得后件 0 的可信度。

设 $E_\beta=\{V\,|\,\mu(V)=\beta\}$，给出我们观察到的 E_β（前件可信度 β），计算

$$r=\sup_{V\in E_\beta}(\min(\mu(0\,|\,V),\mu(V))) \tag{7.53}$$

这是赋给 0 的规则左边最后的可信度。如果 0 与 E_β 中的任何 V 均无关，则 $r=0$。(7.53)式的计算可简化为（对 E_β 中与 V 相关的任何 0 而言）：

$$r=\min(f(\beta),\beta) \tag{7.54}$$

因此，(7.24)式所示的 θ 函数可以取作 $f(\beta)$ 和 β 的"min"。对(7.53)式中的 AND 选用另一个 T-范数来代替"min"也是可以的，这样即可得到：

$$r=T(f(\beta),\beta)$$

一个规则的无条件可信度为

$$cf(\mathscr{R})=\sup_{V\in\mathscr{A}_0}(\min(\mu(0\,|\,V),\mu(V))) \tag{7.55}$$

由于 f 是非减函数，故上式可简化为 $cf(\mathscr{R})=f(1)$，因而我们可以把 $cf(\mathscr{R})$ 解释为当前件的可信度为 1 时的后件可信度。对(7.55)式中的 AND 采用任何 T-范数我们都可得到 $cf(\mathscr{R})=f(1)$。

7.3 知识库的管理

在知识库中，经常会出现几个规则可能同时被启动，这就会产生所谓的规则冲突问题，本节主要讨论这一问题。在下面的讨论中我们主要分析两种基本的操作方式：

1. 演绎，在这种推理方式中一次只能启动或执行一条规则，

若有多条规则满足目前的条件，就必须采用某种方法（或算法）从上述规则中挑选一条最合适的规则来运行。

2. 归纳，在这种推理系统中，所有合适的规则全部启动，即系统处于并行运行方式。

当然还可以采用混合方式，即用分类算法从所有合适的规则中选用几个规则同时执行。

在非模糊的系统中选择一条规则时，都是选择由某个算法将合适规则排序后的优先级最高的规则来执行的。而在模糊专家系统中，一般采用选择前件的可信度超过阈值的规则，且这些规则首先要依据前件和规则本身(r)的总可信度来排序。

规则右边的动作（后件）主要用来修改数据库，包括 DELETE，MODIFY 和 MAKE 存储单元。在模糊专家系统中，在存储器被修改前即规则被启动前存储器的状态必须考虑，这在归纳或并行系统中尤为重要，当一些动作都访问存储器中某个相同的属性时，试图同时执行这些规则就会出现冲突，这样就需要一个算法来消除这些冲突。

由于目前还没有适合模糊专家系统应用的并行计算机，使规则可以并行执行，而修改数据库的动作还是只能顺序进行。假如有一个存储单元 ANIMAL(128)，其属性 WEIGHT 的值为(120，0.70)，且有三个规则（只给出了动作）都可执行：

(i) (150，0.60)

(ii) (160，0.70)

(iii) (180，0.80)

那么到底先执行哪个规则呢？执行这些规则的顺序可以是(i)，(ii)和(iii)，或(iii)，(ii)，(i)等等，但工作存储器的最后状态应与规则执行的顺序无关。还要注意的是这些规则可能修改 WEIGHT 的值和它的可信度，而不要仅注意只修改可信度。在对数据库进行修改时，还有一些问题是，数据库中可能有多个 ANIMAL，此时到底修改哪一个 ANIMAL，以及规则的动作可能是“联合的”，它们要

么同时执行，要么一个动作也不执行。

下面我们先讨论冲突消解算法的一般机理，令 $\mathscr{R}_k(1\leqslant k\leqslant K)$ 是所有可触发的规则，各规则最后右边的可信度为 r_k，$\mathscr{R}_k$ 右边的 DELETES 和 MODIFIES 访问存储单元中其属性可用来触发 $\mathscr{R}_k$ 的实例，假定“ANIMAL(128)”中的一些属性输入给 $\mathscr{R}_3$ 的左边，则访问 ANIMAL 的 $\mathscr{R}_3$ 右边的 DELETE 和 MODIFY 实际上是在访问 ANIMAL (128)，MAKE 语句可以像 DELETE 和 MODIFY 一样，它们也可结合在一起生成存储单元的一个新实例。

由于系统不允许 DELETE 影响可执行的 MAKES 或 MODIFIES，因而我们可按任意的顺序执行所存的 DELETES。DELETE 访问整个存储单元，并将所有属性的全部 cf-值均设置为 0，但不修改值和时间标记。假定 DELETE 访问 ANIMAL (128)，且在一些 MAKES 和 MODIFIES 也可访问 ANIMAL (128)并被执行之前就执行。在冲突消解算法中，系统使 ANIMAL (128)中的所有属性的全部初始 cf-值适用于 MAKES 和 MODIFIES。

我们也可以按任意顺序完成所有的 MAKES，一个 MAKE 生成一个存储单元的新实例(有新的时间标记)，且默认它使用规则的可信度值 r_k，MAKES 的执行仅影响存储单元的时间标记。另外，也可考虑将 MAKES 和 MODIFIES(在相同的存储单元中)进行组合以减少由选中的一组规则所生成的实例数目。

所以，只有 MODIFIES 才需要冲突消解算法，例如考虑一个具有属性 $A_i(1\leqslant i\leqslant m)$ 的存储单元 μ，假定在工作存储器中存在一些实例 $\mu(TT_j)$，$1\leqslant j\leqslant n$，这里 TT_j 是 μ 的时间标记，冲突消解算法在触发规则右边所有的 MODIFIES 上运行，该算法可表示为：

1. 收集所有访问 $\mu(TT_1)$的 MODIFIES。

(a)收集所有访问 $\mu(TT_1)$中的 A_1 的 MODIFIES；

(b)修改 A_1 的工作存储器；

(c)对所有的 $A_i, 2 \leqslant i \leqslant m$，重复$(a)$和$(b)$；

(d)生成 μ 的具有新时间标记的实例。

2. 对 $\mu(TT_j), 2 \leqslant j \leqslant m$，重复 1。

3. 对所有的存储单元重复 1 和 2。

下面我们将更详细地讨论 1(b)和 1(d)。

根据属性值的不同说明方法，可以选择不同的存储器修改系统，在 ANIMAL(128)的例子中，属性值可以是一个可变模糊集，对 WEIGHT 我们可允许多个值，例如(120,0.7)，(170,0.6)，这样我们可将这些属性的值表示成：

$$\left\{\frac{0.7}{120}, \frac{0.6}{170}\right\} \tag{7.56}$$

这是一个离散模糊集，此模糊集可扩充为：

$$\left\{\frac{0.7}{120}, \frac{0.6}{170}, \frac{0.9}{200}\right\} \tag{7.57}$$

也可缩小为

$$\left\{\frac{0.7}{120}\right\} = (120, 0.7) \tag{7.58}$$

作为启发规则的结果。模糊集 SIZE 可以是固定，即对该模糊集中的元素既不允许删除也不允许增加新的元素。

假定在启动规则的右边的动作未执行前，对于 ANIMAL(128)有

$$\text{WEIGHT} = (120, 0.7) \tag{7.59}$$

或

$$\text{WEIGHT} = \left(\left\{\frac{0.7}{120}, \frac{0.6}{170}\right\}, 1\right) \tag{7.60}$$

SIZE 和 COLOR 的说明如(7.2)式所示，模糊集 WEIGHT 的可信度的缺省值取 1。我们的假设为：

(1)WEIGHT 和 COLOR 有单一的值，SIZE 是一个固定的模糊集；

(2)WEIGHT 是一个可变模糊集，SIZE 是一个固定模糊集，COLOR 有单一的值。

下面讨论两类冲突消解算法。

Ⅰ. **基于值的算法**

假定有一组规则被执行，其中有一些访问 WEIGHT（在 ANIMAL(128)中）的 MODIFIES，希望存储如下的值和可信度：

$$(120, 0.6), (150, 0.8), (200, 0.6), (120, 0.75), (150, 0.7), (200, 0.9) \tag{7.61}$$

首先按照值分组，即可分为三组：120，150，200，然后再在同组中选可信度大的值作为该组的代表，这样我们即可得到：

$$(120, 0.75), (150, 0.8), (200, 0.9) \tag{7.62}$$

如果 WEIGHT 是一个可变模糊集，那么取(7.60)和(7.62)式中模糊集的并即可得到：

$$\mathrm{WEIGHT} = \left(\left\{\frac{0.75}{120}, \frac{0.8}{150}, \frac{0.6}{170}, \frac{0.9}{200}\right\}, 1\right) \tag{7.63}$$

当 WEIGHT 是单一值(120，0.7)时，我们将保持(7.62)中的对偶，并生成 ANIMAL 的新实例。尽管如此，还须考虑 SIZE 和 COLOR 的情况。

假定 COLOR 的说明没有改变，但有访问 SIZE 的成员的 MODIFIES：

$$\mathrm{cf}(\mathrm{small}) = 0.6,\ \mathrm{cf}(\mathrm{medium}) = 0.8,$$
$$\mathrm{cf}(\mathrm{large}) = 0.7,\ \mathrm{cf}(\mathrm{small}) = 0.5$$

取最大可信度可得到：

$$\mathrm{SIZE} = \left(\left\{\frac{0.6}{\mathrm{small}}, \frac{0.8}{\mathrm{medium}}, \frac{0.9}{\mathrm{large}}\right\}, 0.8\right) \tag{7.64}$$

当 WEIGHT 是一个可变模糊集，我们就会得到一个新的 ANIMAL（一个新的时间标记）实例，其 WEIGHT 由(7.63)式给出，SIZE 由(7.64)式给出，而 COLOR 不变。如果 WEIGHT 是一个单一的值，则我们可得到 ANIMAL 的三个新例，它们都有与上

面相同的 SIZE 和 COLOR，而有一例的 WEIGHT=(120,0.75)，另一例为(150,0.8)，最后一例为(200,0.9)。无论何时，只要 ANIMAL(128)的任一属性被修改，就可生成一个新例，且旧例($TT=128$)就会被删除。

基于值的算法是严格单调的，因为赋给属性的值和它的可信度不会减少。

Ⅱ. 基于可信度的算法

对固定模糊集(像 SIZE)而言，此过程本质上是相同的，考虑 ANIMAL(128)的属性 WEIGHT，其初始值和可信度为(120，0.7)，基于可信度的方法不适用于可变模糊集。

可执行规则 $\mathscr{R}_k$ 的右边有 MODIFIES，希望对 WEIGHT 存储(w_k,r_k)，其中 w_k 值的可信度为 r_k，令 $r_1^*=\max(r_k)$，在右边还可以有联合的 MODIFIES，例如：

$$\text{MODIFY(WEIGHT} = (w, r_a) \text{ AND COLOR} = (\text{green}, r_b)) \tag{7.65}$$

我们必须执行两个 MODIFIES，或者都不执行。当且仅当 $r_a \geq 0.7$ (WEIGHT 的初始可信度)和 $r_b \geq 0.9$(COLOR 的初始可信度)时，两个都可执行。现在令(w_s, r_s)，$s \in S$ 是可执行的联合 MODIFIES 中 WEIGHT 的所有重量的可信度，令 $r_2^*=\max(r_s|s \in S)$和 $r^*=\max(r_1^*, r_2^*)$，如果 S 为空，则 r^* 就是 r_1^*。在基于值的算法中，采用可变模糊集时不允许使用联合的 MODIFIES。

对 WEIGHT 的修改算法可利用 r^* 描述如下：

(1)如果 $r^*>0.7$，则保持所有的(w_t,r_t)，其中 $r_t=r^*$，删除所有剩下的(包括原始的(120,0.7))。

(2)如果 $r^*<0.7$，则仅保持初始的(120,0.7)。

(3)如果 $r^*=0.7$，则

(a)(WM_1)保持所有 $r_t=0.7$ 的(w_t,r_t)，也保持(120,0.7)；

(b)(WM_2)保持所有 $r_t=0.7$ 的(w_t,r_t)，但删除(120,0.7)；

(c)(WM_3)仅保持(120,0.7)。

作为上述三个过程的例子，假定可执行的规则要存储 WEIGHT 为(150,0.7)和(200,0.7)的值，则

1. WM_1 给出(120,0.7)，(150,0.7)，(200,0.7)

2. WM_2 给出(150,0.7)，(200,0.7)

3. WM_3 仅给出(120,0.7)

在对 WEIGHT 和 COLOR 以及 SIZE 的固定模糊集生成所有新的值—可信度对偶后，可以用 WEIGHT 的一个值—可信度对偶和 COLOR 的一个值—可信度对偶以及 SIZE 的所有可能的组合生成 ANIMAL 的全部新实例。如果 ANIMAL 的任何值或 *cf*-值是 MODIFIED，则生成一个新例，旧的一个 ANIMAL(128)则被删掉。

我们称这种存储更新过程是弱单调的，因为 *cf*-值没有减少。另外一种方法则总是删除(120,0.7)，且保持所有 $r_i=r^*$ 的(w_i，r_i)，而不管 r^* 是大于或小于原始的可信度。这后面的过程我们称为非单调的，因为可信度可能减少。

本章我们主要讨论了模糊专家系统是怎样处理不确定性和模糊性的，不确定性描述为数值和规则中的可信度值，模糊性则用模糊集技术来处理。最主要的两个问题是，(1)处理规则中的不确定性，以得到规则左边最后的可信度，并将它赋给规则后件的所有动作；(2)在一个规则运行完后，顺序的或并行的运行方法是如何来修改工作存储器的内容的。

第八章　规则或结论的组合

在模糊专家系统中，除了知识的表示外，推理是一个主要研究课题。目前，在模糊专家系统的模糊推理研究中，主要采用如下的几种方法：

(1)采用贴近度或某种模糊匹配函数直接将事实与规则前件进行匹配，其结果与专家给出的阈值进行比较，若大于阈值则执行该规则，最后推导出结论的不确定性。

(2)采用可能性理论来处理模糊推理问题，该方法主要采用可能性分布来描述语言变量等模糊概念，该方法认为可能性分布是表示模糊概念语义的最佳形式，并通过投影原理、特指/合取原理以及必含原理推导出一个可能是不精确的结论。

(3)采用真值约束方法来实现模糊推理，该方法引入了一种新的相容性关系，以及一种新的基于指数运算的蕴含形式，通过将该相容性关系映射到一个真值空间从而推导出结论的不确定性值。

(4)采用合成推理规则来实现模糊推理，先求出模糊产生式规则中前件与后件的某种确定蕴含关系，然后将这一关系与事实进行“合成”，即可求得结论的不确定性值。

此外还有采用基于区间值模糊集的方法来表示模糊蕴含和推理结果的技术等等。在这些方法中，以合成推理规则在模糊推理中应用得最为广泛。本章主要讨论在模糊专家系统中，采用合成推理规则来进行推理时如何对规则和推导的结果进行组合的问题，从而推导出最后的结论。

8.1 概　　述

模糊推理机制是模糊专家系统中最重要的一个功能模块。模糊推理是这样一个过程,给定一个观察事实,系统用一组规则就可推导出一个可能不精确的结论。模糊推理的主要功能就是即使在观察事实与规则的前件之间匹配不精确的情况下,系统仍然能推导出一个结果。对一个给定的规则

IF X is A　　THEN Y is B

和一个观察事实:X is A′,在合成推理的规则下我们可以获得一个推理结果。然而,如果我们仅采用一个规则,除非规则的左边(即前件)与观察事实之间是精确匹配的,否则我们采用合成推理规则(CRI)不可能获得一个有意义的推理结果。这是因为用一个规则来进行模糊推理仅仅只能改变规则右边(后件)的隶属度,而不可能得到一个正确的推理结果。因此,在合成推理规则应用之前需要将规则进行组合而得到一个组合规则,或者在对每个规则应用CRI后对它们的结果进行组合。

假定一个模糊专家系统的规则库中有几个模糊产生式规则:

IF X is A_w　　THEN Y is B_w

其中 A_w 和 $B_w(w=1,2,\cdots,\Omega)$分别是定义在论域 V 和 W 中的模糊集。对一个观察事实,为了获得一个有意义的推理结果,可采用如下的两种方法来实现:

1. 第一种方法称为"先推导后组合"(FITA),该方法的思想是对一个给定的观察事实 A',首先采用规则库中的每个规则进行CRI推理,然后按如下要求对所有的中间结果进行组合:

$$B' = \biguplus_{w=1}^{\Omega} B'_w \qquad (8.1)$$

其中 B'_w 是运用规则 w 所得到的推理结果,即 $B'_w = A' \circ R_w$,这里 $R_w = A_w \to B_w$ 是规则 w 的模糊蕴含关系,"$\circ$"表示合成,例如"Sup-min 合成”，$\uplus \in \{\cup, \cap\}$就是组合算子。

2. 另一种方法是“先组合后推导”(FATI)方法，这一方法是先组合所有的规则以形成一个总的模糊关系，它是各个规则模糊蕴含关系的一个组合：

$$R = \biguplus_{w=1}^{\Omega} R_w \tag{8.2}$$

这里 $R_w = A_w \to B_w$ 是规则 w 的模糊蕴含关系，$\uplus$是如上所述的一个组合算子。

这样，对于一个给定的观察事实 A'，推理可按如下方式进行：

$$B'' = A' \circ R \tag{8.3}$$

由上述分析可清楚地看出，基于 CRI 的推理过程包括几个步骤。对 FITA 而言包括“蕴含”、“合成”和“组合”，而对 FATI 则包括“蕴含”、“组合”和“合成”。许多学者在采用合成推理规则的原则下，在 Sup-min 合成条件下对蕴含的比较和选择，以及对用单个规则来进行推理进行了广泛的研究，例如 Hall 将蕴含算子分为三类：即 S-蕴含、R-蕴含和其他(既不是 S 也不是 R 蕴含)蕴含；Dubois 和 Prade 根据语义的观点将产生式规则(IF-THEN 型)分为 3 类：真值限定规则、不确定性限定规则和可能性限定规则；Driankov 认为：用一个规则的推理类型与规则“IF X is A THEN Y is B”中 X 和 Y 之间因果关系的一般模式无关；Dubois 和 Prade 还证明了在 CRI 的 Sup-min 合成条件下，Gödel 蕴含是一个好的蕴含关系等等。

虽然我们既可以选择 FATI 也可以选择 FITA 来进行推理，但须注意的是，对有些 CRI 而言，采用上述两种推理方法所得到的推理结果可能是不同的，也就是说(8.1)式中的 B'和(8.3)式中 B''是否相等取决于所选用的合成、组合和蕴含方式。

一些人工智能学者对采用多个规则来进行推理也进行了深入地研究，例如 Cao 和 Kandel 在他们的研究中对所有蕴含算子采用“max”和“min”算子来进行组合；须注意的是，对一个固定的合

成算子(如 Sup-min 合成),组合方法与 CRI 中使用的蕴含算子有关;Di Nola 采用模糊关系方程对这一问题进行了研究;Baldwin 和 Pilsworth 对"IF-THEN-ELSE"型规则中 ELSE 部分的解释所采用的不同蕴含提出了不同的组合算子等等。

本章主要讨论在采用 CRI 的模糊专家系统中,如何对规则和推导出的结果进行组合的方法问题,从模糊推理的基本要求出发来选择组合算子,即如果一个观察事实与规则库中某个规则的左边完全相同,那么推出的结果应与该规则的右边也是完全相同的。下面先讨论采用 Sup-T 合成的 CRI 情况下运用一个规则进行推理的方法,然后讨论将 CRI 中的蕴含算子分为三类:即"扩展型蕴含"、"减缩型蕴含"和"其他型蕴含";进而将推理过程也分为三类:即"扩展型推理"、"减缩型推理"和"其他型推理"。这些推理类型在已知合成算子(如 Sup-min 合成)的情况下,由其所采用的蕴含算子来确定。对 FATI 和 FITA 而言,两类基本的蕴含算子在"max"和"min"组合的情况下看作相同的是合适的,它表明为了满足模糊推理的基本要求,采用 Sup-T 合成来进行 CRI 推理时,如果蕴含 $F(a,b)$ 是"扩展型蕴含",即 $F(a,b)=a\to b\geqslant b$(对所有的 $a\in[0,1]$),且 $F(a,b)$ 是 a 的一个非增函数,即如果 $a_1\geqslant a_2$,则有 $F(a_1,b)\leqslant F(a_2,b)$,此时可用"min"来进行组合;如果蕴含 $F(a,b)$ 是一"减缩型蕴含",即 $F(a,b)=a\to b\leqslant b$(对所有的 $a\in[0,1]$),且 $F(a,b)$ 是 a 的一个非减函数,即如果 $a_1\geqslant a_2$,则有 $F(a_1,b)\geqslant F(a_2,b)$,此时则须用"max"来进行组合。此外,还讨论了规则前件和观察事实的隶属函数之间相互覆盖的影响,并给出一个实际例子说明如何选择组合算子的方法。

8.2 采用单个规则的推理

在下面的讨论中,将蕴含 $a\to b$ 看作 a 与 b 之间的一个函数,该函数可根据公理的观点来定义,如 Gödel 蕴含,也可采用反映 a

和 b 之间的启发关系来定义，如 Mandani 蕴含。隶属函数都假定是离散型的，并采用 $\mu_{A\to B}(a,b)$，或 $a\to b$，或 $F(a,b)$，或 $R(\to)$，或 r 来表示 CRI 中的蕴含算子。

合成推理规则(CRI)也称为广义的肯定前件的假言推理(GMP)。假定有模糊专家系统规则库中的一个规则和一个观察事实，那么推导出的结果可表示为：

Rule：IF X is A　THEN Y is (should be) B

Observation：X is A′

Consequence：Y is (should be) A′∘ (A→B)

其中 $A, A'\subset V$ 和 $B\subset W$ 分别是定义在论域 V 和 W 上的模糊集，$(A\to B)$ 表示蕴含关系 $R(\to)$，它是笛卡尔域 $V*W$ 上的一个模糊集，∘ 表示 A' 和 $(A\to B)$ 之间的"合成"。基于 CRI 的一个推理过程表示在图 8.1 中，其中 LHS→RHS 表示规则，LHS′是观察事实，$R(\to)$ 表示蕴含关系，∘ 表示合成，RHS′则是推理结果。

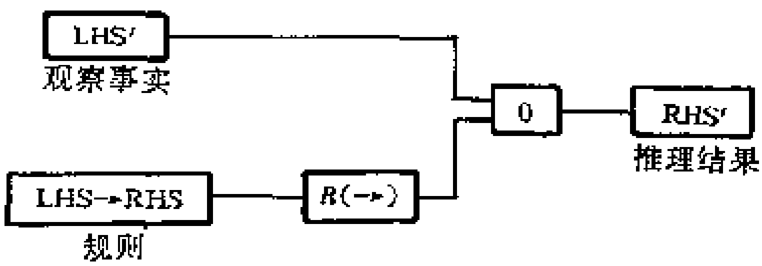


图 8.1　CRI：合成推理规则

在 CRI 中，最著名的是 Zadeh 的 Sup-min 合成，若用隶属函数的形式可将它表示成如下形式：

$$\mu_{B'}(y_j)=\bigvee_i \mu_{A'}(x_i)\wedge\mu_{A\to B}(x_i,y_j)$$

$$i=1,2,\cdots,I\quad j=1,2,\cdots,J\qquad(8.4)$$

其中，B' 是推理结果，它是论域 W 上的一个模糊集，$\mu_{B'}(y_j)$ 是第 j 个元素属于 B' 的隶属值，$\mu_{A'}(x_i)$ 是第 i 个元素属于 A' 的隶属值，$\mu_{A\to B}(x_i,y_j)$ 是第 ij 个元素属于蕴含关系 $R(\to)$ 的隶属值。

