

大连理工大学学术研究丛书

# 线性鲁棒控制的理论与计算

## Theory and Computation of Linear Robust Control

吴志刚◎著



大连理工大学出版社  
Dalian University of Technology Press

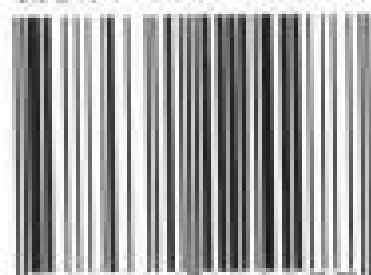
大连理工大学学术研究丛书

# Theory and Computation of Linear Robust Control

责任编辑 / 刘新伟

SJA 封面设计  
DJA 孙宝福

ISBN 7-5611-2427-9



9 787561 124277 >

ISBN 7-5611-2427-9 定价: 25.00 元

大连理工大学学术研究丛书

# 线性鲁棒控制的理论与计算

吴志刚 著

大连理工大学出版社

© 吴志刚 2003

## 图书在版编目(CIP)数据

线性鲁棒控制的理论与计算 / 吴志刚著. —大连: 大连理工大学出版社, 2003.10

大连理工大学学术研究丛书

ISBN 7-5611-2427-9

I. 线… II. 吴… III. 鲁棒控制 IV. TP273

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 086240 号

大连理工大学出版社出版

地址:大连市凌水河 邮政编码:116024

电话:0411-4708842 传真:0411-4701466 邮购:0411-4707961

E-mail: dulp@mail.dlpu.ln.cn URL: <http://www.dulp.cn>

大连海事大学印刷厂印刷

大连理工大学出版社发行

---

幅面尺寸:140mm×203mm 字数:240千字 印张:9.375 插页:4

印数:1~3 000

2003年10月第1版

2003年10月第1次印刷

---

责任编辑:刘新锋

责任校对:王纪 毕向阳

封面设计:孙宝福

---

定 价:25.00元

---

# 序

在鲁棒控制方法中, $H_\infty$  控制理论是比较成功的体系。 $H_\infty$  设计方法已经用于解决航空、航天、机械、化工等诸多领域的控制问题,应用领域的需求使得数值方法的重要性日益增加。这与“科学计算已经同理论与实验共同构成当代科学研究三大支柱”的趋势是一致的。

近年来,随着系统控制理论的发展,求解控制问题的算法也日趋成熟,并出现了许多可用于解决工程实际控制系统设计的软件包。但是,由于系统复杂程度和规模的增加,控制系统设计的算法也面临着许多新的挑战。不仅仅是  $H_\infty$  控制问题,即使是极点配置、LQ 控制这样相对经典的问题,其数值求解算法也有重新审视和改进的必要,因此需要从新的角度理解和研究控制系统设计中的计算问题。结构力学与控制理论的相互模拟为此提供了一条新的途径。对偶变量体系的引入改变了以往弹性力学中大量运用半逆凑合法的传统而导向理性的求解方法;反之,基于对偶变量体系的结构力学方法也被用于求解  $H_\infty$  控制和滤波中的计算问题,而且对于连续和离散系统、有限和无限时间控制问题,其求解方法本质上是统一的,这本书的内容也反映了这一特点。现代控制理论奠基于对偶变量体系之上,而将应用力学的方法引入到控制理论,则可以使其其中的一些基本问题的求解得到重要推进。

当代科技发展的一个突出特点是不同学科之间的相互渗透,具备多方面良好性能指标的工程系统的设计必然需要不同领域科研人员的合作。智能化材料、智能化结构、智能化系统就充分体现

---

了这一发展方向,其中控制理论与技术所起的核心作用是不言而喻的。当然,工程系统的设计必然需要通过科学计算得到的结果。因此本书在介绍  $H_\infty$  控制的基本理论的同时,更强调数值求解算法,而这些算法则来源于结构力学。这对于理解不同学科之间的联系和自觉地综合运用各学科的知识进行系统的分析和设计是有益的。

控制理论还有分散控制、系统参数识别、自适应系统等方面的课题。对此,学科相互间的渗透融合、新的方法论将会有更大的意义。本书也是学科渗透和新方法论方面的产物。同时也表明在这方而控制理论的发展还留有很大的空间。



2003 年 8 月

---

## 前 言

作者 1998 年 9 月到大连理工大学博士后流动站工作,在钟万勰院士的指导下开始  $H_\infty$  控制理论及控制系统设计算法等方面的研究工作。本书就是以此期间的研究报告为基础加以充实和整理完成的。

系统的鲁棒性始终是反馈控制系统设计的核心问题之一。作为目前解决鲁棒控制问题比较完善的理论体系, $H_\infty$  控制理论的实际应用还需要辅之以方便可靠的数值求解方法,以 MATLAB 工具箱为代表的控制系统 CAD 软件中集成了诸多的算法,提供了相当强大的控制系统分析与设计功能。但是,目前仍然有一些基本的计算问题需要进一步研究,如复杂大系统控制问题,有限时间控制问题等,而对已有的方法也有重新认识的必要。作者认为,研究和解决同一个问题可以有不同的方法,而方法的不同则源于对问题本质不同角度和程度的理解与认识, $H_\infty$  控制系统设计中的计算问题也是如此。

结构力学与最优控制的模拟理论为理解与研究控制问题提供了一条新的途径,本书以这一理论多年来的研究成果为基础,力求发展形式统一的  $H_\infty$  系统设计算法。书中分别介绍了离散系统  $H_\infty$  控制和滤波问题、连续系统  $H_\infty$  控制和滤波问题的基本理论,并通过建立  $H_\infty$  控制与滤波系统的最优  $H_\infty$  范数、Hamilton 系统特征值、两类变量广义 Rayleigh 商三者之间的联系,阐述了  $H_\infty$  优化设计问题的新内涵。以此为基础,介绍了概念清晰、形式统一的求解  $H_\infty$  设计问题的数值方法。当然,限于作者的水平,在基于新的理

---

论研究解决问题的过程中难免会出现一些不恰当乃至不正确的方法和结论,在此诚恳地希望各位同行给予批评和指正。

作者希望在此表达对导师钟万勰院士真诚的感谢。作者到大连理工大学工作以来,钟万勰院士在学术研究中不断给予作者及时的指导和帮助,使作者能够尽快在新的领域起步。钟万勰院士审阅了本书的初稿,并提出了许多宝贵的修改意见。作者的研究工作还得到了钱令希院士、林家浩教授的关心和指导,在此表示诚挚的谢意。另外,本书第九章是钟万勰院士、高强同学和作者合作的最新研究成果,在此感谢他们同意将此作为本书的一部分。同时还要感谢作者的导师马兴瑞教授和王本利教授,他们培养了作者从事科学研究工作的基本素质,并始终对作者的工作给予关心和帮助。

作者的研究工作得到了中国空间技术研究院、中国博士后科学基金的资助,本书的出版得到了大连市学术专著出版基金、大连理工大学工程力学系以及大连理工大学学术著作出版基金的资助,在此表示诚挚的谢意。

作者同时感谢大连理工大学博士后流动站、大连理工大学工程力学系的各位老师、同学和朋友,作者能够顺利完成博士后期间的研究和本书的写作,与他们对作者及家人生活上的关心和工作上的帮助是分不开的。

吴志刚

2003年8月



---

# 目 录

序

前言

第一章 线性鲁棒控制基础	1
1.1 鲁棒控制的基本问题	2
1.1.1 系统不确定性描述	2
1.1.2 控制系统的鲁棒性	4
1.1.3 基于 $H_\infty$ 性能指标的控制系统设计	5
1.1.4 $H_\infty$ 系统设计中的计算问题	7
1.2 多变量线性系统	9
1.2.1 线性系统模型	10
1.2.2 系统的频率响应	14
1.2.3 系统的零点和极点	15
1.2.4 系统的稳定性、可控性、可观性	17
1.2.5 系统状态观测器	20
1.2.6 信号与系统的范数	24
1.2.7 Lyapunov 方程	26
1.2.8 Riccati 方程	28
1.3 LQG 控制	31
1.3.1 全信息控制	32
1.3.2 Kalman 滤波	33

1.3.3 LQG 控制 .....	34
1.4 变分法基本概念 .....	35
1.5 常微分方程和差分方程特征值问题 .....	40
参考文献 .....	43
<b>第二章 离散系统 <math>H_\infty</math> 全信息控制</b> .....	46
2.1 离散 $H_\infty$ 全信息控制 .....	46
2.2 Hamilton 差分系统特征值 .....	52
2.3 广义 Rayleigh 商 .....	55
2.4 最优 $H_\infty$ 范数计算 .....	59
2.4.1 Wittrick-Williams 特征值计数公式 .....	59
2.4.2 扩展 Wittrick-Williams 特征值计数公式 .....	59
2.4.3 算法描述 .....	62
2.5 算例 .....	64
参考文献 .....	75
<b>第三章 离散系统 <math>H_\infty</math> 滤波</b> .....	77
3.1 离散 $H_\infty$ 滤波 .....	77
3.2 最优 $H_\infty$ 范数与 Hamilton 差分系统特征值 .....	81
3.3 矩阵特征值及广义 Rayleigh 商 .....	84
3.4 最优 $H_\infty$ 范数的计算 .....	88
3.4.1 扩展 Wittrick-Williams 特征值计数公式 .....	88
3.4.2 算法描述 .....	91
3.5 算例 .....	92
参考文献 .....	101
<b>第四章 离散系统 <math>H_\infty</math> 输出反馈控制简介</b> .....	103
4.1 时变系统输出反馈控制 .....	103
4.2 定常系统输出反馈控制 .....	105
4.3 延时反馈控制 .....	107

4.4 即时反馈控制 .....	109
参考文献 .....	110
<b>第五章 连续系统 <math>H</math> 滤波</b> .....	<b>111</b>
5.1 连续系统 $H$ 滤波 .....	111
5.2 Hamilton 微分系统特征值 .....	113
5.2.1 Hamilton 微分方程的共轭点 .....	113
5.2.2 Rayleigh 原理 .....	115
5.3 Hamilton 微分方程特征值问题离散化 .....	117
5.3.1 Hamilton 及 Sturm-Liouville 型微分方程 离散化 .....	118
5.3.2 混合能矩阵合并公式及特征值计数公式 .....	120
5.3.3 混合能矩阵的微分方程 .....	123
5.3.4 混合能矩阵计算 .....	124
5.4 最优 $H$ 范数计算 .....	126
5.4.1 算法描述 .....	127
5.4.2 算例 .....	128
5.5 Riccati 微分方程解的有限逃逸现象 .....	140
5.5.1 有限逃逸条件 .....	141
5.5.2 算例 .....	143
参考文献 .....	146
<b>第六章 <math>H_\infty</math> 滤波微分方程求解</b> .....	<b>148</b>
6.1 定常线性系统 $H_\infty$ 滤波器 .....	148
6.2 混合能矩阵和向量的微分方程 .....	150
6.2.1 混合能矩阵及向量 .....	150
6.2.2 区段混合能矩阵计算 .....	153
6.3 Riccati 微分方程和滤波微分方程的精细积分 .....	156
6.3.1 Riccati 方程精细积分 .....	156

6.3.2 滤波微分方程精细积分 .....	157
6.4 算法与算例 .....	158
6.4.1 算法描述 .....	158
6.4.2 算例 .....	160
参考文献 .....	166
<b>第七章 连续系统 <math>H_\infty</math> 状态反馈控制</b> .....	168
7.1 $H_\infty$ 状态反馈控制 .....	169
7.2 对偶系统 .....	171
7.3 最优 $H_\infty$ 范数计算及闭环系统微分方程求解 .....	173
7.3.1 最优 $H_\infty$ 范数与广义 Rayleigh 商特征值 .....	173
7.3.2 区段混合能及区段合并 .....	175
7.3.3 最优 $H_\infty$ 范数计算及 Riccati 方程精细积分 .....	177
7.3.4 闭环系统微分方程精细积分 .....	180
7.4 算法与算例 .....	181
7.4.1 算法描述 .....	181
7.4.2 算例 .....	183
参考文献 .....	192
<b>第八章 连续系统 <math>H_\infty</math> 输出反馈控制</b> .....	194
8.1 $H_\infty$ 输出反馈控制 .....	195
8.1.1 输出反馈控制器存在条件 .....	195
8.1.2 两个特殊的输出反馈控制问题 .....	199
8.2 Riccati 微分方程解的力学意义 .....	200
8.3 算法与算例 .....	206
参考文献 .....	214
<b>第九章 分散 <math>H_\infty</math> 控制与滤波</b> .....	216
9.1 大系统分散 $H_\infty$ 控制 .....	216
9.2 $H_\infty$ 控制子系统的特征解 .....	220

9.3	特征解的正交归一性、完备性及展开定理·····	224
9.4	分散控制系统最优 $H_\infty$ 范数计算 ·····	228
9.5	分散控制系统算例 ·····	232
9.6	分散 $H_\infty$ 滤波 ·····	236
9.7	$H_\infty$ 滤波子系统特征解 ·····	241
9.8	分散滤波系统最优 $H_\infty$ 范数计算 ·····	244
9.9	分散滤波系统算例 ·····	247
	参考文献·····	251
附录	线性系统最优跟踪问题·····	254
A.1	LQ 最优跟踪 ·····	254
A.2	区段混合能 ·····	256
A.2.1	区段混合能的定义 ·····	256
A.2.2	区段合并公式 ·····	258
A.3	Riccati 方程与最优控制律的精细积分·····	259
A.3.1	$\eta$ 区段矩阵计算 ·····	259
A.3.2	Riccati 方程的精细积分 ·····	262
A.3.3	向量 $b(t)$ 的精细积分 ·····	263
A.4	最优跟踪系统响应的精细积分 ·····	265
A.5	LQ 最优跟踪算例 ·····	266
A.6	$H_\infty$ 跟踪问题 ·····	272
	参考文献·····	277

---

# Contents

## Foreword

## Preface

<b>Chapter 1</b>	<b>Essentials of Linear Robust Control</b>	<b>1</b>
1.1	Introduction to Robust Control	2
1.1.1	Uncertainties of Systems	2
1.1.2	Robustness of Control Systems	4
1.1.3	$H_\infty$ Control Systems Design	5
1.1.4	Computational Problems of $H_\infty$ Control	7
1.2	Multivariable Linear Systems	9
1.2.1	Models of Linear Systems	10
1.2.2	Frequency Response of Systems	14
1.2.3	Zeros and Poles of Systems	15
1.2.4	Stability, Controllability and Observability	17
1.2.5	State Observers	20
1.2.6	Norms of Signals and Systems	24
1.2.7	Lyapunov Equations	26
1.2.8	Riccati Equations	28
1.3	LQG Control	31
1.3.1	Full Information Control	32
1.3.2	Kalman Filtering	33
1.3.3	LQG Control	34
1.4	The Calculus of Variations	35

---

1.5	Eigenvalues of Ordinary Differential and Difference Equations .....	40
	References .....	43
<b>Chapter 2 <math>H_\infty</math> Full Information Control of Discrete-</b>		
	<b>Time Systems</b> .....	46
2.1	Discrete-Time $H_\infty$ Full Information Control .....	46
2.2	Eigenvalues of Hamilton Difference Systems .....	52
2.3	Generalized Rayleigh Quotient .....	55
2.4	Computation of The Optimal $H_\infty$ Norm .....	59
2.4.1	Wittrick-Williams Eigenvalues Count Formula .....	59
2.4.2	Extended Wittrick-Williams Eigenvalues Count Formula .....	59
2.4.3	Algorithm .....	62
2.5	Examples .....	64
	References .....	75
<b>Chapter 3 <math>H_\infty</math> Filtering of Discrete-Time Systems</b> .....		
3.1	$H_\infty$ Filtering of Discrete-Time Systems .....	77
3.2	The Optimal $H_\infty$ Norm and Eigenvalues of Hamilton Difference Systems .....	81
3.3	Generalized Matrix Eigenvalue and Generalized Rayleigh Quotient .....	84
3.4	Computation of Optimal $H_\infty$ Norm .....	88
3.4.1	Extended Wittrick-Williams Eigenvalues Count Formula .....	88
3.4.2	Algorithm .....	91
3.5	Examples .....	92

---

References .....	101
<b>Chapter 4 <math>H_\infty</math> Output Feedback Control of Discrete-</b>	
<b>Time Systems .....</b>	<b>103</b>
4.1 Output Feedback Control of Time	
Variant Systems .....	103
4.2 Output Feedback Control of Time	
Invariant Systems .....	105
4.3 Delayed Feedback Control .....	107
4.4 Instantaneous Feedback Control .....	109
References .....	110
<b>Chapter 5 <math>H_\infty</math> Filtering of Continuous-Time Systems .....</b>	<b>111</b>
5.1 $H_\infty$ Filtering of Continuous-Time Systems .....	111
5.2 Eigenvalues of Hamilton Differential Systems .....	113
5.2.1 Conjugate Points of Hamilton Differential	
Equations .....	113
5.2.2 Rayleigh's Principle .....	115
5.3 Discretization of Eigenvalue Problems of Hamilton	
Differential Equations .....	117
5.3.1 Discretization of Hamilton and Sturm-Liouville	
Differential Equations .....	118
5.3.2 Merging of Mixed Energy Matrices and	
Eigenvalues Count .....	120
5.3.3 Differential Equations of Mixed	
Energy Matrices .....	123
5.3.4 Computation of Mixed Energy Matrices .....	124
5.4 Computation of The Optimal $H_\infty$ Norm .....	126
5.4.1 Algorithm .....	127



---

5.4.2	Examples .....	128
5.5	Finite Escape Phenomena of Riccati Differential Equations .....	140
5.5.1	Conditions of Finite Escape .....	141
5.5.2	Examples .....	143
	References .....	146
<b>Chapter 6 Precise Integration of <math>H_\infty</math> Filtering</b>		
	<b>Equations .....</b>	<b>148</b>
6.1	$H_\infty$ Filters of Time Invariant Systems .....	148
6.2	Differential Equations of Mixed Energy Matrices and Vectors .....	150
6.2.1	Mixed Energy Matrices and Vectors .....	150
6.2.2	Precise Integration of Mixed Energy Matrices .....	153
6.3	Precise Integration of Riccati Differential Equations and Filtering Equations .....	156
6.3.1	Precise Integration of Riccati Equations .....	156
6.3.2	Precise Integration of Filtering Equations .....	157
6.4	Algorithm and Examples .....	158
6.4.1	Algorithm .....	158
6.4.2	Examples .....	160
	References .....	166
<b>Chapter 7 <math>H_\infty</math> State Feedback Control of Continuous-</b>		
	<b>Time Systems .....</b>	<b>168</b>
7.1	$H_\infty$ State Feedback Control .....	169
7.2	Adjoint Systems .....	171
7.3	Computation of The Optimal $H_\infty$ Norm and	

---

Integration of Systems State Equations .....	173
7.3.1 The Optimal $H_\infty$ Norm and Eigenvalues of Generalized Rayleigh Quotient .....	173
7.3.2 Mixed Energy and Intervals Merging .....	175
7.3.3 Computation of The Optimal $H_\infty$ Norm and Precise Integration of Riccati Equations .....	177
7.3.4 Precise Integration of Closed Loop Systems State Equations .....	180
7.4 Algorithm and Examples .....	181
7.4.1 Algorithm .....	181
7.4.2 Examples .....	183
References .....	192
<b>Chapter 8 <math>H_\infty</math> Output Feedback Control of Continuous- Time Systems</b> .....	194
8.1 $H_\infty$ Output Feedback Control .....	195
8.1.1 Existence of Output Feedback Controllers .....	195
8.1.2 Two Special Cases of Output Feedback Control .....	199
8.2 Explanations of Solutions of Riccati Equations in Terms of Structural Mechanics .....	200
8.3 Examples .....	206
References .....	214
<b>Chapter 9 Decentralized <math>H_\infty</math> Control and Filtering</b> .....	216
9.1 Decentralized $H_\infty$ Control of Large Scale Systems .....	216
9.2 Eigensolutions of Subsystems $H_\infty$ Control .....	220
9.3 Ortho-normalized Eigensolutions, Completeness	

---

and the Expansion Theorem .....	224
9.4 Optimal $H_\infty$ Norm Computation for Decentralized Control Systems .....	228
9.5 Examples of Decentralized Control .....	232
9.6 Decentralized $H_\infty$ Filtering .....	235
9.7 Eigensolutions of Subsystems $H_\infty$ Filtering .....	241
9.8 Optimal $H_\infty$ Norm Computation for Decentralized Filtering Systems .....	244
9.9 Examples of Decentralized Filtering .....	247
References .....	251
<b>Appendix Optimal Tracking of Linear Systems .....</b>	<b>254</b>
A.1 LQ Optimal Tracking .....	254
A.2 Mixed Energy of Intervals .....	256
A.2.1 Mixed Energy of Intervals .....	256
A.2.2 Merging Equations of Intervals .....	258
A.3 Precise Integration of Riccati Equations and Optimal Control .....	259
A.3.1 Computation of Interval Matrices .....	259
A.3.2 Precise Integration of Riccati Equations .....	262
A.3.3 Precise Integration of the Vector $\mathbf{h}(t)$ .....	263
A.4 Response of Optimal Tracking Systems .....	265
A.5 Examples of LQ Optimal Tracking .....	266
A.6 Tracking Problems in an $H_\infty$ Setting .....	272
References .....	277

---

# 第一章 线性鲁棒控制基础

反馈控制系统的设计中,控制系统的鲁棒性始终是一个核心问题。控制系统的鲁棒性是指系统承受外界扰动及受控对象模型不确定性影响的能力。经典的频率域方法在一定程度上能够比较方便地处理单变量控制系统的鲁棒性问题,但在处理多变量控制系统的分析与综合问题时往往比较困难。工程实际的需要与计算技术的发展促进了控制理论从单变量频率域控制向以状态空间法为标志的多变量控制的发展。以 LQG 控制为代表的现代线性控制理论可以较好地解决多变量控制系统的分析与综合问题,在某些领域也有成功的应用;但是当受控对象模型存在误差时,LQG 控制系统的鲁棒稳定性有可能会很差。这是因为现代控制理论完全依赖于受控对象的精确数学模型,这样设计的控制系统只对数学模型保证预期的性能指标,而设计指标在实际受控对象上能否真正实现则取决于数学模型的精确程度。而实际工程中往往不可避免地存在各种不确定因素,因此受控对象的精确模型几乎是不可能得到的,上述因素在一定程度上限制了这种设计方法的应用。近二十多年来,多变量系统的鲁棒控制问题始终是控制理论与应用领域的一个主要研究内容。在各种鲁棒控制系统设计方法中,20 世纪 80 年代起逐渐发展起来的  $H_\infty$  控制理论是目前解决鲁棒控制问题比较成功而完善的理论体系,而且已经出版了一些很好的教材与专著<sup>[1-7]</sup>。本书在介绍  $H_\infty$  控制理论的基本内容的基础上,着重研究系统设计中的计算问题。

