Staubli 机器人运动学与变换矩阵

Written By 张华君

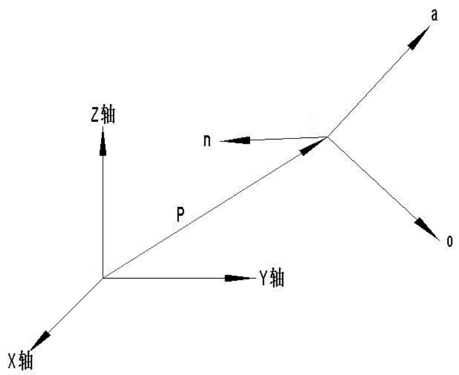
坐标系的表示方法

无论用户坐标系，还是工具坐标系都可以用一个矩阵表示：

$$\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_x \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

n、o、a、p是三维的列向量，其中n、o、a是相互正交的单位向量，表示了该坐标系相对于参考坐标系的姿态，p向量表示了该坐标系原点相对于参考坐标系的位置。

注：n向量表示了该坐标系的X轴方向，o向量表示了该坐标系的Y轴方向，a向量表示了该坐标系的Z轴方向



Staubli机器人DH参数获取

getDefaultDH(theta,d,a,alpha,beta) 指令用于获取Staubli机器人的DH参数

注：theta,d,a,alpha,beta 是需要自己建立的数组，每个数组包含7个元素

a：代表X方向的偏移

d：代表Z方向的偏移

alpha（α）: 代表X方向的旋转

beta（β）: 代表Y方向的旋转（始终为0）

theta（θ）: 代表Z方向的旋转

注：一般DH参数只有a，d，α，θ就可以描述轴的坐标系变换，因为机器人轴的安装方式不是垂直就是平行。

但描述一般的坐标系变换还需要Y方向的偏移b和Y方向的旋转β。

Staubli机器人运动学正解

史陶比尔机器人转换矩阵表达如下：${}^{i-1}_{i}T = D_X(a_i)D_Y(b_i)D_Z(d_i)R_X(\alpha_i)R_Y(\beta_i)R_Z(\theta_i)$

注：Staubli坐标系变换是参照X-Y-Z欧拉角，ABB坐标系变换是参照Z-Y-X欧拉角

$$D_X(\alpha_i)=\begin{bmatrix}1&0&0&a_i\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

代表沿X轴平移的变换矩阵

$$R_X(\alpha_i)==\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&\cos\alpha_i&-\sin\alpha_i&0\\0&\sin\alpha_i&\cos\alpha_i&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

代表沿X轴旋转的变换矩阵

$$D_Y(b_i)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&b_i\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

代表沿Y轴平移的变换矩阵

$$R_Y(\beta_i)==\begin{bmatrix}\cos\beta_i&0&\sin\beta_i&0\\0&1&0&0\\-\sin\beta_i&0&\cos\beta&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

代表沿Y轴旋转的变换矩阵

$$D_Z(d_i)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&d_i\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

代表沿Z轴平移的变换矩阵

$$R_Z(\theta_i)==\begin{bmatrix}\cos\theta_i&-\sin\theta_i&0&0\\\sin\theta_i&\cos\theta_i&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

代表沿Z轴旋转的变换矩阵

Staubli RX160L机器人手臂的DH参数表

机器人型号	i	X(mm) a	Y(mm) b	Z(mm) d	RX(度)α	RY(度)β	RZ(度)θ
RX160L	1	0	0	0	0	0	θ1
	2	150	0	0	-90	0	θ2-90°
	3	825	0	0	0	0	θ3+90°
	4	0	0	0	90	0	θ4
	5	0	0	925	-90	0	θ5
	6	0	0	0	90	0	θ6
	7	0	0	110	0	0	0

因为b_i和β_i都为0，所以$D_Y(b_i)=R_Y(\beta_i)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$，都为单位阵，相乘的时候可以省略。

史陶比尔机器人DH变换矩阵表达式：${}^{i-1}_{i}T = D_X(\alpha_i)D_Z(d_i)R_X(a_i)R_Z(\theta_i)$

注：轴i与轴i-1的坐标系变换只有X方向的移动和旋转和Z方向的移动和旋转

$$ {}^{i-1}_{i}T=\begin{pmatrix}1&0&0&a_i\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&d_i\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&c_{\alpha i}&-s_{\alpha i}&0\\0&s_{\alpha i}&c_{\alpha i}&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_{\theta i}&-s_{\theta i}&0&0\\s_{\theta i}&c_{\theta i}&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