在 CRI 的研究中，主要涉及到如下的两个问题：

(1)蕴含关系的表示；

(2)如何将观察事实与蕴含关系进行合成。

下面我们先讨论第一个问题。我们将蕴含$(a\to b)$看作是 a 和 b 之间的一个函数，可以从公理的观点来定义它，也可以由反映 a 和 b 之间的一个关系的启发来定义它。例如，目前在许多文献中出现的一些著名的点值蕴含算子有：

I_1 Lukasiewicz： $a\to b=\min(1,1-a+b)$

I_2 Kleene-Dienes-Lukasiewicz： $a\to b=1-a+ab$

I_3 Kleene-Dienes： $a\to b=(1-a)\vee b$

I_4 Early Zadeh： $a\to b=(a\wedge b)\vee(1-a)$

I_5 Willmott： $a\to b=(a\wedge b)\vee([1-a]\wedge[1-b])$
$\vee((1-a)\wedge b)$

I_6 Mamdani： $a\to b=\min(a,b)$

I_7 Gödel： $a\to b=\begin{cases}1 & a\leqslant b\\ b & a>b\end{cases}$

I_8 Gaines： $a\to b=\min(1,b/a)$

I_9 Yager： $a\to b=b^a$

I_{10} Probabilistic： $a\to b=ab$

I_{11} Park-Cao-Kandel 1： $a\to b=\min(1,1-|a-b|)$

I_{12} Park-Cao-Kandel 2： $a\to b=\min(1,1-(a-b)^2)$

在上述蕴含关系中，I_6，I_{10}，I_{11}，I_{12}就可以看作是反映 a 和 b 之间关系的一种启发。

此外，还有学者提出采用区间值模糊集来表示蕴含关系，以及用区间值符号表示 T-范数和 T-余范数的耦合对。假如有规则：

IF X is A THEN Y is B

那么一族区间值蕴含关系 R 就可表示成如下形式的一个区间值模糊集：

$$(A\cap B)\cup(A^c\cap B)\cup(A^c\cap B^c)\subseteq R(A\to B)\subseteq A^c\cup B \tag{8.5}$$

其中，$\cap$，$\cup$ 和^c 是集合论中的交，并和伪余算子(Pseudo-Complement)，它们分别相应于隶属域中的一个合适的 T-范数"T"，T-余范数"S"和伪余"^{c}"算子。例如，如果 $A \subset V, B \subset W$，$\mu_A(x)=a$ 以及 $\mu_B(y)=b$，则有 $A \cap B \subset V * W$ 和 $A \cup B \subset V * W$ 以及 $\mu_{A \cap B}(x,y)=T(a,b)$ 和 $\mu_{A \cup B}(x,y)=S(a,b)$。

另外，(8.5)式中的区间值蕴含 R 族也可用析取范式 DNF(→)和合取范式 CNF(→)定义成：

$$\mathrm{DNF}(\rightarrow) \subseteq \mathrm{R}(\rightarrow) \subseteq \mathrm{CNF}(\rightarrow) \tag{8.6}$$

其中，$\mathrm{DNF}(\rightarrow)=(A \cap B) \cup (A^c \cap B) \cup (A^c \cap B^c)$，$\mathrm{CNF}(\rightarrow)=A^c \cup B$。在布尔逻辑中有 DNF=CNF，但在模糊逻辑中，对确定的 T-范数和 T-余范数则有 DNF⊆CNF。

因此，在隶属域中区间值蕴含关系族可定义成：

$$\mu_R = \{\mu_R \mid \mu_{DNF(S,T,C)} \leqslant \mu_R \leqslant \mu_{CNF(S,T,C)}\} \tag{8.7}$$

其中 S,T,C 是 T-范数，T-余范数和伪余算子，它们分别相应于集合论中的并，交和伪余。例如，4 个应用相当广泛的 T-范数和 T-余范数的耦合对：

Min-Max： $T(a,b)=a \wedge b=\min(a,b)$

$S(a,b)=a \vee b=\max(a,b)$

Product-Sum： $T(a,b)=a \bigcirc b=ab$

$S(a,b)=a \bullet b=a+b-ab$

Bold： $T(a,b)=a \odot b=\max(0,a+b-1)$

$S(a,b)=a \ominus b=\min(1,a+b)$

Drastic： $T_w(a,b)=\begin{cases} a \wedge b & a \vee b=1 \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$

$S_w(a,b)=\begin{cases} a \vee b & a \wedge b=0 \\ 1 & \text{否则} \end{cases}$

它们之间有如下的关系：

$$T_w(a,b) \leqslant a \odot b \leqslant a \bigcirc b \leqslant a \wedge b \leqslant a \vee b \leqslant a \bullet b \leqslant a \ominus b \leqslant S_w(a,b)$$

如果在(8.7)中采用适当的 S-T 算子对，那么可以得出一些点值模糊蕴含实际上包含在模糊蕴含“$A\to B$”的区间值模糊集 $R(\to)$ 中，例如，在隶属域中我们有 4 个如下的包含关系：

I_{13} $\mathrm{IVFS}(\to|\vee,\wedge,\mathrm{C})$：$\mu_{\mathrm{DNF}(A\to B|\vee,\wedge,C)}\leqslant(\mu_{I_3},\mu_{I_4},\mu_{I_5})\leqslant\mu_{\mathrm{CNF}(A\to B|\vee,\wedge,C)}$

I_{14} $\mathrm{IVFS}(\to|\bullet,\bigcirc,\mathrm{C})$：$\mu_{\mathrm{DNF}(A\to B|\bullet,\bigcirc,C)}\leqslant\mu_{I_1}\leqslant\mu_{\mathrm{CNF}(A\to B|\bullet,\bigcirc,C)}$

I_{15} $\mathrm{IVFS}(\to|\ominus,\odot,\mathrm{C})$：$\mu_{\mathrm{DNF}(A\to B|\ominus,\odot,C)}\leqslant(\mu_{I_1},\mu_{I_2},\mu_{I_3})\leqslant\mu_{\mathrm{CNF}(A\to B|\ominus,\odot,C)}$

I_{16} $\mathrm{IVFS}(\to|S_w,T_w,\mathrm{C})$：$\mu_{\mathrm{DNF}(A\to B|S_w,T_w,C)}\leqslant(\mu_{I_1},\mu_{I_2},\mu_{I_3})\leqslant\mu_{\mathrm{CNF}(A\to B|S_w,T_w,C)}$

其中，IVFS(→1)表示区间值模糊集，DNF(A→B|∨，∧，C)和 CNF(A→B|∨，∧，C)表示由 max，min 和伪余算子的耦合对所定义的模糊蕴含的下界和上界，对其他的 DNF 和 CNF 这一结论也是成立的。其中{●，○}，{⊖，⊙}和{S_w，T_w}可分别看作 Sum-Product，bold 并-交和 drastic 并-交。

在多个前件蕴含的情况下，也可以采用区间值模糊集来表示多个前件的蕴含和推理结果，在这种情况下上述结果仍然是正确的。

Hall 给出了另一种关于蕴含的概念，他将所有的蕴含关系分为三类，即 S-蕴含；R-蕴含和其他蕴含，为方便下面的讨论，先简单地介绍一下 S-蕴含和 R-蕴含的基本概念。

定义 1 S-蕴含是一个从[0，1] * [0，1]到[0，1]的函数 $F(\cdot)$：

$$F(a,b)=S(n(a),b) \tag{8.8}$$

这里 S 是一个连续的 T-余范数算子，$n(\cdot)$是一个强否定函数。例如 I_1，I_2，I_3 就是 S-蕴含。

定义 2 R-蕴含是一个从[0，1] * [0，1]到[0，1]的函数 $F(\cdot)$：

$$F(a,b)=\mathrm{Sup}\{x\in[0,1]|T(a,x)\leqslant b\} \tag{8.9}$$

其中 T 是一个连续的 T-范数算子。例如上面给出的 I_1,I_7 和 I_8 就是 R-蕴含。

既不属于 S-蕴含也不属于 R-蕴含的蕴含就属于其他类型的蕴含，如上面给出的 I_4,I_5 和 I_6 就属于其他类型的蕴含。下面是两个关于 S-和 R-蕴含的定理。

定理 1 一个 S-蕴含，即 $F(a,b)=S(n(a),b)$ 是 a 的一个非增函数，即如果 $a_1\geqslant a_2$，则有 $F(a_1,b)\leqslant F(a_2,b)$。

证明 假定 $a_1\geqslant a_2$，那么我们有

$$n(a_1)\leqslant n(a_2) \qquad (\text{互补和单调性})$$

因此，根据定义 1 有

$$F(a_1,b)=S(n(a_1),b)\leqslant S(n(a_2),b)=F(a_2,b)$$

即 $F(a,b)$ 是 a 的一个非增函数。

定理 2 一个 R-蕴含，即 $F(a,b)=\mathrm{Sup}\{x\in[0,1]|T(a,x)\leqslant b\}$ 是 a 的一个非增函数，如果 $a_1\geqslant a_2$，那么 $F(a_1,b)\leqslant F(a_2,b)$。

证明 由定义 2 我们知道

$$F(a,b)=\mathrm{Sup}\{x\in[0,1]|T(a,x)\leqslant b\}$$

对一个固定的 b 值，考虑两个 a 值，即 a_1 和 a_2。如果 $a_1\geqslant a_2$，我们有 $F(a_1,b)$ 和 $F(a_2,b)$ 之间的关系。

(i)假定 $a_1\geqslant a_2\geqslant b$，如果对所有的 $x_1\in[0,1]$，使得 $T(a_1,x_1)\leqslant b$，那么

$$T(a_1,\mathrm{Sup}\{x_1\})=b \qquad (\text{单调性})$$

如果对所有的 $x_2\in[0,1]$，使得 $T(a_2,x_2)\leqslant b$，那么

$$T(a_2,\mathrm{Sup}\{x_2\})=b \qquad (\text{单调性})$$

因此我们有

$$T(a_1,\mathrm{Sup}\{x_1\})=T(a_2,\{x_2\})$$

所以

$$\mathrm{Sup}\{x_1\}\leqslant\mathrm{Sup}\{x_2\} \qquad (\text{单调性})$$

即

$$F(a_1,b)=\mathrm{Sup}\{x\in[0,1]|T(a_1,x)\leqslant b\}$$
$$\leqslant\mathrm{Sup}\{x\in[0,1]|T(a_2,x)\leqslant b\}=F(a_2,b),$$

于是可得到 $F(a_1,b)\leqslant F(a_2,b)$。

(ii)假定 $a_1\geqslant b\geqslant a_2$,则有

$$T(a_2,x)\leqslant a_2 \qquad (\text{单调性})$$

因此 $T(a_2,x)\leqslant a_2\leqslant b$,即对所有的 $x\in[0,1]$,$T(a_2,x)\leqslant b$ 均成立,故 $\mathrm{Sup}\{x\}=1,x\in[0,1]$,即 $F(a_2,b)=1$。

$$F(a_1,b)=\mathrm{Sup}\{x\in[0,1]|T(a_1,x)\leqslant b\}=\mathrm{Sup}\{x\}\leqslant 1$$

即 $F(a_1,b)\leqslant F(a_2,b)$。

(iii)假定 $b\geqslant a_1\geqslant a_2$,则有

$$T(a_1,x)\leqslant a_1 \qquad (\text{单调性})$$

因此 $T(a_1,x)\leqslant a_1\leqslant b$,即 $T(a_1,x)\leqslant b$ 对所有的 $x\in[0,1]$均成立,所以 $\mathrm{Sup}\{x\}=1,x\in[0,1]$,即 $F(a_1,b)=1$。

类似地,我们有

$$T(a_2,x)\leqslant a_2 \qquad (\text{单调性})$$

因此,$T(a_2,x)\leqslant a_2\leqslant b$,即 $T(a_2,x)\leqslant b$ 对所有的 $x\in[0,1]$均成立。

所以,$\mathrm{Sup}\{x\}=1,x\in[0,1]$,即 $F(a_2,b)=1$,进而得到 $F(a_1,b)=F(a_2,b)$。

由上述(i),(ii)和(iii)的分析,我们可以得出 $F(a,b)$是 a 的一个非增函数,即如果 $a_1\geqslant a_2$,那么 $F(a_1,b)\leqslant F(a_2,b)$。

在上述蕴含算子表示的背景基础上,我们引出一种蕴含算子的新的分类方法,将蕴含算子分为如下三类:

(i)扩展型蕴含;

(ii)减缩型蕴含;

(iii)其他类型蕴含。

定义 3 一个蕴含函数 $F(a,b)=a\rightarrow b$ 称为

(i)扩展型蕴含函数,如果对所有的$a\in[0,1]$,有$F(a,b)\geqslant b$;

(ii)减缩型蕴含函数，如果对所有的 $a\in[0,1]$，有 $F(a,b)\leqslant b$；

(iii)其他类型蕴含函数，如果它既不是扩展型蕴含函数也不是减缩型蕴含函数。

必须清楚的是在有些情况下，对某个 $a\in[0,1]$，其他型蕴含有 $F(a,b)\geqslant b$；而在另一些情况下，对另外一个 $a\in[0,1]$，其他型蕴含又会得到 $F(a,b)\leqslant b$。

对 S-和 R-蕴含有如下的定理 3。

定理 3 一个 S-蕴含或一个 R-蕴含是一个扩展型蕴含。

证明 (i)首先讨论 S-蕴含，由定义 1 我们有 $F(a,b)=S(n(a),b)$，这里 S 是一个连续的 T-余范数算子，$n(\cdot)$是一个强否定函数。因为对任何 T-余范数 S，$S(x,y)\geqslant x$ 和 $S(x,y)\geqslant y$，因而我们有 $F(a,b)=S(n(a),b)\geqslant b$，所以根据定义 3，一个 S-蕴含是一个扩展型蕴含。

(ii)现在考虑 R-蕴含，由定义 2 可知，一个 R-蕴含是一个从 $[0,1]*[0,1]$到$[0,1]$的函数 F：$F(a,b)=\mathrm{Sup}\{x\in[0,1]|T(a,x)\leqslant b\}$，这里 T 是一个连续的 T-范数算子，下面看 a 和 b 之间的关系：

(a)$a>b$，因为 T 是单调的，对任何 T-范数算子 T 有 $T(a,x)\leqslant a\wedge x$，所以，对任意的 T 算子，我们有：

$$\begin{aligned}F(a,b)&=\mathrm{Sup}\{x\in[0,1]|T(a,x)\leqslant b\}\\&\geqslant\mathrm{Sup}\{x\in[0,1]|a\wedge x\leqslant b\}=b\end{aligned}$$

(b)$a\leqslant b$，对任何 $x\in[0,1]$，有 $T(a,x)\leqslant a\leqslant b$，所以

$$\begin{aligned}F(a,b)&=\mathrm{Sup}\{x\in[0,1]|T(a,x)\leqslant b\}\\&=1\geqslant b\end{aligned}$$

由(a)和(b)的讨论，我们有 $F(a,b)\geqslant b$，根据定义 3 可得出：一个 R-蕴含是一个扩展型蕴含。

根据上面的分析和定理 3，我们将蕴含算子分成三类：I_1,I_2,I_3,I_7,I_8,I_9 和 IVFS($\rightarrow$)的 $I_{13},I_{14},I_{15},I_{16}$的上界为扩展型蕴含算

子；而 I_6 和 I_{10} 为减缩型蕴含算子；剩下的 I_4，I_5，I_{11}，I_{12} 和 IVFS($\to$)的 I_{13}，I_{14}，I_{15}，I_{16}的下界为其他型蕴含算子。

上面讨论了蕴含关系的表示问题。下面再讨论本节要研究的另一个问题：如何将观察事实(A')与蕴含关系($R(\to)$)进行合成，目前应用较多的合成方法有 Zadeh 的 Sup-min 合成方法，Kaufmann 的 Sup-product 合成方法，Mizumoto 的 Sup-drastic 合成方法，Turksen 的 Sup-T 合成方法等。一些学者对 CRI 中蕴含和合成之间的关系进行了研究，例如，对广义的肯定前件的假言推理提出了假言推理的生成函数，其中建议合成由蕴含来确定。例如 Hall 就对 S-和 R-蕴含的合成选择给出了一个总的建议。此外，Dubois 和 Prade 在 Sup-min 合成的条件下对蕴含的选择进行了研究，得出了在模糊推理的一些原则要求下，Gödel 蕴含是一个好的蕴含。

Turksen 在他的研究中甚至认为合成实际上是语言合成，即 CRI 可推广成如下的形式：

$$\mu_{B'}(y_j) = \underset{i}{\mathrm{OR}}\{\mathrm{AND}[\mu_{A'}(x_i), \mu_{A\to B}(x_i, y_j)]\}$$

$$i = 1,2,\cdots,\mathrm{I} \quad j = 1,2,\cdots,\mathrm{J} \qquad (8.10)$$

其中，A' 和 $A\to B$ 可以是点值或区间值模糊集，AND 和 OR 可看作是普通或语言算子，它可以进一步地推导出区间值的表示。

根据上述的关于蕴含和合成的讨论，以及在将蕴含算子分类的基础上，下面就可讨论与推理有关的问题了。

8.3 扩展和减缩推理

给定一个模糊专家系统的规则库和一个观察事实，我们就可以采用 CRI 来实现推理并推导出一个结果，基于 CRI 的推理过程实际上就是改变匹配规则右边的隶属函数值。本节我们将讨论依据推理结果将推理过程分为如下三类：即扩展型推理、减缩型推理和其他型推理。在此基础上进一步地讨论如何选择一个合适的组

合算子的问题。

定义 4 对一个给定的规则 $A \to B$ 和一个观察事实 A'，这里 $A, A' \subset V$ 和 $B \subset W$ 是分别定义在论域 V 和 W 上的模糊集，假定由一个推理过程所推导出的结果是 B'，且我们总有

$$B \subseteq B' \tag{8.11}$$

这一推理过程称为"扩展型推理"。假定推导出的结果是 B^*，且总有

$$B^* \subseteq B \tag{8.12}$$

那么这一推理过程则称为"减缩型推理"。如果推导出的结果有时是 $B \subseteq B'$，而在另外一些情况下则为 $B^* \subseteq B$，那么这一推理过程就称为"其他类型推理"。

在 CRI 的情况下，Zadeh 于 1973 年首次提出了 Sup-min 合成，其后许多学者对 Sup-T 合成进行了研究，根据 Sup-T 合成，我们有

$$\mu_{B}(y_j) = \bigvee_i \{T[\mu_{A'}(x_i), \mu_{A \to B}(x_i, y_j)]\}$$
$$i = 1,2,\cdots,\mathrm{I} \quad j = 1,2,\cdots,\mathrm{J} \tag{8.13}$$

这里 T 是一个 T-范数算子。

下面给出一个有关 Sup-T 合成的定理，假定对 CRI 的合成采用 Sup-T 合成，且为了包含一般的情况，假定所有的模糊集都是正规的。

定理 4 对于在 CRI 中采用 Sup-T 合成的一个推理过程而言，如果使用的蕴含是"扩展型蕴含"，即对所有的 $a \in [0,1]$，有 $r = a \to b \geqslant b$，那么将这种推理过程称为"扩展型推理"；如果蕴含是"减缩型蕴含"，即对于所存的 $a \in [0,1]$，有 $r = a \to b \leqslant b$，那么将这种推理过程称为"减缩型推理"；如果蕴含是"其他型蕴含"，即有时 $r = a \to b \geqslant b$，而在另外一些时候有 $r = a \to b \leqslant b$，这种推理过程称为"其他型推理"。

证明　假定有一个规则 $A \to B$，A 和 B 是分别定义在论域 V 和 W 上的模糊集，假定观察事实为 A'，相应的推理结果为 B'，与

A 和 B 一样，A'和 B'也是分别定义在论域 V 和 W 上的模糊集。

在下面的证明过程中我们采用如下的简化表示法：

$$\mu_A(x_i)=a_i \qquad \mu_B(y_j)=b_j \qquad \mu_{A'}(x_i)=a'_i$$

$$\mu_{B'}(y_j)=b'_j \quad (\text{或 } \mu_{B^*}(y_j)=b_j^*)$$

(1)首先考虑蕴含 r，使得有 $r=a\to b\geqslant b$，这样我们就可得到

$$r_{ij}=a_i\to b_j\geqslant b_j$$

根据 CRI 中的 Sup-T 合成，我们有

$$b'_j=\bigvee_i\{T[a'_i,r_{ij}]\}\geqslant\bigvee_i\{T[a'_i,b_j]\}=b_j, \quad (\text{单调性})$$

即 $B\subseteq B'$。因此，由定义 4 可看出，这一推理过程是一个“扩展型推理”。

(2)假定一个蕴含算子 r，使得有 $r=a\to b\leqslant b$，这样则有

$$r_{ij}=a_i\to b_j\leqslant b_j$$

根据 Sup-T 合成，则可得到

$$b_j^*=\bigvee_i\{T[a'_i,r_{ij}]\}\leqslant\bigvee_i\{T[a'_i,b_j]\}=b_j \quad (\text{单调性})$$

即 $B^*\subseteq B$。因此，由定义 4 可以看出，这一推理过程是一个“减缩型推理”。

(3)最后，对 Sup-T 合成来说，如果应用于推理过程中的蕴含算子是“其他型蕴含”算子，那么这一推理过程肯定就是“其他型推理”。

由上述证明可看出，根据定义 4，对一个给定的蕴含算子，在 Sup-T 合成的情况下，我们可以确定一个推理过程是一个扩展型，一个减缩型，或是一个其他型的推理。

8.4 规则或结论的组合

上几节已提到，除非一个观察事实与一个规则的左边之间是精确匹配的，否则采用一个规则是无法得出有意义的结果的，这表明在观察事实与规则的左边不是完全精确匹配的情况下，我们必

须采用多于 1 个的规则才能推导出有意义的结果，这就涉及到对每个规则所推出的中间结果如何进行组合进而得出最后有意义的结果。下面我们先讨论模糊推理的基本要求。

8.4.1 模糊推理的基本要求

用一个规则来进行模糊推理的基本要求是，给定一个规则 $A \to B$，如果观察事实是 $A' = A$，那么导出的结果应为 B。这一要求表明精确(经典)推理应是广义的假言推理的一种特殊情况，这是任何模糊推理形式都应满足的基本要求。