为了方便阅读,本章将首先介绍鲁棒控制的基本概念及  $H_\infty$  控制系统设计的基本思想,还将介绍多变量线性系统分析、LQG

控制、变分法、微分方程和差分方程特征值的基础知识,作为本书后续章节的基础。本章对上述基础知识的介绍主要基于参考文献 1~5,29~33。

## 1.1 鲁棒控制的基本问题

### 1.1.1 系统不确定性描述

面向应用的鲁棒控制理论应当首先提供对系统的不确定性、系统的静态和动态性能及系统鲁棒性的量化描述方法,然后才可以利用相应的优化方法解决系统的控制问题。鲁棒控制系统设计不仅是针对某一单个控制对象模型进行的,而且是面向某一个集合的控制对象模型来进行的,所设计的控制系统对属于这个集合的所有控制对象均应该保证稳定性和预定的性能指标。因此鲁棒控制理论首先要研究的是不确定性系统的描述问题,本节简要介绍系统不确定性的描述方法。本节及 1.1.2,1.1.3 的主要内容基于文献 4,5。

以图 1.1 所示的反馈控制系统为例,其中  $P(s)$  为控制对象的

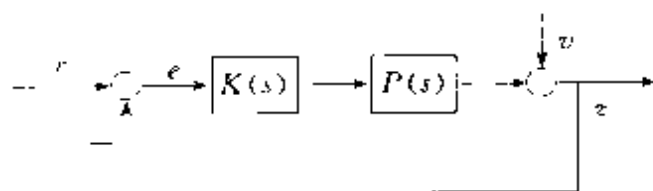


图 1.1 反馈控制系统

传递函数模型,  $K(s)$  为控制器的传递函数模型。通常的控制系统设计方法并不在模型中描述不确定性,这样的  $P(s)$  称为控制对象的公称模型(标称模型)。鲁棒控制理论则在系统模型建立阶段就考虑这种不确定性,并给出定量描述。不确定性系统的描述包括公称模型和不确定性两个方面。不确定性亦可分为非结构不确定性和结构不确定性两大类。非结构不确定性用于表示结构不明确的

不确定性,例如频率响应位于复平面上某个集合内的不确定性。而结构不确定性则用于表示控制对象和不确定性之间的结构关系非常明确的不确定性,例如控制对象中有限个参数的不确定性。一个不确定性系统的描述包括三个方面的内容:公称模型;描述不确定性的摄动及其与公称模型的关系;摄动的最大值。据此我们可以用一个非结构化集合或结构化集合来描述一个不确定性系统。

现在要考虑图 1.1 中受控对象的模型误差,设误差的形式如图 1.2 中所示,即系统模型具有加法不确定性,则实际控制对象的传递函数模型可以表述为

$$P_A(s) = P(s) + \Delta(s) \quad (1.1.1)$$

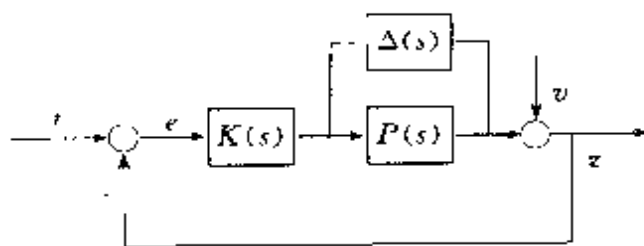


图 1.2 具有加法不确定性的反馈控制系统

其中,  $\Delta(s)$  是模型不确定性的加法摄动,  $s \in \mathbb{C}$ ,  $\mathbb{C}$  表示复数集合。对于单输入单输出系统, 可以假设  $\Delta(s)$  满足

$$|\Delta(j\omega)| \leq |W(j\omega)|, \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (1.1.2)$$

其中,  $\mathbb{R}$  表示实数集合, 而  $W(s)$  是加法摄动  $\Delta(s)$  的最大值。因为这里并没有给出  $\Delta(s)$  的具体结构, 所以称之为非结构不确定性。实际的控制对象则属于下面的非结构化集合

$$U_A = \{P(s) + \Delta(s); |\Delta(j\omega)| \leq |W(j\omega)|, \forall \omega \in \mathbb{R}\} \quad (1.1.3)$$

这个非结构化集合同时描述了公称模型、表示不确定性的摄动及其与公称模型的关系以及摄动的最大值等要素, 符合对不确定性系统描述所要求的三个方面的内容。现在介绍一个简单的结构化集合的例子, 如果实际控制对象的传递函数模型为

$$P_A(s) = \frac{1}{s^2 - as + 1} \quad (1.1.4)$$

其中,参数  $a$  在某个区间  $[a_{\min}, a_{\max}]$  内变化,那么这个控制对象属于下列结构化集合

$$U_1 = \left\{ \frac{1}{s^2 + as + 1} ; a \in [a_{\min}, a_{\max}] \right\} \quad (1.1.5)$$

### 1.1.2 控制系统的鲁棒性

稳定性、渐进调节、动态特性和鲁棒性是对反馈控制系统设计的基本要求,以往的控制系统设计理论中大多只强调前三个方面而忽视了对控制系统鲁棒性的要求。下面分别对系统设计中这几个方面的基本要求作简单介绍。

稳定性是控制系统设计的最基本要求,可分为内部稳定性和外部稳定性(输入-输出稳定性)两种。前者是指控制系统从工作点附近任意初始状态出发的轨迹在时间趋于无穷时收敛于工作点,后者则是指系统在有界输入的情况下产生有界的输出,因此是一个比内部稳定性弱的概念。

渐进调节特性反映的是控制系统的稳态性能,对于图 1.1 所示系统,渐进调节是指对于一类给定的参考输入  $r$  和外部扰动  $v$ ,所设计的系统必须能够保证稳态误差为 0,即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [r(t) - z(t)] = 0 \quad (1.1.6)$$

其中  $e$  是参考输入  $r$  与控制对象输出  $z$  之差。

动态特性是对反馈系统的目标跟踪特性和扰动抑制特性等指标的要求。对系统目标跟踪特性的要求一般可以通过使系统满足阶跃激励下的上升时间、超调量、调节时间等设计指标来达到。对于扰动抑制特性,则是要求扰动的瞬态响应尽可能小。另外,对动态特性的要求也可以用一组频率指标表示,此时对动态特性的要求是对有关函数频率特性的要求。

反馈控制系统的鲁棒性是指系统在某一类特定的不确定性条件下具有使系统的稳定性、渐进调节能力和动态特性保持不变的特性,因此控制系统的鲁棒性包含了鲁棒稳定性、鲁棒渐进调节和

鲁棒动态特性三个方面的内容。鲁棒稳定性是指系统在一组不确定性的作用下仍然能够保证反馈系统的稳定性;鲁棒渐进调节是指在一组不确定性的影响下仍然可以实现控制系统的渐进调节功能。鲁棒动态特性通常也称为灵敏度特性,即要求动态特性不受不确定性的影响。

实际控制问题的不确定性往往是有界的,鲁棒控制系统设计中一般假定不确定性在一个可能的范围内变化,要求所设计的控制器在这个不确定性范围内能使控制系统的稳定性和性能指标均保持不变。因此鲁棒控制系统设计的基本思想是找到不确定性变化的范围,并在这个范围内进行最坏情况下的系统设计。对于实际控制系统设计,确定系统中模型不确定性和外扰不确定性的变化范围是一个非常重要的问题。

### 1.1.3 基于 $H_\infty$ 性能指标的控制系统设计

$H_\infty$  控制系统设计的主导思想是极小化系统某个特定的闭环频响函数的峰值<sup>[4][8]</sup>。下面通过一个简单的例子来说明这个问题,仍然考虑图 1.1 中所示的单输入单输出(SISO)系统,该系统的开环和闭环频率特性分别为

$$G_K(j\omega) = P(j\omega)K(j\omega) \quad (1.1.7)$$

$$G_B(j\omega) = \frac{P(j\omega)K(j\omega)}{1 + P(j\omega)K(j\omega)} \quad (1.1.8)$$

按照经典的频域控制理论,可以通过设计控制器  $K$  来调整系统的开环频率特性  $G_K$ ,使得闭环频率特性  $G_B$  满足预定的性能指标。如果实际控制对象的频响函数为

$$P(j\omega) = P_0(j\omega) + \Delta P(j\omega) \quad (1.1.9)$$

其中  $P_0(j\omega)$  为设计中所使用的标称模型,  $\Delta P(j\omega)$  表示模型与实际对象之间的误差,那么相应地开环和闭环频率特性也具有误差

$$\Delta G_K(j\omega) = G_K(j\omega) - G_{K0}(j\omega) \quad (1.1.10a)$$

$$\Delta G_B(j\omega) = G_B(j\omega) - G_{B0}(j\omega) \quad (1.1.10b)$$



其中开环和闭环频率特性的标称值分别为

$$G_{K_0}(j\omega) = P_0(j\omega)K(j\omega) \quad (1.1.11a)$$

$$G_{H_0}(j\omega) = \frac{P_0(j\omega)K(j\omega)}{1 + P_0(j\omega)K(j\omega)} \quad (1.1.11b)$$

即使在系统设计时没能精确地考虑模型误差引起的开环频率特性的偏差,但如果由此而引起的闭环特性的偏差足够小,那么模型误差对实际系统闭环性能的影响也不会太大。这是因为

$$\frac{\Delta G_H(j\omega)}{G_H(j\omega)} = \frac{1}{1 + P_0(j\omega)K(j\omega)} \frac{\Delta G_K(j\omega)}{G_K(j\omega)} \quad (1.1.12)$$

现在定义干扰  $v$  到输出  $z$  的闭环传递函数为

$$S(s) = \frac{1}{1 + P_0(s)K(s)} \quad (1.1.13)$$

这个传递函数可以描述开环特性的相对偏差  $\Delta G_K/G_K$  到闭环特性相对偏差  $\Delta G_H/G_H$  的增益。通过设计控制器  $K$  使  $S$  的增益足够小,就可以将闭环频率特性的偏差抑制在工程允许的范围内。定义此传递函数的  $H_\infty$  范数为

$$\|S\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} |S(j\omega)| \quad (1.1.14)$$

如果能使  $S$  的峰值比较小,则  $S$  在所有频率上的值都会比较小,从而可以抑制所有频率成分的干扰。

如果干扰  $v$  的频率成分未知但能量有限,即

$$\|v\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} v^2(t) dt \quad (1.1.15)$$

是有限值,其中  $\|v\|_2$  表示信号  $v$  的 2-范数。可以定义从输入  $v$  到输出  $z$  的系统诱导范数(induced norm)为

$$\|S\| = \sup_{\|v\|_2 < \infty} \frac{\|z\|_2}{\|v\|_2} \quad (1.1.16)$$

利用 Parseval 定理可以证明

$$\|S\| = \|S\|_\infty \quad (1.1.17)$$

所以  $H_\infty$  范数  $\|S\|_\infty$  可以描述干扰输入信号的能量到输出信号的

能量之间的最大增益,也就是系统的诱导范数, $H_\infty$ 优化设计就是极小化系统的这个诱导范数。

#### 1.1.4 $H_\infty$ 系统设计中的计算问题

$H_\infty$ 控制理论的发展经历了基于系统传递函数矩阵描述的设计阶段和直接在状态空间描述上进行设计的阶段。根据系统描述方式的不同, $H_\infty$ 控制系统设计方法也被分为频域法和时域法两类。这两类方法都适用于线性定常系统的  $H_\infty$ 优化设计问题,但时变系统、非线性系统的  $H_\infty$ 优化设计则必须以状态空间描述为基础。随着研究的深入和理论的逐渐成熟, $H_\infty$ 设计方法被用于解决航空、航天、机械、化工等诸多领域的控制系统设计问题。应用领域的需求使得数值方法研究的重要性也日益增强,在一些算法已经形成商业软件包的基础上,仍然不断有新的算法发表<sup>[9][10]</sup>。

频域法以系统的传递函数矩阵描述为基础,虽然解的表达形式简单明了,但求解过程繁琐,解法的物理意义不太明确,控制器阶次也较高。时域法则以系统的状态空间描述为基础,通过求解适当的 Riccati(黎卡提)方程实现系统设计,具有设计过程简单、计算量少、控制器阶次较低、结构特性明显等特点<sup>[3][4]</sup>。典型的  $H_\infty$ 控制系统设计软件包如 MATLAB 中的 Robust Control Toolbox(鲁棒控制工具箱)和  $\mu$  Analysis and Synthesis Toolbox( $\mu$ 分析与综合工具箱)就采用了时域设计方法<sup>[11]</sup>。MATLAB 中的 LMI Toolbox(线性矩阵不等式工具箱)提供了通过求解线性矩阵不等式实现系统设计的软件包,是近年来比较引人注目的一种方法<sup>[13]</sup>。由于时域  $H_\infty$ 性能指标的引入和时域法的应用,时变与时不变系统,有限时间及无限时间域的  $H_\infty$ 优化问题都可以在统一的框架下展开研究,而实现系统设计的基础在于 Riccati 方程的求解和  $H_\infty$ 性能指标的计算<sup>[12]</sup>。

首先介绍  $H_\infty$ 性能指标的计算问题,参考文献中所列的二等分法<sup>[14]</sup>、梯度法<sup>[15]</sup>、求解奇异控制最优  $H_\infty$ 性能指标的算法<sup>[16]</sup>,以

及计算离散系统最优  $H$  范数的割线法<sup>[14]</sup>等只是众多研究这一问题的文献中的一部分。这些各具特色的方法,实际上体现了对最优  $H$  性能指标本质意义不同角度的认识。上述方法都是针对无限时间  $H$  控制问题的,对有限时间域控制系统最优  $H$  性能指标的算法研究则相对很少。但事实上有限时间  $H$  控制不仅具有重要的理论意义<sup>[12]</sup>,而且具有非常重要的工程应用背景。例如现代高性能战斗机要求在几秒钟内完成飞行机动动作<sup>[17]</sup>,必须考虑有限时间内的控制系统设计。文献 17~22 从不同角度提出了有限时间  $H$  优化问题的最优性能指标计算方法。文献 17 基于与控制问题相联系的微分方程两端边值问题非平凡解的存在条件,通过迭代计算最优  $H$  性能指标;文献 18 则将问题转化为计算非线性最优控制的性能指标,可以用于线性时变系统,这种方法需求解一系列复杂的非线性矩阵微分方程。文献 19~22 基于最优控制与结构力学的模拟关系,指出了最优  $H$  性能指标与结构振动问题中 Rayleigh(瑞利)商本征值的联系,并利用精细积分法结合扩展的 Wittrick-Williams 算法计算这一指标。本书以此工作为基础,利用 Hamilton 微分系统和差分系统的特征值理论,分别建立了离散系统和连续系统的最优  $H$  性能指标与 Hamilton 差分方程及微分方程边值问题特征值<sup>[23~25]</sup>之间的联系,并系统地介绍了离散和连续系统最优  $H$  性能指标计算及 Riccati 方程求解的方法。最后介绍了这一研究方向的最新成果,利用 Hamilton 系统的模态综合法研究分散  $H$  控制和  $H$  滤波系统设计中的计算问题。

最优  $H$  性能指标的计算与 Riccati 方程的求解往往是密切相关的。为实现系统的闭环控制,也需求解 Riccati 代数方程或微分方程。Riccati 方程在科学与工程有许多领域都有应用,对其性质与解法的研究已经有相当长的历史<sup>[26]</sup>。近年来,由于对有限时间控制、时变系统控制、系统瞬态特性等问题研究的需要,对 Riccati 微分方程的解法及解的性质的研究引起越来越多的注意。

在各种求解 Riccati 微分方程的数值方法中,利用方程结构特征的矩阵值算法是颇有特色的一种方法<sup>[26]</sup>。求解 Riccati 微分方程的精细积分方法源自结构力学,也利用了这类方程的特点<sup>[27]</sup>,这一算法中的  $2^k$  类矩阵运算公式不仅可以保证数值解的高精度,而且在积分步长大幅度变化时仍能保持计算结果的一致性,另外在求解方程的同时还可计算闭环系统的状态转移矩阵和可控性矩阵等参数。

虽然  $H_\infty$  控制问题的数值方法研究已经取得丰富的成果,但是仍然有一些基本问题的数值求解方法需要进一步的研究,如有限时间控制、时变系统控制等,现有的一些数值方法也值得重新审视。例如文献 9 中根据实际例题的计算结果指出:不仅对  $H_\infty$  系统设计中的计算问题,即使对于极点配置、LQ 控制这样的经典问题,其求解途径和算法也有更新改进的必要,因此有必要从新的角度理解与研究控制系统设计中的计算问题,而借鉴其他领域的方法无疑是一条新的途径。文献 27 系统地介绍了最优控制与结构力学的模拟理论以及相应的数值方法,文献 28 中则有对这一研究方向新的研究成果的介绍。研究控制问题的数值方法需要从形式不同的等价数学表达式中选择适于数值计算的表达式,而且由于控制问题的数值求解总是着眼于实际应用,所以算法应当尽可能地反映问题的物理本质,在保证精度的同时尽可能地使计算结果具有相应的物理意义<sup>[9][28]</sup>。

## 1.2 多变量线性系统

线性系统是控制理论中的主要研究对象,也是研究成果最为完整和成熟的系统,其中所建立的概念、原理、方法是学习和深入研究控制理论的基础。在本节和 1.3 节中,主要基于参考文献 1,2,4,5 中的相关内容对多变量线性系统的基本概念和基本知识进行

了介绍,作为理解后续章节内容的基础。

### 1.2.1 线性系统模型

#### A:连续系统模型

线性时变系统状态空间模型的一般形式为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \quad (1.2.1a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \quad (1.2.1b)$$

其中  $\mathbf{x}(t)$  是系统的状态向量,  $\mathbf{u}(t)$  是系统的输入向量,  $\mathbf{y}(t)$  为输出向量。矩阵  $\mathbf{A}(t)$  称为系统矩阵,  $\mathbf{B}(t)$  称为输入矩阵,  $\mathbf{C}(t)$  是输出矩阵,  $\mathbf{D}(t)$  是输入输出耦合矩阵。方程(1.2.1a)称为状态方程,方程(1.2.1b)称为量测或输出方程。

对方程(1.2.1a)积分,可以得到系统的状态

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (1.2.2)$$

其中,  $\mathbf{x}(t_0)$  为初始时刻的状态,  $\Phi(t, t_0)$  是系统的状态转移矩阵,并满足下列矩阵微分方程

$$\frac{d}{dt}\Phi(t, t_0) = \mathbf{A}(t)\Phi(t, t_0), \Phi(t_0, t_0) = \mathbf{I} \quad (1.2.3)$$

系统的输出为

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\Phi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{C}(t)\Phi(t, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \quad (1.2.4)$$

对于线性定常系统

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (1.2.5a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (1.2.5b)$$

式(1.2.2)和式(1.2.4)可以表示为

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (1.2.6)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (1.2.7)$$

其中

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \dots$$

显然指数矩阵  $e^{At}$  是计算  $x(t)$  和  $y(t)$  的关键,其精细计算的方法见文献 27。根据式(1.2.7)可以定义系统的脉冲响应矩阵如下

$$g(t) = \begin{cases} Ce^{At}B + D\delta(t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (1.2.8)$$

其中,  $\delta(t)$  是 Dirac 脉冲函数,脉冲响应矩阵  $g(t)$  的各元素可根据(1.2.7)计算。初始条件  $x(t_0) = 0$  时,令输入向量中各元素为

$$u_k(t) = \begin{cases} \delta(t), & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases} \quad (1.2.9)$$

则有

$$g_{ij}(t) = y_i(t) \quad (1.2.10)$$

由此还可以给出系统输出的另一种表达形式

$$y(t) = Ce^{At}x(t_0) + \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau = Ce^{At}x(t_0) + g(t) \otimes u(t) \quad (1.2.11)$$

上式中的  $\otimes$  是卷积符号。

需要指出的是,系统的状态空间模型并不是惟一的。一个实际系统的状态空间描述可以有无穷多个,只要将一个系统的状态向量重新进行线性组合就可以得到一组新的状态向量。这个过程实际上就是通过对状态向量基底的变换来形成一个新的状态模型,新模型与原模型之间的联系则是相似变换。在相似变换下,系统的输入输出并不发生变化,因此从输入输出角度来看,存在相似变换关系的不同状态空间模型描述的仍然是同一物理系统。通过相似变换,可以得到具有特定代数结构与数值计算特性的状态模型,从而简化系统的分析与设计<sup>[2]</sup>。

考虑式(1.2.5)所描述的线性定常系统,如果定义一个新的状态变量

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{x}(t) \quad (1.2.12)$$

其中,  $\mathbf{T}$  是一个常值可逆矩阵, 并将其代入式(1.2.5) 可得

$$\mathbf{T} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = (\mathbf{AT}) \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{Bu}(t) \quad (1.2.13a)$$

$$\mathbf{y}(t) = (\mathbf{CT}) \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{Du}(t) \quad (1.2.13b)$$

上式左乘  $\mathbf{T}^{-1}$  就可得到系统新的状态空间模型

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = (\mathbf{T}^{-1} \mathbf{AT}) \hat{\mathbf{x}}(t) + (\mathbf{T}^{-1} \mathbf{B}) \mathbf{u}(t) \quad (1.2.14a)$$

$$\mathbf{y}(t) = (\mathbf{CT}) \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{Du}(t) \quad (1.2.14b)$$

其状态变量为  $\hat{\mathbf{x}}$ 。显然, 新模型与原模型之间的关系为

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{T}^{-1} \mathbf{AT}; \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{T}^{-1} \mathbf{B}; \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{CT}; \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D} \quad (1.2.15)$$

上述变换称为线性系统的相似变换。

比较式(1.2.5) 和式(1.2.14) 可知两者的输入输出关系并没有发生变化, 由此可知系统的输入输出在相似变换下并不发生变化, 所以描述系统输入输出关系的传递函数模型在相似变换下也是不变的。