利用表1数据通过机器人运动学正解可以得到：${}^{R}_{E}T={}^{0}_{1}T\cdot{}^{1}_{2}T\cdot{}^{2}_{3}T\cdot{}^{3}_{4}T\cdot{}^{4}_{5}T\cdot{}^{5}_{6}T\cdot{}^{6}_{7}T$

所以我们可以理解为法兰坐标系${}^{R}_{E}T$的位姿，是通过7个变换矩阵T相乘得到，或者通过7*4=28个平移矩阵D或者旋转矩阵R相乘得到。

注：${}^{R}_{E}T$表示法兰坐标系的位姿，也就是法兰坐标系{E}到基坐标系{R}的变换矩阵。

注：${}^{0}_{1}T$代表轴1坐标系到基坐标系的变换矩阵；${}^{6}_{7}T$代表法兰坐标系到轴6坐标系的变换矩阵，可以理解为法兰长度。

DH参数的几种表示方法

若已知关节变量 jJoint={j1, j2, j3, j4, j5, j6}，就可以计算得到该姿态下的点变量pPoint。

（注：点变量pPoint，其实可以理解成当前工具坐标系的姿态，如果未定义工具参数就是法兰坐标系姿态。）

Val3 参考手册 第7版 P177页

```
pCart.trsf = {0,0,0,0,0, j1+theta[0]}
* {a[0], b[0], d[0], alpha[0], beta[0], j2+theta[1]}
* {a[1], b[1], d[1], alpha[1], beta[1], j3+theta[2]}
* {a[2], b[2], d[2], alpha[2], beta[2], j4+theta[3]}
* {a[3], b[3], d[3], alpha[3], beta[3], j5+theta[4]}
* {a[4], b[4], d[4], alpha[4], beta[4], j6+theta[5]}
* {a[5], b[5], d[5], alpha[5], beta[5], 0}
* {0, 0, d[6], 0, 0, 0}
```

这里有8个trsf相乘，普通机器人只有前面7个trsf相乘，只有特殊机器人是8个trsf相乘

trsf的参数相乘的顺序固定的：

$$[Trsf] = D_X(a)D_Y(b)D_Z(d)R_X(\alpha)R_Y(\beta)R_Z(\theta)$$

或 $$[Trsf] = D_X(a)D_Z(d)R_X(\alpha)R_Z(\theta)$$ （省略两个单位阵）

轴1坐标系与基座坐标系只有Z方向的旋转，所以${}^{0}_{1}T$是{0,0,0,0,0,θ1}

法兰坐标系与轴6坐标系只有Z方向的偏移，所以${}^{6}_{7}T$是{0,0,d[5],0,0,0}

第一种表示方法（7个Trsf）: 把getDefaultDH得到的参数整理成7组参数

机器人型号	i	X(mm) a	Z(mm) d	RX(度)α	RZ(度)θ
RX160L	1	0	0	0	θ1
	2	150	0	-90	θ2-90°
	3	825	0	0	θ3+90°
	4	0	0	90	θ4
	5	0	925	-90	θ5
	6	0	0	90	θ6
	7	0	110	0	0

$${}^{i-1}_{i}T = D_X(a_i)D_Z(d_i)R_X(\alpha_i)R_Z(\theta_i)$$

$${}^{R}_{E}T = {}^{0}_{1}T \cdot {}^{1}_{2}T \cdot {}^{2}_{3}T \cdot {}^{3}_{4}T \cdot {}^{4}_{5}T \cdot {}^{5}_{6}T \cdot {}^{6}_{7}T$$

第二种表示方法（6个Trsf）:（把getDefaultDH得到的参数整理成6组参数）

这里有28项变换矩阵相乘：

$${}^{R}_{E}T = D_X(a_1)D_Z(d_1)R_X(\alpha_1)R_Z(\theta_1) * D_X(a_2)D_Z(d_2)R_X(\alpha_2)R_Z(\theta_2) * ...... * D_X(a_7)D_Z(d_7)R_X(\alpha_7)R_Z(\theta_7)$$

其中头三项和尾一项分别是$D_X(a_1)$、$D_Z(d_1)$、$R_X(\alpha_1)$、$R_Z(\theta_7)$，参数都是0，所以是单位矩阵，可以省略，这样28个变换矩阵就变成了24个，重新分成6组，就是上面的表达式，计算得到的${}^{R}_{E}T$一致。