许多研究者对这一要求进行了研究，例如 Trillas 认为，对一个给定的蕴含函数 I，可推导出一个假言推理函数 m，使得 $A \circ_m (A \to B) = B$；Dubois 和 Prade 提出，对一个给定的合成 m，可导出一个蕴含算子 I，使得 $A \circ_m (A \to B) = B$。他们还证明，对 Sup-T 合成(用 $\circ_{s-t}$ 表示)和 R-蕴含(用 $\to_R$ 表示，且 R-蕴含中使用的 T-范数算子与 Sup-T 合成中使用的 T-范数算子是相同的)，那么我们有 $A \circ_{s-t} (A \to_R B) = B$。例如，在采用 CRI 的条件下，如果使用 Sup-min 合成，那么 Gödel 蕴含是满足上述基本要求的。然而，对一个固定的合成，例如 Sup-min 合成，很多蕴含算子不满足上述基本要求，在引进某些附加条件(如 α-截集)时才满足上述要求。

在模糊专家系统的模糊推理中，用一个规则无法推导出一个有意义的结果，这表明变量之间的因果关系不可能仅用一个规则来描述。例如有如下一条规则：

IF a tomato is red THEN the tomato is ripe

一个观察事实是“This tomato is very red”，那么我们不能推导出“The tomato is very ripe”，除非我们知道“红”与“熟”之间的关系。在一般情况下，即只要观察事实与规则左边不是完全匹配的情况，我们都需要采用多个规则才能推导出有意义的结果。假定一个模糊专家系统的规则库中有 Ω 个规则，对每个规则我们有一个推理结果，这就需要将这些结果进行组合以得到最后的有意义的结果。

这种采用多个规则来推理的模糊推理也应满足上述对模糊推理所提出的基本要求。

原则 I 对采用多个规则来进行模糊推理的基本要求是，给定 Ω 个规则 $A_w \to B_w, w=1,2,\cdots,\Omega$，如果 $A'=A_w$，那么 $B'=B_w$。

这个原则对模糊专家系统的可靠性是相当重要的。更准确地说，这个原则要求当给定的观察事实与多个规则中某个规则的左边相同时，模糊专家系统运行所得的结果就像是一个规则所获得的结果，因此，为得到最后有意义的结果，对规则或中间结果进行组合就起着决定性的作用。

我们将对模糊推理的基本要求称为“组合和推理机制的一致性”，它可以描述为依据模糊方程确定一个模糊关系 $R=\biguplus R_w$ 的问题。下面讨论对扩展型推理和减缩型推理，怎样选择组合算子使得对规则或结果进行组合后，以使用多个规则进行模糊推理所得到的结果满足上述基本要求。

8.4.2 组合：min 与 max

对一个给定的观察事实，我们可用 9.1 节所描述的两种方法即 FITA 和 FATI 来实行 CRI 推理。若采用 FITA 推理，其计算步骤是首先计算：

$$B'_w = A' \circ R_w \qquad w = 1,2,\cdots,\Omega \tag{8.14}$$

然后再计算：

$$B' = B'_1 \uplus B'_2 \uplus \cdots \uplus B'_w \uplus \cdots \uplus B'_\Omega \tag{8.15}$$

其中$\uplus$表示组合。

若采用 FATI 进行推理，则首先计算：

$$R = R_1 \uplus R_2 \uplus \cdots \uplus R_w \uplus \cdots \uplus R_\Omega \tag{8.16}$$

其中 $R_w = A_w \to B_w$，然后再计算：

$$B' = A' \circ R \tag{8.17}$$

一个组合算子应该具有如下特性：

(i)交换性，即

$$B'_i \uplus B'_j = B'_j \uplus B'_i，或 R_i \uplus R_j = R_j \uplus R_i$$

(ii)结合性，即

$$B'_i \uplus (B'_j \uplus B'_k) = (B'_i \uplus B'_j) \uplus B'_k$$

或者

$$R_i \uplus (R_j \uplus R_k) = (R_i \uplus R_j) \uplus R_k$$

(iii)幂等性，即

$$B'_i \uplus B'_i = B'_i \quad 或 \quad R_i \uplus R_i = R_i$$

可以证明仅“max”和“min”算子具有上述特性，感兴趣的读者可参考 Klir 的专著。现在的问题是，“对(8.15)式和(8.16)式而言组合算子是什么样的形式?”说得更清楚一点就是，“组合算子是 max 或是 min?”

8.4.3 扩展型推理

在一个扩展型推理过程中，由前一节的定义 4，对任一观察事实 A'，我们有 $B \subseteq B'$。对基于 CRI 的扩展型推理过程，我们有如下的必要条件。

必要条件 1 假定一个模糊专家系统规则库中有 Ω 个规则，对一个观察事实和采用 Sup-T 合成(在 CRI 的范围内)的一个推理过程，如果蕴含是“扩展型蕴含”，即对所有的 $a \in [0,1]$ 有 $F(a, b) = a \to b \geqslant b$，且该蕴含是 a 的一个非增函数，即如果 $a_1 \geqslant a_2$，则有 $F(a_1, b) \leqslant F(a_2, b)$，那么为了获得一个有意义的结果，必须采用“min”来进行组合。

证明 (i)首先考虑 FITA，如果观察事实为 A'，则有

$$\begin{aligned} B' &= \biguplus_{w=1}^{\Omega} B'_w \\ &= \biguplus_{w=1}^{\Omega} A' \circ (A_w \to B_w) \end{aligned}$$

若用隶属值的形式则可写成：

$$b'_j = \bigoplus_{w=1}^{\Omega} b'_{wj}$$

这里“$\oplus$”是隶属值之间的一个算子，其功能相应于集合表示中的“$\uplus$”，和

$$\begin{aligned} b'_{wj} &= \mathrm{Sup}\{T(a'_i, a_{wi} \to b_{wj})\} \\ &= \{T(a'_1, a_{w1} \to b_{wj})\} \vee \{T(a'_2, a_{w2} \to b_{wj})\} \vee \cdots \\ &\quad \vee \{T(a'_i, a_{wi} \to b_{wj})\} \end{aligned}$$

如果存在一个规则 w'：$A_{w'} \to B_{w'}$，$1 \leqslant w' \leqslant \Omega$，使得 $A' \cap A_{w'} = \phi$，即 A' 与 $A_{w'}$ 之间没有覆盖，那么就存在一个 k，$1 \leqslant k \leqslant I$，使得 $a'_k = 1$ 和 $a_{w'k} = 0$，这里 I 是模糊集 A 和 A' 支持元素的数目。所以，如果 $F(a,b)$ 是 a 的一个非增函数，那么对 $b_{w'j}$ 的任何值，$(a_{w'k} \to b_{w'j})$ 都获得它的最大值 1，因此 $T(a'_k, a_{w'k} \to b_{w'j}) = 1$，即 $b'_{w'j} = 1$。这一过程表示在图 8.2 中。

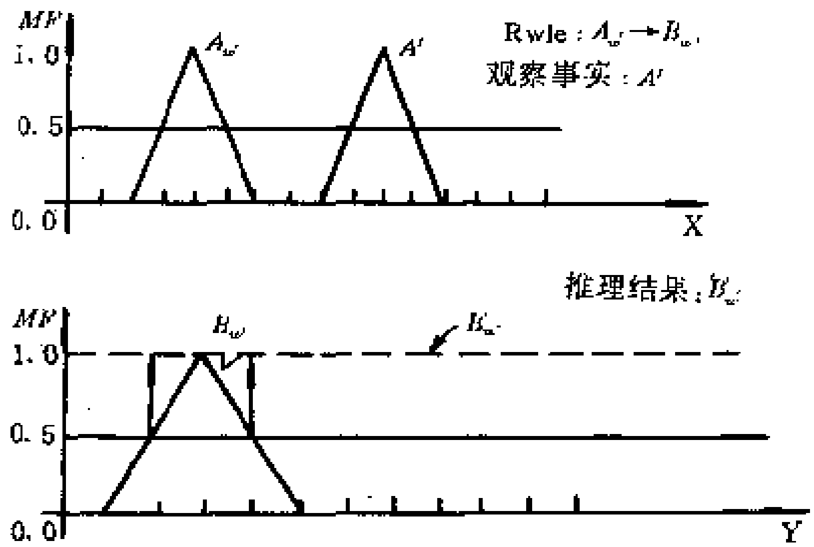


图 8.2 扩展型推理

如果在组合中采用“max”，那么对所有的 j，$j=1,2,\cdots,J$，则有

$$b'_j = \bigoplus_{w=1}^{\Omega} b'_{wj}$$

$$\geqslant \bigoplus_{w=1}^{\Omega} b'_{w'j} \qquad \text{(单调性)}$$

$$=1$$

然而，b'_j 是支持点 j 在模糊集 B' 中的隶属度，因此有 $b'_j \leqslant 1$，所以 $b'_j = 1$。

为了删除从一个规则获得的无意义的信息(即不知道)，必须采用"min"算子作为组合算子。也就是说，如果观察事实与规则左边之间的相似性(匹配)很小，以及包含完全不匹配的限制，此时采用该规则所得到的推理结果的隶属值在每个支持点均为 1，即使用该规则得到的是"不知道"。因此这个的执行是无用的，因为它没有推出任何有用的信息。因此，为了对任意一个观察事实推出一个有意义的推理结果，我们必须采用"min"算子来组合所有的中间推理结果。

(ii)在 FATI 的情况下，有

$$B' = A' \circ R = A' \circ \biguplus R_w$$

$$= A' \circ \biguplus_{w=1}^{\Omega} (A_w \to B_w)$$

用隶属函数值的形式则可写成如下形式：

$$b'_j = \operatorname*{Sup}_i \{T[a'_i, \bigoplus_{w=1}^{\Omega} (a_{wi} \to b_{wj})]\}$$

$$= \operatorname*{Sup}_i \{T[a'_i, r_{ij}]\}$$

其中

$$r_{ij} = \bigoplus_{w=1}^{\Omega} (a_{wi} \to b_{wj})$$

如果 $\oplus = \max$，且存在一个 w'，$1 \leqslant w' \leqslant \Omega$，使得像(i)中所讨论的那样有 $A' \cap A_{w'} = \phi$，则可得到

$$r_{ij} \geqslant a_{w'i} \to b_{w'j} \qquad \text{(单调性)}$$

$$=1$$

然而我们有 $r_{ij} \leqslant 1$，所以 $r_{ij} = 1$，且

$$b'_j = \operatorname*{Sup}_i \{T[a'_i, r_{ij}]\} \qquad \text{(单调性)}$$

$$=1$$

所以，与 FITA 的情况是类似的，我们在 FATI 的情况下也须采用“min”算子来进行组合。

因此，根据定理 1 和 2，以及必要条件 1，如果采用 Sup-T 进行合成，那么对 S-和 R-蕴含应该采用“min”算子进行组合。

一、关于隶属函数约束的分析

如上所述，对规则 $A \to B$ 和一个观察事实 $A'=A$，如果选用合适的蕴含和合成，则有 $A' \circ (A \to B)=B$。在多个规则的情况下，如果选用合适的蕴含和合成，当 $A'=A_w$ 时，就采用规则 $w: A_w \to B_w$，从而可推导出 B_w，即有 $A' \circ (A_w \to B_w)=B_w$。因此，为了满足原则 1，其他规则使用的影响必须删除。下面我们考虑 CRI 是在如下的情况下运行的：采用 R-蕴含、Sup-T 合成以及 min 组合算子。

首先分析 FITA 方法，假定有一观察事实 $A'=A_w$，考虑一个规则 $w^*(w^* \neq w): A_{w^*} \to B_{w^*}$，采用这一规则可得到如下的推理结果 B'（写成隶属值的形式）：

$$
\begin{aligned}
b'_{w^*j} &= \mathrm{Sup}\{T(a_{wi}, a_{w^*i} \to_R b_{w^*j})\} \\
&= \{T(a_{w1}, a_{w^*1} \to_R b_{w^*j})\} \vee \{T(a_{w2}, a_{w^*2} \to_R b_{w^*j})\} \\
&\quad \vee \cdots \vee \{T(a_{wi}, a_{w^*i} \to_R b_{w^*j})\}
\end{aligned}
$$

其中，a_{wi}, a_{w^*i}, b_{wj} 和 b_{w^*j} 分别是 A_w, A_{w^*}, B_w 和 B_{w^*} 在支持点 $i(i=1,2,\cdots,I)$ 和 $j(j=1,2,\cdots,J)$ 的隶属值，$\to_R$ 表示 R-蕴含，它定义为

$$
a \to_R b = \mathrm{Sup}\{x \in [0,1] | T(a,x) \leqslant b\}
$$

因此，依据 a_{wi}, a_{w^*i}, b_{wj} 和 b_{w^*j} 之间的关系，或者更准确地说，根据它们之间的覆盖程度，推理结果可能为 B_w，也不能不为 B_w，这样，就必须对隶属函数给出一些必要的限制。

下面讨论当采用 Sup-T 合成、R-蕴含和 min 组合时对隶属函数的约束。对单个规则只要合成和蕴含选择得合适，就会有 $A_w \circ (A_w \to B_w)=B_w$，用隶属值的形式则可写成：

$$\operatorname*{Sup}_i\{T[a_{wi},\operatorname{Sup}[x\in[0,1]|T(a_{wi},x)\leqslant b_{wj}]]\}=b_{wj}$$
$$j=1,2,\cdots,J$$

像在必要条件 1 中所证明的那样，对多个规则进行组合时需选择“min”算子。

因此，对 $j=1,2,\cdots,J$，为了使原则 I 满足，必须有：

$$b'_{w^*j}\geqslant b_{wj} \tag{8.18}$$

或者

$$\operatorname*{Sup}_i\{T(a_{wi},a_{w^*i}\rightarrow_R b_{w^*j})\}\geqslant b_{wj} \tag{8.19}$$

当 A_w,B_w 和 B_{w^*} 给定时，分析对 A_{w^*} 的约束，换句话说，就是对给定的 B_i，要求出 A_i 之间的最大覆盖。为简洁起见，假定 A_{w^*} 和 B_{w^*} 分别在 A_w 和 B_w 的左边，即左覆盖，且所有的模糊集都是正规的。

对一个具体的 j，由(8.19)式我们有如下几种情况：

(Ⅰ) $b_{w^*j}\geqslant b_{wj}$，根据 R-蕴含，有

$$a_{w^*i}\rightarrow_R b_{w^*j}\geqslant b_{w^*j}$$

因此

$$\begin{aligned}\operatorname*{Sup}_i\{T(a_{wi},a_{w^*i}\rightarrow_R b_{w^*j})\}&\geqslant\operatorname*{Sup}_i\{T(a_{wi},b_{w^*j})\}\\&=b_{w^*j}\qquad\text{(正规性)}\\&\geqslant b_{wj}\end{aligned}$$

即对支持点 j，当 $b_{w^*j}\geqslant b_{wj}$ 时，有 $b'_{w^*j}\geqslant b_{wj}$。因此在组合中使用 min 算子就可删除该支持点的影响，故对该点的隶属值不需要约束。

(Ⅱ) $b_{w^*j}<b_{wj}$。假定在 A_w 和 A_{w^*} 的支持点 $k,1\leqslant k\leqslant I$，(8.19)式的左边达到它的最大值，即

$$\operatorname*{Sup}_i\{T(a_{wi},a_{w^*i}\rightarrow_R b_{w^*j})\}=T(a_{wk},a_{w^*k}\rightarrow_R b_{w^*j})$$

为使(8.19)式成立，就需有

$$T(a_{wk},a_{w^*k}\rightarrow_R b_{w^*j})\geqslant b_{wj} \tag{8.20}$$

(Ⅰ)考虑 B_w 支持点 j 的最大值 j_m(右覆盖的最小值),使得 $b_{wj}=1$ 和 $b_{w^*j_m}=b$,根据(8.20)式则需

$$a_{wk}=1 \tag{8.21}$$

和

$$a_{w^*k}\to_R b_{w^*j_m}=1 \tag{8.22}$$

根据(8.22)式和 R-蕴含,又需

$$a_{w^*k}\leqslant b_{w^*j_m}=b$$

如果用 k_m 表示 k 的最大值(如果是右覆盖则是最小值),使得 $a_{wk}=1$,那么关于 A_{w^*} 的约束应为:当 $a_{wk_m}=1$ 时,$a_{w^*k_m}$ 的最大值应为 b,即

$$\text{当 } a_{wk_m}=1,\quad a_{w^*k_m}\leqslant b \tag{8.23}$$

如果(8.23)式被满足,那么又会有如下两种情况。

(a) $b<b_{w^*j}<b_{wj}$,根据(8.23)式有

$$\begin{aligned}\sup_i\{T(a_{wi},a_{w^*i}\to_R b_{w^*j})\}&\geqslant\sup_i\{T(a_{wi},a_{w^*i}\to_R b)\}\quad(\text{单调性})\\&\geqslant T(a_{wk_m},a_{w^*k_m}\to_R b)\\&=T(1,b\to_R b)=1\geqslant b_{wj}\end{aligned}$$

即依据(i)中推导出的 $a_{wk_m}=1$ 和 $a_{w^*k_m}=b$,如果 $b<b_{w^*j}<b_{wj}$,那么对 A_{w^*} 没有进一步的约束。

(b) $b_{w^*j}<b_{wj}$ 和 $b_{w^*j}<b$,由(8.20)式需要

$$T\left[a_{wk},\mathrm{Sup}\left[x\in[0,1]\mid T(a_{w^*k},x)\leqslant b_{w^*j}\right]\right]\geqslant b_{wj}$$

即

$$a_{wk}Tx_k\geqslant b_{wj} \tag{8.24}$$

其中 x_k 是最大值,使得

$$a_{w^*k}Tx_k\leqslant b_{w^*j} \tag{8.25}$$

因此,在给定 A_w,B_w 和 B_{w^*} 的情况下,依据 T(8.24)和(8.25)式就可给出在支持点 j,A_{w^*} 的隶属函数的约束(即上界)。

由(8.24)式我们知道

$$x_k \in [x_T, 1] \tag{8.26}$$

其中 x_T 依赖于 T，使得有

$$a_{wk} T x_T = b_{wj} \tag{8.27}$$

故必须有：

$$a_{wk} \geqslant b_{wj} \tag{8.28}$$

和

$$x_T \geqslant b_{wj} \tag{8.29}$$

所以

$$x_T \geqslant b_{w^*j} \tag{8.30}$$

又根据(8.25)和(8.26)式，有：

$$a_{w^*k} T [x_T, 1] \leqslant b_{w^*j}$$

所以 a_{w^*k} 的上界由下式确定：

$$a_{w^*k} \leqslant a^u \tag{8.31}$$

这里 a^u 依赖于 T 和 X_T，使得有：

$$a^u T x_T = b_{w^*j} \tag{8.32}$$

所以，(8.27)和(8.32)式给出了对 A_{w^*} 的约束，进一步根据(8.32)式有：

$$a^u \geqslant b_{w^*j} \tag{8.33}$$

即 a_{w^*} 的上界总是等于或大于 b_{w^*j}。例如，如果 $T=\min$，由(8.32)式有：

$$a^u \wedge x_T = b_{w^*j}$$

所以，由(8.30)式有

$$a^u = b_{w^*j}$$

即当 $T=\min$ 时，a_{w^*} 的上界是所有 T(如(8.33)式中)的上界的最小值。

如果 A_{w^*} 的隶属函数在支持点 j 的上界表示为 $(A_{w^*})_j$，总的约束(上界)表示为 $(A_{w^*})^u$，那么我们可得到

$$(A_{w^*})^u = \bigwedge_j \{(A_{w^*})_j\} \tag{8.34}$$

所以，由上述分析，我们必须考虑(i)和(b)，图 8.3 解释了这些情况。

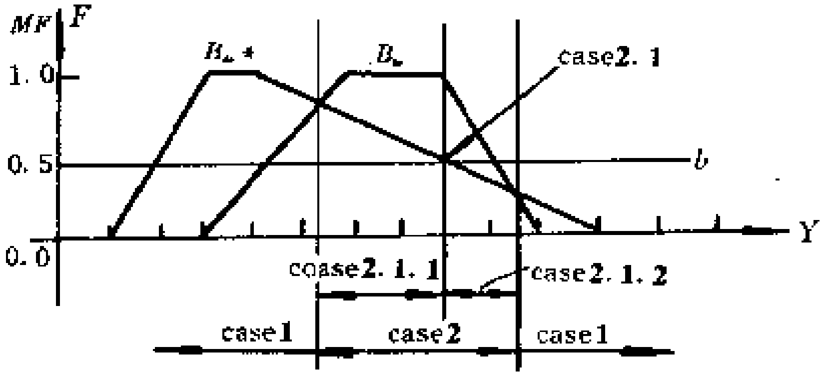


图 8.3　B 之间的包含(覆盖)情况

对于 FATI 方法，可以证明为了满足原则 1，也需要满足如上所讨论的同样的约束。

基于(8.23)，(8.27)，(8.28)，(8.31)，(8.32)和(8.34)式的约束，下面给出一个确定 A_{w^*} 的覆盖(约束或上界)的图解方法：假定给出 A_w，B_w 和 B_{w^*}，A_{w^*} 在 A_w 的左边，或左覆盖(对右覆盖是类似的)。最大覆盖(即 A_{w^*} 的上界)可按如下步骤确定：

步 1　确定 B_w 在支持点 j 的最大值 j_m(在覆盖的最小值)，使得 $b_{wj}=1$，即 $b_{wjm}=1$，然后求 b 的值：$b=b_{w^*j_m}$。

步 2　确定 k_m，即对 A_w 而言 k 的最大值，使得 $a_{wk}=1$，即 $a_{wk_m}=1$，并像(8.23)式那样求出 $a_{w^*k_m}$：$a_{w^*k_m}=b$。

步 3　对(b)选择由 $b_{w^*j}<b_{wj}$和 $b_{w^*j}<b$ 所覆盖的 B_w 和 $B_{w'}$的支持点 j。

步 4　对 A_w 确定支持点 k 的最大值(右覆盖的最小值，使得 $a_{wk}\geqslant b_{wj}$(如(8.28)式)，再从(8.27)式确定 x_T，从(8.28)式确定 a^u，且如(8.31)式那样确定 a_{w^*k}：$a_{w^*k}=a^u$。

步 5　如果找出所有由 $b_{w^*j}<b_{wj}$和 $b_{w^*j}<b$ 所覆盖的 B_w 和 $B_{w'}$的支持点，那么转步 6，否则转步 3。