### B: 离散系统模型

时变系统的离散状态空间模型为

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{H}(k) \mathbf{u}(k) \quad (1.2.16a)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{D}(k) \mathbf{u}(k) \quad (1.2.16b)$$

若其中的系数矩阵与  $k$  无关, 则成为定常系统的状态空间模型

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi \mathbf{x}(k) + \mathbf{H} \mathbf{u}(k) \quad (1.2.17a)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C} \mathbf{x}(k) + \mathbf{D} \mathbf{u}(k) \quad (1.2.17b)$$

将线性连续系统的状态方程化为离散时间状态方程有许多方法, 如欧拉法、零阶保持近似方法、双线性变换等。对于线性定常系统来讲, 零阶保持近似方法是比较普遍的离散化方法, 简述如下:

设系统(1.2.5) 的输入在采样间隔  $\Delta t$  内保持不变, 即

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(0), t \in [0, \Delta t] \quad (1.2.18)$$

则在采样时刻  $\Delta t$  时的状态可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\Delta t) &= e^{A\Delta t}\mathbf{x}(0) + \int_0^{\Delta t} e^{A(\Delta t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(0)d\tau = \\ &e^{A\Delta t}\mathbf{x}(0) + \left(\int_0^{\Delta t} e^{A\tau}\mathbf{B}d\tau\right)\mathbf{u}(0) \end{aligned} \quad (1.2.19)$$

或者写成

$$\mathbf{x}(\Delta t) = \Phi(\Delta t)\mathbf{x}(0) + \mathbf{H}(\Delta t)\mathbf{u}(0) \quad (1.2.20)$$

其中

$$\Phi(\Delta t) = e^{A\Delta t} \quad (1.2.21a)$$

$$\mathbf{H}(\Delta t) = \int_0^{\Delta t} e^{A\tau}\mathbf{B}d\tau \quad (1.2.21b)$$

由于系统是定常的,其离散模型可表示成

$$\mathbf{x}(k\Delta t + \Delta t) = \Phi\mathbf{x}(k\Delta t) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k\Delta t) \quad (1.2.22a)$$

$$\mathbf{y}(k\Delta t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k\Delta t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k\Delta t) \quad (1.2.22b)$$

也可以省略  $\Delta t$  将其简写为式(1.2.17)的形式。

### C:传递函数模型

线性定常系统也可以用传递函数模型描述。对式(1.2.5)进行 Laplace 变换得

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \quad (1.2.23a)$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s) \quad (1.2.23b)$$

设初始条件  $\mathbf{x}(t_0) = 0$ , 可得输出的 Laplace 变换  $\mathbf{Y}(s)$  与输入的 Laplace 变换  $\mathbf{U}(s)$  之间的关系

$$\mathbf{Y}(s) = \{\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}\}\mathbf{U}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{U}(s) \quad (1.2.24)$$

系统的传递函数定义为

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (1.2.25)$$

因为  $s$  是复变量(也称为复频率),所以  $\mathbf{G}(s)$  是一个复变函数。对  $\mathbf{G}(s)$  作 Laplace 逆变换可以得到系统的脉冲响应函数矩阵  $\mathbf{g}(t)$ , 即



$$\mathbf{g}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{G}(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}\} \quad (1.2.26)$$

对  $\mathbf{g}(t)$  作 Laplace 变换则可以得到系统的传递函数矩阵  $\mathbf{G}(s)$ , 即

$$\mathbf{G}(s) = \mathcal{L}\{\mathbf{g}(t)\} \quad (1.2.27)$$

### 1.2.2 系统的频率响应

利用系统的传递函数, 可以很容易地计算线性系统在简谐激励下的稳态响应。线性系统的稳态响应是与激励同频的简谐信号, 只是幅值和相位发生了变化。根据这一特点, 引入系统频率响应的概念。对于单输入单输出系统, 其响应幅值和相位的变化(增益和相移)定义为系统的频率响应; 对于多输入多输出系统, 由于不同输入输出之间的幅值和相位不同, 需通过定义主增益来描述其频率响应特性。

考虑一般的多输入多输出系统, 设系统的输入为  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0 e^{j\omega t}$ , 系统的输出可表示为

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{G}(s)\mathbf{u}_0 e^{j\omega t} \quad (1.2.28)$$

若系统的输入形式为  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0 e^{j\omega t}$ , 则系统的稳态响应为

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{G}(j\omega)\mathbf{u}_0 e^{j\omega t} \quad (1.2.29)$$

其中  $\mathbf{G}(j\omega)$  就是系统的频响函数矩阵, 也是系统的 Fourier 变换。只要将系统传递函数  $\mathbf{G}(s)$  的定义域限定在复平面的虚轴上就可以得到  $\mathbf{G}(j\omega)$ 。

按照式(1.2.29), 对单输入单输出系统有更明确的表达形式

$$y(t) = G(j\omega)u_0 e^{j\omega t} = |G(j\omega)|u_0 e^{j\omega t + \angle G(j\omega)t} \quad (1.2.30)$$

其中  $|G(j\omega)|$  和  $\angle G(j\omega)$  分别是单输入单输出系统的增益和相移。因此通过计算系统在某频率范围内简谐激励下的响应就可以得到单输入单输出系统的频率响应。

与单输入单输出系统不同, 多输入多输出系统的增益和相移则比较难以定义。首先考虑下列形式的增益

$$\text{Gain} = \frac{\|y(t)\|}{\|u(t)\|} = \frac{\|G(j\omega)u_0 e^{j\omega t}\|}{\|u_0 e^{j\omega t}\|} = \frac{\|G(j\omega)u_0\|}{\|u_0\|} \quad (1.2.31)$$

式中的  $\|\cdot\|$  表示向量的 Euclidean (欧基里德) 范数。显然, 上述增益形式与输入的频率  $\omega$  和幅值  $u_0$  都有关系, 因此对于多输入多输出系统无法像单输入单输出系统那样定义一个仅与频率有关的系统增益, 但是可以定义多输入多输出系统增益的变化范围, 即

$$\min_{u_0} \frac{\|G(j\omega)u_0\|}{\|u_0\|} \leq \text{Gain} \leq \max_{u_0} \frac{\|G(j\omega)u_0\|}{\|u_0\|} \quad (1.2.32)$$

由于线性系统的增益并不随输入幅值的变化而变化, 所以还可以定义与上式等价的系统增益范围

$$\min_{\|u_0\|=1} \|G(j\omega)u_0\| \leq \text{Gain} \leq \max_{\|u_0\|=1} \|G(j\omega)u_0\| \quad (1.2.33)$$

一般来讲, 多输入多输出系统的每一个输入与输出之间的相移都是不同的, 因此无法对多输入多输出系统给出一个合理的相移定义。同时, 由于相移  $\varphi$  也可以表示成  $\varphi + 2\pi$  等值, 相移的范围也无法定义, 所以多输入多输出系统的频率响应一般是指该系统的最大增益和最小增益。

直接按照式 (1.2.32) 或 (1.2.33) 确定多输入多输出系统的增益范围是非常麻烦的, 一般需利用矩阵的奇异值分解来简化计算过程<sup>[2]</sup>。由于系统的传递函数矩阵是频率的函数, 该矩阵的所有奇异值也是频率的函数, 这些奇异值称为系统的主增益, 由主增益的最大最小值就可以确定系统的增益范围。

### 1.2.3 系统的零点和极点

#### A: 单输入单输出系统的极点和零点

单输入单输出系统的传递函数是一个分数多项式

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{C \operatorname{adj}(sI - A)B + D \det(sI - A)}{\det(sI - A)} \\
&= \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + b_{m-2}s^{m-2} + \cdots + b_1s^1 + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \cdots + a_1s^1 + a_0}
\end{aligned} \quad (1.2.34)$$

其中  $\operatorname{adj}$  和  $\det$  分别表示矩阵的伴随阵和行列式值, 对于一个实际系统, 必然有  $n > m$ 。如果传递函数的分子和分母多项式没有公因子, 则传递函数  $G(s)$  为不可约的。 $\{A, B, C, D\}$  称为系统的状态空间实现, 如果  $\det(sI - A)$  等于此传递函数的分母多项式, 则称  $\{A, B, C, D\}$  为  $G(s)$  的最小状态空间实现<sup>2</sup>。传递函数分子多项式

$$s^m + b_{m-1}s^{m-1} + b_{m-2}s^{m-2} + \cdots + b_1s^1 + b_0 = 0 \quad (1.2.35)$$

的解定义为系统的零点。当然, 系统的零点  $z_i$  也是使

$$G(z_i) = 0 \quad (1.2.36)$$

的点。传递函数分母多项式

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \cdots + a_1s^1 + a_0 = 0 \quad (1.2.37)$$

的解定义为系统的极点。系统的极点  $p_i$  也可以定义为满足

$$|G(p_i)| = \infty \quad (1.2.38)$$

的点。考虑系统的状态空间模型, 若  $\{A, B, C, D\}$  是系统的最小实现, 则系统的极点是下列特征方程的根

$$\det(sI - A) = 0 \quad (1.2.39)$$

因此系统的极点就是系统矩阵  $A$  的特征值。实际系统的零点和极点包括实数与复数两种类型, 复数零极点总是成对出现构成复平面上的共轭点。

### B. 多输入多输出系统的极点和零点

多输入多输出系统的极点和零点有多种定义方式, 其严格定义涉及到更多的知识, 这里所介绍的并不是严格的定义。多输入多输出系统传递函数矩阵的每一个元素都是一个单输入单输出系统

的传递函数,因此多输入多输出系统的极点可以定义为上述所有单输入单输出系统极点的并集<sup>[1]</sup>。

多输入多输出系统的零点定义为使传递函数矩阵的秩满足

$$\text{rank}[G(s)] < \min\{n_y, n_u\} \quad (1.2.40)$$

的  $s$  值,式中的  $n_y$  和  $n_u$  分别为输出向量和输入向量的维数。可以发现单输入单输出系统的零点定义实际上是(1.2.40)的一个特例。如果系统的传递函数矩阵是方阵,则系统的零点是使下列方程成立的  $s$  值。

$$\det[G(s)] = 0 \quad (1.2.41)$$

由这个条件可知,系统有可能在输入不为零的情况下输出为零,即

$$Y(s) = 0 = G(s)U(s) \quad (1.2.42)$$

#### 1.2.4 系统的稳定性、可控性、可观性

##### A: 系统的稳定性

系统的稳定性是控制理论中一个非常重要的概念,也是对控制系统设计最基本的要求。前面已经分别介绍了系统的状态空间模型和传递函数模型,这两种模型分别描述了系统内部状态之间的关系和输入输出关系。相对应地,系统稳定性的概念也有内部稳定性和外部稳定性两种。

首先介绍内部稳定性的概念。讨论内部稳定性时需假定控制输入  $u(t) = 0$ 。考虑线性定常系统(1.2.5),若对于任意初始状态  $x(t_0) = x_0$  有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad (1.2.43)$$

则称该系统是内部稳定的。

若系统是内部稳定的,则称系统矩阵  $A$  是渐近稳定的。控制输入  $u(t) = 0$  时系统状态的变化规律为

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) \quad (1.2.44)$$

因此矩阵  $A$  渐近稳定的结论与

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x = 0 \quad (1.2.45)$$

是等价的。矩阵  $A$  的稳定性可归结为其特征值的性质, 即矩阵  $A$  稳定的充要条件是其所有特征值都在复平面的左半部分。

现在介绍外部稳定性的概念, 不失一般性, 这里假设系统的初始状态  $x(t_0) = 0$ 。如果一个系统对有界的输入产生有界的输出, 则这个系统是外部稳定的, 系统称为有界输入 - 有界输出稳定 (Bounded Input-Bounded Output), 即 BIBO 稳定。单输入单输出系统 BIBO 稳定的充要条件是系统的脉冲响应函数  $g(t)$  绝对可积, 即满足

$$\int_0^{\infty} |g(t)| dt < +\infty \quad (1.2.46)$$

多输入多输出系统 BIBO 稳定的充要条件是系统的脉冲响应函数矩阵  $G(t)$  中的每个元素  $g_{ij}(t)$  均满足绝对可积条件

$$\int_0^{\infty} |g_{ij}(t)| dt < +\infty \quad (1.2.17)$$

多输入多输出系统 BIBO 稳定的另一个充要条件是系统的脉冲响应函数矩阵  $G(s)$  中的每个元素  $g_{ij}(s)$  的极点均具有负实部。

系统内部稳定性与外部稳定性之间还存在下列关系: 线性定常系统的 BIBO 稳定性并不能保证其内部稳定性, 但具有内部稳定性的线性定常系统必然是 BIBO 稳定的; 若线性定常系统是可控和可观的, 则其内部稳定性与 BIBO 稳定性是等价的。

### B: 可控性和可观性

在线性系统理论中, 系统状态的可控性和可观性是两个非常重要的概念。状态可控性是控制输入支配系统状态向量的能力; 状态可观性是系统输出量反映状态向量的能力。基于这两个性质可以判断系统在什么条件下可以由输入来控制, 以及在什么条件下可以利用输入和输出信息估计系统的状态。利用这两个性质还可以合理地选择作动器和传感器, 构造系统的控制器和观测器。

一个系统是可控的当且仅当可以利用系统的输入在有限时间  $0 \leq t_f - t_0 < \infty$  内将系统从任意的初始状态  $x(t_0) = x_0$  转换到另一个任意的终端状态  $x(t_f) = x_f$ 。判断线性定常系统(1.2.5)的可控性比较简单,最基本的一个方法是判断其可控性矩阵是否满秩。若可控性矩阵

$$Q_c = [B : AB : A^2B : \cdots : A^{n-1}B] \quad (1.2.48)$$

满秩,则系统可控。其中  $n$  是系统的阶次,即系统状态向量的维数。

一个系统是可观的当且仅当可以根据系统在任意有限时间  $0 \leq t_f - t_0 < \infty$  内的输入  $u(t)$  和输出  $y(t)$  确定系统的状态  $x(t_0)$ 。类似于可控性的判据,若系统的可观性矩阵

$$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (1.2.49)$$

满秩,则系统可观。

### C: 可稳定性和可检测性

线性定常系统的可稳定性和可检测性与可控性和可观性相关,是鲁棒控制中的一个重要概念,因此这里对其作简单介绍。

对于线性定常系统(1.2.5),其状态反馈控制律为  $u = Fx$ ,若闭环控制系统对任意的初始状态  $x(t_0)$  都存在满足  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$  的解,则系统是可稳定的,即  $(A, B)$  是可稳定的。系统可稳定性的判定可以利用下列等价条件:

1. 存在使  $A + BF$  渐近稳定的矩阵  $F$ ;
2. 对于任意的  $\text{Re}(s) \geq 0$  有  $\text{rank}[sI - A \quad B] = n$ 。

与可稳定性对偶的概念是可检测性,对于线性定常系统(1.2.5),如果  $(A^T, C^T)$  是可稳定的,则系统是可检测的,即  $(C, A)$  是可检测的。类似地,系统可检测性的判定也可以利用下列等价条

件:

(1) 存在使  $A + HC$  渐近稳定的矩阵  $H$ ;

(2) 对于任意的  $\operatorname{Re}(s) \geqslant 0$  有  $\operatorname{rank} \begin{bmatrix} sI - A \\ C \end{bmatrix} = n$ 。

### 1.2.5 系统状态观测器

极点配置方法是控制系统设计的一种基本方法,其思想是将闭环系统的极点配置在指定的位置,而这些极点位置的选择应当使系统满足特定的性能指标。基于系统的状态空间模型进行系统设计时,如果能够利用系统的所有状态,则极点配置过程比较简单。如果无法获得系统的所有状态,则需要利用状态观测器对系统的状态进行估计,然后再基于对状态的估计实现系统的反馈控制。现在分别介绍这方面的基本概念。

#### A: 状态反馈

以下列线性定常系统为例

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.2.50a)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (1.2.50b)$$

要求设计一个控制器使得该系统的状态可以从任意初始状态趋向于零。设控制器具有下列形式

$$u(t) = -Kx(t) \quad (1.2.51)$$

该控制器可以利用系统的全部状态进行反馈,显然控制律是由增益矩阵  $K$  决定的。将式(1.2.51)代入式(1.2.50a)可得闭环系统的状态方程

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) \quad (1.2.52)$$

此方程的解为

$$x(t) = e^{(A-BK)t}x(0) \quad (1.2.53)$$

显然,如果闭环系统矩阵  $(A - BK)$  所有特征值的实部为负,则控制器(1.2.51)可以使系统的状态从任意初始值逐渐趋于零。

反馈增益阵  $K$  的选择首先要保证系统的稳定性,但这只是最

基本的要求,系统设计时总是希望系统状态能够在一个合理的给定的时间内趋于零而不是经过无限长时间才趋于零,还要求系统具备一些其他性质,如比较小的超调量和合理的阻尼比,这些都可以通过增益矩阵  $K$  的选择来实现,当然满足条件的  $K$  也不止一个。如果已经给定闭环系统的期望极点  $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ , 则增益矩阵  $K$  可以通过求解下列方程获得

$$\det(sI - A + BK) = (s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n) \quad (1.2.54)$$

一般来讲,当系统可控时,对任意的期望极点  $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  都存在满足方程(1.2.54)的矩阵  $K$ 。

对于实际系统,利用其全部状态进行反馈控制往往是不可能的,一般是利用状态观测器估计系统的状态,然后将所估计的状态用于反馈。下面介绍状态观测器的有关知识。

### B: 状态观测器

状态观测器的主要用途是在给定系统输入输出的情况下估计系统状态,实际系统的某些状态往往是无法直接测量的。以系统(1.2.50)为例,设其状态观测器具有下面的形式

$$\dot{\hat{x}}(t) = F\hat{x}(t) + Gy(t) + Hu(t) \quad (1.2.55)$$

其中  $\hat{x}(t)$  是状态估计。矩阵  $F, G$  和  $H$  的选择应当使系统的实际状态与估计状态之间的误差趋于零。定义这一误差为

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (1.2.56)$$

对上式求导并将式(1.2.50a, b)和(1.2.55)分别代入得

$$\dot{e}(t) = (A - GC)x(t) - F\hat{x}(t) + (B - GD - H)u(t) \quad (1.2.57)$$

根据上式,若选择

$$F = A - GC \quad (1.2.58)$$

则式(1.2.57)成为关于误差向量  $e(t)$  的状态方程



$$\dot{e}(t) = (A - GC)e(t) + (B - GD - H)u(t) \quad (1.2.59)$$

进一步选择

$$H = B - GD \quad (1.2.60)$$

可得齐次状态方程

$$\dot{e}(t) = (A - GC)e(t) \quad (1.2.61)$$

显然状态观测器的设计最终归结为观测增益矩阵  $G$  的选择。如果系统(1.2.50)是可观的,则通过选择合适的观测增益矩阵  $G$  不仅可以使系统(1.2.61)稳定,还可以任意配置观测器的极点,从而可以调节观测器误差趋于零的速度以及超调量等性质。

因为系统(1.2.61)的极点也是式(1.2.55)的极点,因此称其极点为观测器的极点。给定观测器的期望极点  $\{p_{o1}, p_{o2}, \dots, p_{on}\}$ ,可以通过求解下列方程得到观测增益矩阵  $G$ 。

$$\det(sI - A + GC) = (s - p_{o1})(s - p_{o2}) \cdots (s - p_{on}) \quad (1.2.62)$$

上述方程与式(1.2.54)非常相似。事实上,观测器的设计与控制器的设计是密切相关的,其问题列式与结果都是相似的,这种相似性也称为对偶性(duality),本书后面的章节对此还有讨论。

### C: 分离性原理

对于可控系统,利用线性状态反馈可以实现对其闭环极点的任意配置,但状态反馈需要系统的所有状态,这往往是困难的甚至是不可实现的。对于大多数系统,一般只能测量到部分状态向量及状态向量的线性组合构成的输出向量,这类系统的控制问题称为输出反馈控制问题。前面已经介绍了状态观测器的概念,利用系统的输出向量通过状态观测器可以估计系统的全部状态向量,而且可以通过调整设计变量使观测器的估计误差渐近趋于零。最终通过将状态观测器与状态反馈控制器结合起来解决输出反馈控制问题。

对于输出反馈控制问题,可以首先利用状态观测器

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{G}y(t) + \mathbf{H}u(t) \quad (1.2.63a)$$

给出系统所有状态的估计,然后按照全状态反馈控制问题设计控制器的反馈增益并形成控制律

$$u(t) = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t) \quad (1.2.63b)$$

式(1.2.63)就构成了带有观测器的输出反馈控制系统。

状态方程(1.2.63)与受控系统的状态方程(1.2.50)相结合即可构成整个闭环系统的状态方程

$$\begin{Bmatrix} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{G} \end{bmatrix} y(t) \quad (1.2.64)$$

将(1.2.50)和(1.2.63)中的输出向量和控制向量分别代入上式得

$$\begin{Bmatrix} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{BK} \\ \mathbf{GC} & \mathbf{F} - \mathbf{HK} - \mathbf{GDK} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}(t) \end{Bmatrix} \quad (1.2.65)$$

回顾状态观测器中对 $\mathbf{H}$ 矩阵的选择方式,将式(1.2.60)代入上式得

$$\begin{Bmatrix} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{BK} \\ \mathbf{GC} & \mathbf{F} - \mathbf{BK} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}(t) \end{Bmatrix} \quad (1.2.66)$$

控制系统设计的过程一般是按照对闭环系统动态性能指标的要求选择相应的闭环极点,进而确定上式中的几个未知矩阵。现在我们直接分析闭环系统(1.2.66)的极点分布特性,以期更进一步理解这个问题。首先引入下列变量代换

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}(t) \end{Bmatrix} \quad (1.2.67a)$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{Bmatrix} \quad (1.2.67b)$$

并将其代入式(1.2.66)中得

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \dot{\hat{x}}(t) \\ \dot{e}(t) \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & BK \\ GC & F - GBK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{Bmatrix} - \\ &\quad \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (1.2.68)$$

因为相似变换并不改变系统的极点,所以闭环系统的极点是下列方程的解

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} sI - A + BK & -BK \\ 0 & sI - F \end{bmatrix} &= \\ \det(sI - A + BK) \det(sI - F) &= 0 \end{aligned} \quad (1.2.69)$$