机器人型号	i	RZ(度)θ	X(mm) a	Z(mm) d	RX(度)α
RX160L	1	θ1	150	0	-90
	2	θ2-90°	825	0	0
	3	θ3+90°	0	0	90
	4	θ4	0	925	-90
	5	θ5	0	0	90
	6	θ6	0	110	0

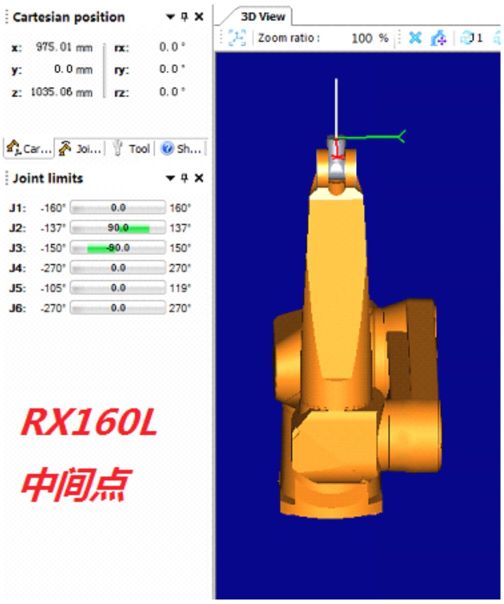
$${}^{i-1}_{i}T = R_Z(\theta_i)D_X(a_i)D_Z(d_i)R_X(\alpha_i)$$

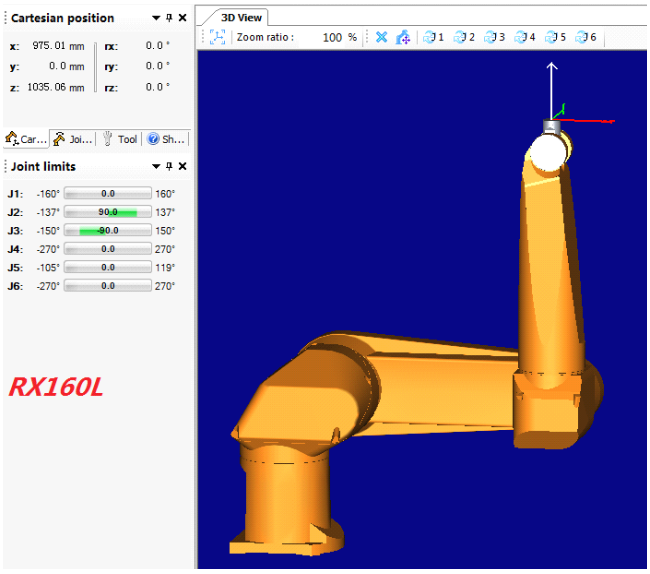
$${}^{R}_{E}T = {}^{0}_{1}T \cdot {}^{1}_{2}T \cdot {}^{2}_{3}T \cdot {}^{3}_{4}T \cdot {}^{4}_{5}T \cdot {}^{5}_{6}T$$

θ2-90° ，θ3+90°的意义：

RZ(度)θ
θ1
θ2-90°
θ3+90°
θ4
θ5
θ6

按照DH参数得到的机器人姿态如下图：





为了使机器人手臂零位呈竖直向上状态，所以j2减90°，j3加90°。不然零位如上图所示。

矩阵转化为X-Y-Z欧拉角参数和Z-Y-X欧拉角参数

坐标系位姿可以用矩阵表示，也可以用X、Y、Z、RX、RY、RZ这6个参数表示。但由于变换的顺序不同，会导致参数不同，但最后相乘得到的矩阵是相同的。

首先规定：绕X轴移动为a，旋转为α；即绕Y轴移动为b，旋转为β；即绕Z轴移动为d，旋转为θ；

X(mm)	Y(mm)	Z(mm)	RX(度)	RY(度)	RZ(度)
a	b	d	α	β	θ

1.Staubli机器人坐标系变换是按照X-Y-Z欧拉角： 这里用 ${}^{A}_{B}T$ 表示坐标系{B}到参考坐标系{A}的变换。首先将坐标系{B}和一个已知参考坐标系{A}重合，接着{B}分别沿着 $\hat{X}_B$ 移动 a 单位长度，沿着 $\hat{Y}_B$ 移动 b 单位长度，沿着 $\hat{Z}_B$ 移动 d 单位长度，然后将{B}绕 $\hat{X}_B$ 旋转 α 角，再绕 $\hat{Y}_B$ 旋转 β 角，最后绕 $\hat{Z}_B$ 旋转 θ 角。得到：

