

奇异位形条件下并联机器人的冗余驱动控制

沈 辉 吴学忠 李泽湘

(国防科技大学机电工程与自动化学院 长沙 410073)

摘要：研究了并联机器人冗余驱动控制方法。首先将系统动力学方程投影到位形空间，并采用计算力矩方法设计期望的控制输入；然后构造位形空间与驱动力空间之间的映射以求解冗余输入优化问题。理论与仿真结果表明，采用冗余驱动的控制方法能够消除并联机器人中的奇异性影响，有效提高系统的动态性能。

关键词：并联机器人 驱动器冗余 奇异位形 微分几何

0 前言

为了使机构获得更好的性能，经常在机器人设计与控制过程中采用冗余方式。其中最常见的两种冗余方式为机构冗余和驱动冗余。机构冗余通过设计多余的运动自由度，使机构满足一些如避障、解决关节受限等特殊性能^[1,2]。驱动冗余则提供比机构自由度更多的控制输入，以达到提高机构性能的目的。目前已有不少文献研究了机构冗余问题^[1-2]，而对于驱动冗余控制问题的研究相对较少，已有的研究包括实现驱动力矩的最小化^[3]和满足驱动力矩的线性约束^[4]，而对于如何消除并联机构中的奇异性影响，从而获得更好的控制性能则很少涉及。

由于闭链结构的存，并联机器人具有较串联机构更为复杂的奇异性^[5,6]，这些奇异性对机构的刚度、控制精度等都带来很大的影响。研究表明^[5]，并联机器人的奇异性分为位形奇异和参数化奇异，后者又包括驱动奇异性与末端执行器奇异性。其中位形奇异本质上是由机构本身决定的，常位于位形空间的边界。而参数化奇异性是由于采用不同驱动坐标和末端执行器坐标参数化位形空间产生的，因此可以在机构控制当中加以避免。

为了提高奇异位形条件下并联机器人的控制性能，将冗余驱动方式引入并联机器人的控制系统中，提出一种冗余驱动控制的设计方法。该方法首先将系统动力学方程分别投影到位形空间和工作空间，并采用计算力矩方法设计期望的控制输入；然后通过位形空间、工作空间与驱动力空间之间的映射以求解冗余输入优化问题。最后对冗余驱动平面二自由度机械手进行了控制实验。结果表明，采用冗余驱动的控制方法能够消除并联机器人中的参数化奇异性影响，有效提高系统的动态性能。

1 动力学的几何投影

典型的并联机构由基座和末端执行器组成，两者通过 k 个串联支链相连。将末端执行器按照支链断开，由拉格朗日方程可以得到含 n 个串联机构的无约束系统动力学方程^[6]：

$$M_i(\mathbf{q}_i)\ddot{\mathbf{q}}_i + C_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\dot{\mathbf{q}}_i + N(\mathbf{q}_i) = \mathbf{t}_i^T \quad i=1, \dots, k \quad (1)$$

式中， M_i 、 C_i 分别是每个支链的惯性和哥氏系数矩阵，合并(1)式，得到

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + N(\mathbf{q}) = \mathbf{t}^T \quad (2)$$

式中， $M = \text{diag}(M_1, \dots, M_n)$ ， $C = \text{diag}(C_1, \dots, C_n)$ ， $N = (N_1^T, \dots, N_n^T)^T$ ， $\mathbf{t} = (\mathbf{t}_1^T, \dots, \mathbf{t}_n^T)^T$ 。

设 E 是上述无约束机械系统的位形空间， $\mathbf{q} \in R^n$ 为它的广义坐标。 E 在 \mathbf{q} 处的切空间 $T_{\mathbf{q}}E$ 和余切空间 $T_{\mathbf{q}}^*E$ 分别表示系统的广义速度空间和广义力空间。对于 $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{q}}E$ 和 $\mathbf{t} \in T_{\mathbf{q}}^*E$ ， $\langle \mathbf{t}, \mathbf{v} \rangle$ 表示广义力 \mathbf{t} 对广义速度 \mathbf{v} 所作的虚功。

* 国家自然科学基金资助项目(50029501)