将上式与式(1.2.54)及式(1.2.62)比较,并考虑到式(1.2.58)可知:带有观测器的输出反馈控制系统的闭环极点等于状态反馈控制系统的极点加上状态观测器的极点,这就是分离性原理。根据分离性原理,控制系统设计时可以分别设计状态观测器和状态反馈控制器,然后再合成为控制器。深入的线性系统设计理论可参考有关专著[2~115]。

### 1.2.6 信号与系统的范数

前面已经提到了信号与系统范数的概念,范数是自变量属于线性空间的一个实值函数,记作  $\|\cdot\|_p$ ,这里用  $p$  表示不同类型的范数,范数具有下列基本性质

1.  $\|x\|_p \geq 0$
2.  $\|x\|_p = 0$  当且仅当  $x = 0$  时
3.  $\|\alpha x\|_p = |\alpha| \|x\|_p$
4.  $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$

其中  $x, y$  为线性空间的元素,而  $\alpha$  为标量。定义范数之后,就可以讨论信号与系统的度量问题。

首先介绍向量范数的概念。实向量  $x$  的 2-范数,即 Euclidean 范数定义为

$$\| \mathbf{x} \|_2 = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \quad (1.2.70)$$

还可以定义加权 Euclidean 范数

$$\| \mathbf{x} \|_w = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{W} \mathbf{x}} \quad (1.2.71)$$

其中,  $\mathbf{W}$  为正定矩阵。而向量的  $\infty$ - 范数则定义为

$$\| \mathbf{x} \|_\infty = \max_i |x_i| \quad (1.2.72)$$

其他类型的范数也可以根据需要定义。

现在介绍信号范数的概念。信号  $\mathbf{x}(t)$  的 2- 范数定义为

$$\| \mathbf{x}(t) \|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{x}^*(t) \mathbf{x}(t) dt} \quad (1.2.73)$$

其中  $\mathbf{x}^*(t)$  表示  $\mathbf{x}(t)$  的共轭转置。由于积分区间是无限的, 因此所有的信号都没有有限的 2- 范数, 除非  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}, t \in (-\infty, +\infty)$ 。

与向量范数类似, 信号的加权 2- 范数定义为

$$\| \mathbf{x}(t) \|_{w(t)} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{x}^*(t) \mathbf{W}(t) \mathbf{x}(t) dt} \quad (1.2.74)$$

其中  $\mathbf{W}(t)$  在任意时间都是正定矩阵。信号在有限区间上的 2- 范数则定义为

$$\| \mathbf{x}(t) \|_{2, [t_0, t_1]} = \sqrt{\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{x}^*(t) \mathbf{x}(t) dt} \quad (1.2.75)$$

信号的  $\infty$ - 范数定义为

$$\| \mathbf{x}(t) \|_\infty = \sup_t \max_i |x_i(t)| \quad (1.2.76)$$

信号在有限区间的  $\infty$ - 范数则定义为

$$\| \mathbf{x}(t) \|_{\infty, [t_0, t_1]} = \max_{t \in [t_0, t_1]} \max_i |x_i(t)| \quad (1.2.77)$$

在上述概念的基础上, 还可以定义系统的范数。若系统的传递函数矩阵为  $\mathbf{G}(s)$ , 则其 2- 范数定义为

$$\| \mathbf{G} \|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr}[\mathbf{G}^*(j\omega) \mathbf{G}(j\omega)] d\omega} \quad (1.2.78)$$

其中  $G^*(j\omega)$  表示矩阵  $G(j\omega)$  的共轭转置。根据 Parseval 定理, 可以得到

$$\|G\|_2 = \sqrt{\int_0^\infty \text{tr}[g^T(t)g(t)]dt} \quad (1.2.79)$$

其中  $g(t)$  是系统的脉冲响应函数矩阵,  $\text{tr}$  表示矩阵的迹, 只有当系统稳定时, 上述等式才成立。因此只有稳定的系统才可以定义 2-范数。

系统的  $\infty$ -范数则定义为

$$\|G\|_\infty = \sup_{\omega} \sigma[G(j\omega)] \quad (1.2.80)$$

其中  $\sigma(\cdot)$  表示矩阵的最大奇异值, 等价地

$$\|G\|_\infty = \sup_{u \neq 0} \frac{\|g(t) \otimes u(t)\|_2}{\|u(t)\|_2} \quad (1.2.81)$$

其中  $g(t) \otimes u(t)$  是输入与脉冲响应函数的卷积, 即系统的输出。由此还可以定义有限区间的  $\infty$ -范数

$$\|G\|_{\infty, [t_0, t_1]} = \sup_{u \neq 0} \frac{\|g(t) \otimes u(t)\|_{2, [t_0, t_1]}}{\|u(t)\|_{2, [t_0, t_1]}} \quad (1.2.82)$$

所以系统的  $\infty$ -范数可以理解为系统在给定时间段内的最大增益。另外, 系统的  $\infty$ -范数还具有下列性质

$$\|G_1 G_2\|_\infty \leq \|G_1\|_\infty \|G_2\|_\infty \quad (1.2.83)$$

这个性质在  $H_\infty$  优化理论中有广泛的应用。 $H_\infty$  优化的目标就是极小化系统的  $\infty$ -范数, 符号  $H_\infty$  中的  $H$  是指稳定系统的 Hardy 空间, 而  $\infty$  是指系统的  $\infty$ -范数。

### 1.2.7 Lyapunov 方程

Lyapunov 方程与系统的稳定性分析、可控性及可观性判据之间存在密切的关系。在 1.2.4 节中已经介绍过线性系统内部稳定性的一个充要条件是其系统矩阵的所有特征值具有负实部, 但在检验系统的稳定性时往往并不计算其特征值, 而是求解 Lyapunov

方程。系统可控性与可观性的判据有很多,前面所介绍的利用可控性及可观性矩阵的判据只是其中的一种,还可以利用系统的可控性及可观性 Grammian 矩阵是否满秩来进行判断,可控性和可观性 Grammian 矩阵也可以通过求解 Lyapunov 方程得到。

Lyapunov 代数方程的形式为

$$PA + A^T P = -Q \quad (1.2.84)$$

其中  $A$  和  $Q$  均为  $n$  维矩阵,且  $Q = Q^T \geq 0$ 。方程的解  $P$  也是对称阵,该解存在且惟一的充要条件是矩阵  $A$  的特征值满足

$$\lambda_i(A) + \lambda_j(A) \neq 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (1.2.85)$$

当  $A$  为稳定阵,即  $\operatorname{Re} \lambda_i(A) < 0$  时,式(1.2.85)成立。矩阵  $A$  稳定的充要条件为 Lyapunov 方程对于任意正定的矩阵  $Q$  存在正定解  $P$ 。

Lyapunov 微分方程的形式为

$$\dot{P}(t) = P(t)A^T + AP(t) + Q(t) \quad (1.2.86)$$

其中  $Q(t)$  为对称非负矩阵。上述 Lyapunov 代数方程和微分方程都可以利用精细积分法求解<sup>[28]</sup>。

现在介绍 Lyapunov 方程与线性定常系统的可控性和可观性 Grammian 矩阵的关系。线性定常系统(1.2.5)的可控性 Grammian 矩阵为

$$L_c = \int_0^{+\infty} e^{At} B B^T e^{A^T t} dt \quad (1.2.87)$$

可观性 Grammian 矩阵为

$$L_o = \int_0^{+\infty} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt \quad (1.2.88)$$

矩阵  $L_c$  和  $L_o$  分别满足下列两个 Lyapunov 方程

$$A L_c + L_c A^T = -B B^T \quad (1.2.89a)$$

$$A^T L_o + L_o A = -C^T C \quad (1.2.89b)$$

因此求解 Lyapunov 方程就可以得到可控性和可观性 Grammian

矩阵。

### 1.2.8 Riccati 方程

Riccati 方程在最优控制理论中起着非常重要的作用,该方程与 Hamiltonian 矩阵之间有密切的联系,本书后面的章节将详细讨论有关内容,这里先介绍一些基本的概念。

Riccati 代数方程的形式为

$$PA + A^T P - PRP + Q = 0 \quad (1.2.90)$$

其中  $A, Q, R$  是  $n$  维矩阵,且  $Q, R$  对称。

Hamiltonian 矩阵  $H$  定义为

$$H = \begin{bmatrix} A & -R \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \quad (1.2.91)$$

如果 Hamiltonian 矩阵  $H$  在虚轴上没有特征值,则当  $\lambda$  是  $H$  的特征值时,  $-\lambda$  也是  $H$  的特征值,因此如果 Hamiltonian 矩阵在复平面的左半平面有  $n$  个特征值,则在右半平面也有  $n$  个特征值。假设 Hamiltonian 矩阵在  $\text{Re}(s) < 0$  上有  $n$  个特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , 则对

应的特征向量构成一个  $2n \times n$  维矩阵  $\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ , 即

$$H \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} Z \quad (1.2.92)$$

显然矩阵  $Z$  的特征值就是  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , 即  $Z$  是稳定的矩阵。如果上式中的  $X_1$  是非奇异矩阵, 则  $X = X_2 X_1^{-1}$  是对称矩阵, 并且是 Riccati 代数方程 (1.2.90) 的解, 而且

$$H \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} (A - RX) \quad (1.2.93)$$

如果  $X$  是 Riccati 方程 (1.2.90) 的解, 并且使矩阵  $A - RX$  稳定, 则称  $X$  是 Riccati 方程的稳定化解, 并用  $X = \text{Ric}(H)$  表示。

下面再介绍 Riccati 微分方程

$$-\dot{P}(t) = P(t)A + A^T P(t) - P(t)RP(t) + Q, P(t_f) = M \quad (1.2.94)$$

及其与 Hamilton 矩阵的关系。定义下列线性方程组

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -R \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \quad (1.2.95)$$

其中  $X, Y$  是  $n \times n$  维矩阵, 并满足边界条件

$$\begin{bmatrix} X(t_f) \\ Y(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ -M \end{bmatrix} \quad (1.2.96)$$

则 Riccati 微分方程的解可以由方程组 (1.2.95) 的解构成, 即

$$P(t) = Y(t)X^{-1}(t) \quad (1.2.97)$$

对于定常系统, 还可以得到用矩阵指数函数描述的 Riccati 微分方程的解析解。过程如下:

根据 Hamilton 矩阵特征值的性质, 如果  $H$  没有虚轴上的特征值, 则可以利用其特征向量矩阵  $U$  对矩阵进行下列变换

$$U^{-1}HU = \begin{bmatrix} \Lambda_s & \\ & \Lambda_u \end{bmatrix} \quad (1.2.98)$$

其中  $\Lambda_s$  是由具有负实部的特征值组成的  $n$  维约当块矩阵 (稳定矩阵),  $\Lambda_u$  是由具有正实部的特征值组成的  $n$  维约当块矩阵 (完全不稳定矩阵)。如果将  $U$  分解成

$$U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix} \quad (1.2.99)$$

其中  $\begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{bmatrix}$  由矩阵  $H$  的所有负实部特征值对应的广义特征向量组成,  $\begin{bmatrix} U_{12} \\ U_{22} \end{bmatrix}$  由矩阵  $H$  的所有正实部特征值对应的广义特征向量组成, 对微分方程组 (1.2.95) 作线性变换

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \end{bmatrix} \quad (1.2.100)$$



得

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{X}} \\ \dot{\hat{Y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & \\ & \Lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \end{bmatrix} \quad (1.2.101)$$

上述方程已经解耦,其解可以表示为

$$\hat{X}(t_i) = e^{\Lambda_1(t_i - t)} \hat{X}(t) \quad (1.2.102a)$$

$$\hat{Y}(t_i) = e^{\Lambda_n(t_i - t)} \hat{Y}(t) \quad (1.2.102b)$$

因为

$$X = U_{11} \hat{X} + U_{12} \hat{Y} \quad (1.2.103a)$$

$$Y = U_{21} \hat{X} + U_{22} \hat{Y} \quad (1.2.103b)$$

所以当  $t = t_i$  时得

$$I = U_{11} \hat{X}(t_i) + U_{12} \hat{Y}(t_i) \quad (1.2.104a)$$

$$M = U_{21} \hat{X}(t_i) + U_{22} \hat{Y}(t_i) \quad (1.2.104b)$$

并且有

$$\hat{Y}(t_i) = -[U_{12} - MU_{12}]^{-1}[U_{21} - MU_{11}] \hat{X}(t_i) \quad (1.2.105)$$

令

$$G = -[U_{22} - MU_{22}]^{-1}[U_{21} - MU_{11}] \quad (1.2.106)$$

得到原线性方程组(1.2.95)的解

$$X(t) = [U_{11} + U_{12}e^{-\Lambda_n(t_i - t)}Ge^{\Lambda_1(t_i - t)}]e^{-\Lambda_1(t_i - t)} \hat{X}(t_i) \quad (1.2.107a)$$

$$Y(t) = [U_{21} + U_{22}e^{-\Lambda_n(t_i - t)}Ge^{\Lambda_1(t_i - t)}]e^{-\Lambda_1(t_i - t)} \hat{X}(t_i) \quad (1.2.107b)$$

Riccati 方程的解则可以表示为

$$P(t) = Y(t)X^{-1}(t) = P_1(t)P_2^{-1}(t) \quad (1.2.108)$$

其中

$$P_1(t) = [U_{21} + U_{22}e^{-A_2(t-t_0)}Ge^{A_1(t-t_0)}] \quad (1.2.109a)$$

$$P_2(t) = [U_{11} + U_{12}e^{-A_1(t-t_0)}Ge^{A_2(t-t_0)}] \quad (1.2.109b)$$

### 1.3 LQG 控制

本节介绍 LQG 控制的基本内容。考虑下列线性时变系统的控制问题

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B_1(t)w(t) + B_2(t)u(t), x(0) = 0 \quad (1.3.1a)$$

$$z(t) = C_1(t)x(t) + D_{12}(t)u(t) \quad (1.3.1b)$$

$$y(t) = C_2(t)x(t) + D_{21}(t)w(t) \quad (1.3.1c)$$

其中输入向量  $u \in \mathbf{R}^m$ , 干扰向量  $w \in \mathbf{R}^l$ , 量测向量  $y \in \mathbf{R}^q$  (即控制器的输入), 目标向量  $z \in \mathbf{R}^p$ , 状态向量  $x \in \mathbf{R}^n$ , 并假设  $p \geq m, l \geq q$ , 且  $D_{12}(t)$  和  $D_{21}(t)$  满足

$$D_{12}^T(t)D_{12}(t) = I_m \quad (1.3.2a)$$

$$D_{21}(t)D_{21}^T(t) = I_q \quad (1.3.2b)$$

控制系统设计的目的是寻找线性因果控制器  $u = \mathcal{K}y$ , 使得闭环系统从  $w$  到  $z$  的映射的 2-范数极小, 即  $\mathcal{K}_{zw}$  的 2-范数极小, 而

$$\|\mathcal{K}_{zw}\|_{2,1,t_0,t_f} = E\left\{\frac{1}{T}\int_0^{t_f} z^T z dt\right\}^{\frac{1}{2}} \quad (1.3.3)$$

所以问题就是寻找当  $w$  为单位强度的白噪声时, 使式(1.3.3)最小的控制器。式中的  $E(\cdot)$  表示取均值, 且  $T = t_f$ 。

回顾前面介绍过的带有观测器的输出反馈控制问题, LQG 控制问题与该问题的差别主要在于外界干扰信号是随机信号。因此可以参考求解该问题的思路, 通过下面的步骤来解决<sup>[1]</sup>。

### 1.3.1 全信息控制

首先考虑全信息控制问题,所有的量测反馈控制器同时也是全信息(full-information)控制器,这是因为

$$u = \mathcal{K}y = [\mathcal{K}_1 \mathcal{K}_2] \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} \quad (1.3.4)$$

所以我们首先研究可以极小化  $\|\mathcal{K}_{sw}\|_{2, \infty, t_f}$  的全信息控制器

$$u = [\mathcal{K}_1 \quad \mathcal{K}_2] \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} \quad (1.3.5)$$

如果直接考虑系统(1.3.1),则式(1.3.3)式中的 $z$ 包含 $u$ 与 $x$ 之间的交叉项,这样会使控制器的结构比较复杂,因此我们考虑下列简化的情况

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B_1(t)w(t) + B_2(t)u(t), x(t_0) = 0 \quad (1.3.6a)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} C(t)x(t) \\ D(t)u(t) \end{bmatrix} \quad (1.3.6b)$$

其中  $D^T D = I$ , 此时有  $z^T z = x^T C^T(t)C(t)x + u^T u$ 。因为一般情况下都可以通过对控制变量的变换将式(1.3.1)化为上述形式,所以这样的简化并不失一般性。此时目标函数可表示为

$$\|\mathcal{K}_{sw}\|_{2, \infty, t_f} = E \left\{ \frac{1}{T} \int_0^{t_f} [x^T C^T(t)C(t)x + u^T u] dt \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (1.3.7)$$

而相应的控制器为

$$u = [-B_2^T(t) \quad 0] \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} = -B_2^T(t)P(t)x \quad (1.3.8)$$

其中  $P(t)$  是下列 Riccati 微分方程的解

$$\begin{aligned} -\dot{P}(t) &= P(t)A(t) + A^T(t)P(t) - \\ &\quad P(t)B_2(t)B_2^T(t)P + C^T(t)C(t), P(t_f) = 0 \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

对于定常系统,可以考虑无限区间上(即  $t_f \rightarrow \infty$  时)的控制问题。设式(1.3.1)中的系数矩阵均为定常矩阵,并且  $(A, B_2)$  是可稳定的,  $(A, C)$  在虚轴上没有不可观模态,则其最优控制器为

$$u = -B_2^T P x \quad (1.3.10)$$

其中  $P$  是 Riccati 代数方程的解

$$PA + A^T P - PB_2 B_2^T P + C^T C = 0 \quad (1.3.11)$$

### 1.3.2 Kalman 滤波

对于实际系统,一般情况下无法直接测量到系统全部的状态信息和外界干扰信号。在前面的章节中,介绍过利用量测到的系统输出信息借助状态观测器估计系统的全部状态并用于反馈控制。这里仍然需要设法根据量测数据  $y$  来估计系统的状态,由于外界对系统的干扰是随机信号,因此利用 Kalman 滤波器对状态进行最优估计。Kalman 滤波器的基本概念简介如下:

对于线性系统

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)w(t), \quad x(0) = 0 \quad (1.3.12a)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)v(t) \quad (1.3.12b)$$

$$z(t) = L(t)x(t) \quad (1.3.12c)$$

其中  $D^T D \equiv I$ 。通过设计滤波器  $\mathcal{F}$  来获得对  $z = Lx$  的最优估计  $\hat{z} = \mathcal{F}y$ , 并且要求极小化下列目标函数

$$\|\mathcal{F}\|_{\text{opt}, T} = E \left\{ \frac{1}{T} \int_0^{t_f} (\hat{z} - Lx)^T (\hat{z} - Lx) dt \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (1.3.13)$$

滤波器的具体形式为

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) + Q(t)C^T(t)[y(t) - C(t)\hat{x}(t)] \quad (1.3.14a)$$

$$\hat{z}(t) = L(t)\hat{x}(t) \quad (1.3.14b)$$

其中  $Q(t)$  是 Riccati 微分方程的解

$$\begin{aligned}\dot{Q}(t) = & Q(t)A^T(t) + A(t)Q(t) - \\ & Q(t)C^T(t)C(t)Q(t) + B(t)B^T(t), Q(0) = 0\end{aligned}\quad (1.3.15)$$

显然,上述 Riccati 方程与  $L(t)$  无关,  $L(t)\hat{x}(t)$  是对  $L(t)x(t)$  的最优估计,而  $\hat{x}(t)$  则是对状态  $x(t)$  的最优估计。矩阵  $Q(t)C^T(t)$  是 Kalman 滤波器的增益,  $y(t) - C(t)\hat{x}(t)$  称为“新息”(innovations)。

现在考虑定常系统无限区间上的滤波问题,当  $t_f \rightarrow \infty$  时 Kalman 滤波器的形式为

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + QC^T[y(t) - C\hat{x}(t)] \quad (1.3.16a)$$

$$\hat{z}(t) = L\hat{x}(t) \quad (1.3.16b)$$

其中  $Q$  是代数 Riccati 方程的解

$$QA^T - AQ - QC^TCQ + BB^T = 0 \quad (1.3.17)$$

因为要求  $A - QC^TC$  的特征值具有负实部,所以只有当  $(A, C)$  可检测,  $(A, B)$  在虚轴上没有不可控模态时才存在满足要求的解。

### 1.3.3 LQG 控制

基于上述知识,现在可以解决本节开始所提出的 LQG 控制问题,其最优控制器为

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) - H(t)[y(t) - C_2(t)\hat{x}(t)] + B_2(t)u(t) \quad (1.3.18a)$$

$$u(t) = -F(t)\hat{x}(t) \quad (1.3.18b)$$

其中  $F = D_1^T C_1 + B_2^T X$ ,  $H = B_1 D_{21}^T + Y C_2^T$ , 而矩阵  $X$  和  $Y$  则分别是下列 Riccati 微分方程的解

$$-\dot{X} = XA + \bar{A}^T X - XB_2 B_2^T X + \bar{C}^T \bar{C}, X(t_f) = 0 \quad (1.3.19)$$

$$\dot{Y} = \bar{A} Y, Y\bar{A}^T = YC_2^T C_2 Y + BB^T, Y(0) = 0 \quad (1.3.20)$$

上式中

$$\bar{A} = A - B_2 D_{12}^{-1} C_1 \quad (1.3.21a)$$

$$\bar{C}^T \bar{C} = C_1^T (I - D_{12}^{-1} D_{12}^T) C_1 \quad (1.3.21b)$$

$$\bar{A} = A - B_1 D_{21}^T C_2 \quad (1.3.22a)$$

$$\bar{B} \bar{B}^T = B_1 (I - D_{21}^T D_{21}) B_1^T \quad (1.3.22b)$$

对于定常系统无限时间域的 LQG 控制问题,在满足  $(A, B_2)$  可稳定、 $(A, C_1)$  可检测,并且对所有  $\omega \in R$  都存在

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix} = n + m \quad (1.3.23a)$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{12}^T \end{bmatrix} = n + q \quad (1.3.23b)$$