$${}^{A}_{B}T = D_X(a)D_Y(b)D_Z(d)R_X(\alpha)R_Y(\beta)R_Z(\theta)$$ （注：$D_X(a)D_Y(b)D_Z(d)$ 的顺序可以改变）

$${}^{A}_{B}T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_\alpha & -s_\alpha & 0 \\ 0 & s_\alpha & c_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\beta & 0 & s_\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_\beta & 0 & c_\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\theta & -s_\theta & 0 & 0 \\ s_\theta & c_\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$
{}^A_BT = \begin{bmatrix} c_\beta c_\theta & -c_\beta s_\theta & s_\beta & a \\ s_\alpha s_\beta c_\theta + c_\alpha s_\theta & -s_\alpha s_\beta c_\theta + c_\alpha s_\theta & -s_\alpha s_\beta & b \\ -c_\alpha s_\beta c_\theta + s_\alpha s_\theta & c_\alpha s_\beta s_\theta + s_\alpha s_\theta & c_\alpha c_\beta & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

1.1如果已知Trsf参数

X(mm)	Y(mm)	Z(mm)	RX(度)	RY(度)	RZ(度)
a	b	d	α	β	θ

可以得到旋转矩阵 $T = \begin{bmatrix} c_\beta c_\theta & -c_\beta s_\theta & s_\beta & a \\ s_\alpha s_\beta c_\theta + c_\alpha s_\theta & -s_\alpha s_\beta c_\theta + c_\alpha s_\theta & -s_\alpha s_\beta & b \\ -c_\alpha s_\beta c_\theta + s_\alpha s_\theta & c_\alpha s_\beta s_\theta + s_\alpha s_\theta & c_\alpha c_\beta & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

（注：这个旋转矩阵只对应X-Y-Z欧拉角变换矩阵）

1.2如果已知旋转矩阵： $T = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} \end{pmatrix}$

可以得到Trsf参数

$a = r_{14}$ ；

$b = r_{24}$ ；

$d = r_{34}$

$\beta = a\tan 2(r_{13}, \pm\sqrt{r_{11}{}^2 + r_{12}{}^2})$ ；

$\theta = a\tan 2(-r_{12}/c_\beta, r_{11}/c_\beta)$ ；

$\alpha = a\tan 2(-r_{23}/c_\beta, r_{33}/c_\beta)$

（注：β 会有两解，最终会得到两组解）

（注：因为计算坐标系变换的时候，都是6个参数转化为矩阵计算的，所以使用哪组解都可以）

2.ABB机器人坐标系变换是按照Z-Y-X欧拉角：这里用 ${}^A_BT'$ 表示坐标系{B}到参考坐标系{A}的变换。首先将坐标系{B}和一个已知参考坐标系{A}重合，接着{B}分别沿着 $\hat{X}_B$ 移动 a 单位长度，沿着 $\hat{Y}_B$ 移动 b 单位长度，沿着 $\hat{Z}_B$ 移动 d 单位长度，然后将{B}绕 $\hat{Z}_B$ 旋转 θ 角，再绕 $\hat{Y}_B$ 旋转 β 角，最后绕 $\hat{X}_B$ 旋转 α 角。得到：

$${}^A_BT' = D_X(a)D_Y(b)D_Z(d)R_Z(\theta)R_Y(\beta)R_X(\alpha)$$ （注：$D_X(a)D_Y(b)D_Z(d)$ 的顺序可以改变）

$$
{}^A_BT' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\theta & -s_\theta & 0 & 0 \\ s_\theta & c_\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\beta & 0 & s_\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_\beta & 0 & c_\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_\alpha & -s_\alpha & 0 \\ 0 & s_\alpha & c_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^A_BT' = \begin{bmatrix} c_\theta c_\beta & c_\theta s_\beta s_\alpha - s_\theta c_\alpha & c_\theta s_\beta c_\alpha + s_\theta s_\alpha & a \\ s_\alpha \theta c_\beta + c_\theta s_\theta & s_\theta s_\beta s_\alpha + c_\theta c_\alpha & s_\theta s_\beta c_\alpha - c_\theta s_\alpha & b \\ -s_\beta & c_\beta s_\alpha & c_\beta c_\alpha & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