步 6　对 A_w 取每个支持 i 的最小值，停止。

对 B_w 和 B_{w^*} 的其他支持点，没有对 A_{w^*} 的约束。图 8.4 解释了上述步骤。

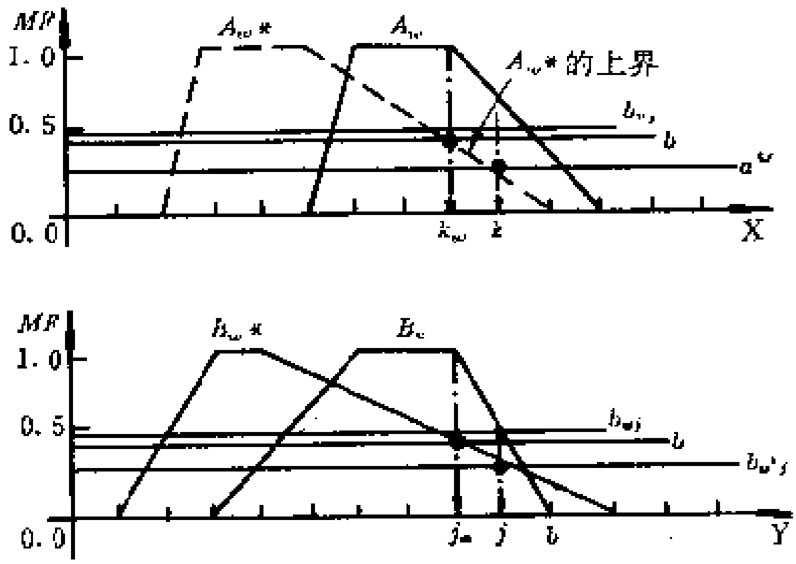


图 8.4 确定 A_{w^*} 上界的步骤

二、一个实际例子

这里我们将讨论一个实际例子以解释规则隶属函数的覆盖对推理结果的影响，假定

(i)观察事实等于规则的左边；

(ii)检验推理结果，看它是否与相应规则的右边相等。

给定一个模糊专家系统知识库中的 5 个规则：$A_w \to B_w$，$w=1,2,\cdots,5$，其中 A_w 和 B_w 是分别定义在论域 V 和 W 上的模糊集，令这些模糊集的隶属函数定义为：

$\mu_{A1}(x)=[1.0,1.0,1.0,0.6,0.2,0.1,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0]$

$\mu_{A2}(x)=[0.1,0.4,0.7,1.0,1.0,1.0,0.7,0.4,0.1,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0]$

$\mu_{A3}(x)=[0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.1,0.2,0.5,1.0,0.5,0.2,0.1,0.0,0.0,0.0]$

$\mu_{A4}(x)=[0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.2,0.5,$

$1.0, 0.5, 0.2, 0.0, 0.0]$

$$\mu_{A5}(x)=[0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.1, 0.5, 1.0, 1.0, 1.0]$$

和

$$\mu_{B1}(y)=[1.0, 1.0, 0.5, 0.1, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0]$$

$$\mu_{B2}(y)=[0.0, 0.0, 0.5, 1.0, 0.5, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0]$$

$$\mu_{B3}(y)=[0.0, 0.0, 0.0, 0.1, 0.4, 0.7, 1.0, 0.7, 0.4, 0.1, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0]$$

$$\mu_{B4}(y)=[0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.1, 0.4, 0.7, 1.0, 0.7, 0.4, 0.1, 0.0, 0.0]$$

$$\mu_{B5}(y)=[0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.5, 1.0, 1.0, 1.0]$$

它们表示在图 8.5 中。

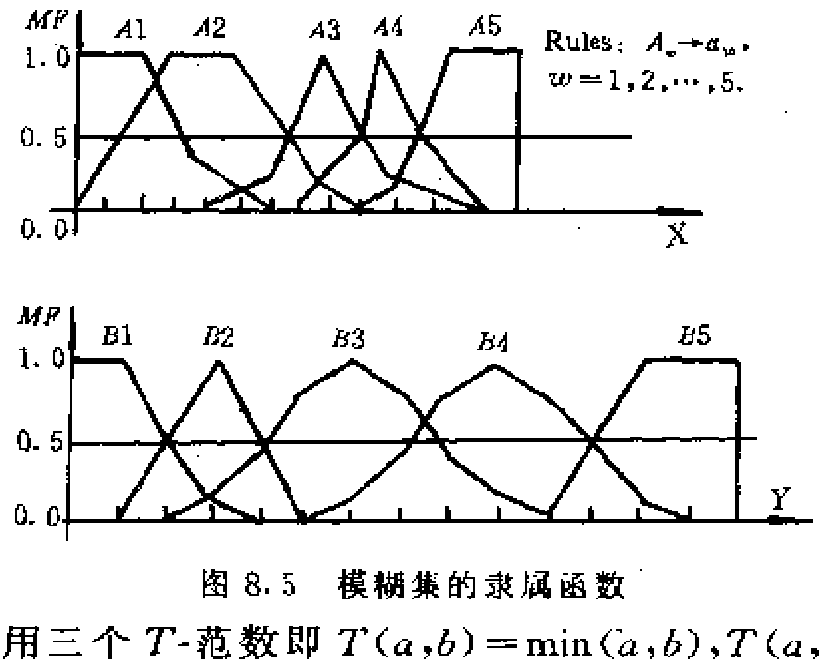


图 8.5　模糊集的隶属函数

我们用三个 T-范数即 $T(a,b)=\min(a,b)$，$T(a,b)=ab$ 和 $T(a,b)=\max(0,a+b-1)$ 做实验，它们相应于前面已经指明的 Gödel，Gaines 和 Lukasiewicz 蕴含。实验的结果如下：

实验采用 R-蕴含，Sup-T 合成和 min 组合。

1. $T(a,b)=\min(a,b)$，如果 $a\leqslant b$，则 $a\to_R b=1$，否则为 b。

观察事实 $A'=A_1$，推理结果 B'：

FITA 方法：

B'_1=1.00，1.00，0.50，0.10，0.00，0.00，0.00，0.00，0.00，0.00，0.00，0.00，0.00，0.00，0.00

B'_2=0.00，0.00，1.00，1.00，1.00，0.00，0.00，0.00，0.00，0.00，0.00，0.00，0.00，0.00，0.00

B'_3=1.00，1.00，1.00，1.00，1.00，1.00，1.00，1.00，1.00，1.00，1.00，1.00，1.00，1.00，1.00

B'_4=1.00，1.00，1.00，1.00，1.00，1.00，1.00，1.00，1.00，1.00，1.00，1.00，1.00，1.00，1.00

B'_5=1.00，1.00，1.00，1.00，1.00，1.00，1.00，1.00，1.00，1.00，1.00，1.00，1.00，1.00，1.00

B'=0.00，0.00，0.50，0.10，0.00，0.00，0.00，0.00，0.00，0.00，0.00，0.00，0.00，0.00，0.00

FATI 方法：

B'=0.00，0.00，0.50，0.10，0.00，0.00，0.00，0.00，0.00，0.00，0.00，0.00，0.00，0.00，0.00

观察事实 $A'=A_2$，推理结果 B'：

FITA 方法：

B'_1=1.00，1.00，1.00，1.00，0.70，0.70，0.70，0.70，0.70，0.70，0.70，0.70，0.70，0.70，0.70

B'_2=0.00，0.00，0.50，1.00，0.50，0.00，0.00，0.00，0.00，0.00，0.00，0.00，0.00，0.00，0.00

B'_3=1.00，1.00，1.00，1.00，1.00，1.00，1.00，1.00，1.00，1.00，1.00，1.00，1.00，1.00，1.00

B'_4=1.00，1.00，1.00，1.00，1.00，1.00，1.00，1.00，1.00，1.00，1.00，1.00，1.00，1.00，1.00

$B'_5=1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,$
$1.00,1.00,1.00,1.00,1.00$

$B'=0.00,0.00,0.50,1.00,0.50,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,$
$0.00,0.00,0.00,0.00,0.00$

FATI 方法：

$B'=0.00,0.00,0.50,1.00,0.50,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,$
$0.00,0.00,0.00,0.00,0.00$

观察事实 $A'=A_3$，推理结果 B'：

FITA 方法：

$B'_1=1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,$
$1.00,1.00,1.00,1.00,1.00$

$B'_2=0.50,0.50,1.00,1.00,1.00,0.50,0.50,0.50,0.50,0.50,$
$0.50,0.50,0.50,0.50,0.50$

$B'_3=0.00,0.00,0.00,0.10,0.40,0.70,1.00,0.70,0.40,0.10,$
$0.00,0.00,0.00,0.00,0.00$

$B'_4=0.50,0.50,0.50,0.50,0.50,0.50,0.50,1.00,1.00,1.00,$
$1.00,1.00,0.50,0.50,0.50$

$B'_5=1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,$
$1.00,1.00,1.00,1.00,1.00$

$B'=0.00,0.00,0.00,0.10,0.40,0.50,0.50,0.50,0.40,0.10,$
$0.00,0.00,0.00,0.00,0.00$

FATI 方法：

$B'=0.00,0.00,0.00,0.10,0.40,0.00,0.10,0.40,0.40,0.10,$
$0.00,0.00,0.00,0.00,0.00$

观察事实 $A'=A_4$，推理结果 B'：

FITA 方法：

$B'_1=1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,$
$1.00,1.00,1.00,1.00,1.00$

$B'_2=1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,$

1.00,1.00,1.00,1.00,1.00

B'_3=0.20,0.20,0.20,0.50,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,0.50,
0.20,0.20,0.20,0.20,0.20

B'_4=0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.10,0.40,0.70,1.00,
0.70,0.40,0.10,0.00,0.00

B'_5=0.50,0.50,0.50,0.50,0.50,0.50,0.50,0.50,0.50,0.50,
0.50,1.00,1.00,1.00,1.00

B'=0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.10,0.40,0.50,0.50,
0.20,0.20,0.10,0.00,0.00

FATI 方法:

B'=0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.10,0.40,0.40,0.10,
0.00,0.20,0.10,0.00,0.00

观察事实 $A'=A_5$,推理结果 B':

FITA 方法:

B'_1=1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,
1.00,1.00,1.00,1.00,1.00

B'_2=1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,
1.00,1.00,1.00,1.00,1.00

B'_3=1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,
1.00,1.00,1.00,1.00,1.00

B'_4=1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,
1.00,1.00,1.00,1.00,1.00

B'_5=0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,
0.00,0.50,1.00,1.00,1.00

B'=0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,
0.00,0.50,1.00,1.00,1.00

FATI 方法:

B'=0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,
0.00,0.50,1.00,1.00,1.00

2. $T(a,b)=ab, a\rightarrow_R b=\min(1,b/a)$

观察事实 $A'=A_1$，推理结果 B'：

FITA 方法：

B'_1=1.00,1.00,0.50,0.10,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,
0.00,0.00,0.00,0.00,0.00

B'_2=0.00,0.00,1.00,1.00,1.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,
0.00,0.00,0.00,0.00,0.00

B'_3=1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,
1.00,1.00,1.00,1.00,1.00

B'_4=1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,
1.00,1.00,1.00,1.00,1.00

B'_5=1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,
1.00,1.00,1.00,1.00,1.00

B'=0.00,0.00,0.50,0.10,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,
0.00,0.00,0.00,0.00,0.00

FATI 方法：

B'=0.00,0.00,0.50,0.10,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,
0.00,0.00,0.00,0.00,0.00

观察事实 $A'=A_2$，推理结果 B'：

FITA 方法：

B'_1=1.00,1.00,1.00,1.00,0.70,0.70,0.70,0.70,0.70,0.70,
0.70,0.70,0.70,0.70,0.70

B'_2=0.00,0.00,0.50,1.00,0.50,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,
0.00,0.00,0.00,0.00,0.00

B'_3=1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,
1.00,1.00,1.00,1.00,1.00

B'_4=1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,
1.00,1.00,1.00,1.00,1.00

B'_5=1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,

1.00,1.00,1.00,1.00,1.00

B'=0.00,0.00,0.50,1.00,0.50,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,
0.00,0.00,0.00,0.00,0.00

FATI 方法：

B'=0.00,0.00,0.50,1.00,0.50,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,
0.00,0.00,0.00,0.00,0.00

观察事实 $A'=A_3$，推理结果 B'：

FITA 方法：

B'_1=1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,
1.00,1.00,1.00,1.00,1.00

B'_2=0.50,0.50,1.00,1.00,1.00,0.50,0.50,0.50,0.50,0.50,
0.50,0.50,0.50,0.50,0.50

B'_3=0.00,0.00,0.00,0.10,0.40,0.70,1.00,0.70,0.40,0.10,
0.00,0.00,0.00,0.00,0.00

B'_4=0.50,0.50,0.50,0.50,0.50,0.50,0.50,1.00,1.00,1.00,
1.00,1.00,0.50,0.50,0.50

B'_5=1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,
1.00,1.00,1.00,1.00,1.00

B'=0.00,0.00,0.00,0.10,0.40,0.50,0.50,0.50,0.40,0.10,
0.00,0.00,0.00,0.00,0.00

FATI 方法：

B'=0.00,0.00,0.00,0.10,0.40,0.00,0.10,0.40,0.40,0.10,
0.00,0.00,0.00,0.00,0.00

观察事实 $A'=A_4$，推理结果 B'：

FITA 方法：

B'_1=1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,
1.00,1.00,1.00,1.00,1.00

B'_2=1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,
1.00,1.00,1.00,1.00,1.00

B'_3=0.20,0.20,0.20,0.50,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,0.50,
0.20,0.20,0.20,0.20,0.20

B'_4=0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.10,0.40,0.70,1.00,
0.70,0.40,0.10,0.00,0.00

B'_5=0.50,0.50,0.50,0.50,0.50,0.50,0.50,0.50,0.50,0.50,
0.50,1.00,1.00,1.00,1.00

B'=0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.10,0.40,0.50,0.50,
0.20,0.20,0.10,0.00,0.00

FATI 方法：

B'=0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.10,0.40,0.40,0.10,
0.00,0.10,0.10,0.00,0.00

观察事实 $A'=A_5$，推理结果：

FITA 方法：

B'_1=1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,
1.00,1.00,1.00,1.00,1.00

B'_2=1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,
1.00,1.00,1.00,1.00,1.00

B'_3=1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,
1.00,1.00,1.00,1.00,1.00

B'_4=1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,
1.00,1.00,1.00,1.00,1.00

B'_5=0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,
0.00,0.50,1.00,1.00,1.00

B'=0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,
0.00,0.50,1.00,1.00,1.00

FATI 方法：

B'=0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,
0.00,0.50,1.00,1.00,1.00

3. $T(a,b)=\max(0,a+b-1)$，$a \to_R b=\min(1,1-a+b)$

观察事实 $A'=A_1$，推理结果 B'：

FITA 方法：

B'_1=1.00,1.00,0.50,0.10,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,
0.00,0.00,0.00,0.00,0.00

B'_2=0.90,0.90,1.00,1.00,1.00,0.90,0.90,0.90,0.90,0.90,
0.90,0.90,0.90,0.90,0.90

B'_3=1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,
1.00,1.00,1.00,1.00,1.00

B'_4=1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,
1.00,1.00,1.00,1.00,1.00

B'_5=1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,
1.00,1.00,1.00,1.00,1.00

B'=0.90,0.90,0.50,0.10,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,
0.00,0.00,0.00,0.00,0.00

FATI 方法：

B'=0.90,0.90,0.50,0.10,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,
0.00,0.00,0.00,0.00,0.00

观察事实 $A'=A_2$，推理结果 B'：

B'_1=1.00,1.00,1.00,1.00,0.90,0.90,0.90,0.90,0.90,0.90,
0.90,0.90,0.90,0.90,0.90

B'_2=0.00,0.00,0.50,1.00,0.50,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,
0.00,0.00,0.00,0.00,0.00

B'_3=1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,
1.00,1.00,1.00,1.00,1.00

B'_4=1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,
1.00,1.00,1.00,1.00,1.00

B'_5=1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,
1.00,1.00,1.00,1.00,1.00

B'=0.00,0.00,0.50,1.00,0.50,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,

0.00,0.00,0.00,0.00,0.00

FATI 方法：

B'=0.00,0.00,0.50,1.00,0.50,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00

观察事实 $A'=A_3$，推理结果 B'：

FITA 方法：

B'_1=1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00

B'_2=0.90,0.90,1.00,1.00,1.00,0.90,0.90,0.90,0.90,0.90,0.90,0.90,0.90,0.90,0.90

B'_3=0.00,0.00,0.00,0.10,0.40,0.70,1.00,0.70,0.40,0.10,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00

B'_4=0.80,0.80,0.80,0.80,0.80,0.80,0.90,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,0.90,0.80,0.80

B'_5=1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00

B'=0.00,0.00,0.00,0.10,0.40,0.70,0.90,0.70,0.40,0.10,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00

FATI 方法：

B'=0.00,0.00,0.00,0.10,0.40,0.70,0.90,0.70,0.40,0.10,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00

观察事实 $A'=A_4$，推理结果 B'：

FITA 方法：

B'_1=1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00

B'_2=1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00

B'_3=0.80,0.80,0.80,0.90,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,0.90,0.80,0.80,0.80,0.80,0.80

B'_4=0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.10,0.40,0.70,1.00,
0.70,0.40,0.10,0.00,0.00

B'_5=0.90,0.90,0.90,0.90,0.90,0.90,0.90,0.90,0.90,0.90,
0.90,1.00,1.00,1.00,1.00

B'=0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.10,0.40,0.70,0.90,
0.70,0.40,0.10,0.00,0.00

FATI 方法：

B'=0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.10,0.40,0.70,0.90,
0.70,0.40,0.10,0.00,0.00

观察事实 $A'=A_5$，推理结果 B'：

FITA 方法：

B'_1=1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,
1.00,1.00,1.00,1.00,1.00

B'_2=1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,
1.00,1.00,1.00,1.00,1.00

B'_3=1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,
1.00,1.00,1.00,1.00,1.00

B'_4=1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,
1.00,1.00,1.00,1.00,1.00

B'_5=0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,
0.00,0.50,1.00,1.00,1.00

B'=0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,
0.00,0.50,1.00,1.00,1.00

FATI 方法：

B'=0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,
0.00,0.50,1.00,1.00,1.00

从上述运算结果可以看出，对 $A'=A_2$ 和 A_5，推理结果分别为 $B'=B_2$ 和 B_5，因为隶属函数满足前面所讨论的约束。当 $A'=A_1$，A_3 和 A_4 时，推理结果 $B'\neq B_1$，B_3 和 B_4，因为它们不满足约束。例

如，如果 $A'=A_3$，且 $T(a,b)=\min(a,b)$ 或 $T(a,b)=ab$，则有（对 FITA）：

$$\mu_{B'}(y)=[0.0,0.0,0.0,0.1,0.4,0.5,0.5,0.5,0.4,0.1,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0]$$

对 FATI 则有

$$\mu_{B'}(y)=[0.0,0.0,0.0,0.1,0.4,0.0,0.1,0.4,0.4,0.1,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0]$$

如果 $A'=A_3$，且 $T(a,b)=\max(0,a+b-1)$，则对 FITA 和 FATI 有：

$$\mu_{B'}(y)=[0.0,0.0,0.0,0.1,0.4,0.7,0.9,0.7,0.4,0.1,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0]$$

8.4.4 减缩型推理

在一个减缩型推理中，由定义 4 可知，假定一观察事实为 A'，推导出的结果为 B^*，则有

$$B^* \subseteq B$$

对基于 CRI 的减缩型推理，有如下的必要条件：

必要条件 2 假定一模糊专家系统的规则库中有 Ω 个规则，对采用 Sup-T 合成的 CRI 推理过程而言，如果蕴含是“减缩类”蕴含，即 $F(a,b)=a\rightarrow b\leqslant b$，对所有的 $a\in[0,1]$，则该蕴含是 a 的一个非减函数，即如果 $a_1\geqslant a_2$，则 $F(a_1,b)\geqslant F(a_2,b)$，那么为了获得一个有意义的推理结果，必须采用“max”来进行组合。

证明 为了证明这一定理，我们考虑两个推理方法 FITA 和 FATI。

(i)先考虑 FITA，如果观察事实是 A'，则有

$$B^* = \biguplus_{w=1}^{\Omega} B_w^* = \biguplus_{w=1}^{\Omega} A'\circ(A_w \rightarrow^* B_w)$$

写成隶属函数值的形式则为

$$b_j^* = \bigoplus_{w=1}^{\Omega} b_{wj}^*$$

其中

$$
\begin{aligned}
b_{wj}^{*} &= \operatorname*{Sup}_{i}\{T(a'_i, a_{wi} \rightarrow b_{wj})\} \\
&= \{T(a'_1, a_{w1} \rightarrow b_{wj})\} \vee \{T(a'_2, a_{w2} \rightarrow b_{wj})\} \\
&\quad \vee \cdots \vee \{T(a'_i, a_{wi} \rightarrow b_{wj})\}
\end{aligned}
$$

如果存在一个规则 $w': A_{w'} \rightarrow B_{w'}$，$1 \leqslant w' \leqslant \Omega$，使得有 $A' \cap A_{w'} = \phi$，即 A' 和 $A_{w'}$ 之间不覆盖，那么对所有的 k，$1 \leqslant k \leqslant I$，如果 $a'_k > 0$，则 $a_{w'k} = 0$。因此，如果 $F(a,b)$ 是 a 的一个非减函数，那么对 $b_{w'j}$ 的任意值，$(a_{w'k} \rightarrow b_{w'j})$ 都得到最小值为 0，所以 $T(a'_k, a_{w'k} \rightarrow b_{w'j}) = 0$。如果 $a'_k = 0$，那么对 $a_{w'k} \rightarrow b_{w'j}$ 的任意值，仍有 $T(a'_k, a_{w'k} \rightarrow b_{w'j}) = 0$，因此我们有

$$b_{w'j}^{*} = 0 \qquad j = 1, 2, \cdots, J$$

图 8.6 给出了这一证明过程。

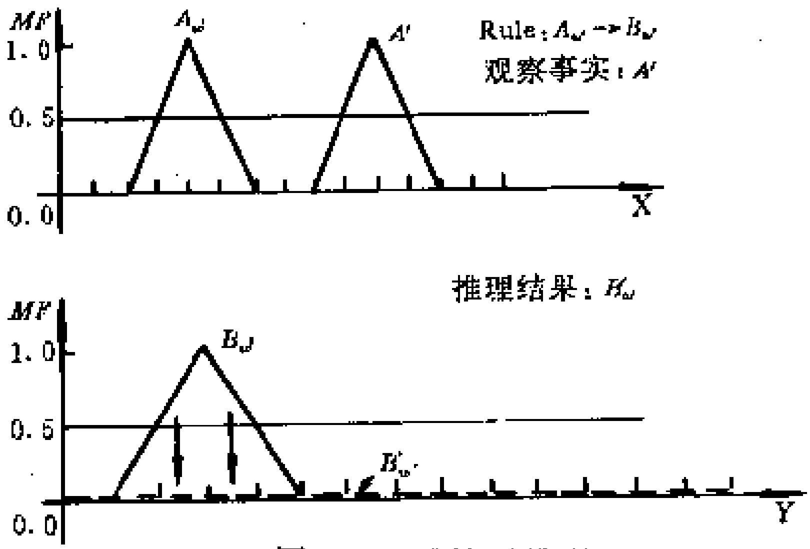


图 8.6　减缩型推理

因此，如果在组合中采用 min，则有

$$
\begin{aligned}
b_j^{*} &= \bigoplus_{w=1}^{\Omega} b_{wj}^{*} \\
&\leqslant 0 \qquad \text{（单调性）}
\end{aligned}
$$

然而，b_j^{*} 是模糊集 B^{*} 在支持点 j 的隶属度，因而我们有 $b_j^{*} \geqslant 0$，所以 $b_j^{*} = 0$。也就是说，如果观察事实与规则左边之间的相似性（匹配）很小，甚至完全不匹配（不覆盖），那么在每个支持点基于该规

则所推导出的结果的隶属值就会接近或等于 0，也就是说使用该规则没有得到任何信息。因而为了对任意观察事实得到一个有意义的推理结果，在对规则进行组合时必须采用“max”。