一个具有 m 自由度的并联机器人的机构约束通常可表示为下面的代数方程形式:

$$H: E \rightarrow R^{n-m}, \quad H(\hat{e}) = (h_1(\hat{e}), \dots, h_{n-m}(\hat{e}))^T = 0 \quad (3)$$

在非奇异条件下, 约束系统的位形空间 $Q = H^{-1}(0)$ 是 E 的 m 维子流形, Q 在 q 点处的切空间 $T_q Q$ 定义了约束系统在该点的自由速度, 称为自由速度空间。相应的约束机械系统的动力学方程表示为

$$M\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + N = t + A^T l \quad (4)$$

拉格朗日乘子 l 代表约束力的大小, 其方向由 $A = \frac{\partial H}{\partial q^T}$ 决定。

通常采用驱动关节坐标 $q_{in} \in R^m$ 参数化位形空间 Q , 表示为 $q = R(q_{in})$, 其中 q_{in} 可能随着位形空间的具体坐标发生改变以避免参数化奇异性^[5]。由 $\dot{q} = \partial R / \partial q_{in} \cdot \dot{q}_{in} = B\dot{q}_{in}$ 可分别得到 E 和 Q 之间的推前和拉回映射 $B: T_q Q \rightarrow T_q E$, $B^T: T_q^* E \rightarrow T_q^* Q$ 。由 $A^T \dot{q} = A^T B \dot{q}_{in} = 0, \forall q_{in} \in R^m$, 可知

$$A^T B = 0, \quad B^T A = 0 \quad (5)$$

因此, 可以构造投影映射 $P = [B, 0_{n \times (n-m)}]^T$ 将广义坐标空间的动力学方程(4)投影到位形空间

$$\bar{M}\ddot{q}_{in} + \bar{C}(q_{in}, \dot{q}_{in})\dot{q}_{in} + \bar{N} = \bar{t} \quad (6)$$

其中, $\bar{M} = PM(R(q_{in}))B$, $\bar{C} = P(M(R(q_{in}))\dot{B}\dot{q}_{in} + C(R(q_{in}), B\dot{q}_{in}))$, $\bar{N} = PN(R(q_{in}))$, $\bar{t} = Pt \in R^6$ 。

比较(6)与(4)式, 通过投影映射 P , 消除了动力学方程中的约束力项, 这样可以采用各种串联机器人的控制器设计方法设计并联机器人的位姿控制器。

实际工程中常需要在机器人的工作空间中设计控制器, 这可以通过将动力学方程从位形空间 Q 映射到工作空间 W 加以实现。令并联机器人的运动学逆映射为 $f^{-1}: W \rightarrow Q \mapsto x = f^{-1}(q_{in})$, 其中 x 为机器人末端执行器工作空间 W 的局部参数化坐标。通过并联机器人的雅柯比矩阵 $J = \partial f^{-1} / \partial q_{in}$, 可以分别得到运动学逆映射 f^{-1} 的推前与拉回 $J: T_x W \rightarrow T_{q_{in}} Q$, $J^T: T_{q_{in}}^* Q \rightarrow T_x^* W$ 。构造映射 $\hat{J} = [BJ, 0_{n \times (n-m)}]$, 得到在工作空间中描述的动力学方程

$$\tilde{M}\ddot{x} + \tilde{C}(x, \dot{x})\dot{x} + \tilde{N} = \tilde{t} \quad (7)$$

其中, $\tilde{M} = \hat{J}^T \bar{M} J^{-1}$, $\tilde{C} = \hat{J}^T \bar{C} + \hat{J}^T \bar{M} J^{-1}$, $\tilde{N} = \hat{J}^T \bar{N}$, $\tilde{t} = \hat{J}^T \bar{t} = \hat{J}^T P t$ 。