时,最优量测反馈控制器可表示为

$$\dot{\hat{x}}(t) = A \hat{x}(t) + H[y(t) - C_1 \hat{x}(t)] + B_2 u(t) \quad (1.3.24a)$$

$$u(t) = -F \hat{x}(t) \quad (1.3.24b)$$

此时的  $X, Y$  是下列代数 Riccati 方程的解

$$X\bar{A} + \bar{A}^T X - X\bar{B}_2 \bar{B}_2^T X + \bar{C}^T \bar{C} = 0 \quad (1.3.25)$$

$$\bar{A} Y + Y^T \bar{A} - Y \bar{C}_2^T \bar{C}_2 Y + \bar{B} \bar{B}^T = 0 \quad (1.3.26)$$

关于 LQG 控制问题更详细的介绍可以参考专著 1,2 中的有关章节。

## 1.4 变分法基本概念

变分法是研究泛函极值的一种经典方法,在力学、光学、电磁学和自动控制等学科中有着广泛的应用。本节将介绍变分法的基本概念以便理解后续各章的内容,本节内容取自参考文献 29 ~ 31。

首先介绍泛函极小的概念,泛函规定了数  $J$  与容许函数  $x(t)$

的对应关系,如果泛函  $J[x(t)]$  在任何一条与  $x^*(t)$  接近的曲线上的值不小于  $J[x^*(t)]$ , 即  $J[x(t)] - J[x^*(t)] \geq 0$ , 则称此时泛函在曲线  $x^*(t)$  上达到极小值。

在求函数极值时导数及微分起着重要作用,而研究泛函极值时泛函的微分(常称变分)则起着类似的作用,以至将求泛函极小值和极大值的问题都叫做变分问题,求泛函极值的方法则称为变分法。

泛函宗量  $x(t)$  的变分  $\delta x(t)$  是指两函数之差,即

$$\delta x(t) = x(t) - x_1(t) \quad (1.4.1)$$

连续泛函  $J[x(t)]$  的增量可以表示为

$$\Delta J = J[x(t) + \delta x(t)] - J[x(t)] = L[x(t), \delta x(t)] + r[x(t), \delta x(t)] \quad (1.4.2)$$

其中  $L[x(t), \delta x(t)]$  是关于  $\delta x(t)$  的线性连续泛函,  $r[x(t), \delta x(t)]$  是关于  $\delta x(t)$  的高阶无穷小,称  $L[x(t), \delta x(t)]$  为泛函的变分,并记为

$$\delta J = L[x(t), \delta x(t)] \quad (1.4.3)$$

显然泛函的变分就是泛函增量的线性主部。当一个泛函具有变分时,则称该泛函是可微的。

现在给出泛函极值的必要条件。令  $x^*(t)$  是极值曲线,与  $x^*(t)$  接近的容许曲线对于所有  $t \in [t_0, t_1]$  可表示为

$$x(t) = x^*(t) + \alpha \eta(t) \quad (1.4.4)$$

其中  $\eta(t)$  是  $x(t)$  的变分,  $\alpha$  是一个很小的数。在极值曲线  $x^*(t)$  上必然有

$$\left. \frac{\partial}{\partial \alpha} J[x^*(t) + \alpha \eta(t)] \right|_{\alpha=0} = 0 \quad (1.4.5)$$

上式为泛函极值的必要条件,它和  $\eta(t)$  的选择无关。由上式得到的解可能是极大值,也可能是极小值或驻点。而泛函极小值在  $\alpha = 0$  处应满足  $\partial^2 J / \partial \alpha^2 > 0$ 。由于

$$\delta J = \left. \frac{\partial}{\partial x} J[x^\#(t) + \alpha \eta(t)] \right|_{x=0} \quad (1.4.6)$$

所以泛函极值的必要条件也可以写成

$$\delta J = 0 \quad (1.4.7)$$

现在来看一个典型的泛函极值问题:使泛函

$$E(x) = \int_0^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \quad (1.4.8)$$

在固定端点条件

$$x(0) = \alpha, \quad x(t_1) = \beta \quad (1.4.9)$$

约束下取极小的变分问题称为 Lagrange 问题。该泛函极值的必要条件可表示为

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0, (t_0 < t < t_1) \quad (1.4.10a)$$

$$x(0) = \alpha, \quad x(t_1) = \beta \quad (1.4.10b)$$

其中式(1.4.10a)称为 Euler-Lagrange 方程,一般来讲上述条件只是极值存在的必要条件而非充分条件。在许多情况下,根据问题的物理意义可以判定极值是否存在,而严格的判断极值存在与否的条件则是比较复杂的。满足式(1.4.10)的曲线  $x^\#(t, C_1, C_2)$  称为极值曲线,只有在极值曲线上泛函才能达到极值。另外,容许函数  $x(t)$  的约束条件(1.4.9)也可以直接从下列泛函极值问题中导出

$$J(x) = \int_0^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt - \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} (x - x_B) \right]_{t_0}^{t_1} \quad (1.4.11)$$

其中

$$x_B(0) = \alpha, \quad x_B(t_1) = \beta \quad (1.4.12)$$

这一点由  $\delta J(x) = 0$  经过简单的推导就可以得到。极值曲线  $x^\#(t)$  满足



$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\pi}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\pi}} = 0, (0 < t < t_f) \quad (1.4.13a)$$

及

$$x^{\pi}(t_f) = x_B(t_f), \quad x^u(t_f) = x_B(t_f) \quad (1.4.13b)$$

当泛函宗量为向量函数时, 泛函

$$J = \int_0^{t_f} L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \quad (1.4.14)$$

极值存在的必要条件为

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (1.4.15a)$$

$$\delta x^T \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \Big|_0^{t_f} = 0 \quad (1.4.15b)$$

注意式(1.4.15b)与(1.4.10b)的区别, 这个问题中对  $x(t)$  两端的取值没有约束。式(1.4.15b)通常称为横截条件。

下面介绍一类特殊的依赖于两个函数的泛函极值问题, 即泛函极值问题(1.4.8)的正则形式。首先定义  $x(t)$  的共轭变量(conjugate variable),

$$y(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \quad (1.4.16)$$

再定义 Hamilton 函数

$$H(t, x, y) = y\dot{x} - L(t, x, \dot{x}) \quad (1.4.17)$$

其中  $\dot{x}$  认为是可以由式(1.4.13)确定的  $t, x, y$  的函数。而泛函式(1.4.8)可以写成

$$I(x, y) = \int_0^{t_f} \{y\dot{x} - H(t, x, y)\} dt \quad (1.4.18)$$

泛函  $I(x, y)$  的宗量函数  $x$  和  $y$  相互独立, 其 Euler-Lagrange 方程为

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y} \quad (1.4.19a)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} \quad (1.4.19b)$$

上述方程也称为 Hamilton 正则方程, 是分析力学中重要的方程<sup>[1]</sup>。引入与式(1.4.11)一致的边界条件, 得到下列泛函

$$I(x, y) = \int_0^{t_1} \{y\dot{x} - H(t, x, y)\}dt - [y(x - x_B)]_0^{t_1} \quad (1.4.20)$$

这样就可以自然导出边界条件。泛函式(1.4.20)的驻值曲线  $x^*$ ,  $y^*$  是下列边值问题的解

$$\frac{dx^*}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y^*}, (t_0 \leq t \leq t_1) \quad (1.4.21)$$

$$\frac{dy^*}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^*}, (t_0 \leq t \leq t_1) \quad (1.4.22)$$

$$x^*(0) = x_B(0), x^*(t_1) = x_B(t_1) \quad (1.4.23)$$

泛函式(1.4.20)的另一种形式为

$$I(x, y) = \int_0^{t_1} \{y\dot{x} - H(t, x, y)\}dt - [y(x_B)]_0^{t_1} \quad (1.4.24)$$

根据式(1.4.20)定义泛函

$$J(x) = I(x, y(x)) \quad (1.4.25)$$

其中  $y(x)$  由

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} \quad (1.4.26)$$

确定。根据式(1.4.24)定义泛函

$$G(y) = I(x(y), x) \quad (1.4.27)$$

其中  $x(y)$  由

$$-\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x} \quad (1.4.28)$$

确定。如果  $H(t, x, y)$  是  $x$  的凹函数,  $y$  的凸函数, 则泛函  $I(x, y)$  的驻值  $I(x^*, y^*)$  满足

$$G(y) \leq G(y^*) - I(x^*, y^*) = J(x^*) \leq J(x) \quad (1.4.29)$$

而  $G(y)$  则称为  $J(x)$  的互补(complementary)泛函<sup>[31]</sup>。

## 1.5 常微分方程和差分方程特征值问题

本书后续章节中介绍并利用了 Hamilton 微分方程和差分方程特征值问题的有关定理和结论,作为基础,本节对常微分方程和差分方程特征值问题的基本概念作简单介绍,本节内容主要取自参考文献 32,33。

### A: 常微分方程边值问题

考虑一阶微分方程组的边值问题

$$\dot{y}(t) - A(t)y(t) = f(t), t \in [a, b] \quad (1.5.1a)$$

其边界条件为

$$B_a y(a) + B_b y(b) = r \quad (1.5.1b)$$

其中矩阵  $A(t) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ , 常矩阵  $B_a \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $B_b \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 。如果  $B_a = I$  且  $B_b = 0$ , 则边值问题成为通常的初值问题。

对于 2 维的情况, 若令

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0, & \frac{1}{p(x)} \\ -q(x) & 0 \end{bmatrix} \quad (1.5.2a)$$

$$y = \begin{Bmatrix} u \\ p(x)\dot{u} \end{Bmatrix} \quad (1.5.2b)$$

$$f(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ g(t) \end{Bmatrix} \quad (1.5.2c)$$

$$B_a = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.5.3a)$$

$$B_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix} \quad (1.5.3b)$$

则边值问题式(1.5.1)就是 Sturm 边值问题。

### B: 常微分方程特征值问题

考虑一阶微分方程组

$$\dot{y}(t) - A(t, \lambda)y(t) = 0, t \in [a, b] \quad (1.5.4a)$$

其边界条件为

$$B_a(\lambda)y(a) + B_b(\lambda)y(b) = 0 \quad (1.5.4b)$$

其中  $A(t, \lambda) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $B_a(\lambda) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $B_b(\lambda) \in \mathbf{R}^{n \times n}$  在  $a \leq t \leq b$  上关于  $\lambda$  是解析的, 且  $\text{rank}(B_a(\lambda), B_b(\lambda)) = n$  对所有  $\lambda$  都成立。若  $\lambda$  使齐次边值问题(1.5.1)具有非零解  $y(t)$ , 则称是该边值问题的特征值, 对应的解  $y(t) = y(t, \lambda)$  则称为关于  $\lambda$  的特征函数。许多常微分方程边值问题中的边界条件常常具有分离或部分分离的形式, 例如

$$B_a(\lambda) = \begin{bmatrix} C_a(\lambda) \\ C_{ba}(\lambda) \end{bmatrix}, \quad B_b(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 \\ C_b(\lambda) \end{bmatrix} \quad (1.5.5a, b)$$

### C: Sturm-Liouville 微分方程特征值问题

考虑下列二阶常微分方程的边值问题

$$\frac{d}{dt}[p(t)\dot{u}] + q(t)u + \lambda r(t)u = 0, \quad t \in [a, b] \quad (1.5.6a)$$

其边界条件为

$$\alpha_1 u(a) + \alpha_2 \dot{u}(a) = 0 \quad (1.5.6b)$$

$$\beta_1 u(b) + \beta_2 \dot{u}(b) = 0 \quad (1.5.6c)$$

其中  $p(t), q(t), r(t)$  都是定义在区间  $[a, b]$  上的实值连续函数;  $\alpha_i, \beta_i$  均为实数 ( $i = 1, 2$ ), 对于这个特征值问题,  $\lambda$  是实数。此特征值问题称为 Sturm-Liouville 特征值问题

当 Sturm-Liouville 条件成立, 即  $p(t) \in C^1[a, b], q(t), r(t) \in$

$C[a, b]; p(t) > 0, r(t) > 0, t \in [a, b]; \alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0, \beta_1^2 + \beta_2^2 > 0$  时, 有下面的基本定理:

1. 对应于每个特征值的特征函数除了一个常数因子外是惟一确定的。

2. 所有的特征值都是实数

3. 特征值存在定理: 边值问题(1.5.3)有可数无穷多个特征值  $\lambda_n (n = 0, 1, 2, \dots)$ , 并可按其大小排列成

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots \rightarrow +\infty \quad (1.5.7)$$

而且存在常数  $c, C > 0$ , 使对充分大的  $n$  有

$$cn^2 \leq \lambda_n \leq Cn^2 \quad (1.5.8)$$

且对应于  $\lambda_n$  的特征函数  $u_n(t) (n = 0, 1, 2, \dots)$  在区间  $(a, b)$  内恰好有  $n$  个零点。

#### D: Sturm-Liouville 差分方程特征值问题

Sturm-Liouville 差分方程具有下列形式

$$\Delta(p_{k-1}\Delta y_{k-1}) + (q_k + \lambda r_k)y_k = 0 \quad (1.5.9a)$$

边界条件为

$$\alpha_0 y_0 + \alpha_1 y_1 = 0 \quad (1.5.9b)$$

$$\alpha_N y_N + \alpha_{N+1} y_{N+1} = 0 \quad (1.5.9c)$$

其中  $\Delta$  为差分算子,  $k \in [1, N-1]$ , 且  $\lambda$  与  $k$  无关, 而  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_N, \alpha_{N+1}$  则是给定的常数。当  $p_k, q_k, r_k$  为实数时, 特征值  $\lambda$  亦为实数。若  $\lambda_m$  和  $\lambda_n$  是两个不同的特征值, 并记  $\phi_{m,k}$  和  $\phi_{n,k}$  是相对应的特征函数, 则有

$$\sum_{k=1}^N r_k \phi_{m,k} \phi_{n,k} = 0 \quad (1.5.10)$$

若取  $r_k > 0$ , 则上式表明特征函数  $\{\sqrt{r_k} \phi_{m,k}\} (m = 1, 2, \dots, N)$  是相互正交的, 也称函数  $\phi_{m,k}$  是加权正交的, 加权系数为  $r_k$ 。

## 参考文献

- 1 Green M, Limbeer D J N. Linear Robust Control. New Jersey: Prentice Hall, 1995
- 2 Burl J B. Linear Optimal Control —  $H_2$  and  $H_\infty$  Methods. California: Addison Wesley Longman, 1998
- 3 解学书, 钟宜生.  $H_\infty$  控制理论. 北京: 清华大学出版社, 1994
- 4 申铁龙.  $H_\infty$  控制理论及应用. 北京: 清华大学出版社, 1996
- 5 吴敏, 桂卫华. 现代鲁棒控制. 长沙: 中南工业大学出版社, 1998
- 6 Zhou K M, Doyle J C, Glover K. Robust and Optimal Control. New Jersey: Prentice Hall, 1996
- 7 Francis B A. A Course in  $H_\infty$  Control Theory. New York: Springer-Verlag, 1987
- 8 Kwakernaak H. Robust control and  $H_\infty$  optimization — a tutorial paper. Automatica, 1993, 29(2): 255~273
- 9 Mehrmann V, Xu H G. Numerical methods in control. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2000, 123: 371~394
- 10 Lin W W, Wang C S, Xu Q F. Numerical computation of the minimal  $H_\infty$  norm of the discrete time output feedback control problem. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2000, 38(2): 515~547
- 11 薛定宇. 控制系统计算机辅助设计-MATLAB 语言及应用. 北京: 清华大学出版社, 1996
- 12 Basar T, Bernhard P.  $H_\infty$ -optimal Control and Related Minimax Design Problems. Boston: Birkhauser, 1995
- 13 Boyd S, Ghaoui L E, Feron E, Balakrishnan V. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994
- 14 Boyd S, Balakrishnan V, Kabamba P. A bisection method for computing the  $H_\infty$  norm of a transfer matrix and related problems. Mathematics of Control Signals and Systems, 1989, 2: 207~219
- 15 胡庭姝, 陈力. 一种新的  $H_\infty$  优化方法: 梯度方法. 自动化学报, 1996,

- 22(2): 145~153
- 16 Gahinet P, Laub A J. Numerically reliable computation of optimal performance in singular  $H_\infty$  control. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1997, 35(5): 1690~1710
- 17 Subrahmanyam M B. Synthesis of finite-interval  $H_\infty$  controller by state space methods. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 1990, 13: 621~629
- 18 Imae J, Wanyoike G.  $H_\infty$  norm computation for LTV systems using nonlinear optimal control algorithms. *International Journal of Control*, 1996, 63(1): 161~182
- 19 Zhong W X, Howson W P, Williams F W.  $H_\infty$  control state feedback and Rayleigh quotient. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2001, 191: 489~501
- 20 Zhong W X, Williams F W.  $H_\infty$  filtering with secure eigenvalue calculation and precise integration. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1999, 46: 1017~1030
- 21 钟万勰.  $H_\infty$  状态反馈与瑞利商精细积分. *计算力学学报*, 1998, 15(4): 1~8
- 22 Zhong W X. Variational Method and Computation for  $H_\infty$  Control. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2000, 21(12): 1407~1416
- 23 Kratz W. An oscillation theorem for self adjoint differential systems and the Rayleigh principle for quadratic functionals. *Journal of the London Mathematical Society*, 1995, 51: 401~416
- 24 Boher M. Discrete Linear Hamiltonian Eigenvalue Problems. *Computers & Mathematics with Applications*, 1998, 36: 179~192
- 25 Bittanti S, Laub A J, Willems J C. The Riccati Equation. Heidelberg: Springer Verlag, 1991
- 26 Choi C H, Laub A J. Efficient matrix-valued algorithms for solving stiff DREs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1990, 35: 770~776
- 27 钟万勰, 欧阳华江, 邓子辰. 计算结构力学与最优控制. 大连: 大连理

工大学出版社,1993

- 28 钟万勰. 应用力学对偶体系. 北京:科学出版社,2002
- 29 林喆. 变分法与最优控制. 哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,1987
- 30 艾利斯哥尔兹. 变分法. 北京:人民教育出版社,1958
- 31 Arthurs A M. Complementary Variational Principles. Oxford: Clarendon Press,1980
- 32 邓宗琦. 常微分方程边值问题和 Sturm 比较理论引论. 武汉:华中师范大学出版社,1990
- 33 尤秉礼. 常微分方程补充教程. 北京:人民教育出版社,1981



---

## 第二章 离散系统 $H_\infty$ 全信息控制

全信息(full-information)控制是指受控系统的状态及外界干扰信号都可用于反馈的控制,即控制器的形式为  $u = K[x^T, w^T]^T$ <sup>[1][2]</sup>。 $H_\infty$ 控制的目的是极小化闭环系统从干扰输入到参考输出的  $H_\infty$  范数。对于随机干扰输入信号,系统的性能指标  $J(v, w)$  成为随机变量,对性能指标的极小化则成为对其期望值  $E[J(v, w)]$  的极小化。为便于表述,本书中的讨论将基于干扰输入属于平方可积信号集合的前提(即能量有限)。

本章将首先简要介绍离散系统  $H_\infty$  全信息控制的基本概念和基本理论;基于  $H_\infty$  控制理论进行实际控制系统的设计时需要解决的一个基本问题是确定系统的最优  $H_\infty$  性能指标  $\gamma_{\text{opt}}$ ,即最优  $H_\infty$  诱导范数。 $\gamma_{\text{opt}}$  与 Riccati 差分方程解的存在性有密切的关系,而 Riccati 方程的解又可以由 Hamilton 差分方程的解构造。本章还将通过建立  $\gamma_{\text{opt}}$  与 Hamilton 差分系统特征值问题之间的联系,给出计算  $\gamma_{\text{opt}}$  的方法。

### 2.1 离散 $H_\infty$ 全信息控制

考虑如下线性时变系统

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k + D_k w_k, \quad x_0 = 0 \quad (2.1.1)$$

$$z_k = H_k x_k + N_k u_k \quad (2.1.2)$$

其中  $k \in [0, N-1]$ , 状态向量  $x_k \in \mathbf{R}^n$ , 干扰向量  $w_k \in \mathbf{R}^l$ , 控制向量  $u_k \in \mathbf{R}^m$ , 输出向量  $z_k \in \mathbf{R}^p$ ,  $A_k, B_k, D_k, H_k$  及  $N_k$  均为具有恰当维数的矩阵,  $N_k^T [H_k \quad N_k] = [0 \quad I]$ , 并令  $H_k^T H_k = Q_k$ 。

最优  $H_\infty$  控制是指确定控制序列  $u^*$  使得

$$\gamma_{\text{opt}} := \inf_u \| \mathcal{G}_{zu}(u) \|_{[0, N-1]} = \| \mathcal{G}_{zw}(u^*) \|_{[0, N-1]} \quad (2.1.3)$$

上式中的  $\gamma_{\text{opt}}$  就是系统的最优  $H_\infty$  诱导范数, 也称为最优  $H_\infty$  性能指标<sup>[1]</sup>。另外, 上式中

$$\| \mathcal{G}_{zw}(u) \|_{[0, N-1]} := \sup_w \frac{\| \mathcal{G}_{zw}(u) \|_2}{\| w \|_2} \quad (2.1.4)$$

其中

$$\| \mathcal{G}_{zu}(u) \|_2 = \left( \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} z_k^T z_k + \frac{1}{2} x_N^T Q_f x_N \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.1.5)$$

$$\| w \|_2 = \left( \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} w_k^T w_k \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.1.6)$$

式中干扰输入  $w \in \mathcal{L}_2[0, N-1]$ ,  $Q_f$  是对称正定阵。但是按照 (2.1.3) 所定义的目标函数研究问题通常比较困难, 因此考虑下列形式的目标函数以方便研究<sup>[3~5]</sup>。

$$\| \mathcal{G}_{zu}(u) \|_{[0, N-1]} < \gamma \quad (2.1.7)$$

这样问题就成为一个次优  $H_\infty$  控制问题, 即在  $\mathcal{L}_2[0, N-1]$  空间中寻找控制序列  $\{u_k\}$

$$u_k = \mathcal{F} x_k \quad (2.1.8)$$

使得

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} z_k^T z_k + \frac{1}{2} x_N^T Q_f x_N < \frac{1}{2} \gamma^2 \sum_{k=0}^{N-1} w_k^T w_k \quad (2.1.9)$$

其中  $\mathcal{F}$  是线性因果算子。这样就可以引入如下形式的目标函数

$$\begin{aligned} J_\gamma(u, w) &= \| \mathcal{G}_{zu}(u) \|_2^2 - \gamma^2 \| w \|_2^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} z_k^T z_k + \frac{1}{2} x_N^T Q_f x_N - \frac{1}{2} \gamma^2 \sum_{k=0}^{N-1} w_k^T w_k \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