(ii)现在考虑 FATI 的情况

$$B^* = A' \circ R = A' \circ \biguplus R_w$$

$$= A' \circ \biguplus_{w=1}^{\Omega} [A_w \to B_w]$$

若写成隶属函数值的形式则为

$$b_j^* = \operatorname*{Sup}_i \{T[a'_i, \bigoplus_{w=1}^{\Omega}(a_{wi} - b_{wj})]\} = \operatorname*{Sup}_i \{T[a'_i, r_{ij}]\}$$

其中

$$r_{ij} = \bigoplus_{w=1}^{\Omega}(a_{wi} - b_{wj})$$

如果$\oplus = \min$，且存在一个 w'，$1 \leqslant w' \leqslant \Omega$，使得 $A' \cap A_{w'} = \phi$，则有

$$r_{ij} \leqslant (a_{w'i} \to b_{w'j}) \qquad \text{（单调性）}$$

$$= 0$$

然后，我们有 $r_{ij} \geqslant 0$，所以

$$r_{ij} = 0$$

$$b_j^* = \operatorname*{Sup}_i \{T[a'_i, (a_{w'i} \to b_{w'j})]\} \qquad \text{（单调性）}$$

$$= 0$$

因此，与 FITA 类似，必须采用“max”来组合推理结果。由(i)和(ii)的分析，可以看出必要条件 2 是正确的。

由本节的讨论可以看出，在 CRI 的情况下，在选择蕴含和合成算子以后，我们可以按照必要条件 1 和 2 来确定组合算子。

8.5 一个实际例子

本节给出一个实际例子，看看组合算子的选择是如何影响推理结果的。采用的方法为：

(i)令观察事实等于规则的左边；

(ii)检验推理结果，以便检查它们是否等于(或如何接近)相应规则的右边。

假定有一个模糊专家系统规则库中的五个规则：$A_w \to B_w$，$w=1,2,\cdots,5$，其中 A_w 和 B_w 是分别定义在论域 V 和 W 中的模糊集，令这 10 个模糊集的隶属函数分别为：

$$\mu_{A1}(x)=[1.0,1.0,1.0,0.5,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0]$$

$$\mu_{A2}(x)=[0.0,0.0,0.0,0.4,0.7,1.0,0.7,0.4,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0]$$

$$\mu_{A3}(x)=[0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.5,1.0,0.5,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0]$$

$$\mu_{A4}(x)=[0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.5,1.0,0.5,0.0,0.0,0.0]$$

$$\mu_{A5}(x)=[0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.5,1.0,1.0,1.0]$$

和

$$\mu_{B1}(y)=[1.0,1.0,0.5,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0]$$

$$\mu_{B2}(y)=[0.0,0.0,0.5,1.0,0.5,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0]$$

$$\mu_{B3}(y)=[0.0,0.0,0.0,0.1,0.4,0.7,1.0,0.7,0.4,0.1,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0]$$

$$\mu_{B4}(y)=[0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.1,0.4,0.7,1.0,0.7,0.4,0.1,0.0,0.0]$$

$$\mu_{B5}(y)=[0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.5,1.0,1.0,1.0]$$

图 8.7 给出了它们的图形表示。

采用 FATI 和 FITA 两种方法对多个观察事实进行试验，试

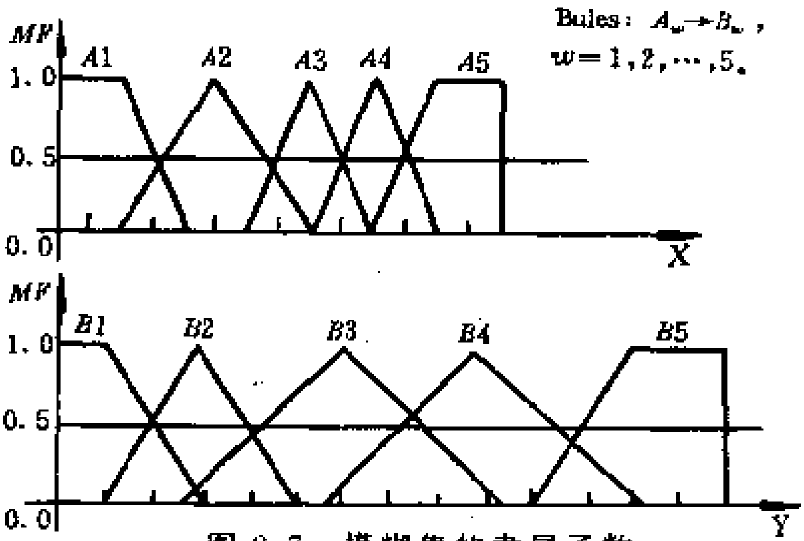


图 8.7 模糊集的隶属函数

验中采用 Sup-min 合成和如下的 10 个蕴含算子：

1. $\mu_1(a,b)=\begin{cases}1 & a\leqslant b\\ b & a>b\end{cases}$ (Gödel)

2. $\mu_2(a,b)=\min(a,b)$ (Mamdani)

3. $\mu_3(a,b)=\max(a,b)$

4. $\mu_4(a,b)=\max(0,b-a)$

5. $\mu_5(a,b)=\min(1,1-a+b)$ (Lukasiewicz)

6. $\mu_6(a,b)=\max(0,a+b-1)$

7. $\mu_7(a,b)=\min(1,a+b)$

8. $\mu_8(a,b)=\min(1-a,b)$

9. $\mu_9(a,b)=\min(a^4,b)$

10. $\mu_{10}(a,b)=\min(1,1-a^{1/4}+b)$

在上述蕴含算子中，1 和 5 是从公理的观点所定义的蕴含。

根据上节所讨论的结果，即如果蕴含 $F(a,b)$ 是“扩展型蕴含”，且是 a 的一个非增函数，那么在组合中应采用“min”，如果蕴含 $F(a,b)$ 是“减缩型蕴含”，且是 a 的一个非减函数，那么在进行组合时应采用“max”，我们可看出：μ_3，μ_4，μ_7 和 μ_8 是一些不好的蕴含算子，因为 μ_4 和 μ_8 是减缩型蕴含算子，但不是 a 的非减函数，即如果 $a_1\geqslant a_2$，有 $F(a_1,b)\ngeq F(a_2,b)$，μ_3 和 μ_7 是扩展型蕴含算

子，但它们不是 a 的非增函数，即如果 $a_1 \geqslant a_2$，则 $F(a_1,b) \nleq F(a_2,b)$。另一方面，我们还可看出没有适合上述 4 种蕴含算子的组合算子。对 μ_1，μ_5 和 μ_{10}，需采用"min"来组合推理结果，而对 μ_2，μ_6 和 μ_9，则需采用"max"来进行组合。

对 FATI 和 FITA 两种方法分别采用 min 和 max 来进行组合的试验结果如下：

(1)在 μ_1 的情况下

$A' = A_1$

FITA 的结果：

max＝1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,
1.0,1.0,1.0,1.0

min＝1.0,1.0,0.5,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,
0.0,0.0,0.0,0.0

FATI 的结果：

max＝1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,
1.0,1.0,1.0,1.0

min＝1.0,1.0,0.5,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,
0.0,0.0,0.0,0.0

$A' = A_2$

FITA 的结果：

max＝1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,
1.0,1.0,1.0,1.0

min＝0.0,0.0,0.5,1.0,0.5,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,
0.0,0.0,0.0,0.0

FATI 的结果：

max＝1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,
1.0,1.0,1.0,1.0

min＝0.0,0.0,0.5,1.0,0.5,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,
0.0,0.0,0.0,0.0

$A'=A_3$

FITA 的结果：

max=1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,
1.0,1.0,1.0,1.0

min=0.0,0.0,0.0,0.1,0.4,0.7,1.0,0.7,0.4,0.1,0.0,
0.0,0.0,0.0,0.0

FATI 的结果：

max=1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,
1.0,1.0,1.0,1.0

min=0.0,0.0,0.0,0.1,0.4,0.7,1.0,0.7,0.4,0.1,0.0,
0.0,0.0,0.0,0.0

$A'=A_4$

FITA 的结果：

max=1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,
1.0,1.0,1.0,1.0

min=0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.1,0.4,0.7,1.0,0.7,
0.4,0.1,0.0,0.0

FATI 的结果：

max=1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,
1.0,1.0,1.0,1.0

min=0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.1,0.4,0.7,1.0,0.7,
0.4,0.1,0.0,0.0

$A'=A_5$

FITA 的结果：

max=1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,
1.0,1.0,1.0,1.0

min=0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,
0.5,1.0,1.0,1.0

FATI 的结果：

max＝1. 0，1. 0，1. 0，1. 0，1. 0，1. 0，1. 0，1. 0，1. 0，1. 0，1. 0，1. 0，1. 0，1. 0，1. 0

min＝0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 5，1. 0，1. 0，1. 0

(2)在 μ_2 的情况下

$A'=A_1$

FITA 的结果：

max＝1. 0，1. 0，0. 5，0. 4，0. 4，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0

min＝0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0

FATI 的结果：

max＝1. 0，1. 0，0. 5，0. 4，0. 4，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0

min＝0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0

$A'=A_2$

FITA 的结果：

max＝0. 4，0. 4，0. 5，1. 0，0. 5，0. 4，0. 4，0. 4，0. 4，0. 1，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0

min＝0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0

FATI 的结果：

max＝0. 4，0. 4，0. 5，1. 0，0. 5，0. 4，0. 4，0. 4，0. 4，0. 1，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0

min＝0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0

$A'=A_3$

FITA 的结果：

max＝0. 0,0. 0,0. 4,0. 4,0. 4,0. 7,1. 0,0. 7,0. 5,0. 5,0. 5,
0. 4,0. 1,0. 0,0. 0

min＝0. 0,0. 0,0. 0,0. 0,0. 0,0. 0,0. 0,0. 0,0. 0,0. 0,0. 0,
0. 0,0. 0,0. 0,0. 0

FATI 的结果：

max＝0. 0,0. 0,0. 4,0. 4,0. 4,0. 7,1. 0,0. 7,0. 5,0. 5,0. 5,
0. 4,0. 1,0. 0,0. 0

min＝0. 0,0. 0,0. 0,0. 0,0. 0,0. 0,0. 0,0. 0,0. 0,0. 0,0. 0,
0. 0,0. 0,0. 0,0. 0

$A'=A_4$

FITA 的结果：

max＝0. 0,0. 0,0. 0,0. 1,0. 4,0. 5,0. 5,0. 5,0. 7,1. 0,0. 7,
0. 5,0. 5,0. 5,0. 5

min＝0. 0,0. 0,0. 0,0. 0,0. 0,0. 0,0. 0,0. 0,0. 0,0. 0,0. 0,
0. 0,0. 0,0. 0,0. 0

FATI 的结果：

max＝0. 0,0. 0,0. 0,0. 1,0. 4,0. 5,0. 5,0. 5,0. 7,1. 0,0. 7,
0. 5,0. 5,0. 5,0. 5

min＝0. 0,0. 0,0. 0,0. 0,0. 0,0. 0,0. 0,0. 0,0. 0,0. 0,0. 0,
0. 0,0. 0,0. 0,0. 0

$A'=A_5$

FITA 的结果：

max＝0. 0,0. 0,0. 0,0. 0,0. 0,0. 0,0. 1,0. 4,0. 5,0. 5,0. 5,
0. 5,1. 0,1. 0,1. 0

min＝0. 0,0. 0,0. 0,0. 0,0. 0,0. 0,0. 0,0. 0,0. 0,0. 0,0. 0,
0. 0,0. 0,0. 0,0. 0

FATI 的结果：

max＝0. 0,0. 0,0. 0,0. 0,0. 0,0. 0,0. 1,0. 4,0. 5,0. 5,0. 5,
0. 5,1. 0,1. 0,1. 0

min=0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,
0.0,0.0,0.0,0.0

(3)在 μ_3 的情况下

$A'=A_1$

FITA 的结果：

max=1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,
1.0,1.0,1.0,1.0

min=0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,
0.0,0.0,0.0,0.0

FATI 的结果：

max=1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,
1.0,1.0,1.0,1.0

min=0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,
0.0,0.0,0.0,0.0

$A'=A_2$

FITA 的结果：

max=1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,
1.0,1.0,1.0,1.0

min=0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,
0.4,0.1,0.0,0.0

FATI 的结果：

max=1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,
1.0,1.0,1.0,1.0

min=0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,
0.0,0.0,0.0,0.0

$A'=A_3$

FITA 的结果：

max=1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,
1.0,1.0,1.0,1.0

min＝0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，
0. 0，0. 0，0. 0，0. 0

FATI 的结果：

max＝1. 0，1. 0，1. 0，1. 0，1. 0，1. 0，1. 0，1. 0，1. 0，1. 0，1. 0，
1. 0，1. 0，1. 0，1. 0

min＝0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，
0. 0，0. 0，0. 0，0. 0

$A'=A_4$

FITA 的结果：

max＝1. 0，1. 0，1. 0，1. 0，1. 0，1. 0，1. 0，1. 0，1. 0，1. 0，1. 0，
1. 0，1. 0，1. 0，1. 0

min＝0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，
0. 0，0. 0，0. 0，0. 0

FATI 的结果：

max＝1. 0，1. 0，1. 0，1. 0，1. 0，1. 0，1. 0，1. 0，1. 0，1. 0，1. 0，
1. 0，1. 0，1. 0，1. 0

min＝0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，
0. 0，0. 0，0. 0，0. 0

$A'=A_5$

FITA 的结果：

max＝1. 0，1. 0，1. 0，1. 0，1. 0，1. 0，1. 0，1. 0，1. 0，1. 0，1. 0，
1. 0，1. 0，1. 0，1. 0

min＝0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，
0. 0，0. 0，0. 0，0. 0

FATI 的结果：

max＝1. 0，1. 0，1. 0，1. 0，1. 0，1. 0，1. 0，1. 0，1. 0，1. 0，1. 0，
1. 0，1. 0，1. 0，1. 0

min＝0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，0. 0，
0. 0，0. 0，0. 0，0. 0

(4)在 μ_4 的情况下

$A'=A_1$

FITA 的结果：

max=0.5,0.5,0.5,1.0,0.5,0.7,1.0,0.7,0.7,1.0,0.7,
0.5,1.0,1.0,1.0

min=0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,
0.0,0.0,0.0,0.0

FATI 的结果：

max=0.5,0.5,0.5,1.0,0.5,0.7,1.0,0.7,0.7,1.0,0.7,
0.5,1.0,1.0,1.0

min=0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,
0.0,0.0,0.0,0.0

$A'=A_2$

FITA 的结果：

max=1.0,1.0,0.5,0.4,0.4,0.7,1.0,0.7,0.7,1.0,0.7,
0.5,1.0,1.0,1.0

min=0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,
0.0,0.0,0.0,0.0

FATI 的结果：

max=1.0,1.0,0.5,0.4,0.4,0.7,1.0,0.7,0.7,1.0,0.7,
0.5,1.0,1.0,1.0

min=0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,
0.0,0.0,0.0,0.0

$A'=A_3$

FITA 的结果：

max=1.0,1.0,0.5,1.0,0.5,0.2,0.5,0.4,0.7,1.0,0.7,
0.5,1.0,1.0,1.0

min=0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,
0.0,0.0,0.0,0.0

FATI 的结果：

max＝1.0，1.0，0.5，1.0，0.5，0.2，0.5，0.4，0.7，1.0，0.7，
0.5，1.0，1.0，1.0

min＝0.0，0.0，0.0，0.0，0.0，0.0，0.0，0.0，0.0，0.0，0.0，
0.0，0.0，0.0，0.0

$A'=A_4$

FITA 的结果：

max＝1.0，1.0，0.5，1.0，0.5，0.7，1.0，0.7，0.4，0.5，0.2，
0.5，1.0，1.0，1.0

min＝0.0，0.0，0.0，0.0，0.0，0.0，0.0，0.0，0.0，0.0，0.0，
0.0，0.0，0.0，0.0

FATI 的结果：

max＝1.0，1.0，0.5，1.0，0.5，0.7，1.0，0.7，0.4，0.5，0.2，
0.5，1.0，1.0，1.0

min＝0.0，0.0，0.0，0.0，0.0，0.0，0.0，0.0，0.0，0.0，0.0，
0.0，0.0，0.0，0.0

$A'=A_5$

FITA 的结果：

max＝1.0，1.0，0.5，1.0，0.5，0.7，1.0，0.7，0.7，1.0，0.7，
0.4，0.5，0.5，0.5

min＝0.0，0.0，0.0，0.0，0.0，0.0，0.0，0.0，0.0，0.0，0.0，
0.0，0.0，0.0，0.0

FATI 的结果：

max＝1.0，1.0，0.5，1.0，0.5，0.7，1.0，0.7，0.7，1.0，0.7，
0.4，0.5，0.5，0.5

min＝0.0，0.0，0.0，0.0，0.0，0.0，0.0，0.0，0.0，0.0，0.0，
0.0，0.0，0.0，0.0

(5)在 μ_5 的情况下

$A'=A_1$

FITA 的结果：

max＝1.0，1.0，1.0，1.0，1.0，1.0，1.0，1.0，1.0，1.0，1.0，
1.0，1.0，1.0，1.0

min＝1.0，1.0，0.5，0.5，0.5，0.5，0.5，0.5，0.5，0.5，0.5，
0.5，0.5，0.5，0.5

FATI 的结果：

max＝1.0，1.0，1.0，1.0，1.0，1.0，1.0，1.0，1.0，1.0，1.0，
1.0，1.0，1.0，1.0

min＝1.0，1.0，0.5，0.5，0.5，0.5，0.5，0.5，0.5，0.5，0.5，
0.5，0.5，0.5，0.5

$A'=A_2$

FITA 的结果：

max＝1.0，1.0，1.0，1.0，1.0，1.0，1.0，1.0，1.0，1.0，1.0，
1.0，1.0，1.0，1.0

min＝0.4，0.4，0.7，1.0，0.7，0.4，0.4，0.4，0.4，0.4，0.4，
0.4，0.4，0.4，0.4

FATI 的结果：

max＝1.0，1.0，1.0，1.0，1.0，1.0，1.0，1.0，1.0，1.0，1.0，
1.0，1.0，1.0，1.0

min＝0.4，0.4，0.7，1.0，0.7，0.4，0.4，0.4，0.4，0.4，0.4，
0.4，0.4，0.4，0.4

$A'=A_3$

FITA 的结果：

max＝1.0，1.0，1.0，1.0，1.0，1.0，1.0，1.0，1.0，1.0，1.0，
1.0，1.0，1.0，1.0

min＝0.5，0.5，0.5，0.5，0.5，0.7，1.0，0.7，0.5，0.5，0.5，
0.5，0.5，0.5，0.5

FATI 的结果：

max＝1.0，1.0，1.0，1.0，1.0，1.0，1.0，1.0，1.0，1.0，1.0，

1.0,1.0,1.0,1.0

min=0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.7,1.0,0.7,0.5,0.5,0.5,
0.5,0.5,0.5,0.5

$A'=A_4$

FITA 的结果：

max=1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,
1.0,1.0,1.0,1.0

min=0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.7,1.0,0.7,
0.5,0.5,0.5,0.5

FATI 的结果：

max=1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,
1.0,1.0,1.0,1.0

min=0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.7,1.0,0.7,
0.5,0.5,0.5,0.5

$A'=A_5$

FITA 的结果：

max=1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,
1.0,1.0,1.0,1.0

min=0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,
0.5,1.0,1.0,1.0

FATI 的结果：

max=1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,
1.0,1.0,1.0,1.0

min=0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,
0.5,1.0,1.0,1.0

(6)在 μ_6 情况下

$A'=A_1$

FITA 的结果：

max=1.0,1.0,0.5,0.4,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,

0.0,0.0,0.0,0.0

min=0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,
0.0,0.0,0.0,0.0

FATI 的结果：

max=1.0,1.0,0.5,0.4,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,
0.0,0.0,0.0,0.0

min=0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,
0.0,0.0,0.0,0.0

$A'=A_2$

FITA 的结果：

max=0.4,0.4,0.5,1.0,0.5,0.2,0.4,0.2,0.0,0.0,0.0,
0.0,0.0,0.0,0.0

min=0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,
0.0,0.0,0.0,0.0

FATI 的结果：

max=0.4,0.4,0.5,1.0,0.5,0.2,0.4,0.2,0.0,0.0,0.0,
0.0,0.0,0.0,0.0

min=0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,
0.0,0.0,0.0,0.0

$A'=A_3$

FITA 的结果：

max=0.0,0.0,0.0,0.4,0.4,0.7,1.0,0.7,0.4,0.5,0.2,
0.0,0.0,0.0,0.0

min=0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,
0.0,0.0,0.0,0.0

FATI 的结果：

max=0.0,0.0,0.0,0.4,0.4,0.7,1.0,0.7,0.4,0.5,0.2,
0.0,0.0,0.0,0.0

min=0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,

0.0,0.0,0.0,0.0

$A'=A_4$

FITA 的结果：

max＝0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.2,0.5,0.4,0.7,1.0,0.7,
0.4,0.5,0.5,0.5

min＝0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,
0.0,0.0,0.0,0.0

FATI 的结果：

max＝0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.2,0.5,0.4,0.7,1.0,0.7,
0.4,0.5,0.5,0.5

min＝0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,
0.0,0.0,0.0,0.0

$A'=A_5$

FITA 的结果：

max＝0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.2,0.5,0.2,
0.5,1.0,1.0,1.0

min＝0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,
0.0,0.0,0.0,0.0

FATI 的结果：

max＝0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.2,0.5,0.2,
0.5,1.0,1.0,1.0

min＝0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,
0.0,0.0,0.0,0.0

(7)在 μ_7 的情况下

$A'=A_1$

FITA 的结果：

max＝1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,
1.0,1.0,1.0,1.0

min＝0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,

0.0,0.0,0.0,0.0

FATI 的结果：

max=1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,
1.0,1.0,1.0,1.0

min=0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,
0.0,0.0,0.0,0.0

$A'=A_2$

FITA 的结果：

max=1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,
1.0,1.0,1.0,1.0

min=0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,
0.4,0.1,0.0,0.0

FATI 的结果：

max=1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,
1.0,1.0,1.0,1.0

min=0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,
0.0,0.0,0.0,0.0

$A'=A_3$

FITA 的结果：

max=1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,
1.0,1.0,1.0,1.0

min=0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,
0.0,0.0,0.0,0.0

FATI 的结果：

max=1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,
1.0,1.0,1.0,1.0

min=0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,
0.0,0.0,0.0,0.0

$A'=A_4$

FITA 的结果：

max＝1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,
1.0,1.0,1.0,1.0

min＝0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,
0.0,0.0,0.0,0.0

FATI 的结果：

max＝1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,
1.0,1.0,1.0,1.0

min＝0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,
0.0,0.0,0.0,0.0

$A'=A_5$

FITA 的结果：

max＝1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,
1.0,1.0,1.0,1.0

min＝0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,
0.0,0.0,0.0,0.0

FATI 的结果：

max＝1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,1.0,
1.0,1.0,1.0,1.0

min＝0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,
0.0,0.0,0.0,0.0

(8)在 μ_8 的情况下

$A'=A_1$

FITA 的结果：

max＝0.5,0.5,0.5,1.0,0.5,0.7,1.0,0.7,0.7,1.0,0.7,
0.5,1.0,1.0,1.0

min＝0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,
0.0,0.0,0.0,0.0

FATI 的结果：

max＝0.5,0.5,0.5,1.0,0.5,0.7,1.0,0.7,0.7,1.0,0.7,
0.5,1.0,1.0,1.0

min＝0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,
0.0,0.0,0.0,0.0

$A'=A_2$

FITA 的结果：

max＝1.0,1.0,0.5,0.4,0.4,0.7,1.0,0.7,0.7,1.0,0.7,
0.5,1.0,1.0,1.0

min＝0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,
0.0,0.0,0.0,0.0

FATI 的结果：

max＝1.0,1.0,0.5,0.4,0.4,0.7,1.0,0.7,0.7,1.0,0.7,
0.5,1.0,1.0,1.0

min＝0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,
0.0,0.0,0.0,0.0

$A'=A_3$

FITA 的结果：

max＝1.0,1.0,0.5,1.0,0.5,0.5,0.5,0.5,0.7,1.0,0.7,
0.5,1.0,1.0,1.0

min＝0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,
0.0,0.0,0.0,0.0

FATI 的结果：

max＝1.0,1.0,0.5,1.0,0.5,0.5,0.5,0.5,0.7,1.0,0.7,
0.5,1.0,1.0,1.0

min＝0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,
0.0,0.0,0.0,0.0

$A'=A_4$

FITA 的结果：

max＝1.0,1.0,0.5,1.0,0.5,0.7,1.0,0.7,0.5,0.5,0.5,

0.5,1.0,1.0,1.0

min=0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,
0.0,0.0,0.0,0.0

FATI 的结果：

max=1.0,1.0,0.5,1.0,0.5,0.7,1.0,0.7,0.5,0.5,0.5,
0.5,1.0,1.0,1.0

min=0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,
0.0,0.0,0.0,0.0

$A'=A_5$

FITA 的结果：

max=1.0,1.0,0.5,1.0,0.5,0.7,1.0,0.7,0.7,1.0,0.7,
0.5,0.5,0.5,0.5

min=0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,
0.0,0.0,0.0,0.0

FATI 的结果：

max=1.0,1.0,0.5,1.0,0.5,0.7,1.0,0.7,0.7,1.0,0.7,
0.5,0.5,0.5,0.5

min=0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,
0.0,0.0,0.0,0.0

(9)在 μ_9 的情况下

$A'=A_1$

FITA 的结果：

max=1.00,1.00,0.50,0.03,0.03,0.00,0.00,0.00,0.00,
0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00

min=0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,
0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00