2 冗余驱动控制

定义机器人的驱动关节空间 $Q_a \subset E$: $Q_a = \{q = [q_a, q_p] \in E | q_p = 0\}$ 。其中, q_a 和 q_p 分别是驱动关节和被动关节。显然 Q_a 是 E 的子空间, 并且 $m < \dim(Q_a) < n$ 。构造 $T_q E$ 到 $T_q Q_a$ 的投影映射 $p: T_q E \rightarrow T_q Q_a$, 相应的拉回映射 $p^T: T_q^* Q_a \rightarrow T_q^* E$ 。图 1 显示了并联机器人当中不同的力空间及其相应映射关系。其中, $f_Q^* = P \circ p^T$ 和 $f_W^* = P \circ p^T \circ J^T$ 分别是驱动力空间向位形空间和工作空间的余切空间的投影, 即

$$\bar{t} = f_Q^* \bar{t} \quad (8)$$

$$\tilde{t} = f_W^* \bar{t} \quad (9)$$

式中, \bar{t} 是所有驱动关节力(力矩)组成的矢量。冗余驱动条件下, \bar{t} 的维数大于 \bar{t} 和 \tilde{t} , 因此已知 \bar{t} 和 \tilde{t} 不能唯一地确定当前的驱动关节力(力矩), 实际需要根据某些附加条件对驱动力(力矩)进行优化。

并联机器人的参数化奇异性是由于当前驱动关节坐标或末端执行器坐标不能参数化当前位形而产生的。对于其中的驱动奇异性, 机构获得额外的瞬时自由度, 此时即使固定所有驱动关节, 机构仍然具有瞬时的运动趋势。而对于末端执行器奇异, 机构具有不影响末端执行器运动的瞬时内部运动。下面从式(8)、(9)分析奇异性对机构运动的影响。

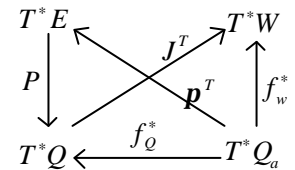


图 1 不同力空间的映射关系

以驱动奇异性为例，假设机构自由度为 2，其中 q_1 和 q_3 为驱动关节， q_5 为冗余驱动关节。在正常驱动情况下，相应的(8)式可以写成

$$t_1 f_{Q1}^* + t_3 f_{Q3}^* = \bar{t} \in T^*Q \quad (10)$$

式中， f_{Qi}^* 为 f_Q^* 的第 i 列矢量。此时， f_{Q1}^* 和 f_{Q3}^* 可看作 T^*Q 的一组基，即

$$T^*Q = \text{span}(f_{Q1}^*, f_{Q3}^*) \quad (11)$$

当 f_{Q1}^* 和 f_{Q3}^* 线性相关，当前的驱动关节 q_1, q_3 不能参数化当前的位形，换句话说，由当前的驱动力 t_1, t_3 不能确定控制机构所需要的力 $\bar{t} \in T^*Q$ ，机构此时处于驱动奇异状态。

对于冗余驱动情况

$$t_1 f_{Q1}^* + t_3 f_{Q3}^* + t_5 f_{Q5}^* = \bar{t} \in T^*Q \quad (12)$$

$$T^*Q = \text{span}(f_{Q1}^*, f_{Q3}^*, f_{Q5}^*) \quad (13)$$

比较式(11)、(13)，由于冗余驱动力 t_5 的引入，只要 f_{Q1}^* 、 f_{Q3}^* 和 f_{Q5}^* 任意两个矢量不相关，即可使机构不出现驱动奇异性。

当并联机器人的雅柯比矩阵 J 奇异，机构即处于末端执行器状态，仿照上面的分析可知，由于引入了冗余驱动方式，大大减小了出现末端执行器奇异的条件。

3 冗余控制力矩的优化

对于方程(8)和(9)描述的冗余控制优化问题，存在两种求解方法。最常见的方法是采用 Moore-Penrose 伪逆

$$\bar{t} = (f_Q^*)^\# \bar{t} \quad \text{或} \quad \bar{t} = (f_W^*)^\# \bar{t} \quad (14)$$

它实现了最小范数条件下的最小关节力矩控制 $\min_t \|\bar{t}\|$ 。机构处于奇异状态附近时，由于机构雅柯比矩阵的条件数变得很大，导致计算的某个方向的力矩很大，而通过冗余驱动力矩的均衡分配，提高了系统的性能。如果考虑不同驱动器的驱动功率等因素，则可以引入加权矩阵 W ，它反映了不同驱动器在提供控制力矩方面所作的贡献大小。由 $\min_t \|\bar{t}\|_W = \min_t \sqrt{\bar{t}^T W \bar{t}}$ ，得到

$$\bar{t} = W^{-1} f_Q^* (f_Q^{*T} W^{-1} f_Q^*)^{-1} \bar{t} \quad \bar{t} = W^{-1} f_W^* (f_W^{*T} W^{-1} f_W^*)^{-1} \bar{t} \quad (15)$$