**定理 2.1<sup>[1]</sup>** 对于给定的  $\gamma$ , 当且仅当

$$\gamma^2 I - D_k^T (I + M_{k+1} B_k B_k^T)^{-1} M_{k+1} D_k > 0 \quad (2.1.11)$$

成立时,存在满足条件的次优  $H_\gamma$  控制器,上式中的  $M_{k+1}$  满足

$$M_k = Q_k + A_k^T M_{k+1} \Lambda_k^{-1} A_k, \quad M_N = Q_N \quad (2.1.12)$$

其中

$$\Lambda_k = I + (B_k B_k^T - \gamma^{-2} D_k D_k^T) M_{k+1} \quad (2.1.13)$$

也可以将式(2.1.12)、(2.1.13)写成 Riccati 差分方程的形式

$$M_k = Q_k + A_k^T M_{k+1} [I + (B_k B_k^T - \gamma^{-2} D_k D_k^T) M_{k+1}]^{-1} A_k \quad (2.1.14)$$

此时的反馈控制  $u$  及干扰  $w$  分别为

$$u_k = -(I - B_k^T M_{k+1} B_k)^{-1} B_k^T M_{k+1} (D_k w_k - A_k x_k) \quad (2.1.15a)$$

$$w_k = \gamma^{-2} D_k^T M_{k+1} \Lambda_k^{-1} A_k x_k \quad (2.1.15b)$$

而且

$$J_\gamma(u, w) = x_0^T M_0 x_0 \quad (2.1.16)$$

若定义  $\gamma$  的集合  $\Gamma := \{\gamma > 0; \text{式}(2.1.11) \text{成立}\}$ , 并令  $\dot{\gamma}$  为  $\Gamma$  的下确界, 即  $\gamma := \inf\{\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ , 则有

$$\gamma_{\text{opt}} = \dot{\gamma} \quad (2.1.17)$$

□

按照时变系统  $H_\gamma$  控制器的形式, 可以给出下列线性定常系统

$$x_{k+1} = A x_k + B u_k + D w_k \quad (2.1.18)$$

$$z_k = H x_k + N u_k \quad (2.1.19)$$

在有限区间  $k \in [0, N-1]$  上的  $H_\gamma$  控制器。即对于给定的  $\gamma > 0$ , 当且仅当

$$\gamma^2 I - D^T (I + M_{k+1} B B^T)^{-1} M_{k+1} D > 0 \quad (2.1.20)$$

成立时, 存在满足条件的次优  $H_\gamma$  控制器,  $M_{k+1}$  是满足下列方程的矩阵序列

$$M_k = Q + A^T M_{k+1} \Lambda_k^{-1} A, \quad M_N = Q_N \quad (2.1.21)$$

$$\Lambda_k = I + (BB^T - \gamma^{-2}DD^T)M_{k+1} \quad (2.1.22)$$

即

$$M_k = Q + A^T M_{k+1} [I + (BB^T - \gamma^{-2}DD^T)M_{k+1}]^{-1} A \quad (2.1.23)$$

此时反馈控制及干扰分别为

$$u_k = -(I + B^T M_{k+1} B)^{-1} B^T M_{k+1} (Dw_k + Ax_k) \quad (2.1.24a)$$

$$w_k = \gamma^{-2} D^T M_{k+1} \Lambda_k^{-1} A x_k \quad (2.1.24b)$$

定常系统无限区间次优  $H_\infty$  控制器存在的条件则为

$$\gamma^2 I - D^T (I + MBB^T)^{-1} MD > 0 \quad (2.1.25)$$

其中的  $M$  为 Riccati 代数方程的解

$$M = Q + A^T M [I + (BB^T - \gamma^{-2}DD^T)M]^{-1} A \quad (2.1.26)$$

由上述结论可知  $H_\infty$  全信息控制器存在与否是由 Riccati 方程解的存在性及约束条件(2.1.11)决定的,事实上条件(2.1.11)等价于要求(2.1.13)中定义的矩阵  $\Lambda_k$  所有特征值为正<sup>[1]</sup>。显然对于  $Q_f > 0$  的边界条件,若  $\gamma$  的取值使得  $\Lambda_k$  奇异,则 Riccati 方程(2.1.14)的解亦不存在,所以这时通过 Riccati 方程解的存在性条件就可以判断满足条件的  $H_\infty$  全信息控制器存在与否。

文献 1,4,5 中还介绍了仅利用系统状态反馈的  $H_\infty$  控制器的存在条件与具体形式,这里也简单介绍一下。仍然考虑系统(2.1.1 ~ 2.1.2) 满足性能指标式(2.1.7)的  $H_\infty$  控制问题,如果控制器只能利用系统的状态信息进行反馈,则有如下定理:

**定理 2.2<sup>[1,4]</sup>** 对于给定的  $\gamma$ , 当且仅当

$$\gamma^2 I - D_k^T M_{k+1} D_k > 0 \quad (2.1.27)$$

成立时,存在满足条件的次优  $H_\infty$  控制器,其中  $M_{k+1}$  由下列方程定义

$$M_k = Q_k + A_k^T M_{k+1} \Lambda_k^{-1} A_k, \quad M_N = Q_f \quad (2.1.28)$$

而

$$\Lambda_k = I + (B_k B_k^T - \gamma^{-2} D_k D_k^T) M_{k+1} \quad (2.1.29)$$

或者写成 Riccati 差分方程的形式

$$M_k = Q_k + A_k^T M_{k+1} [I + (B_k B_k^T - \gamma^{-2} D_k D_k^T) M_{k+1}]^{-1} A_k \quad (2.1.30)$$

此时状态反馈控制  $u$  及干扰  $w$  分别为

$$u_k = -B_k^T M_{k+1} \Lambda_k^{-1} A_k x_k \quad (2.1.31a)$$

$$w_k = \gamma^{-2} D_k^T M_{k+1} \Lambda_k^{-1} A_k x_k \quad (2.1.31b)$$

而且

$$J_r(u, w) = x_0^T M_0 x_0 \quad (2.1.32)$$

条件(2.1.27)意味着(2.1.29)中  $\Lambda_k$  的可逆性,反之则不然。

定义集合  $\Gamma_1 := \{\gamma > 0; \text{式(2.1.27)成立}\}$ , 并令  $\hat{\gamma}$  为  $\Gamma_1$  的下确界, 即  $\hat{\gamma} := \inf\{\gamma := \gamma \in \Gamma_1\}$ , 则有

$$\gamma_{opt} = \hat{\gamma} \quad (2.1.33)$$

并且  $\hat{\gamma} < \tilde{\gamma}$ , 即全信息  $H_\infty$  控制系统的性能指标要优于状态反馈  $H_\infty$  控制系统。□

基于时变系统  $H_\infty$  控制器的形式, 可以给出线性定常系统

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + Dw_k \quad (2.1.34)$$

$$z_k = Hx_k + Nu_k \quad (2.1.35)$$

在有限区间  $k \in [0, N-1]$  上的  $H_\infty$  控制器。即对于给定的  $\gamma > 0$ , 当且仅当

$$\gamma^2 I - D^T M_{k+1} D > 0 \quad (2.1.36)$$

成立时, 存在满足条件的次优  $H_\infty$  控制器,  $M_{k+1}$  是满足下列方程的矩阵序列

$$M_k = Q + A^T M_{k+1} \Lambda_k^{-1} A, \quad M_N = Q_f \quad (2.1.37)$$

$$\Lambda_k = I - (BB^T - \gamma^{-2} DD^T) M_{k+1} \quad (2.1.38)$$

即

$$M_k = Q + A^T M_{k+1} [I + (BB^T - \gamma^{-2} DD^T) M_{k+1}]^{-1} A \quad (2.1.39)$$

此时状态反馈控制及干扰分别为

$$u_k = -B^T M_{k+1} A_k^{-1} A x_k \quad (2.1.40a)$$

$$w_k = \gamma^{-2} D^T M_{k+1} A_k^{-1} A x_k \quad (2.1.40b)$$

无限区间次优  $H_\infty$  控制器存在的条件则为

$$\gamma^2 I - D^T M D > 0 \quad (2.1.41)$$

其中  $M$  为 Riccati 代数方程的解

$$M = Q + A^T M [I + (BB^T - \gamma^{-2} DD^T) M]^{-1} A \quad (2.1.42)$$

现在仍然考虑本节开头讨论的离散  $H_\infty$  全信息控制问题。引入 Lagrange 乘子  $\lambda_{k+1}$ , 可以将系统方程约束条件(2.1.1)代入目标函数得到其增广形式

$$\begin{aligned} J_\gamma(u, w, \lambda) = & \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [x_k^T Q_k x_k + u_k^T u_k - \gamma^2 w_k^T w_k + \\ & \lambda_{k+1}^T (A_k x_k + D_k w_k + B_k u_k - x_{k+1})] + \\ & \frac{1}{2} x_N^T Q_f x_N \end{aligned} \quad (2.1.43)$$

由最优的必要条件, 即  $\delta J_\gamma(u, w, \lambda) = 0$ , 可得

$$u_k = -B_k^T \lambda_{k+1} \quad (2.1.44a)$$

$$w_k = \gamma^{-2} D_k^T \lambda_{k+1} \quad (2.1.44b)$$

以及对偶形式的 Hamilton 差分方程边值问题

$$x_{k+1} = A_k x_k + (\gamma^{-2} D_k D_k^T - B_k B_k^T) \lambda_{k+1} \quad (2.1.45a)$$

$$\lambda_k = C_k^T C_k x_k + A_k^T \lambda_{k+1} \quad (2.1.45b)$$

边界条件为

$$x_0 = 0 \quad (2.1.46a)$$

$$\lambda_N = Q_f x_N \quad (2.1.46b)$$

将式(2.1.44)代入式(2.1.43)可得

$$\begin{aligned}
J_\gamma(x, \lambda) = & \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ -\lambda_{k+1}^\top x_{k+1} - \frac{1}{2} \lambda_{k+1}^\top B_k B_k^\top \lambda_{k+1} + \right. \\
& \left. \frac{1}{2} \gamma^{-2} \lambda_{k+1}^\top D_k D_k^\top \lambda_{k+1} + \lambda_{k+1}^\top A_k x_k + \frac{1}{2} x_k^\top Q_k x_k \right\} + \\
& \frac{1}{2} x_N^\top Q_N x_N
\end{aligned} \quad (2.1.47)$$

显然上式存在驻值与差分方程边值问题(2.1.45)、(2.1.46)存在非平凡解是等价的,还可以将差分方程的特征值表达为一个两类变量广义 Rayleigh 商驻值的形式,即

$$\gamma^{-2} = \inf \frac{\Pi_1}{\Pi_2} \quad (2.1.48)$$

其中  $\Pi_1$  和  $\Pi_2$  分别为

$$\begin{aligned}
\Pi_1 = & \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \lambda_{k+1}^\top x_{k+1} - \lambda_{k+1}^\top A_k x_k - \frac{1}{2} x_k^\top Q_k x_k + \right. \\
& \left. \frac{1}{2} \lambda_{k+1}^\top B_k B_k^\top \lambda_{k+1} \right\} - \frac{1}{2} x_N^\top Q_N x_N
\end{aligned} \quad (2.1.49a)$$

$$\Pi_2 = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_{k+1}^\top D_k D_k^\top \lambda_{k+1} \quad (2.1.49b)$$

广义 Rayleigh 商的驻值(特征值)满足  $\gamma_1^{-2} \leq \gamma_2^{-2} \leq \dots$ , 即  $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \dots$ 。后面还将证明式(2.1.48)等价于通常的一类变量 Rayleigh 商驻值问题,即广义矩阵特征值问题。

## 2.2 Hamilton 差分系统特征值

线性 Hamilton 差分系统的近期研究成果见文献[6~8],本节介绍 Hamilton 差分系统特征值问题的基本概念和定理。

考虑下列差分方程边值问题

$$\Delta x_k = \tilde{A}_k(\rho) x_k + \tilde{B}_k(\rho) \lambda_{k+1} \quad (2.2.1a)$$

$$\Delta \lambda_k = \tilde{C}_k(\rho) x_k - \tilde{A}_k^T(\rho) \lambda_{k+1} \quad (2.2.1b)$$

共轭边界条件为

$$R^* \begin{bmatrix} -x_0 \\ x_N \end{bmatrix} + R \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_N \end{bmatrix} = 0 \quad (2.2.2)$$

其中  $k \in [0, N-1]$ , 前向差分算子  $\Delta$  定义为  $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ ,  $\rho$  为实数,  $R$  和  $R^*$  为  $2n \times 2n$  矩阵并分别满足

$$\text{rank}(R R^*) = 2n \quad (2.2.3a)$$

$$R R^{*\top} = R^* R^T \quad (2.2.3b)$$

另外, 对于所有的  $k \in [0, N-1]$ ,  $n \times n$  矩阵  $\tilde{A}_k(\rho)$ ,  $\tilde{B}_k(\rho)$ ,  $\tilde{C}_k(\rho)$  是  $\rho$  的连续可微函数。而矩阵

$$H_k(\rho) = \begin{bmatrix} -\tilde{C}_k(\rho) & \tilde{A}_k^T(\rho) \\ \tilde{A}_k(\rho) & \tilde{B}_k(\rho) \end{bmatrix} \quad (2.2.4)$$

为对称 Hamilton 矩阵。如果实数  $\rho$  使得 Hamilton 差分方程边值问题 (2.2.1)、(2.2.2) 存在满足边界条件的非平凡解  $(x, \lambda)$ , 则  $\rho$  为 Hamilton 差分系统 (2.2.1)、(2.2.2) 的特征值, 而相应的解  $(x, \lambda)$  称为特征函数。

如果边界条件 (2.2.2) 可以写成下面的形式, 则称其为可分离边界条件

$$R = \begin{bmatrix} R_0 & 0 \\ 0 & R_{N+1} \end{bmatrix} \quad (2.2.5a)$$

$$R^* = \begin{bmatrix} -R_0^* & 0 \\ 0 & R_{N+1}^* \end{bmatrix} \quad (2.2.5b)$$

其中的  $n \times n$  矩阵  $R_0, R_0^*, R_{N+1}, R_{N+1}^*$  分别满足

$$\text{rank}(R_0 R_0^*) = \text{rank}(R_{N+1} R_{N+1}^*) = n \quad (2.2.6)$$

$$R_0 R_0^{*\top} = R_0^* R_0^T \quad (2.2.7a)$$

$$R_{N+1} R_{N+1}^{*\top} = R_{N+1}^* R_{N+1}^T \quad (2.2.7b)$$

若对于  $k \in [0, N]$ ,  $n \times n$  矩阵  $X_k, \Lambda_k$  (代替向量  $x_k, \lambda_k$ ) 是式



(2.2.1) 的解, 并且有

$$\text{rank}(X_k^\top \Lambda_k) = n, X_k^\top \Lambda_k = \Lambda_k^\top X_k \quad (2.2.8)$$

则称 \$(X, \Lambda)\$ 为式 (2.2.1) 的一个联合基 (conjoined basis)。如果存在两个联合基 \$(X, \Lambda)\$ 和 \$(\tilde{X}, \tilde{\Lambda})\$ 满足

$$X_k^\top \tilde{\Lambda}_k - \Lambda_k^\top \tilde{X}_k = I \quad (2.2.9)$$

则称它们是式 (2.2.1) 的正则联合基 (normalized conjoined bases)。其中 \$I\$ 是 \$n \times n\$ 单位矩阵。

**定理 2.3<sup>[5]</sup>**: 设 \$(X, \Lambda)\$ 和 \$(\tilde{X}, \tilde{\Lambda})\$ 为式 (2.2.1) 的正则联合基。则 \$\rho\$ 为式 (2.2.1)、(2.2.2) 的特征值当且仅当下列 \$2n \times 2n\$ 阶矩阵

$$U = R^* \begin{bmatrix} -X_0 & -\tilde{X}_0 \\ X_N & \tilde{X}_N \end{bmatrix} + R \begin{bmatrix} \Lambda_0 & \tilde{\Lambda}_0 \\ \Lambda_N & \tilde{\Lambda}_N \end{bmatrix} \quad (2.2.10)$$

为奇异矩阵。 \$\square\$

**定理 2.4<sup>[7]</sup>**: 如果边界条件为可分离形式, 令 \$(X, \Lambda)\$ 为式 (2.2.1) 的联合基, 且

$$X_N = -R_N^\top \quad (2.2.11a)$$

$$\Lambda_N = R_N^{*\top} \quad (2.2.11b)$$

则 \$\rho\$ 是系统 (2.2.1)、(2.2.2) 的一个特征值当且仅当 \$n \times n\$ 矩阵

$$R_0^* X_0 + R_0 \Lambda_0 \quad (2.2.12)$$

为奇异阵。

**证明** 这里给出的证明与文献 6 中系定理 1 的证明类似。对于上述联合基, 必然存在式 (2.2.1) 的另一个二联合基 \$(\tilde{X}, \tilde{\Lambda})\$ 与 \$(X, \Lambda)\$ 构成正则基<sup>[6]</sup>。根据定理 2.3, \$\rho\$ 是式 (2.2.1)、(2.2.2) 的特征值当且仅当

$$\begin{aligned} U &= R^* \begin{bmatrix} -X_0 & -\tilde{X}_0 \\ X_N & \tilde{X}_N \end{bmatrix} + R \begin{bmatrix} \Lambda_0 & \tilde{\Lambda}_0 \\ \Lambda_N & \tilde{\Lambda}_N \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} R^* & 0 \\ 0 & R_N^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -X_0 & -\tilde{X}_0 \\ -R_N^\top & \tilde{X}_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_0 & 0 \\ 0 & R_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_0 & \tilde{\Lambda}_0 \\ R_N^{*\top} & \tilde{\Lambda}_N \end{bmatrix} = \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} R_0^* X_0 + R_0 \Lambda_0 & R_0^* \tilde{X}_0 + R_0 \tilde{\Lambda}_0 \\ -R_0^* R_N^T + R_0 \Lambda_N^T & R_0^* \tilde{X}_N + R_0 \tilde{\Lambda}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_0^* X_0 + R_0 \Lambda_0 & R_0^* \tilde{X}_0 + R_0 \tilde{\Lambda}_0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$$

为奇异矩阵。显然这等价于  $R_0^* X_0 + R_0 \Lambda_0$  是奇异矩阵。  $\square$

现在考察 Riccati 方程与 Hamilton 方程的关系, 令  $\tilde{A}_k(\rho) = I + A_k$ ,  $\tilde{B}_k(\rho) = \gamma^{-2} D_k D_k^T - B_k B_k^T$ ,  $\tilde{C}_k(\rho) = -H_k^T H_k$ , 则方程 (2.2.1) 可以变换为与式 (2.1.45) 一致的形式, 从而 Riccati 方程 (2.1.14) 的解序列可以由联合基  $(X, \Lambda)$  构造<sup>[8]</sup>。令  $P_k = \Lambda_k X_k^{-1}$ , 式 (2.1.45) 可写成如下矩阵形式

$$P_k = H_k^T H_k + A_k^T P_{k+1} (X_k X_{k+1}^{-1})^{-1} \quad (2.2.13a)$$

$$I = A_k X_k X_{k+1}^{-1} + (\gamma^{-2} D_k D_k^T - B_k B_k^T) P_{k+1} \quad (2.2.13b)$$

若  $I + (B_k B_k^T - \gamma^{-2} D_k D_k^T) P_{k+1}$  可逆, 由上式可得

$$P_k = H_k^T H_k + A_k^T P_{k+1} [I + (B_k B_k^T - \gamma^{-2} D_k D_k^T) P_{k+1}]^{-1} A_k \quad (2.2.14)$$

显然式 (2.2.14) 与 Riccati 方程 (2.1.14) 一致。考虑到 (2.1.30) 式, 令

$$R^* = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & Q_f \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \quad (2.2.15)$$

则对于联合基  $(X, \Lambda)$  有:  $X_N = I$ ,  $\Lambda_N = Q_f$ ,  $P_N = \Lambda_N X_N^{-1} = Q_f$  并且  $R_0 = 0$ ,  $R_0^* = I$ 。按照定理 2.3, 矩阵

$$R_0^* X_0 + R_0 \Lambda_0 = X_0 \quad (2.2.16)$$

是奇异的当且仅当  $\gamma^{-2}$  是 Hamilton 差分系统 (2.1.45) (2.1.46) 的特征值。显然, 在这种情况下 Riccati 方程解矩阵中的元素在  $k = 0$  时将趋于无穷大。

## 2.3 广义 Rayleigh 商

考虑下列广义特征值问题

$$(K - \rho M)d = 0 \quad (2.3.1)$$

其中对称矩阵  $K \geq 0, M > 0$  及向量  $d \in \mathbf{R}^{2n+n}$ , 且分别具有下列形式

$$K = \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{ub} & & \\ & K_{bu} + K_{uu} & & \\ & & \ddots & K_{bN} \\ \text{symmetry} & & & K_{bN} + S_f^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.3.2a)$$

$$M = \begin{bmatrix} M_0 & & & \\ & M_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_N \end{bmatrix} \quad (2.3.2b)$$

$$d = [d_0^T, d_1^T, \dots, d_N^T]^T \quad (2.3.2c)$$

其中  $K_{uu}, K_{bb}$  为对称阵,  $K_{ub}^T = K_{bu}, K_{uu}, K_{bu}, K_{bb} \in \mathbf{R}^{n \times n}, d_i \in \mathbf{R}^n (i = 0, 1, \dots, N)$ 。广义特征值问题 (2.3.1) 的特征值是下列 Rayleigh 商的驻值

$$\rho = \text{st} \frac{d^T K d}{d^T M d} \quad (2.3.3)$$

为与方程 (2.1.1) 的初始条件一致, 设  $d_0 = 0$ , 则有

$$\rho = \text{st} \frac{\sum_{k=0}^{N-1} U_k^r(d_k, d_{k+1}) + \frac{1}{2} d_N^T S_f^{-1} d_N}{\sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2} d_{k+1}^T M_{k+1} d_{k+1}} \quad (2.3.4)$$

其中

$$U_k^r(d_k, d_{k+1}) = \frac{1}{2} d_k^T K_{uu} d_k + d_{k-1}^T K_{buk} d_k + \frac{1}{2} d_{k+1}^T K_{bbk} d_{k-1} \quad (2.3.5)$$