FATI 的结果：

max=1.00,1.00,0.50,0.03,0.03,0.00,0.00,0.00,0.00,
0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00

min = 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00

$A' = A_2$

FITA 的结果：

max = 0. 06, 0. 06, 0. 50, 1. 00, 0. 50, 0. 06, 0. 06, 0. 06, 0. 06, 0. 06, 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00

min = 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00

FATI 的结果：

max = 0. 06, 0. 06, 0. 50, 1. 00, 0. 50, 0. 06, 0. 06, 0. 06, 0. 06, 0. 06, 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00

min = 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00

$A' = A_3$

FITA 的结果：

max = 0. 00, 0. 00, 0. 03, 0. 10, 0. 40, 0. 70, 1. 00, 0. 70, 0. 40, 0. 10, 0. 06, 0. 06, 0. 06, 0. 00, 0. 00

min = 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00

FATI 的结果：

max = 0. 00, 0. 00, 0. 03, 0. 10, 0. 40, 0. 70, 1. 00, 0. 70, 0. 40, 0. 10, 0. 06, 0. 06, 0. 06, 0. 00, 0. 00

min = 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00

$A' = A_4$

FITA 的结果：

max = 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 06, 0. 06, 0. 06, 0. 10, 0. 40, 0. 70, 1. 00, 0. 70, 0. 40, 0. 10, 0. 06, 0. 06

min = 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0. 00, 0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00

FATI 的结果：

max=0.00,0.00,0.00,0.06,0.06,0.06,0.10,0.40,0.70,
1.00,0.70,0.40,0.10,0.06,0.06

min=0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,
0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00

$A'=A_5$

FITA 的结果：

max=0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.06,0.06,0.06,
0.06,0.06,0.50,1.00,1.00,1.00

min=0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,
0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00

FATI 的结果：

max=0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.06,0.06,0.06,
0.06,0.06,0.50,1.00,1.00,1.00

min=0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,
0.00,0.00,0.00,0.00,0.00,0.00

(10)在 μ_{10}的情况下

$A'=A_1$

FITA 的结果：

max=1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,
1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00

min=1.00,1.00,0.50,0.16,0.16,0.16,0.16,0.16,0.16,
0.16,0.16,0.16,0.16,0.16,0.16

FATI 的结果：

max=1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,
1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00

min=1.00,1.00,0.50,0.16,0.16,0.16,0.16,0.16,0.16,
0.16,0.16,0.16,0.16,0.16,0.16

$A' = A_2$

FITA 的结果：

max＝1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,
1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00

min＝0.20,0.20,0.59,1.00,0.59,0.20,0.20,0.20,0.20,
0.20,0.20,0.20,0.20,0.20,0.20

FATI 的结果：

max＝1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,
1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00

min＝0.20,0.20,0.59,1.00,0.59,0.20,0.20,0.20,0.20,
0.20,0.16,0.16,0.16,0.16,0.16

$A' = A_3$

FITA 的结果：

max＝1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,
1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00

min＝0.16,0.16,0.16,0.26,0.50,0.70,1.00,0.70,0.50,
0.26,0.16,0.16,0.16,0.16,0.16

FATI 的结果：

max＝1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,
1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00

min＝0.16,0.16,0.16,0.26,0.50,0.70,1.00,0.70,0.50,
0.26,0.16,0.16,0.16,0.16,0.16

$A' = A_4$

FITA 的结果：

max＝1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,
1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00

min＝0.16,0.16,0.16,0.16,0.16,0.16,0.26,0.50,0.70,
1.00,0.70,0.50,0.26,0.16,0.16

FATI 的结果：

max＝1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,
1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00

min＝0.16,0.16,0.16,0.16,0.16,0.16,0.26,0.50,0.70,
1.00,0.70,0.50,0.26,0.16,0.16

$A'=A_5$

FITA 的结果：

max＝1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,
1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00

min＝0.16,0.16,0.16,0.16,0.16,0.16,0.16,0.16,0.16,
0.16,0.16,0.50,1.00,1.00,1.00

FATI1 的结果：

max＝1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,
1.00,1.00,1.00,1.00,1.00,1.00

min＝0.16,0.16,0.16,0.16,0.16,0.16,0.16,0.16,0.16,
0.16,0.16,0.50,1.00,1.00,1.00

由上述运算结果可以看出：基于 FATI 或 FITA，以及 max 和 min 的情况，采用 μ_3，μ_4，μ_7 和 μ_8 所推出的结果是“不知道”、或没有推出任何有关的信息，或者是不可接收的，换句话说，对上述情况没有一个合适的算子可用于进行组合运算。例如，在 μ_3 的情况下，此时的蕴含算子是 μ_3，如果 $A'=A_3$，且在组合中使用 max，那么 FATI 和 FITA 的推理结果是“不知道”，即在每个支持点的隶度值均为 1；如果在组合中采用 min 算子，那么在 FATI 和 FITA 这两种推理情况下获得的结果表示没有推导出任何有用的信息，即在每个支持点的隶属度值均为 0。还是在 μ_3 的情况下，如果 $A'=A_2$，若在组合中采用 max，那么 FATI 和 FITA 的结果均为“不知道”；若用 min 进行组合，则 FATI 的结果为“无任何信息”，而 FITA 的结果则是“不可接收的”，即推出的结果既不接近 B_2，也与 B_2 不相类似。对所有其他的观察我们可得到类似的结果。

在第一种情况下，采用 FATI 所推导出的结果与采用 FITA

所得到的结果是相同的，可看出 min 是一个好的组合算子，因为如果采用 min 进行组合，那么规则的隶属函数满足 8.4.3 所给出的约束条件，这样对 $A'=A_w, w=1,2,\cdots,5$，总有 $B'=B_w$。

在第二种情况下，FATI 和 FITA 的结果也是相同的，这表明 max 也是一个好的组合算子。因为如果采用 max 进行组合，对 $A'=A_w, w=1,2,\cdots,5$，推导出的结果 B^* 与 B_w 是接近或类似的，即结果 B^* 的最大隶属度值所在的支持点与 B_w 的相同支持点上的隶属度值是相同的，例如，如果 $A'=A_4$，采用 max 进行组合，导出的结果为：

$$\mu_{B^*}=[0.0,0.0,0.0,0.1,0.4,0.5,0.5,0.5,0.7,1.0,0.7,0.5,0.5,0.5,0.5]$$

规则 $A_4 \rightarrow B_4$ 中的 μ_{B4} 条件已给出：

$$\mu_{B4}=[0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.1,0.4,0.7,1.0,0.7,0.4,0.1,0.0,0.0]$$

由这里可看出，B^* 和 B_4 的最大隶属值 0.7，1.0，0.7 均在相同的支持点上，因此可以说 B^* 和 B_4 是类似的（或接近的）。然而，如果采用 min 进行组合，那么 FITA 和 FATI 的结果均表示没有推出任何信息，因此，在进行组合时，必须采用“max”算子。

在第五种情况下，FATI 和 FITA 的结果是相同的，表示 min 是一个好的组合算子，因为如果在组合中选用 min 算子，所推导出的结果与第二种情况是类似的，即推导出的结果 B' 与 B_w 是接近（或类似）的，然而如果用 max 算子进行组合，则 FITA 和 FATI 的结果都是“不知道”。所以对第五种情况而言，必须使用 min 算子进行组合。

在第六种情况下，FATI 和 FITA 的结果也是相同的，表示 max 算子是一个好的算子，因为用 max 进行组合所得的结果与第二种情况也是类似的，即导出的结果 B^* 与 B_w 是接近（或类似）的，然而如果用 min 算子进行组合，FITA 和 FATI 的结果表明没有推导出任何信息，所以必须采用 max 算子进行组合。

在第九和第十两种情况下，所得的结果分别与第二和第五种情况是类似的，需注意的是这两种情况可分别看作是第二和第五种情况的推广，从规则右边收敛的观点看，前者好于后者。

由这个实际例子的分析可看出，我们前几节所进行的讨论是正确的。

第九章　模糊蕴含算子与选言推理

本章主要讨论目前在采用合成推理规则进行模糊推理时，所广泛应用的一些模糊蕴含算子以及它们的一些性能。然后讨论将 T-范数扩充到含有几个变元的情况，从而使 Zadeh 的合成推理规则能够处理更一般的推理模式。

9.1　模糊蕴含算子

众所周知，在专家系统和控制领域中，专家和控制功能的许多知识都可用包含语言变量的“IF…THEN…”规则来描述，即规则中的变量取语言值而不是取数值。为了处理这类含有语言变量的模糊推理，Zadeh 提出采用模糊蕴含算子，用一种模糊关系的形式来表示上述规则。例如，专家系统中的规则通常具有如下形式：

$$\text{IF X is A THEN Y is B} \tag{9.1}$$

其中 X 是在 U 中取值的变量，Y 是在 V 中取值的一个变量，A 是 U 的一个模糊子集，而 B 则是 V 的一个模糊子集。

Zadeh 在对上述规则进行模糊约束计算时，他把规则解释为约束序偶(X,Y)可能取的值的一个模糊关系。在广义的蕴含算子条件下，模糊关系可定义为：

$$R(X,Y): U\times V\to[0,1]:(u,v)\to r(A(u),B(v)),$$
$$\forall\ (u,v)\in U\times V \tag{9.2}$$

其中，r 是表示$[0,1]^2\to[0,1]$的一个映射，它扩展了经典蕴含，即 $r(0,0)=r(0,1)=r(1,1)=1$，和 $r(1,0)=0$。

表 9.1 给出了在合成推理规则中，常用的 18 种模糊蕴含算子。这些模糊蕴含算子具有的特性：

表 9.1　模糊蕴含算子（x 和 y 表示[0,1]中的任意元素）

序号		
1	Early Zadeh	$r_m(x,y)=(x\wedge y)\vee(1-x)$
2	Lukasiewicz	$r_a(x,y)=1\wedge(1-x+y)$
3	Minimum(Mamdani)	$r_c(x,y)=x\wedge y$
4	Standard Strict	$r_s(x,y)=\begin{cases}1 & x\leqslant y\\ 0 & x>y\end{cases}$
5	Standard Star(Gödel)	$r_g(x,y)=\begin{cases}1 & x\leqslant y\\ y & x>y\end{cases}$
6	Standard Strict-Star	$r_{sg}(x,y)=r_s(x,y)\wedge r_g(1-x,1-y)$
7	Standard Star-Strict	$r_{gs}(x,y)=r_g(x,y)\wedge r_s(1-x,1-y)$
8	Standard Star-Star	$r_{gg}(x,y)=r_g(x,y)\wedge r_g(1-x,1-y)$
9	Standard Strict-Strict	$r_{ss}(x,y)=r_s(x,y)\wedge r_s(1-x,1-y)$
10	Kleene-Dienes	$r_b(x,y)=(1-x)\vee y$
11	Gaines	$r_{\triangle}(x,y)=\begin{cases}1 & x\leqslant y\\ y/x & x>y\end{cases}$
12	Modified Gaines	$r_{\blacktriangle}(x,y)=\begin{cases}1\wedge y/x\wedge(1-x)/(1-y) & x>0,y<1\\ 1 & \text{否则}\end{cases}$
13	Kleene-Dienes-Lukasiewicz	$r_*(x,y)=1-x+x\cdot y$
14	Willmott	$r_{\#}(x,y)=(1-x\wedge y)\vee(x\wedge 1-x)\vee(y\wedge 1-y)$
15	Standard Sharp	$r_{\square}(x,y)=\begin{cases}1 & x<1\text{ 或 }y=1\\ 0 & \text{否则}\end{cases}$
16	Wu1	$r_{1b}(x,y)=\begin{cases}1 & x\leqslant y\\ 1-x\wedge y & x>y\end{cases}$
17	Wu2	$r_{1e}(x,y)=\begin{cases}0 & x<y\\ y & x\geqslant y\end{cases}$
18	Yager	$r_E(x,y)=y^x$

1. 算子 $r_a,r_s,r_{ss},r_b,r_\blacktriangle,r_*,r_\#$ 和 r_{1b}满足换质位律：

$(\forall\ (x,y)\in[0,1]^2)(r(x,y)=r(1-y,1-x))$

2. 算子 $r_a,r_c,r_g,r_{gs},r_{ss},r_b,r_\triangle,r_*,r_\#,r_\square,r_{1e}$和 r_E 满足交换原则：

$(\forall\ (x,y,z)\in[0,1]^3)(r(x,r(y,z))=r(y,r(x,z)))$

3. 算子 $r_a,r_s,r_g,r_b,r_\triangle,r_\blacktriangle,r_*,r_\square,r_{1b}$和 r_E 满足混合单调性：

$(\forall\ (x,y)\in[0,1]^2)$ ($r(\cdot,y)$是非递增的，$r(x,\cdot)$是非递减的)

4. 算子 $r_a,r_s,r_g,r_b,r_\triangle,r_\blacktriangle$和 r_{1b}满足如下的有界条件：

$(\forall\ (x,y)\in[0,1]^2)(x\leqslant y\Leftrightarrow r(x,y)=1)$

5. 算子 $r_m,r_a,r_c,r_g,r_{gg},r_{gs},r_\triangle,r_*,r_\#,r_{1e}$和 r_E 满足中性原则：

$(\forall\ x\in[0,1])(r(1,x)=x)$

6. 算子 r_m,r_a,r_c,r_b,r_* 和 $r_\#$是连续的。

9.2 合成推理规则的扩展

根据结合性，可以很容易地将一个 T-范数 T 扩展到有 n 个变元的情况。首先我们将[0,1]上的一个一元运算 T_1 定义为[0,1]上的一个恒等算子，即

$$T_1(x)=x,\forall\ x\in[0,1] \tag{9.3}$$

由于 T 是可结合的，我们可以无歧义地递归定义一个 n 元运算 T_n $(n\geqslant 2)$：

$$T_n:[0,1]^n\to[0,1]:T_n(x_1,x_2,\cdots,x_n):\quad T(T_{n-1}(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}),x_n) \tag{9.4}$$

在下面的定理中，我们将证明 n 元运算 T_n 满足与二元运算 T 相似的特性。

定理 1 [0,1]上的 n 元运算 T_n 满足如下的性质：

(1)$T_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=T_n(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},\cdots,x_{\sigma(n)})$

其中 σ 是$\{1,2,\cdots,n\}$的一个置换。

(2)$T_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

$=T_{i+1}(x_1,x_2,\cdots,x_i,T_{n-i}(x_{i+1},\cdots,x_j,\cdots,x_n))$

$=T_{n-j+1}(T_j(x_1,x_2,\cdots,x_j),x_{j+1},\cdots,x_n)$

(3)$(\forall\ i\in N_n)(x_i\leqslant x'_i)\Rightarrow T_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

$\leqslant T_n(x'_1,x'_2,\cdots,x'_n)$

(4)$T_n(x_1,x_2,\cdots,x_{i-1},1,x_{i+1},\cdots,x_n)$

$=T_{n-1}(x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n)$

(5)只要 T 是连续的，那么 T_n 也是连续的。

由定理1，我们可将 T_n 看作是对 T-范数的一个扩展。在下面的讨论中，我们将省去变元 n 的具体数值，直接用 T 表示由 T-范数 T 所生成的一类映射。

T 的4个重要的例子是

$$M(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\min(x_1,x_2,\cdots,x_n) \tag{9.5}$$

$$\pi(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n \tag{9.6}$$

$$W(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\max(x_1+x_2+\cdots+x_n-n+1,0) \tag{9.7}$$

$$Z(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{cases}x_i & x_j=1(j\in N_n|\{i\}\\ 0 & \text{否则}\end{cases} \tag{9.8}$$

因此，可以很容易地验证扩展的 T 满足如下的性质。

定理2 扩展的 T-范数 T 满足

(1) $T(x_1,x_2,\cdots,x_n)\leqslant\min(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

(2) $T(x_1,x_2,\cdots,x_n)=1\Leftrightarrow(\forall\ i\in N_n)(x_i=1)$

(3) $(\exists\ i\in N_n)(x_i=0)\Rightarrow T(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$

(4) $T(x_1,x_2,\cdots,x_n)\leqslant T(x_1,x_2,\cdots,x_{n-k})\quad(n>k\geqslant 0)$

(5) IF T 是连续的，THEN

(i) $T(x_1,x_2,\cdots,x_{i-1},\operatorname*{Sup}_{j\in J_i}y_j,x_{i+1},\cdots,x_n)$

$=\operatorname*{Sup}_{j\in J_i}T(x_1,x_2,\cdots,x_{i-1},y_j,x_{i+1},\cdots,x_n)$

(ii) $T(x_1,x_2,\cdots,x_{i-1},\inf_{j\in J_i}y_j,x_{i+1},\cdots,x_n)$

$$=\inf_{j\in J_i} T(x_1,x_2,\cdots,x_{i-1},y_j,x_{i+1},\cdots,x_n)$$

其中 T_i 表示一个任意的指标集。

合成推理规则的主要目的是从已经存在的关系推导出一个新的关系，这可由如下的推理模式表示：

$$\begin{array}{ll} \text{Ant 1:} & \mathrm{R(X)=A} \\ \text{Ant 2:} & \mathrm{R(X,Y)=F} \\ \hline \text{Cons:} & \mathrm{R(Y)=A\circ_T F} \end{array} \tag{9.9}$$

结论 $R(Y)$ 可由下式获得：

$$\mathrm{R(Y)} = \mathrm{Proj}\,\bar{\mathrm{A}} \cap_{\mathrm{T}} \mathrm{F} \tag{9.10}$$

其中 A 和 F 分别是 U 和 $U\times V$ 中的模糊子集，合成 $\circ_T$ 定义为基于 T-范数的交 $\cap_T$ 的一个射影，即：

$$(A \cap_T B)(u,v) = T(A(u),B(v)) \quad \forall\ (u,v) \in U \times V \tag{9.11}$$

而 $\bar{A}$ 则表示 A 到 $U\times V$ 的柱面扩展。因此

$$R(Y)\cdot v = \mathop{\mathrm{Sup}}_{u\in U} T(A(u),F(u,v)) \quad \forall\ v \in V \tag{9.12}$$

这实际上是从 U 和 $U\times V$ 上已经存在的关系 $R(X)$ 和 $R(X,Y)$ 所推导出的 V 上的一个新关系 $R(Y)$。

上面的推理模式可自然地扩充到有多于二个变量的情况，即 $X_1,X_2,\cdots$ 和 X_{n+m} 分别在 $U_1,U_2,\cdots$ 和 U_{n+m} 中取值：

$$\begin{array}{ll} \text{Ant 1:} & \mathrm{R(X_1,X_2,\cdots,X_i,\cdots,X_n)=H} \\ \text{Ant 2:} & \mathrm{R(X_{i+1},\cdots,X_n,\cdots,X_{n+m})=M} \\ \hline \text{Cons:} & \mathrm{R(X_1,\cdots,X_i,X_{n+1},\cdots,X_{n+m})=H\circ_T M} \end{array} \tag{9.13}$$

其中，H 和 M 分别是 $U_1\times U_2\times\cdots\times U_n$，$U_{i+1}\times U_{i+2}\times\cdots\times U_{n+m}$ 中的模糊集，且

$$\mathrm{H\circ_T M} = \mathop{\mathrm{Proj}}_{\mathrm{I}}\bar{\mathrm{H}} \cap_{\mathrm{T}} \bar{\mathrm{M}} \tag{9.14}$$

其中，$I=(1,2,\cdots,i,n+1,\cdots,n+m)$。

现在讨论如下的推理模式：

$$
\begin{array}{ll}
\text{Ant 1:} & R_1(X_1,X_2,X_3,X_4)=A \\
\text{Ant 2:} & R_2(X_2,X_3)=B \\
\text{Ant 3:} & R_3(X_3,X_4)=C \\
\hline
\text{Cons:} & R(X_1,X_3)=?
\end{array}
\tag{9.15}
$$

这里，A，B 和 C 分别是 $U_1\times U_2\times U_3\times U_4$，$U_2\times U_3$ 和 $U_3\times U_4$ 中的模糊集。可以采用下面叙述的扩展推理方法来求解 X_1 和 X_3 之间的关系：

$$
R(X_1,X_3)=R_3*(R_2*R_1)=\operatorname*{Proj}_{U_1\times U_3}\bar{C}\cap_T\overline{(\operatorname*{Proj}_{U_1\times U_4}\bar{B}\cap_T\bar{A})}
\tag{9.16}
$$