另外一种方法则通过构造附加的 $r-m$ 维线性约束方程，使问题转化为一般的矩阵求逆过程。以方程(8)为例，对驱动力矩附加线性约束条件

$$C = B\bar{t} \quad (16)$$

从而得到

$$\bar{t} = \begin{bmatrix} f_Q^* \\ B \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{t} \\ C \end{bmatrix} \quad (17)$$

线性约束条件(16)则可依据驱动器的最大力矩^[3]等条件进行选择。

综上所述，并联机器人的冗余驱动控制方法分为两步，第一步分别根据式(6)或(8)设计位形空间或工作空间的期望控制输入。第二步则根据将计算得到的控制输入优化分配到各个驱动关节。

4 平面 2 自由度并联机械手的冗余驱动控制试验

为了验证上述结果，下面对一种冗余驱动的平面二自由度并联机械手(如图 2 所示)进行了控制试验。其中， q_1, q_2 为驱动关节， q_3 为冗余驱动关节， $q = [q_1, f_1, q_2, f_2, q_3, f_3]^T$ ， $q_{in} = [q_1, q_2]^T$ ， $q_a = [q_1, q_2, q_3]^T$ ， $q_p = [f_1, f_2, f_3]^T$ ， $x = [X_C, Y_C]^T$ ， $m=2, n=6, r=3$ 。

依据(6)式，建立系统的动力学方程。采用计算力矩控制方法设计下面的控制律

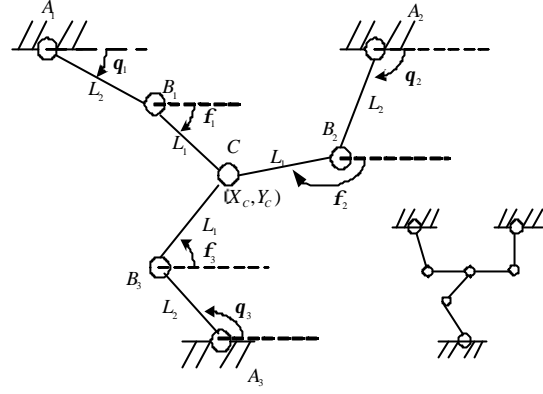


图 2 冗余驱动的平面二自由度并联机械手(右下角为一种末端执行器奇异位形)

$$\bar{\mathbf{f}} = \bar{\mathbf{M}}(\ddot{\mathbf{q}}_{in}^d - K_v \dot{e}_{in} - K_p e_{in}) + \bar{\mathbf{C}}(\dot{\mathbf{q}}_{in}, \mathbf{q}_{in})\dot{\mathbf{q}}_{in} + \bar{\mathbf{N}} \quad (18)$$

其中, $e_{in} = \mathbf{q}_{in} - \mathbf{q}_{in}^d$ 为位置跟踪误差, $K_v \in R^{2 \times 2}$ 和 $K_p \in R^{2 \times 2}$ 分别为速度和位置的反馈增益对角矩阵。将式(18)代入(6), 得到跟踪误差的动态方程

$$\ddot{e}_{in} + K_v \dot{e}_{in} + K_p e_{in} = 0 \quad (19)$$

适当选择 K_v, K_p 将保证系统的渐进稳定性。取权矩阵 $W = I_{3 \times 3}$, 采用 Moore-Penrose 伪逆方法(14)实现最小驱动力矩控制。

取期望跟踪曲线 $x_d = [0.05 \cos(2t), 0.25 + 0.05 \sin(2t)]^T$, 跟踪曲线与控制力矩结果分别如图 4、5 所示。结果表明: (1)在控制的起始阶段, 由于驱动力矩的均衡分配, 冗余驱动系统具有比正常驱动系统更好的响应特性。(2)在末端执行器奇异(ES)位形附近(对应于 $f_1 = 0, f_2 = p$, 如图 2 右下角), 正常驱动系统出现较大的跟踪误差, 采用冗余驱动方式则明显提高了系统在奇异位形附近的跟踪误差。(3)系统实现了最小驱动力矩优化, 采用冗余驱动方式的控制系统具有更小的驱动力矩, 力矩变化也相对平稳。