特征值问题 (2.3.1) 等价于变分问题

$$\delta \left[ \frac{1}{2} d^T (K - \rho M) d \right] = 0 \quad (2.3.6)$$

即

$$\delta \left[ \sum_{k=0}^{N-1} U_k^0(\mathbf{d}_k, \mathbf{d}_{k+1}) + \frac{1}{2} \mathbf{d}_N^T \mathbf{S}_t^{-1} \mathbf{d}_N - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2} \rho \mathbf{d}_{k+1}^T \mathbf{M}_{k+1} \mathbf{d}_{k+1} \right] = 0 \quad (2.3.7)$$

令

$$U_k(\mathbf{d}_k, \mathbf{d}_{k+1}) = U_k^0(\mathbf{d}_k, \mathbf{d}_{k+1}) - \frac{1}{2} \rho \mathbf{d}_{k+1}^T \mathbf{M}_{k+1} \mathbf{d}_{k+1} \quad (2.3.8)$$

通过下列离散 Legendre 变换, 变分问题(2.3.7) 可以变换为等价的正则形式。即定义

$$\mathbf{n}_k = \frac{\partial U_k}{\partial \mathbf{d}_k} = \mathbf{K}_{aak} \mathbf{d}_k + \mathbf{K}_{abhk} \mathbf{d}_{k+1} \quad (2.3.9a)$$

$$\mathbf{n}_{k+1} = - \frac{\partial U_k}{\partial \mathbf{d}_{k+1}} = - \mathbf{K}_{bbk} \mathbf{d}_{k+1} + \rho \mathbf{M}_{k+1} \mathbf{d}_{k+1} - \mathbf{K}_{bak} \mathbf{d}_k \quad (2.3.9b)$$

则  $U_k$  可以表示为

$$U_k(\mathbf{d}_k, \mathbf{d}_{k+1}) = \frac{1}{2} \mathbf{n}_k^T \mathbf{d}_k - \frac{1}{2} \mathbf{n}_{k+1}^T \mathbf{d}_{k+1} \quad (2.3.10)$$

令

$$H_k(\mathbf{n}_k, \mathbf{d}_{k+1}) = - \mathbf{d}_{k+1}^T \mathbf{n}_{k+1} - U_k(\mathbf{d}_k, \mathbf{d}_{k+1}) \quad (2.3.11)$$

由(2.3.9) 求解  $\mathbf{n}_{k+1}$  和  $\mathbf{d}_k$ , 可得下列对偶方程

$$\mathbf{n}_{k+1} = \mathbf{F}_k \mathbf{n}_k - \mathbf{G}_k \mathbf{d}_{k+1} \quad (2.3.12a)$$

$$\mathbf{d}_k = \mathbf{E}_k \mathbf{n}_k + \mathbf{F}_k^T \mathbf{d}_{k+1} \quad (2.3.12b)$$

其中

$$\mathbf{F}_k = - \mathbf{K}_{bak} \mathbf{K}_{aak}^{-1} \quad (2.3.13a)$$

$$\mathbf{E}_k = \mathbf{K}_{aak}^{-1} \quad (2.3.13b)$$

$$\mathbf{G}_k = \mathbf{K}_{bbk} - \mathbf{K}_{bak} \mathbf{K}_{aak}^{-1} \mathbf{K}_{abhk} - \rho \mathbf{M}_{k+1} = \mathbf{G}_k^0 - \rho \mathbf{M}_{k+1} \quad (2.3.13c)$$

上述矩阵称为区段矩阵。则 Hamilton 函数  $H_k(\mathbf{n}_k, \mathbf{d}_{k+1})$  可变换成

下列形式

$$H_k(n_k, d_{k+1}) = -\frac{1}{2}n_k^T E_k n_k - d_{k+1}^T F_k n_k + \frac{1}{2}d_{k+1}^T G_k d_{k+1} \quad (2.3.14)$$

令  $d_N = S_i n_N$ , 此时可得变分问题(2.3.7)的正则形式

$$\begin{aligned} & \delta \left[ \sum_{k=0}^{N-1} (-n_{k+1}^T d_{k+1} - H_k(n_k, d_{k+1})) + \frac{1}{2}n_N^T S_i n_N \right] = \\ & \delta \left[ \sum_{k=0}^{N-1} \left( -d_{k+1}^T n_{k+1} + d_{k+1}^T F_k n_k + \frac{1}{2}n_k^T E_k n_k - \frac{1}{2}d_{k+1}^T G_k d_{k+1} \right) + \right. \\ & \left. \frac{1}{2}n_N^T S_i n_N \right] \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

根据上述结果, Rayleigh 商定(2.3.4)可以变换为等价的两类变量广义 Rayleigh 商形式

$$\rho = \inf \frac{\Phi_1}{\Phi_2} \quad (2.3.16)$$

其中

$$\begin{aligned} \Phi_1 = & \sum_{k=0}^{N-1} \left( d_{k+1}^T n_{k+1} - d_{k+1}^T F_k n_k - \frac{1}{2}n_k^T E_k n_k + \frac{1}{2}d_{k+1}^T G_k d_{k+1} \right) - \\ & \frac{1}{2}n_N^T S_i n_N \end{aligned} \quad (2.3.17a)$$

$$\Phi_2 = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2}d_{k+1}^T M_{k+1} d_{k+1} \quad (2.3.17b)$$

比较式(2.3.16)及(2.1.33)可知其形式与意义完全一致。因为  $d \in \mathbf{R}^{Nn+1}$ , 特征值问题(2.3.1)的维数非常大, 但这里仅需要计算一阶特征值, 所以应当选择适合这类问题的算法。这里采用扩展 Wittrick-Williams 算法结合  $2^N$  类型的区段合并算法求解这一问题。

## 2.4 最优 $H_\infty$ 范数计算

### 2.4.1 Wittrick-Williams 特征值计数公式

对于广义特征值问题

$$(K - \rho M)x = 0 \quad (2.4.1)$$

其中  $K \geq 0, K^T = K, M > 0, M^T = M, x \in R^n$ , 用  $s\{A\}$  表示对称矩阵  $A$  的负特征值个数, 定义广义特征值问题 (2.4.1) 小于给定值  $\rho_*$  的特征值个数为其特征值计数, 并用  $J(\rho_*)$  表示, 则有

$$J(\rho_*) = s\{K - \rho_* M\} \quad (2.4.2)$$

如果将式 (2.4.1) 中的矩阵及向量分块表示为下列形式

$$\left\{ \begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{bmatrix} - \rho \begin{bmatrix} M_{aa} & M_{ab} \\ M_{ba} & M_{bb} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix} \quad (2.4.3)$$

其中  $x_a \in R^r, x_b \in R^{n-r}$ . 设  $x_a = 0$ , 则有

$$(K_{bb} - \rho M_{bb})x_b = 0 \quad (2.4.4)$$

记式 (2.4.4) 小于  $\rho_*$  的特征值计数为  $J_0(\rho_*)$ , 并记

$$D(\rho_*) = K_{aa} - \rho_* M_{aa} - (K_{ab} - \rho_* M_{ab})(K_{bb} - \rho_* M_{bb})^{-1}(K_{ba} - \rho_* M_{ba}) \quad (2.4.5)$$

则有

$$J(\rho_*) = J_0(\rho_*) + s\{D(\rho_*)\} \quad (2.4.6)$$

当  $n \rightarrow \infty$ ,  $D(\rho)$  是  $\rho$  的超越函数时上述等式依然成立<sup>[9~10]</sup>. 这里给出的是最简单的情况, 这一公式最初是用结构力学的术语描述并证明的<sup>[9~10]</sup>, 文献 11 给出了其数学证明. 为适应本章所研究的广义 Rayleigh 商特征值问题的需要, 下面将给出扩展 Wittrick-Williams 特征值计数公式及其证明, 其最初的表述与证明见文献 12。

### 2.4.2 扩展 Wittrick-Williams 特征值计数公式

为简化表达形式, 特征值问题  $(A - \rho B)x = 0$  用  $Ax = 0$  表示。

本节中的所有特征值问题都用这种缩写形式。按照式(2.3.13),令

$$F_i = -K_{bu1}K_{aa1}^{-1} \quad (2.4.7a)$$

$$E_i = K_{aa1}^{-1} \quad (2.4.7b)$$

$$G_i = K_{bb1} - K_{bu1}K_{aa1}^{-1}K_{ab1} \quad (2.4.7c)$$

注意  $K_{id}$ , 在这里是  $K_{idu} - \rho M$  的缩写形式。由(2.4.7)有

$$K_{bu1} = -F_i E_i^{-1} \quad (2.4.8a)$$

$$K_{aa1} = E_i^{-1} \quad (2.4.8b)$$

$$K_{bb1} = G_i + F_i E_i^{-1} F_i^T \quad (2.4.8c)$$

其中  $i = 1, 2$ 。定义

$$n_k = F_1 n_{k-1} - G_1 d_k \quad (2.4.9a)$$

$$d_{k-1} = E_1 n_{k-1} + F_1^T d_k \quad (2.4.9b)$$

$$n_{k+1} = F_2 n_k - G_2 d_{k+1} \quad (2.4.10a)$$

$$d_k = E_2 n_k + F_2^T d_{k+1} \quad (2.4.10b)$$

及

$$n_{k-1} = F_1 n_k - G_1 d_{k+1} \quad (2.4.11a)$$

$$d_{k-1} = E_1 n_{k-1} + F_1^T d_{k+1} \quad (2.4.11b)$$

由此可以导出下列区段合并方程<sup>[3]</sup>

$$G_c = G_2 + F_2(G_1^{-1} + E_2)^{-1}F_2^T \quad (2.4.12a)$$

$$E_c = E_1 + E_1^T(E_2^{-1} + G_1)^{-1}F_1 \quad (2.4.12b)$$

$$F_c = F_2(1 + G_1 E_2)^{-1}F_1 \quad (2.4.12c)$$

考虑特征值问题

$$\begin{bmatrix} K_{aa1} & K_{ab1} \\ K_{ba1} & K_{aa2} + K_{bb1} & K_{ab2} \\ & K_{ba2} & K_{bb2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k-1} \\ x_k \\ x_{k+1} \end{bmatrix} = 0 \quad (2.4.13)$$

令  $x_{k-1} = 0$ , 而  $x_k, x_{k+1} \neq 0$ , 则有特征值问题

$$\begin{bmatrix} -K_{aa1} & K_{ab1} \\ -K_{ba1} & K_{aa2} + K_{bb1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k-1} \\ x_k \end{bmatrix} = 0 \quad (2.4.14)$$

由于

$$\begin{bmatrix} K_{aa1} & K_{ab1} \\ K_{ba1} & K_{bb1} + K_{aa2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ K_{ba1}K_{aa1}^{-1} & I \end{bmatrix} \times \\ \begin{bmatrix} K_{aa1} & K_{ab1} \\ 0 & K_{aa2} + K_{bb1} - K_{ba1}K_{aa1}^{-1}K_{ab1} \end{bmatrix} \quad (2.4.15)$$

对给定的  $\rho_{\pi}$ , 式(2.4.14)的特征值计数为

$$J_{Rc}(\rho_{\pi}) = s\{K_{aa2} + K_{bb1} - K_{ba1}K_{aa1}^{-1}K_{ab1}\} + s\{K_{aa1}\} = \\ s\{G_1 + E_2^{-1}\} + s\{E_1^{-1}\} \quad (2.4.16)$$

令  $J_{R1}(\rho_{\pi}) = s\{K_{aa1}\}$ ,  $J_{R2}(\rho_{\pi}) = s\{K_{aa2}\}$ , 则

$$J_{Rc}(\rho_{\pi}) = J_{R1}(\rho_{\pi}) + J_{R2}(\rho_{\pi}) - s\{E_2\} + s\{G_1 + E_2^{-1}\} \quad (2.4.17)$$

结合区段合并方程(2.4.12)迭代执行上述方程, 可以得到无约束时特征值问题(2.3.1)的特征值计数。

对于特征值问题

$$\begin{bmatrix} K_{aa2} & K_{ab2} \\ K_{ba2} & K_{bb2} + S_f^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k+1} \end{bmatrix} = 0 \quad (2.4.18)$$

由 Schur 分解

$$\begin{bmatrix} K_{aa2} & K_{ab2} \\ K_{ba2} & K_{bb2} + S_f^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ K_{ba2}K_{aa2}^{-1} & I \end{bmatrix} \times \\ \begin{bmatrix} K_{aa2} & K_{ab2} \\ 0 & S_f^{-1} + K_{bb2} - K_{ba2}K_{aa2}^{-1}K_{ab2} \end{bmatrix} \quad (2.4.19)$$

可知问题(2.4.18)的特征值计数为

$$J_{RS2}(\rho_{\pi}) = s\{S_f^{-1} + G_2\} + s\{K_{aa2}\} = J_{R2}(\rho_{\pi}) + s\{S_f^{-1} + G_2\} \quad (2.4.20)$$

现在考虑特征值问题

$$\begin{bmatrix} K_{aa1} & K_{ab1} & \\ K_{ba1} & K_{aa2} + K_{bb1} & K_{ab2} \\ & K_{ba2} & K_{bb2} + S_f^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k-1} \\ x_k \\ x_{k+1} \end{bmatrix} = 0 \quad (2.4.21)$$



令  $x_{k+1} = 0$ , 且  $J_c(\rho_\pi)$  为下列特征值问题的特征值计数

$$\begin{bmatrix} K_{aa1} & K_{ab1} \\ K_{ba1} & K_{aa2} + K_{bb1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_k \end{bmatrix} = 0 \quad (2.4.22)$$

则

$$J_c(\rho_\pi) = J_{K_c}(\rho_\pi) \quad (2.4.23)$$

由式(2.4.5), 这一问题的  $D(\rho_\pi)$  为

$$D(\rho_\pi) = (S_1^{-1} + K_{bb2}) \begin{bmatrix} 0 & K_{ba2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{aa1} & K_{ab1} \\ K_{ba1} & K_{bb1} + K_{aa2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ K_{ab2} \end{bmatrix} \quad (2.4.24)$$

为求上式中的分块矩阵之逆, 令

$$C = \begin{bmatrix} K_{aa1} & K_{ab1} \\ K_{ba1} & K_{aa2} + K_{bb1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1^{-1} & -E_1^{-1}F_1^T \\ -F_1E_1^{-1} & E_1^{-1} + G_1 + F_1E_1^{-1}F_1^T \end{bmatrix}^{-1} \quad (2.4.25)$$

由矩阵求逆引理, 可得

$$C_1 = [E_2^{-1} + G_1 + F_1E_1^{-1}F_1^T - (F_1E_1^{-1})E_1(E_1^{-1}F_1^T)]^{-1} = (E_2^{-1} + G_1)^{-1} \quad (2.4.26)$$

则

$$\begin{aligned} D(\rho_\pi) &= S_1^{-1} + G_2 + F_2E_2^{-1}F_2^T - \\ &\quad (F_2E_2^{-1})(G_1 + E_2^{-1})^{-1}(E_2^{-1}F_2^T) = \\ &\quad S_1^{-1} + G_2 + F_2(I + G_1E_2)^{-1}G_1F_2^T = \\ &\quad S_1^{-1} + G_2 \end{aligned} \quad (2.4.27)$$

因此式(2.4.21)的特征值计数为

$$J_{K_{R_c}}(\rho_\pi) = J_{K_c}(\rho_\pi) + s\{S_1^{-1} + G_2\} \quad (2.4.28)$$

结合式(2.4.12)执行上式, 可以得到原特征值问题(2.3.1)的特征值计数。

### 2.4.3 算法描述

这里给出定常系数 Hamilton 差分方程边值问题一阶特征值

的计算方法,也就是系统最优  $H_\infty$  范数的计算方法,时变系统的算法是类似的。

### A: 有限时间情况

**Step0.** { 选择合适的  $\gamma_{\pi}^{-2}$ ;  $G = BB^T - \gamma_{\pi}^{-2}DD^T$ ;  $F = A$ ;  $E = H^T H$  }

**Step1.** {  $E_1 = E$ ;  $G_1 = G$ ;  $F_1 = F$ ;  $J_{R1} = 0$ ;  $E_2 = S_1$ ;  $G_2 = 0$   $F_2 = I$ ;  $J_{R2} = 0$  }

**Step2.** for ( $k = 1$ ;  $k \leq N - 1$ ;  $k++$ ) {

{ 由 (2.4.12a ~ c), (2.4.28) 计算  $E_k, G_k, F_k$  和  $J_{RSk}$  }

{  $E_2 = E_k$ ;  $G_2 = G_k$ ;  $E_2 = F_k$ ;  $J_{R2} = J_{RSk}$  }

if ( $J_{RSk} > 0$ ) { 中断循环; 选择较小的  $\gamma_{\pi}^{-2}$  重新开始 } }

**Step3.** if ( $J_{RSk} > 0$ )

{  $\gamma_{\pi}^{-2}$  是  $\gamma_{\text{opt}}^{-2}$  的一个上界 (upperbound), 在重新计算时应减小 }

else

{  $\gamma_{\pi}^{-2}$  是  $\gamma_{\text{opt}}^{-2}$  的一个下界 (lowerbound) }

if (upperbound-lowerbound)  $> \epsilon$  ( $\epsilon$  是预先选定的小正实数)

{ 增加  $\gamma_{\pi}^{-2}$  重新计算 }

else

{ break }

迭代可以在满足精度要求后终止, 并取 lowerbound 作为  $\gamma_{\text{opt}}^{-2}$ 。

另外, 上述算法中计算出的序列  $E_k$  就是  $M_k$ 。当  $N$  趋向于无穷时,  $M_N$  趋近于 Riccati 代数方程 (2.1.26) 的解<sup>[1,4]</sup>。

### B: 无限时间情况

**Step1.** { 选择合适的  $\gamma_{\pi}^{-2}$ ;  $F_k = A$ ;  $G_k = BB^T - \gamma_{\pi}^{-2}DD^T$ ;  $E_k =$

$H^T H \}$ 

**Step2.** while (  $\|F_k\| > \epsilon$  ) {

{  $E_1 = E_2 = E_k; G_1 = G_2 = G_k; F_1 = F_2 = F_k; J_{R1} = J_{R2} = 0$  }

{ 由 (2.4.12), (2.4.17) 计算  $E_k, G_k, F$  及  $J_R$  }

if (  $J_{Rk} > 0$  )

{ 中断循环; 选择较小的  $\gamma_u^{-2}$  重新开始 } }

## 2.5 算 例

**算例 1:**

首先考虑文献 1 中介绍的一个简单问题, 系统参数为:

$$A = 1 \quad B = 1 \quad D = 1 \quad H = 1$$

表 2-1 给出了不同区间长度时的  $\gamma_{\text{opt}}$  值。当区间长度  $N$  趋近无穷时,  $\gamma_{\text{opt}}$  趋近于常数 1, 与文献 1 中的结论一致。

**表 2-1**                      **算例 1 的  $\gamma_{\text{opt}}$**

$N$	$2^1$	$2^2$	$2^3$	$2^4$
$\gamma_{\text{opt}}$	0.54658	0.98340	0.99550	0.99883
$N$	$2^5$	$2^6$	$2^7$	$2^8$
$\gamma_{\text{opt}}$	0.99970	0.99993	0.99998	0.99999

**算例 2:**

算例选自参考文献 5, 是一个 1 阶离散系统, 系统数据如下。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0.1 \\ 0.033 & -0.033 & 1 & 0 \\ 0.033 & -0.033 & -0.007 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -0.004 & 0 \\ 0 & -0.004 \\ 0.085 & 0 \\ 0 & 0.085 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ -2.113 & 2.113 & 0.375 & 0.375 \end{bmatrix}$$

表 2-2 给出了不同时间长度的  $\gamma_{\text{opt}}$  值。当  $N$  趋近无穷时,  $\gamma_{\text{opt}}$  趋近于常数 0.18884。

表 2-2 算例 2 的  $\gamma_{\text{opt}}$

$N$	$2^2$	$2^3$	$2^4$	$2^5$
$\gamma_{\text{opt}}$	0.13803	0.15944	0.18709	0.18870
$N$	$2^6$	$2^7$	$2^8$	$2^9$
$\gamma_{\text{opt}}$	0.18884	0.18884	0.18884	0.18884

文献 5 中研究的是状态反馈控制问题,文中给出的  $\gamma$  最小值为  $\gamma_* \approx 0.20424$ 。按照本章方法计算,当  $N$  足够大时,最优  $H_\infty$  范数是  $\gamma_{\text{opt}} \approx 0.18884$ ,显然  $\gamma_* > \gamma_{\text{opt}}$ ,与定理 2.2 中的结论一致。这是因为本章研究的是全信息控制问题。

图 2.1 至图 2.3 给出了  $\gamma^{-2} = \gamma_{\text{opt}}^{-2}$  时,不同区间长度内 Riccati 方程解的变化情况。由图中可见 Riccati 方程的解的变化趋势。图 2.4 至图 2.9 给出了  $\gamma^{-2} = 0.5 \times \gamma_{\text{opt}}^{-2}$  时,不同区间长度内 Riccati 方程解的变化情况,随着时间的增长,Riccati 方程的解趋于常数值。

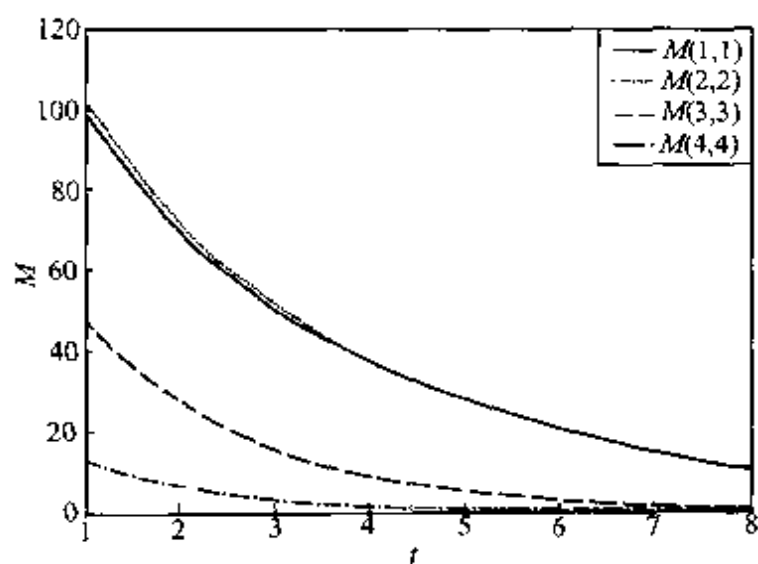


图 2.1 算例 2Riccati 方程的解 ( $N = 2^3, \gamma^{-2} = \gamma_{\text{opt}}^2$ )