2.1如果已知Trsf参数

X(mm)	Y(mm)	Z(mm)	RZ(度)	RY(度)	RX(度)
a	b	d	θ	β	α

可以得到旋转矩阵: $T'=\begin{bmatrix} c_\theta c_\beta & c_\theta s_\beta s_\alpha - s_\theta c_\alpha & c_\theta s_\beta c_\alpha + s_\theta s_\alpha & a \\ s_\alpha \theta c_\beta + c_\theta s_\theta & s_\theta s_\beta s_\alpha + c_\theta c_\alpha & s_\theta s_\beta c_\alpha - c_\theta s_\alpha & b \\ -s_\beta & c_\beta s_\alpha & c_\beta c_\alpha & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

（注：这个旋转矩阵只对应Z-Y-X欧拉角变换矩阵）

2.2如果已知旋转矩阵： $T=\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} \end{pmatrix}$

可以得到Trsf参数:

$a=r_{14}$ ；

$b=r_{24}$ ；

$d=r_{34}$ ；

$\beta = a\tan 2(-r_{31}, \pm\sqrt{r_{11}{}^2 + r_{21}{}^2})$ ；

$\theta = a\tan 2(r_{21}/c_\beta, r_{11}/c_\beta)$ ；

$\alpha = a\tan 2(r_{32}/c_\beta, r_{33}/c_\beta)$

（注： β 会有两解，最终会得到两组解）

3.验证计算(TX90)

移动到一个关节变量：jJoint={30,40,50,60,70,80}

记录此时点变量：pPoint.trsf={611.8769,504.9716,278.5843,61.7869,-173.6443,65.431}

利用Matlab计算得到的解分别是;

(Staubli) x1=611.8769,y1=504.9716,z1=278.5843,rx161.7869,ry1=-173.6443,rz1=65.431

x2=611.8769,y2=504.9716,z2=278.5843,rx2=-118.2131,ry2=-6.3557,rz2-114.569

$[pPoint.trsf]=D_X(a)D_Y(b)D_Z(d)R_X(\alpha)R_Y(\beta)R_Z(\theta)$

$$[pPoint.trsf]=\begin{bmatrix} -0.4132 & 0.9039 & -0.1107 & 611.8769 \\ 0.3894 & 0.2853 & 0.8758 & 504.9716 \\ 0.8232 & 0.3188 & -0.4698 & 278.5843 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(ABB) x1=611.8769,y1=504.9716,z1=278.5843,rx1=145.8427,ry1=-55.4037,rz1=136.7016

x2=611.8769,y2=504.9716,z2=278.5843,rx2=-34.1573,ry2=-124.5963,rz2-43.2984}

$[pPoint.trsf]=D_X(a)D_Y(b)D_Z(d)R_Z(\theta)R_Y(\beta)R_X(\alpha)$

$$[pPoint.trsf]=\begin{bmatrix} -0.4132 & 0.9039 & -0.1107 & 611.8769 \\ 0.3894 & 0.2853 & 0.8758 & 504.9716 \\ 0.8232 & 0.3188 & -0.4698 & 278.5843 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

结论：旋转矩阵 $[pPoint.trsf]$ 一致。

示教用户坐标系的算法（SetFrame）

fFrame 表示用户坐标系，可以通过示教空间中不在同一直线的三个点得到，p(x,y,z)代表原点、pX(x,y,z)代表 X 方向上一点、pY(x,y,z)代表平面上一点。

$\vec{OX} = (pX - p)$　　得到 X 方向向量 OX

$\vec{OY} = (pY - p)$　　得到平面上向量 OY

$\vec{OZ} = \vec{OX} \times \vec{OY}$　　得到 Z 方向向量 OZ　(注：叉乘得到 OZ 向量)

$\vec{n} = \vec{OX} / \left|\vec{OX}\right|$　　单位化 X 方向向量

$\vec{a} = \vec{OZ} / \left|\vec{OZ}\right|$　　单位化 Z 方向向量

$\vec{o} = \vec{n} \times \vec{a} / \left|\vec{n} \times \vec{a}\right| /$　　单位化 Y 方向向量　（注：叉乘得到 o 向量并单位化）

fFrame 等于：

$$\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_x \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$