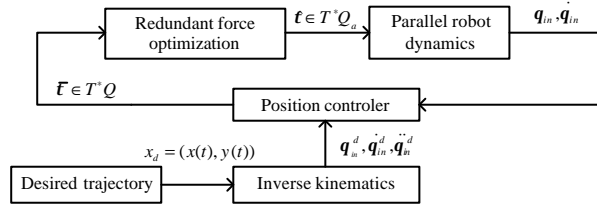


图 3 控制系统框图

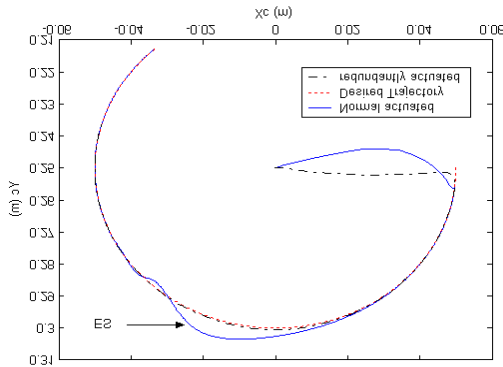


图 4 轨迹跟踪曲线

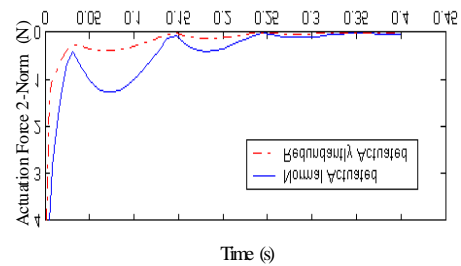


图 5 控制力矩的 2 范数

5 结论

相对机构冗余, 驱动冗余控制方法在不需要改变机构的机械结构前提下达到提高机构整体性能

的目的,具有良好的应用前景。本文通过并联机器人动力学的几何投影,建立了并联机器人冗余控制和冗余力矩优化的一般化方法,结果表明:

- (1) 并联机器人当中的奇异性多且复杂,它们对控制系统性能产生很大影响。
- (2) 采用微分几何方法将动力学方程分别投影到位形空间和工作空间,消除了方程中的约束力项,使得串联机器人的各种成熟控制方法能够运用到并联机器人的轨迹跟踪控制中。
- (3) 采用冗余驱动控制方法能够有效去除并联机器人当中的参数化奇异性,极大的改善系统的性能。
- (4) 将控制输入设计与冗余输入力矩优化问题分开考虑,简化了控制设计过程,控制系统易于实现。

参 考 文 献

- 1 A. A. Maciejewski & C. A. Klein. Obstacle Avoidance for Kinematically Redundant Manipulators in Dynamically Varying Environments. *Int. J. Robotics Research*. 4(3): 109-117
- 2 H. Seraji & R. Colbaugh. Improved Configuration Control of Redundant Robots. *J. Robotic System*. 7(6): 897-928
- 3 Y. Nakamura & M. Ghodoussi. Dynamics Computation of Closed-Link Robot Mechanisms with Nonredundant and Redundant Actuators. *IEEE Trans. Robotics and Automation*. 5(3): 294-302
- 4 J. F. Gardner, V. Kumar, & J. H. Ho. Kinematics and Control of Redundantly Actuated Closed Chains. *Proc. IEEE Intern. Conf. on Robotics and Automation*. Scottsdale, AZ, May 1989, 418-424
- 5 G.F. Liu, Y.L. Wu, X.Z. Wu, and Z.X. Li. Analysis and control of redundant parallel manipulators. *IEEE Intern. Conf. on Robotics and Automation*, Korea, 2001: 3748-3754
- 6 Richard M. Zexiang Li, S. Shankar Sastry. *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. CRC Press, Inc. 2000

作者简介: 沈辉, 男, 1975 年出生, 国防科技大学机电工程与自动化学院博士生, 主要从事机器人控制, 并联机构理论等方面的研究。

联系人: 吴学忠, 国防科技大学机电工程与自动化学院机电工程研究所(410073),

电 话: 0731-4573398

网 址: xzwu@nudt.edu.cn