从另一边得到的关系是

$$
R(X_1,X_3)=R_1*(R_2*R_3)=\operatorname*{Proj}_{U_1\times U_3}\bar{A}\cap_T\overline{(\operatorname*{Proj}_{U_2\times U_4}\bar{B}\cap_T\bar{C})}
\tag{9.17}
$$

这表明 $R(X_1,X_3)$ 可按两种不同的方法获得，但需注意的是两种方法获得的 $R(X_1,X_3)$ 是不相同的，即 $R_3*(R_2*R_1)\neq R_1*(R_2*R_3)$。

假定 T 是连续的，$R_1(u_1,u_2,u_3,u_4)=1$，$R_2(u_2,u_3)=\max(u_2,u_3)$，以及 $R_3(u_3,u_4)=\min(u_3,u_4)$，那么对约束于 $[0,1]^4\subseteq U_1\times U_2\times U_3\times U_4$ 的任意 (u_1,u_2,u_3,u_4)，我们可依次获得如下结果：

$$
\begin{aligned}
&R_3*(R_2*R_1)\cdot(u_1,u_2,u_3,u_4)\\
&\quad=\operatorname*{Sup}_{u_4\in[0,1]}T(\min(u_3,u_4),\operatorname*{Sup}_{(u_2,u_3)\in[0,1]^2}T(\max(u_2,u_3),1))\\
&\quad=\operatorname*{Sup}_{u_4\in[0,1]}T(\min(u_3,u_4),\operatorname*{Sup}_{(u_2,u_3)\in[0,1]^2}\max(u_2,u_3))\\
&\quad=\operatorname*{Sup}_{u_4\in[0,1]}T(\min(u_3,u_4),1)\\
&\quad=\operatorname*{Sup}_{u_4\in[0,1]}\min(u_3,u_4)=u_3
\end{aligned}
$$

$R_1*(R_2*R_3)\cdot(u_1,u_2,u_3,u_4)$

$$= \sup_{(u_2,u_4)\in[0,1]^2} T(1, \sup_{(u_1,u_3)\in[0,1]^2} T(\max(u_2,u_3),\min(u_3,u_4)))$$
$$= \sup_{(u_1,u_2,u_3,u_4)\in[0,1]^4} T(\max(u_2,u_3),\min(u_3,u_4))$$
$$= \sup_{u_3\in[0,1]} T(\sup_{u_2\in[0,1]} \max(u_2,u_3), \sup_{u_4\in[0,1]} \min(u_3,u_4))$$
$$= \sup_{u_3\in[0,1]} T(1,u_3)=1$$

这一例子表明：用这一方法不能唯一地获得结果 $R(X_1,X_3)$。

因而，自然地会出现如下两个问题：

(1)根据上面的推理技术以及前件中所给信息的组合方式，对 X_1 和 X_3 之间的关系我们可以获得两个不同的结果，那么我们取哪一个作为我们的推理结果呢？

(2)利用上面的推理技术，我们仅能演绎出关于变量 X_1 和 X_3 的信息，那么其他的组合信息如 X_2 和 X_4 或者 X_1,X_3 和 X_4 如何获得？

为了解决上述问题，让我们研究如下的推理模式：

$$\begin{array}{ll}
\text{Ant 1:} & R_1(X_{\sigma_{1(1)}},X_{\sigma_{1(2)}},\cdots,X_{\sigma_{1(i1)}})=A_1 \\
\text{Ant 2:} & R_2(X_{\sigma_{2(1)}},X_{\sigma_{2(2)}},\cdots,X_{\sigma_{2(i2)}})=A_2 \\
\vdots & \\
\text{Ant m:} & R_m(X_{\sigma_{m(1)}},X_{\sigma_{m(2)}},\cdots,X_{\sigma_{m(im)}})=A_m \\
\hline
\text{Cons:} & R(X_1,X_2,\cdots,X_n \text{ 中的变量})=?
\end{array} \tag{9.18}$$

其中，$A_j(j\in N_m)$ 是 $U_{\sigma_{j(1)}}\times U_{\sigma_{j(2)}}\times\cdots\times U_{\sigma_{j(ij)}}$ 上的模糊集，$R_j(j\in N_m)$ 是 $U_{\sigma_{j(1)}}\times U_{\sigma_{j(2)}}\times\cdots\times U_{\sigma_{j(ij)}}$ 上的模糊关系，$I_{ij}:=(\sigma_{j(1)},\sigma_{j(2)},\cdots,\sigma_{j(ij)})$ 表示 $I_n=(1,2,\cdots,n)$ 的一个子序列，$X_i(i\in N_n)$ 是在 $U_i(i\in N_n)$ 中取值的变量。

涉及到 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 中的任意变量的结果 R 可由现有的事实和规则演绎出的新关系而得到。借助普通的推理规则，按如下步骤可对合成推理规则进行扩展：

(1)取 $R_j(j\in N_m)$ 到 $U_1\times U_2\times\cdots\times U_n$ 的柱面扩张，即

$$\bar{R}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n) := R_1(X_{\sigma_{1(1)}},X_{\sigma_{1(2)}},\cdots,X_{\sigma_{1(i1)}}) = \bar{A}_1$$

$$\bar{R}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n) := R_2(X_{\sigma_{2(1)}},X_{\sigma_{2(2)}},\cdots,X_{\sigma_{2(i2)}}) = \bar{A}_2$$

$$\vdots$$

$$\bar{R}_m(X_1,X_2,\cdots,X_n) := R_m(X_{\sigma_{m(1)}},X_{\sigma_{m(2)}},\cdots,X_{\sigma_{m(im)}}) = \bar{A}_m$$

(2)借助扩展的 T 取“交”$\bar{R}_j\{j\in N_m\}$，即

$$\bigcap_{j=1}^{m}{}_T\bar{R}_j = T(\bar{R}_1,\bar{R}_2,\cdots,\bar{R}_m)$$

(3)取 $T(\bar{R}_1,\bar{R}_2,\cdots,\bar{R}_m)$ 在 $I := (i_1,i_2,\cdots,i_k)$（$(1,2,\cdots,n) := I_n$ 的一个子序列）上的射影，即

$$\begin{aligned}\mathrm{Proj}_{I}\mathrm{T}(\bar{\mathrm{R}}_1,\bar{\mathrm{R}}_2,\cdots,\bar{\mathrm{R}}_m) &= \mathrm{Proj}_{I} \bigcap_{j=1}^{m}{}_T\bar{\mathrm{A}}_j \\ &= \mathop{\mathrm{Sup}}_{\substack{u_j\in U_j\\ j\in I_n\setminus I}} \mathrm{T}(\bar{\mathrm{R}}_1,\bar{\mathrm{R}}_2,\cdots,\bar{\mathrm{R}}_m)\end{aligned}$$

9.3　广义的选言推理

在命题逻辑中，有一种如下形式的选言推理：

$$\begin{array}{ll} \text{Ant 1:} & a \vee b \\ \text{Ant 2:} & a \Rightarrow c \\ \text{Ant 3:} & b \Rightarrow c \\ \hline \text{Cons:} & c \end{array} \tag{9.19}$$

这可等价地表示成如下命题公式：

$$((a \vee b) \wedge (a\Rightarrow c) \wedge (b\Rightarrow c))\Rightarrow c$$

这里 a，b 和 c 是命题变量。上式在经典逻辑中是重言式，在经典数学中很多定理的证明都是基于上述推理模式所做出的。

下面讨论将上一节论述的扩展合成推理规则应用于如下的推理模式，如何获得正确的推理结果：

Ant 1:　X is A′ OR Y is B′

$$\begin{array}{ll} \text{Ant 2:} & \text{IF X is A THEN Z is C} \\ \text{Ant 3:} & \text{IF Y is B THEN Z is C} \\ \hline \text{Cons:} & \text{Z is } C' \end{array} \tag{9.20}$$

这里，$A(A')$，$B(B')$和 $C(C')$分别是 U，V 和 W 中的模糊集，获得的推理结果“Z *is* C'”为：

$$C'(w) = \sup_{u,v \in U \times V} T(T^*(A'(u), B'(v)), r(A(u), C(w)), r(B(v), C(w))) \tag{9.21}$$

其中，w 是 W 的任意一个元素，T 是一个任意的二元 T-范数，T^* 是任意的一个二元 T-余范数，r 表示任意一种模糊蕴含算子。

这一广义的选言推理的特点是，A'不必等于 A，B'也不必等于 B，但 A'应满足 $A'=m\circ A$，$B'=m\circ B$。这里 m 是一个语言修正因子，$\circ$ 则表示合成。例如可将 A'选为 A^2(很 A)，$A^{1/2}$(或多或少 A)和 $1-A$(非 A)。对 B'也可作类似的选择。

当 $A'=A$ 时，就是普通的选言推理。当 $A'\neq A$ 时，采用(9.20)式进行模糊推理时要作如下的几点说明，为简洁起见，在下面的讨论中我们将 x 代替 $A(u)$，即 $x=A(u)$，$y=B(v)$，$z=C(w)$，$Z'=C'(w)$，因此$(x,y,z,z')\in[0,1]^4$。

1. 对模糊的选言推理，如下的定理是成立的。

定理 3 对一个任意的 T-范数 T 和一个任意的 T-余范数 T^*，对每个 $z\in[0,1]$，如果 r 满足

(1)$r(0,2)=1$

(2)$r(1,2)=2$

则$(\forall\ z\in[0,1])$，$z'\geqslant z$。

证明 对$[0,1]$的任意一个元素 z，我们可得到：

$$z' = \sup_{x,y\in[0,1]^2} T(T^*(x,y), r(x,z), r(y,z))$$

$$\geqslant T(T^*(0,1), r(0,2), r(1,2)) = T(1,1,2) = 2$$

上面关于模糊蕴含算子 r 的假定可以很容易由上节所叙述的单调性、有界条件和中性原则获得。

如果 T-范数含有 min 算子，那么定理 3 的条件可进一步降低，即 T-范数仅是幂等的，此时有如下的定理。

定理 4 对任意一个 T-余范数 T^*，如果 $T=\min$，且 r 满足中性原则，那么

$$(\forall z\in[0,1])\quad z'\geqslant z$$

定理 5 对一个任意的二元 T-范数 T，如果 $T^*=\max$，且 r 满足 Sup-T 假言推理，那么

$$(\forall z\in[0,1])\quad(z'\leqslant z)$$

定理 6 令 T_1 和 T_2 是两个二元 T-范数，且有 $T_1\leqslant T_2$，如果 r 满足模糊选言推理(在 T_1 和 T_2 的条件下)，那么对一个任意的二元 T-范数 T，且有 $T_1\leqslant T\leqslant T_2$，模糊选言推理仍然成立，即

$$(\forall z\in[0,1])\quad(z'=z)$$

定理 7 如果 r_1 和 r_2 是在 T 的条件下满足模糊选言推理的模糊蕴含算子，那么对任意一个满足 $r_1\leqslant r\leqslant r_2$ 的模糊蕴含算子，模糊选言推理仍然是成立的。

此外，模糊蕴含算子，广义的模糊假言推理和模糊选言推理之间的关系还表示在定理 8,9 和 10 中。

定理 8 令 T 是一个任意的二元 T-范数，$T^*=\max$，且令 r 是对[0,1]中的每个 z 满足 $r(0,z)=1$ 和 $r(1,z)=z$ 的一个模糊蕴含算子，如果 r 满足 Sup-T 假言推理，那么它也一定满足模糊选言推理。

定理 9 令 $T=\min$ 和 $T^*=\max$，如果 r 满足中性原则和 Sup-min 假言推理，那么它一定满足模糊选言推理。

定理 10 令 T_1 和 T_2 是两个二元 T-范数，且 $T_1\leqslant T_2$，且令 $T^*=\max$，如果 r 在 T_1 条件下满足模糊选言推理，以及 r 满足 Sup-T_2 假言推理，那么对一个任意的二元 T-范数 T，使得 $T_1\leqslant T\leqslant T_2$，则模糊选言推理也是成立的。

2. 对 9.1 节所介绍的 18 种模糊蕴含算子，在 9.2 节所描述的 T 的 4 种重要形式条件下，模糊选言推理的推理结果列于表

9.2 中。

3. 在上面的讨论中，我们均假定模糊集的范围为：

$$\mathrm{rng}(A)=\mathrm{rng}(B)=\mathrm{rng}(C)=[0,1]$$

如果不考虑模糊集的范围条件，那么推导出的结果就会更复杂。例如假定考虑在 $T=M$ 情况下的 r_6，模糊选言推理按普通推理规则所获得的结果为：

$$C'=((\mathrm{hgt}(A\cap \mathrm{co}\ A)\cup(\mathrm{hgt}(A)\cap C))\cap(\mathrm{hgt}(\mathrm{co}\ B)\cup C))$$
$$\cup((\mathrm{hgt}(B\cap \mathrm{co}\ B)\cup(\mathrm{hgt}(B)\cap C))\cap(\mathrm{hgt}(\mathrm{co}\ A)\cup C))$$

其中，$r(r\in[0,1],r:U\to\{r\}:u\to r,\forall u\in U)$ 表示常量模糊集，它在论域的每个点取 r 值，"co A"表示模糊集 A 的补，即 $(\mathrm{co}\ A)(u)=1-A(u),\forall u\in U$。

证明：对 W 中任意一个 w，可得到：

$$\begin{aligned}
C'(w)=&\sup_{u,v\in U\times V}\min(\max(A(u),B(v)),\max(1-A(u),C(w)),\\
&\max(1-B(v),C(w)))\\
=&\sup_{u,v\in U\times V}\max(\min(A(u),\max(1-A(u),C(w)),\\
&\max(1-B(v),C(w))),\min(B(v),\max(1-A(u),\\
&C(w)),\max(1-B(v),C(w))))\\
=&\max(\sup_{u\in U}\min(A(u),\max(1-A(u),C(w)),\\
&\max(\mathrm{hgt}(\mathrm{co}\ B),C(w))),\sup_{v\in V}\min(B(v),\max(1-B(v),\\
&C(w)),\max(\mathrm{hgt}(\mathrm{co}\ A),C(w))))\\
=&\max(\min(\sup_{u\in U}\min(A(u),\max(1-A(u),C(w))),\\
&\max(\mathrm{hgt}(\mathrm{co}\ B,C(w)))),\min(\sup_{v\in V}\min(B(v),\\
&\max(1-B(v),C(w))),\max(\mathrm{hgt}(\mathrm{co}\ A),C(w))))\\
=&\max(\min(\max(\mathrm{hgt}(A\cap \mathrm{co}\ A),\min(\mathrm{hgt}(A),C(w))),\\
&\max(\mathrm{hgt}(\mathrm{co}\ B),C(w))),\min(\max(\mathrm{hgt}(B\cap \mathrm{co}\ B),\\
&\min(\mathrm{hgt}(B),C(w))),\max(\mathrm{hgt}(\mathrm{co}\ A),C(w))))
\end{aligned}$$

如果 A,B,C 的范围假定为 $[0,1]$，那么 $C'(w)=$

$\max\left(\frac{1}{2}, C(w)\right) = \max\left(\frac{1}{2}, z\right)$，这一结果给在表 9.2 中。这表示范围的限制对证明是不必要的。尽管如此，在各种模糊蕴含算子的情况下，要证明模糊选言推理的正确性，假定范围有限制可使得证明更容易。

4. 对与 A 不同的 A'，对列在表 9.2 中的那些满足模糊选言推理的模糊蕴含算子，在 4 种不同的 T-范数（M, Π, W 和 Z）情况下，广义的模糊选言推理具有什么样的性能呢？

考察在 Sup-min 推理规则的情况下，可由表 9.3 看出，在 18 种模糊蕴含算子中，只有算子 $r_c, r_s, r_g, r_{sg}, r_{gs}, r_{gg}, r_{ss}, r_{1b}$ 和 r_{1e} 满足模糊选言推理。因为在 A'（也可以用于 B'）的情况下：

$$z' = \sup_{x,y\in[0,1]^2} \min(\max(x', y'), r(x,z), r(y,z)), \quad \forall z \in [0,1]$$

其中，$r \in \{r_c, r_s, r_g, r_{sg}, r_{gs}, r_{gg}, r_{ss}, r_{1b}, r_{1e}\}$。

假定 r 为 r_g，且令 $x' = x^2$，即“X 是很 A”，以及 $y' = y^{1/2}$，即“Y 是或多或少 B”，因为对$[0,1]$中的每个 z，有

$$\begin{aligned} z' &= \sup_{x,y\in[0,1]^2} \min(\max(x^2, y^{1/2}), r_g(x,z), r_g(y,z)) \\ &= \max(E_1, E_2) \end{aligned}$$

其中

$$E_1 = \sup_{x^2 \leqslant y^{1/2}} \min(y^{1/2}, r_g(x,z), r_g(y,z))$$

和

$$E_2 = \sup_{x^2 > y^{1/2}} \min(x^2, r_g(x,z), r_g(y,z))$$

进一步可得到：

$$\begin{aligned} E_1 &= \sup_{y\in[0,1]} \sup_{x\in[0,y^{1/4}]} \min(y^{1/2}, r_g(x,z), r_g(y,z)) \\ &= \sup_{y\in[0,1]} \min(y^{1/2}, \sup_{x\in[0,y^{1/4}]} r_g(x,z), r_g(y,z)) \\ &= \sup_{y\in[0,1]} \min(y^{1/2}, r_g(y,z)) \\ &= \max(\sup_{y\in[0,z]} \min(y^{1/2}, 1), \sup_{y\in[z,1]} \min(y^{1/2}, z)) \end{aligned}$$

$$=\max(z^{1/2},z)=z^{1/2}$$

和

$$\begin{aligned}E_2 &= \sup_{x\in[0,1]}\sup_{y\in[0,x^4]}\min(x^2,r_g(x,z),r_g(y,z))\\ &= \sup_{x\in[0,1]}\min(x^2,r_g(x,z))\\ &=\max(\sup_{x\in[0,z]}\min(x^2,1),\sup_{x\in[z,1]}\min(x^2,z))\\ &=\max(z^2,z)=z\end{aligned}$$

所以

$$z'=\max(E_1,E_2)=\max(z^{1/2},z)=z^{1/2}$$

这一结果表明"Z 是或多或少 C"。

又假定在 $x'=x$，即"X 是 A"，以及 $y'=1-y$，即"y 是非 B"的情况下，则对[0,1]中的每个 z，我们可得到：

$$\begin{aligned}z' &= \sup_{x,y\in[0,1]^2}\min(\max(x,1-y),r_g(x,z),r_g(y,z))\\ &=\max(\sup_{x\leqslant 1-y}\min(1-y,r_g(x,z),r_g(y,z)),\\ &\quad\sup_{x>1-y}\min(x,r_g(x,z),r_g(y,z)))\\ &=\max(\sup_{y\in[0,1]}\min(1-y,r_g(y,z)),\sup_{x\in[0,1]}\min(x,r_g(x,z)))\\ &=\max(1,z)=1\end{aligned}$$

这一推理结果表明"Z 是不知道的"。

对在 Sup-min 条件下采用 9 种模糊蕴含算子进行广义的选言推理所得到的推理结果列于表 9.3 中。

从表 9.3 所给的结果我们可以看出，算子 r_g，r_s 和 r_{16}满足经典选言推理的两个重要性质：

(1)对于"X is A′ OR Y is B′"，其中 A′=A 和 B′=B，那么结论"Z is C"应为 C′=C。

(2)对于"X is A′ OR Y is B′"，其中 A′=1−A 和 B′=1−B，那么结论"Z is C"应为" 不知道"。

此外，在 $A'=1-A$ 或 $B'=1-B$ 的情况下，结论"Z is C′"也为"C'是不知道"。

对 A'和 B'的其他情况，结论“Z is C′”的相关结果全部列于表 9.3 中。

在表 9.2 中，我们给出了在 Sup-π 推理规则的条件下，算子 $r_s,r_g,r_{sg},r_{gg},r_{ss},r_{1b},r_\triangle$和 $r_\blacktriangle$满足模糊选言推理的情况。这些算子在广义的模糊选言推理条件下所得到的推理结果列于表 9.4 中。

对于在 Sup-W 推理规则的条件下，满足模糊选言推理的算子 $r_m,r_a,r_s,r_g,r_{sg},r_{gs},r_{gg},r_{ss},r_b,r_\triangle,r_\blacktriangle,r_*,r_{1b}$和 r_E 在广义的模糊选言推理情况下的推理结果列于表 9.5 中。

最后，在表 9.5 中给出了在 Sup-Z 推理规则的条件下，满足模糊选言推理(在表 9.2 中)的算子在广义的模糊选言推理情况下的推理结果。

至此，我们对 18 种模糊蕴含算子在 Sup-min，Sup-π，Sup-W 和 Sup-Z 等 4 种推理规则的条件下进行广义的模糊选言推理所得到的推理结果。由这些讨论可得到如下结论：

1. 对每个 $z\in[0,1]$，满足 $r(0,z)=1$ 和 $r(1,z)=z$，以及模糊假言推理的模糊蕴含算子也满足模糊选言推理。

2. 在 T-范数 T_1 和 T_2 的条件下，如果一个模糊蕴含算子都满足模糊选言推理，那么任意一个 T-范数 $T(T_1\leqslant T\leqslant T_2)$也会满足模糊选言推理。

3. 假定有一个模糊蕴含算子 r 满足模糊选言推理，如果存在两个满足模糊选言推理的算子 r_1 和 r_2，那么必有 $r_1\leqslant r\leqslant r_2$。

由表 9.2 我们可以看出：算子 $r_c,r_s,r_g,r_{sg},r_{gg},r_{gs},r_{1b},r_{1r}$适合 Sup-min 条件下的模糊选言推理；算子 $r_s,r_g,r_{ss},r_{gg},r_{gs},r_\triangle,r_\blacktriangle$和 r_{1b}适合于 Sup-π 条件下的模糊选言推理；而算子 $r_m,r_a,r_s,r_g,r_{sg},r_{gs},r_{gg},r_{ss},r_b,r_\triangle,r_\blacktriangle,r_*,r_{1b}$和 r_E 则适用于在 Sup-W 和 Sup-Z 条件下的模糊选言推理(见表 9.6)。

表 9.2　18 种模糊蕴含算子的推理结果

算子	Sup-min 推理规则		Sup-π 推理规则		Sup-W 推理规则		Sup-Z 推理规则	
	模糊集 C'	模糊选言推理	模糊集 C'	模糊选言推理	模糊集 C'	模糊选言推理	模糊集 C'	模糊选言推理
r_m	$\max\left(\frac{1}{2},z\right)$	NO	$\max\left(\frac{1}{4},z\right)$	NO	z	YES	z	YES
r_a	$\frac{1}{2}(1+z)$	NO	$\frac{1}{4}(1+z)^2$	NO	z	YES	z	YES
r_c	z	YES	z^2	NO	$\max(0,2z-1)$	NO	$\begin{cases}1, z=1\\0, z<1\end{cases}$	NO
r_s	z	YES	z	YES	z	YES	z	YES
r_g	z	YES	z	YES	z	YES	z	YES
r_{sg}	z	YES	z	YES	z	YES	z	YES
r_{gs}	z	YES	z	YES	z	YES	z	YES
r_{gg}	z	YES	z	YES	z	YES	z	YES
r_{ss}	z	YES	z	YES	z	YES	z	YES
r_b	$\max\left(\frac{1}{2},z\right)$	NO	$\max\left(\frac{1}{4},z\right)$	NO	z	YES	z	YES
$r_\triangle$	$z^{1/2}$	NO	z	YES	z	YES	z	YES

续表

算子	Sup-min 推理规则		Sup-π 推理规则		Sup-W 推理规则		Sup-Z 推理规则	
	模糊集 C'	模糊选言推理	模糊集 C'	模糊选言推理	模糊集 C'	模糊选言推理	模糊集 C'	模糊选言推理
$r_\blacktriangle$	$\begin{cases} z^{1/2} & z<\frac{1}{2} \\ (z-z)^{-1} & z\geqslant\frac{1}{2} \end{cases}$	NO	z	YES	z	YES	z	YES
r_*	$(2-z)^{-1}$	NO	$\begin{cases} \frac{1}{4}(1-z) & z\leqslant\frac{1}{2} \\ z & z>\frac{1}{2} \end{cases}$	NO	z	YES	z	YES
$r_\#$	$\max\left(\frac{1}{2},z\right)$	NO	$\begin{cases} z^2 & z>\frac{1}{2} \\ z(1-z) & \frac{1}{4}<z\leqslant\frac{1}{2} \\ (1-z)/4 & z\leqslant\frac{1}{4} \end{cases}$	NO	$\max(0,2z-1)$	NO	$\begin{cases} 1, z=1 \\ 0, z<1 \end{cases}$	NO
$r_\square$	1	NO	1	NO	1	NO	1	NO
r_{1b}	z	YES	z	YES	z	YES	z	YES
r_{1r}	z	YES	z^2	NO	$\max(0,2z-1)$	NO	$\begin{cases} 1 & z=1 \\ 0 & z<1 \end{cases}$	NO
r_E	$\xi(z)^a$	NO	$f(z)^b$	NO	z	YES	z	YES

表 9.3　9 种算子的推理结果(在广义的模糊选言推理(Sup-min)情况下)

算子	$B'/C'/A'$	A	A^2	$A^{1/2}$	$1-A$
r_g	B	z	z	$z^{1/2}$	1
	B^2	z	z	$z^{1/2}$	1
	$B^{1/2}$	$z^{1/2}$	$z^{1/2}$	$z^{1/2}$	1
	$1-B$	1	1	1	1
r_c	B	z	z	z	z
	B^2	z	z	z	z
	$B^{1/2}$	z	z	z	z
	$1-B$	z	z	z	$\min\left(\frac{1}{2},z\right)$
r_s	B	z	z	$z^{1/2}$	1
	B^2	z	z^2	$z^{1/2}$	1
	$B^{1/2}$	$z^{1/2}$	$z^{1/2}$	$z^{1/2}$	1
	$1-B$	1	1	1	1
r_{sg}, r_{ss}	B	z	z	$z^{1/2}$	$\max(z,1-z)$
	B^2	z	z^2	$z^{1/2}$	$\max(z^2,1-z)$
	$B^{1/2}$	$z^{1/2}$	$z^{1/2}$	$z^{1/2}$	$\max(z^{1/2},1-z)$
	$1-B$	$\max(z,1-z)$	$\max(z^2,1-z)$	$\max(z^{1/2},1-z)$	$1-z$

续表

算子	$B'/C'/A'$	A	A^2	$A^{1/2}$	$1-A$
r_{B}, r_{SS}	B	z	z	$z^{1/2}$	$\max(z,1-z)$
	B^2	z	z	$z^{1/2}$	$\max(z,1-z)$
	$B^{1/2}$	$z^{1/2}$	$z^{1/2}$	$z^{1/2}$	$\max(z^{1/2},1-z)$
	$1-B$	$\max(z,1-z)$	$\max(z,1-z)$	$\max(z^{1/2},1-z)$	$1-z$
r_{16}	B	z	z	$z^{1/2}$	1
	B^2	z	$\begin{cases}\min\left(z,\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right), z\leqslant\dfrac{1}{2}\\ \max\left(z^2,\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right), z>\dfrac{1}{2}\end{cases}$	$z^{1/2}$	1
	$B^{1/2}$	$z^{1/2}$	$z^{1/2}$	$z^{1/2}$	1
	$1-B$	1	1	1	1
r_{1r}	B	z	z	z	z
	B^2	z	z	z	z
	$B^{1/2}$	z	z	z	z
	$1-B$	z	z	z	z

表 9.4　9 种算子在广义的模糊选言推理条件下的推理结果(在 Sup-π 条件下)

算子	$B'/C'/A'$	A	A^2	$A^{1/2}$	$1-A$
$r_s, r_g, r_\triangle$	B	z	z	$z^{1/2}$	1
	B^2	z	z	$z^{1/2}$	1
	$B^{1/2}$	$z^{1/2}$	$z^{1/2}$	$z^{1/2}$	1
	$1-B$	1	1	1	1
r_{sg}, r_{ss}	B	z	z	$z^{1/2}$	$\max(z, 1-z)$
	B^2	z	z^2	$z^{1/2}$	$\max(z^{1/2}, 1-z)$
	$B^{1/2}$	$z^{1/2}$	$z^{1/2}$	$z^{1/2}$	$\max(z^{1/2}, 1-z)$
	$1-B$	$\max(z, 1-z)$	$\max(z^2, 1-z)$	$\max(z^{1/2}, 1-z)$	$1-z$
r_{gs}, r_{gg}	B	z	z	$z^{1/2}$	$\max(z, 1-z)$
	B^2	z	z	$z^{1/2}$	$\max(z, 1-z)$
	$B^{1/2}$	$z^{1/2}$	$z^{1/2}$	$z^{1/2}$	$\max(z^{1/2}, 1-z)$
	$1-B$	$\max(z, 1-z)$	$\max(z, 1-z)$	$\max(z^{1/2}, 1-z)$	$1-z$
r_{1b}	B	z	z	$z^{1/2}$	1
	B^2	z	$\begin{cases} z^2, & z\geqslant\frac{1}{2} \\ \max(z^2, z(1-z)^2), & z<\frac{1}{2} \end{cases}$	$\begin{cases} z^{1/2}, & z\geqslant\frac{1}{2} \\ \max(z^{1/2}, z(1-z)^2), & z<\frac{1}{2} \end{cases}$	1

续表

算子	$B'/C'/A'$	A	A^2	$A^{1/2}$	$1-A$
	$B^{1/2}$	$z^{1/2}$	$\begin{cases} z^{1/2}, & z \geqslant \frac{1}{2} \\ \max(z^{1/2}, z(1-z)^2), & z < \frac{1}{2} \end{cases}$	$z^{1/2}$	1
	$1-B$	1	1	1	1
$r_{\blacktriangle}$	B	z	z	$\begin{cases} z^{1/2}, & z \leqslant \frac{1}{2} \\ z/(1-z)^{1/2}, & \frac{1}{2} < z < 1 \\ 1, & z = 1 \end{cases}$	1
	B^2	$\begin{cases} z(1-z), & z \leqslant \frac{1}{2} \\ z^2, & z > \frac{1}{2} \end{cases}$	$\begin{cases} z(1-z), & z \leqslant \frac{1}{2} \\ z^2, & z > \frac{1}{2} \end{cases}$	$\begin{cases} z^{1/2}, & z \leqslant \frac{1}{2} \\ z/(1-z)^{1/2}, & \frac{1}{2} < z < 1 \\ 1, & z = 1 \end{cases}$	1
	$B^{1/2}$	$\begin{cases} z^{1/2}, & z \leqslant \frac{1}{2} \\ z/(1-z)^{1/2}, & \frac{1}{2} < z < 1 \\ 1, & z = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} z^{1/2}, & z \leqslant \frac{1}{2} \\ z/(1-z)^{1/2}, & \frac{1}{2} < z < 1 \\ 1, & z = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} z^{1/2}, & z \leqslant \frac{1}{2} \\ z/(1-z)^{1/2}, & \frac{1}{2} < z < 1 \\ 1, & z = 1 \end{cases}$	1
	$1-B$	1	1	1	1

表 9.5 14 种算子(在 Sup-W 条件下)的推理结果

算子	$B'/C'/A'$	A	A^2	$A^{1/2}$	1 A
r_m, r_b	B	z	z	$\max\left(\frac{1}{4}, z\right)$	1
	B^2	z	z	$\max\left(\frac{1}{4}, z\right)$	1
	$B^{1/2}$	$\max\left(\frac{1}{4}, z\right)$	$\max\left(\frac{1}{4}, z\right)$	$\max\left(\frac{1}{4}, z\right)$	1
	$1-B$	1	1	1	1
r_s, r_{15}	B	z	z	$z^{1/2}$	1
	B^2	z	z^2	$z^{1/2}$	1
	$B^{1/2}$	$z^{1/2}$	$z^{1/2}$	$z^{1/2}$	1
	$1-B$	1	1	1	1
$r_g, r_a, r_\triangle, r_\blacktriangle$	B	z	z	$z^{1/2}$	1
	B^2	z	z	$z^{1/2}$	1
	$B^{1/2}$	$z^{1/2}$	$z^{1/2}$	$z^{1/2}$	1
	$1-B$	1	1	1	1
r_{sg}, r_{ss}	B	z	z	$z^{1/2}$	$\max(z, 1-z)$
	B^2	z	z^2	$z^{1/2}$	$\max(z^2, 1-z)$

续表

算子	$B'/C'/A'$	A	A^2	$A^{1/2}$	$1-A$
	$B^{1/2}$	$z^{1/2}$	$z^{1/2}$	$z^{1/2}$	$\max(z^{1/2},1-z)$
	$1-B$	$\max(z,1-z)$	$\max(z^2,1-z)$	$\max(z^{1/2},1-z)$	$1-z$
r_g, r_{gg}	B	z	z	$z^{1/2}$	$\max(z,1-z)$
	B^2	z	z	$z^{1/2}$	$\max(z,1-z)$
	$B^{1/2}$	$z^{1/2}$	$z^{1/2}$	$z^{1/2}$	$\max(z^{1/2},1-z)$
	$1-B$	$\max(z,1-z)$	$\max(z,1-z)$	$\max(z^{1/2},1-z)$	$1-z$
r_*	B	z	z	$\begin{cases}\frac{1}{4}(1-z), & z<1 \\ 1 & z=1\end{cases}$	1
	B^2	z	z	$\begin{cases}\frac{1}{4}(1-z), & z<1 \\ 1 & z=1\end{cases}$	1
	$B^{1/2}$	$\begin{cases}\frac{1}{4}(1-z), & z<1 \\ 1, & z=1\end{cases}$	$\begin{cases}\frac{1}{4}(1-z), & z<1 \\ 1, & z=1\end{cases}$	$\begin{cases}\frac{1}{4}(1-z), & z<1 \\ 1 & z=1\end{cases}$	1
	$1-B$	1	1	1	1
r_E	B	z	z	$\geqslant z$	1
	B^2	z	z	$\geqslant z$	1
	$B^{1/2}$	$\geqslant z$	$\geqslant z$	$\geqslant z$	1
	$1-B$	1	1	1	1

表 9.6　14 种算子(在 Sup-Z 条件下)的推理结果

算子	$B'/C'/A'$	A	A^2	$A^{1/2}$	$1-A$
r_m, r_b, r_*, r_E	B	z	z	z	1
	B^2	z	z	z	1
	$B^{1/2}$	z	z	z	1
	$1-B$	1	1	1	1
$r_a, r_g, r_\triangle$	B	z	z	$z^{1/2}$	1
	B^2	z	z	$z^{1/2}$	1
	$B^{1/2}$	$z^{1/2}$	$z^{1/2}$	$z^{1/2}$	1
	$1-B$	1	1	1	1
$r_s, r_\blacktriangle, r_{16}$	B	z	z	$z^{1/2}$	1
	B^2	z	z^2	$z^{1/2}$	1
	$B^{1/2}$	$z^{1/2}$	$z^{1/2}$	$z^{1/2}$	1
	$1-B$	1	1	1	1

续表

算子	$B'/C'/A'$	A	A^2	$A^{1/2}$	$1-A$
r_{sg}, r_{ss}	B	z	z	$z^{1/2}$	$\max(z, 1-z)$
	B^2	z	z^2	$z^{1/2}$	$\max(z^2, 1-z)$
	$B^{1/2}$	$z^{1/2}$	$z^{1/2}$	$z^{1/2}$	$\max(z^{1/2}, 1-z)$
	$1-B$	$\max(z, 1-z)$	$\max(z^2, 1-z)$	$\max(z^{1/2}, 1-z)$	$1-z$
r_{gs}	B	z	z	$z^{1/2}$	$\max(z, 1-z)$
	B^2	z	z	$z^{1/2}$	$\max(z, 1-z)$
	$B^{1/2}$	$z^{1/2}$	$z^{1/2}$	$z^{1/2}$	$\max(z^{1/2}, 1-z)$
	$1-B$	$\max(z, 1-z)$	$\max(z, 1-z)$	$\max(z^{1/2}, 1-z)$	$\max(z, 1-z)$
r_{gg}	B	z	z	$z^{1/2}$	$\max(z, 1-z)$
	B^2	z	z	$z^{1/2}$	$\max(z, 1-z)$
	$B^{1/2}$	$z^{1/2}$	$z^{1/2}$	$z^{1/2}$	$\max(z^{1/2}, 1-z)$
	$1-B$	$\max(z, 1-z)$	$\max(z, 1-z)$	$\max(z^{1/2}, 1-z)$	$1-z$

参考文献

[1] Baldwin, J. F., Fuzzy logic and fuzzy reasoning, Int. J. Man—Machine Studies 11(1979) 465—480.

[2] Baldwin, J. F. Pilsworth, B. W., A model of fuzzy reasoning through multi — valued logic and set theory, Int. J. Man — machine Studies 11(1979) 351—380.

[3] Bonissone, P. P. Tong, R. M., Editorial: Reasoning with uncertainty in expert systems, Int. J. Man—Machine Studies 22(1985) 241—250.

[4] Buckley, J. J. Siler, W. Tucker, D. M., A fuzzy expert system, Fuzzy Sets and Systems 20(1986) 1—16.

[5] Buckley, J. J. Tucker, D. M., Second generation fuzzy expert system, Fuzzy Sets and Systems 31(1989) 271—284.

[6] Cao, Z. Kandel, A., Applicability of some fuzzy implication operators, Fuzzy Sets and systems 31(1989) 151—186.

[7] Dubois, D. Prade, H., Fuzzy sets in approximate reasoning, Part 1: Inference with possibility distributions, Fuzzy Sets and Systems 40 (1991) 143—202.

[8] Dubois, D. Prade, H., Fuzzy sets in approximate reasoning, Part 2: Logical approaches, Fuzzy Sets and Systems 40(1991) 203—244.

[9] Hall, L. O., The choice of ply operator in fuzzy intelligent systems, Fuzzy Sets and Systems, 34(1990) 135—144.

[10] Kandel, A., Editorial: Fuzzy expert systems, CRC Press, FL, (1992).

[11] Kandel, A., Fuzzy mathematical techniques with applications, Addison—Wesley, Reading, MA, (1986).

[12] Kaufmann, A., Introduction to theory of fuzzy subsets, Academic Press, New York, (1975).

[13] Kiszka, J. B. Kochnska, M. E., The inference of some fuzzy implication operators on the accuracy of a fuzzy model—part I, II, Fuzzy Sets and Systems 15(1985) 111—128; 223—240.

[14] Klir, G. J. Folger, T. A., Fuzzy sets, uncertainty, and information, Prentice-Hall Canada Inc., Toronto, (1988).

[15] Mizumoto, M., Pictorial representations of fuzzy connectives, Part I: Cases of T-norms, T-conorms and averaging operators, Fuzzy sets and systems 31(1989) 217—242.

[16] Mizumoto, M., Fuzzy inference using max-drastic composition in the compositional rule of inference, In: Gupta, M. and Sanchez, E., Eds., Approximate reasoning in decision analysis, North-Holland, Amsterdam, (1982).

[17] Togai, M. Watanabe, H., Expert systems on a chip: An engine for real time approximate reasoning, IEEE Expert 1(1986) 55—62.

[18] Trillas, E. Valverde, L., On mode and implication in approximate reasoning, in: Gupta, M. M. et al., Eds, Approximate reasoning in expert systems, Elsevier Science Publishers, Amsterdam, (1985).

[19] Turksen, I. B., Four methods of approximate reasoning with interval—valued fuzzy sets, Int J. of Appr. Reasoning 3(1989) 121—142.

[20] Turksen I. B. Lucas, C., A pattern matching inference method and its comparison with known inference methods, in: Proceedings of IFSA'91, Brussels, Belgium (1991) 231—234.

[21] Turksen, I. B. Tian, Y. Berg, M., A fuzzy expert system for a service centre of spare parts, Int. J. of Expert Systems with Appl. 5 (1992) 447—464.

[22] Turksen, I. B. Zhong, Z., An approximate analogical reasoning approach based on similarity measures, IEEE Trans. on Sys., Man, and Cybern. 18(1988) 1049—1056.

[23] Whalen, T. Schott, B., Alternative logics for approximate reasoning in expert systems: a comparative study Int. J. Man—Machine Studies 22(1985) 327—346.

[24] Yager, R. R., Some questions related to linguistic variables, BUSEFAL 10(1982) 54—65.

[25] Yager, R. R., Querying knowledge base systems with linguistic information via knowledge trees, Internal. J. Man-Machine Stud. 19

(1983) 73—95.

[26] Yager, R. R., Quantified propositions in a linguistic logic, Internat. J. Man-Machine Stud. 9(1983) 195—227.

[27] Yager, R. R., An introduction to applications of possibility theory, Human Systems Management 3(1983) 246—269.

[28] Yager, R. R., Approximate reasoning as a basis for rule-based expert systems, IEEE Trans. Systems Man and Cybernet. 14(4) (1984) 636—643.

[29] Yager, R. R., On different classes of linguistic variables defined via fuzzy subsets, Kybernetes 13(1984) 103—110.

[30] Yager, R. R., Strong truth and rules of inference in fuzzy logic and approximate reasoning, Cybernetics and Systems 16(1985) 23—63.

[31] Yager, R. R., Reasoning with uncertainty for expert systems, Proc 9th Internat. Joint Conference on Artificial Intelligence, Los Angeles (1985) 1295—1297.

[32] Yager, R. R., Toward a general theory of reasoning with uncertainty — Part I: Nonspecificity and fuzziness, Internat. J. Intelligent Systems 1(1986) 45—67.

[33] Yager, R. R., Toward a theory of conjunctive variables, Internat. J. General Systems 13(1987) 203—227.

[34] Zadeh, L. A., Fuzzy sets, Inf. Control 8(1965) 338—353.

[35] Zadeh, L. A., The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning—I,II,III, Inf. Sci. 8(1975) 199—249; 301—357; 9(1975) 43—80.

[36] Zadeh, L. A., Fuzzy logic, IEEE Computer, April (1988).

[37] Zadeh, L. A., A computational theory of dispositions, Internat. J. Intelligent Systems 2(1) (1987) 39—63.

[38] Zwick, R. Carlstein, E. Budescu, D. V., Measurement of similarity between fuzzy concepts: A comparative analysis, Int. J. of Appr. Reasoning 1(1987) 221—241.

[40] 李凡,模糊数学与知识工程,知识工程,1(1990) 35—40.

[41] 李凡,专家系统的一个硬件实现方法,微电子学与计算机,7(9)

(1990)6—10.

[42] 李凡,人工智能中的不确定性,气象出版社,(1992).

[43] 李凡,归结原理在不精确推理中的应用,华中理工大学学报,20(1)(1992) 27—32.

[44] 李凡,一个处理集合信息的不精确推理方法,知识工程,3(1992) 22—26.

[45] 李凡,迟忠先,一个基于可理性理论的推理模式,华中理工大学学报,21(3)(1993) 56—60.

[46] 李凡,近似推理,科学出版社,(1994).

[47] 李凡,一个有效的模糊推理方法,科学通报,35(17)(1990) 1346—1349.

[48] 王树林 袁志宏,专家系统设计原理,科学出版社,(1991).

[49] 杨叔子 郑晓军,人工智能与诊断专家系统,西安交通大学出版社,(1990).

[50] 冯博琴,实用专家系统,电子工业出版社,(1992).

[51] 吴信东 邹燕,专家系统技术,电子工业出版社,(1988).

"研究生用书"书目(第一批～第四批)

书　　名	作　者
机械工程测试·信息·信号分析	卢文祥等
粘弹性力学	杨挺青
网络分析与综合原理	曾凡刊
现代数字设计	陈耀奎
随机过程	申鼎煊
应用泛函简明教程	李大华
协同学原理和应用	吴大进
现代中央银行导论	黄芳农
高级英语阅读系列文选(1)	朱月珍
高级英语阅读系列文选(2)	樊长荣等
时间序列分析与工程应用(上)(下)　(获中国图书奖)	杨叔子等
实用偏微分方程数值解法	徐长发
遥感图象数字处理	万发贯等
线性多变量系统	庞富胜
内燃机燃烧学	全国林
控制系统 CAD 基础	罗宗虔
企业管理专家模拟系统	黎志成等
数字语音处理	姚天任
数据库设计与分析	刘云生
辩证法史论稿	阳作华等
大型复杂结构优化设计	宋天霞等
自适应光学	叶嘉雄等
机械振动系统——分析、测试、建模与对策(上)(下)	师汉民等
薄膜生长理论	王敬义
高等弹性力学	钟伟芳等
高等内燃机教程	刘永长
液压故障分析与状态监测	李壮云
塑性成型模拟理论	肖景容
微波磁学和光磁学	何华辉
有机化学中的单电子转移反应及其应用	赵成学等
生命科学中的微量元素硒	徐辉碧等
计算机几何	熊有伦

THE FIFTH BATCH OF BOOKS FOR GRADUATE STUDENTS

“研究生用书”书目(第五批)

书　　　名	作　者
水电系统最优控制 Optimal Control of Water Resources System	张勇传 Zhang Yougchuan
高等工程数学 Advanced Engineering Mathematics	于　寅 Yu Yin
新型直流拖动系统的分析与设计 Analysis and Design of Modern DC Drive System	王离九 Wang Lijiu
船舶优化设计的原理和方法 Principle and Method for Optimal Design of Ship	曾广武等 Zeng Guangwu et al.
并行分布式程序设计 Parallel Distributed Programing	刘　键 Liu Jian
磁性理论基础 Fundamentals of Magnetism Theory	宛德福 Wan Defu
现代西方人本主义哲学研究 Introduction to Modern Western Humanism Philosophy	黄见德 Huang Jiande

THE SIXTH BATCH OF BOOKS FOR GRADUATE STUDENTS

“研究生用书”书目(第六批)

书　　名	作　　者
损伤力学 Damage Mechanics	沈为 Shen Wei
非线性结构有限元计算 The Finite Element Calculation For Non-Linear Structure	宋天霞 Song Tianxia
非线性分析——理论与方法 Non-Linear Analysis —— Theory and Methods	胡适耕 Hu Shigeng
模糊专家系统 Fuzzy Expert System	李凡 Li Fan
现代数字信号处理 Modern Digital Signal Processing	姚天任 Yao Tianren 孙洪 Sun Hong