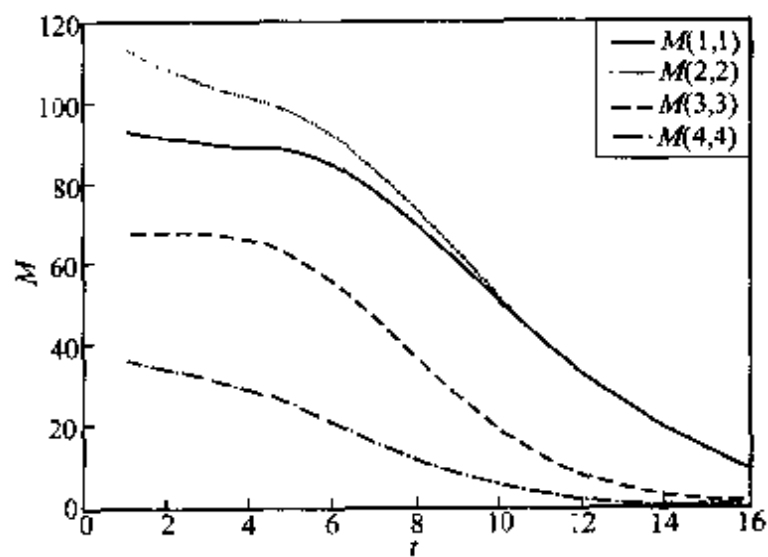
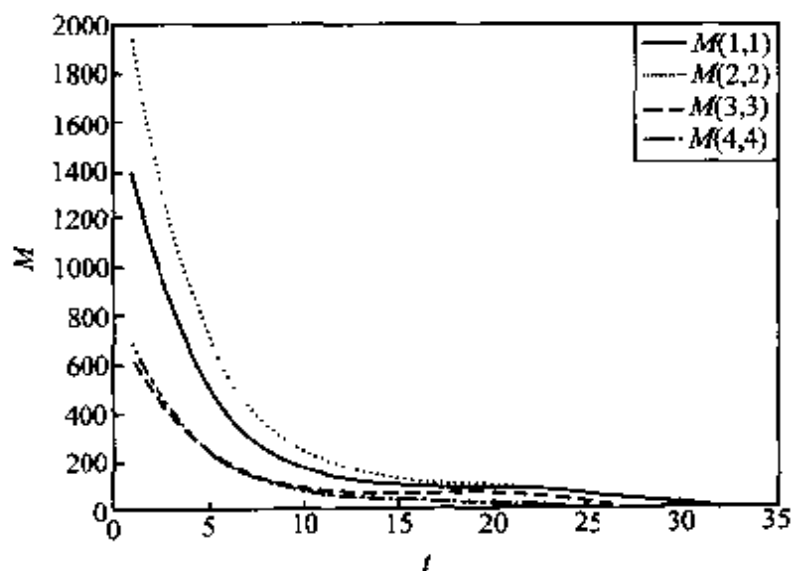
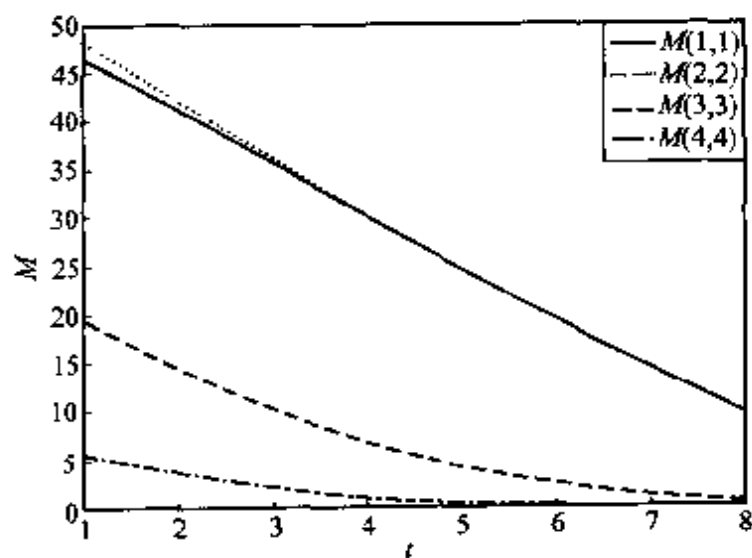


图 2.2 算例 2Riccati 方程的解 ( $N = 2^4, \gamma^{-2} = \gamma_{\text{opt}}^2$ )

图 2.3 算例 2Riccati 方程的解 ( $N = 2^5, \gamma^{-2} = \gamma_{opt}^{-2}$ )图 2.4 算例 2Riccati 方程的解 ( $N = 2^3, \gamma^{-2} = 0.5 \times \gamma_{opt}^{-2}$ )

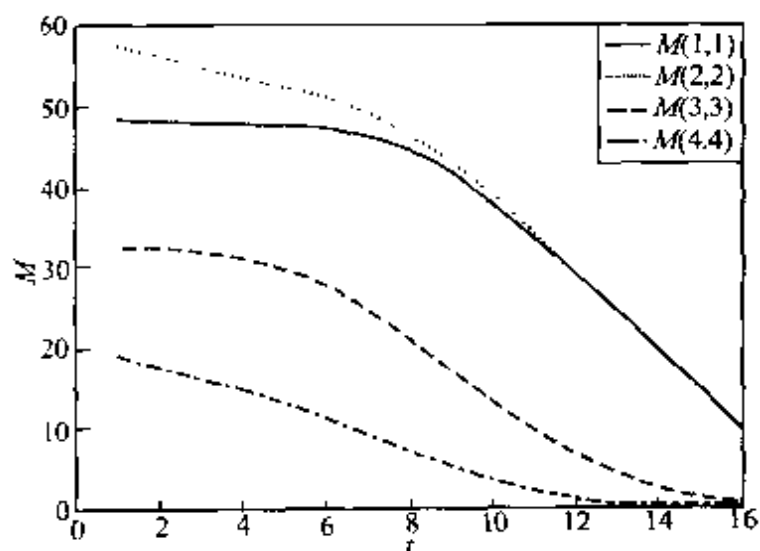


图 2.5 算例 2Riccati 方程的解 ( $N = 2^4, \gamma^{-2} = 0.5 \times \gamma_{opt}^2$ )

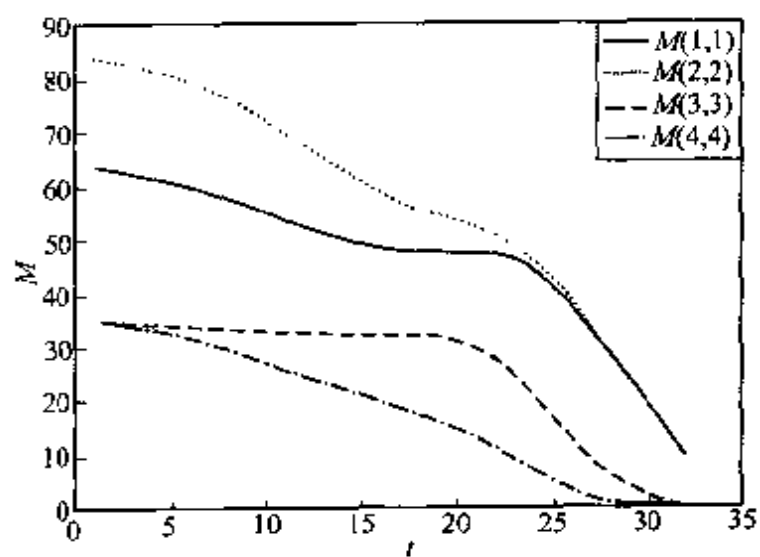
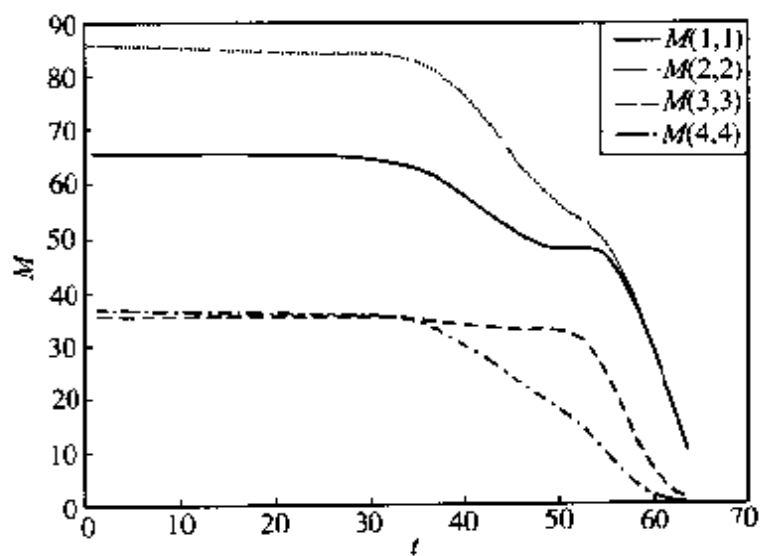
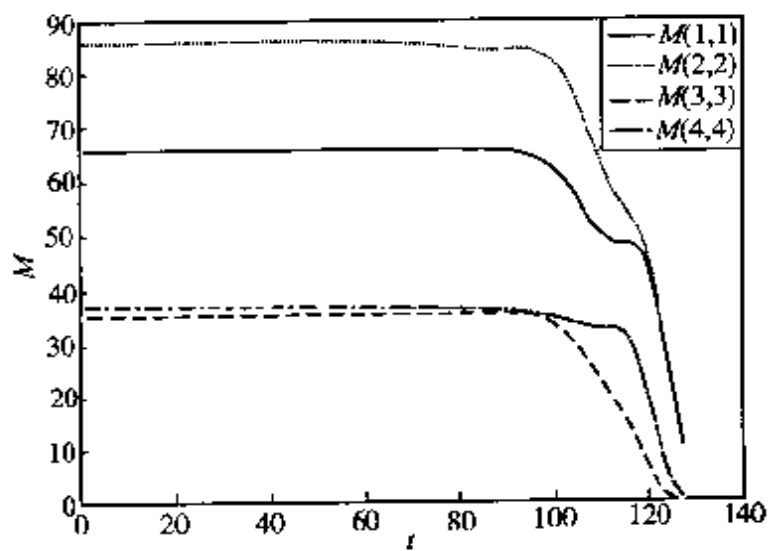


图 2.6 算例 2Riccati 方程的解 ( $N = 2^5, \gamma^{-2} = 0.5 \times \gamma_{opt}^2$ )

图 2.7 算例 2Riccati 方程的解 ( $N = 2^6, \gamma^{-2} = 0.5 \times \gamma_{\text{opt}}^2$ )图 2.8 算例 2Riccati 方程的解 ( $N = 2^7, \gamma^{-2} = 0.5 \times \gamma_{\text{opt}}^2$ )



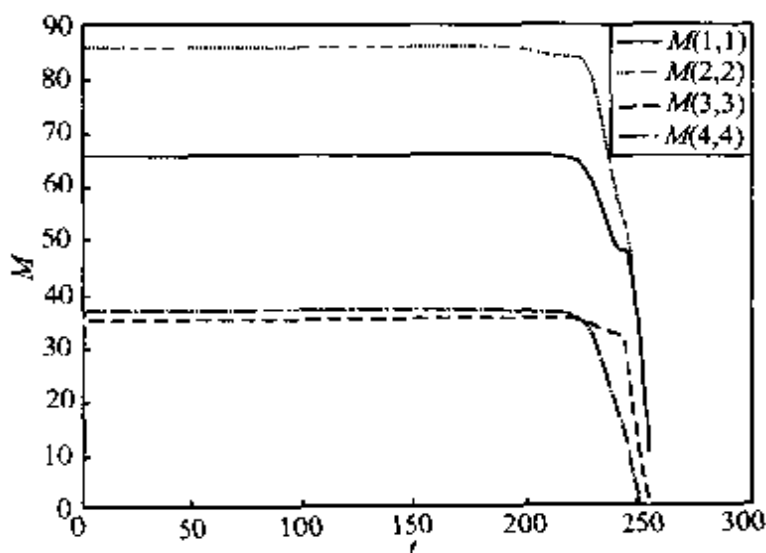


图 2.9 算例 2 Riccati 方程的解 ( $N = 2^8, \gamma^{-2} = 0.5 \times \gamma_{\text{opt}}^{-2}$ )

式(2.1.2)中的  $H$  矩阵实际上体现了对状态的加权,  $H$  矩阵变化后系统的最优性能指标也会相应地产生变化。将  $H$  矩阵中所有元素乘 2 后进行与上文中同样的计算, 结果列于表 2-3 中。

表 2-3  $H$  矩阵变化后算例 2 的  $\gamma_{\text{opt}}$

$N$	$2^2$	$2^3$	$2^4$	$2^5$
$\gamma_{\text{opt}}$	0.21798	0.24324	0.26197	0.26332
$N$	$2^6$	$2^7$	$2^8$	$2^9$
$\gamma_{\text{opt}}$	0.26333	0.26333	0.26333	0.26333

### 算例 3:

算例 3 是一个 7 维离散系统, 系统数据为

$$A = \begin{bmatrix} 1.0 & -32.37 & 0.0 & 32.3 & 0.0 & 0.7 & 0.0 \\ -0.00014 & 1.0 & 10.0 & 0.0 & 2.0 & 0.0 & 0.3 \\ -0.0111 & -34.72 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 1.4 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 1.7 \\ 0.0 & -1.0 & 0.1 & 3.2 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.1 & -1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.2 \\ 0.0005 \\ 0.1 \\ 0.02 \\ 0.01 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0.0 \\ -0.001064 \\ -0.338 \\ 0.0 \\ 0.2 \\ 0.1 \\ 0.01 \end{bmatrix}$$

$$H = \text{diag}[0.5, 0.5, 0.5, 1.0, 1.0, 1.0]$$

表 2-4 给出不同时间长度的  $\gamma_{\text{opt}}$  值。同样, 当  $N$  趋近无穷时,  $\gamma_{\text{opt}}$  趋近于一个常数。

表 2-4 算例 3 的  $\gamma_{\text{opt}}$

$N$	$2^2$	$2^3$	$2^4$	$2^5$
$\gamma_{\text{opt}}$	8.5082	8.5748	8.6235	8.8430
$N$	$2^6$	$2^7$	$2^8$	$2^9$
$\gamma_{\text{opt}}$	17.100	20.217	20.237	20.237

将  $H$  矩阵中所有元素乘 0.5 并进行与上文中同样的计算, 结果列于表 2-5 中。

表 2-5  $H$  矩阵变化后算例 3 的  $\gamma_{\text{opt}}$ 

$N$	$2^2$	$2^3$	$2^4$	$2^5$
$\gamma_{\text{opt}}$	6.3935	6.4477	6.4631	6.5554
$N$	$2^6$	$2^7$	$2^8$	$2^9$
$\gamma_{\text{opt}}$	6.4197	10.338	10.344	10.344

**算例 4:**

第四个算例是文献 14 中一个连续系统的算例,由该连续系统离散化得到一个离散系统,然后计算其  $\gamma_{\text{opt}}$ ,并将结果与连续系统的结果比较。结果分别列于表 2-6 和表 2-7 中。该连续系统的数据为

$$A = \begin{bmatrix} -0.0605 & -32.37 & 0.0 & 32.2 \\ -0.00014 & -1.475 & 10.0 & 0.0 \\ 0.0111 & -34.72 & -2.793 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0.0 \\ -0.001064 \\ -0.3380 \\ 0.0 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.2 \\ 0.0005 \end{bmatrix}$$

$$C = \text{diag}[0.5, 0.5, 1.0, 1.0]$$

采用零阶保持器,采样间隔取 0.2,得到离散化的系统数据为

$$A = \begin{bmatrix} 0.9898 & -0.4083 & -1.2800 & 6.4051 \\ -0.0005 & -0.5568 & 0.1923 & -0.0021 \\ -0.00016 & 0.6692 & -0.5317 & -0.0018 \\ -0.00006 & 0.1567 & -0.0126 & 0.9998 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.0555 \\ -0.0153 \\ 0.0044 \\ -0.0018 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} -0.0324 \\ 0.0090 \\ -0.0025 \\ 0.0012 \end{bmatrix}$$

$$H = \text{diag}[0.5, 0.5, 1.0, 1.0]$$

表 2-6 算例 4 的  $\gamma_{\text{opt}}$  及  $\gamma_{\text{opt}}^2$  (采样间隔 0.2)

$N$	$2^2$	$2$	$2^4$	$2^6$
$\gamma_{\text{opt}}$	0.07056	0.10569	0.12891	0.44868
$\gamma_{\text{opt}}^2$	200.83	89.521	60.180	4.9674
$N$	$2^5$	$2^7$	$2^8$	$2^9$
$\gamma_{\text{opt}}$	1.0830	1.1675	1.1678	1.1678
$\gamma_{\text{opt}}^2$	0.85263	0.73367	0.73331	0.73331

采用零阶保持器, 采样间隔取 0.1, 得离散化系统数据为

$$A = \begin{bmatrix} 0.9944 & -1.7741 & -0.9405 & 3.2107 \\ -0.0004 & -0.2043 & 0.4156 & -0.0005 \\ -0.0005 & -1.4419 & -0.2501 & -0.0012 \\ -0.00004 & -0.1130 & 0.0464 & 0.9999 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.0125 \\ -0.0111 \\ -0.0156 \\ -0.0012 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} -0.0073 \\ 0.0065 \\ -0.0093 \\ 0.0007 \end{bmatrix}$$

$$H = \text{diag}[0.5, 0.5, 1.0, 1.0]$$

表 2-7 算例 4 的  $\gamma_{\text{opt}}$  及  $\gamma_{\text{opt}}^{-2}$  (采样间隔 0.1)

$N$	$2^2$	$2^3$	$2^4$	$2^5$
$\gamma_{\text{opt}}$	0.04049	0.06519	0.10595	0.12765
$\gamma_{\text{opt}}^{-2}$	609.849	208.833	90.6187	61.3742
$N$	$2^6$	$2^7$	$2^8$	$2^9$
$\gamma_{\text{opt}}$	0.44523	1.08211	1.16747	1.16777
$\gamma_{\text{opt}}^{-2}$	5.04462	0.85400	0.73367	0.73331

文献 14 中连续系统的计算结果为  $\gamma_{\text{opt}}^{-2} = 0.73331108$ , 显然与这里的结果是一致的。与前几个算例类似, 这里也将  $H$  矩阵中所有元素乘 2 并进行与上文中同样的计算, 结果列于表 2-8 中。

表 2-8  $H$  矩阵变化后算例 4 的  $\gamma_{\text{opt}}$  及  $\gamma_{\text{opt}}^{-2}$ 

$N$	$2^2$	$2^3$	$2^4$	$2^5$
$\gamma_{\text{opt}}$	0.13768	0.19814	0.24460	0.73812
$\gamma_{\text{opt}}^{-2}$	52.751	25.472	16.714	1.8354
$N$	$2^6$	$2^7$	$2^8$	$2^9$
$\gamma_{\text{opt}}$	1.3131	1.3769	1.3770	1.3770
$\gamma_{\text{opt}}^{-2}$	0.55435	0.52746	0.52743	0.52742

本章建立了离散  $H_{\infty}$  全信息控制系统的  $\gamma_{\text{opt}}^{-2}$  与 Hamilton 差分系统一阶特征值之间的对应关系。并基于离散 Legendre 变换及广义 Rayleigh 商的概念建立了  $\gamma_{\text{opt}}^{-2}$  与矩阵广义特征值的对应关系。最后介绍了离散  $H_{\infty}$  控制系统最优  $H_{\infty}$  诱导范数的计算方法和几个数值算例。类似地, 对于连续系统  $H_{\infty}$  全信息控制,  $\gamma_{\text{opt}}^{-2}$  则是 Hamilton 微分方程两端点边值问题的一阶特征值, 在本书的第七章对此有详细的介绍。

## 参考文献

- 1 Basar T, Bernhard P.  $H_\infty$  optimal Control and Related Minimax Design Problems. Boston: Birkhäuser, 1995
- 2 Green M, Limbeer D J N. Linear Robust Control. New Jersey: Prentice Hall, 1995
- 3 Yaesh I, Shaked U. A transfer function approach to the problems of discrete — time systems;  $H_\infty$ -optimal linear control and filtering. IEEE Trans Automatic Control, 1991, 36: 1264~1271
- 4 Yaesh I, Shaked U. Minimum  $H_\infty$ -norm regulation of linear discrete — time systems and its relation to linear quadratic discrete games. IEEE Trans Automatic Control, 1990, 35: 1061~1064
- 5 Paz R A, Medanic J V.  $H_\infty$  Control in Discrete Time: State Feedback Control and Norm Bounds. International Journal of Control, 1992, 55 (6): 1405~1424
- 6 Bohner M. Discrete Linear Hamiltonian Eigenvalue Problems. Computers & Mathematics with Applications, 1998, 36: 179~192
- 7 Bohner M. Linear Hamiltonian Difference Systems; Disconjugacy and Jacobi Type Conditions. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1996, 199: 804~826
- 8 Halanay A, Ionescu V. Time — varying discrete Hamiltonian systems. Computers & Mathematics with Applications, 1998, 36: 307~326
- 9 Wittrick W H, Williams F W. A general algorithm for computing natural frequencies of elastic structures. Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, 1971, 24: 263~284
- 10 胡海昌. 多自由度结构固有振动理论. 北京: 科学出版社, 1987
- 11 Balakrishnan A V. Generalization of the Wittrick — Williams formula for counting modes of flexible structures. Journal of Guidance Control and Dynamics, 1995, 18: 1410~1415
- 12 Zhong W X, Williams F W, Bennett P N. Extension of the Wittrick —

- 
- Williams algorithm to mixed variable systems. *Journal of Vibration and Acoustics*, 1997, 119(3): 334~340
- 13 Zhong W X, Lin J H, Qiu C H. Computational structural mechanics and *optimal control* — the simulation of substructural chain theory to linear quadratic *optimal control* problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1992, 33: 197~211
- 14 钟万勰. *H<sub>2</sub>* 状态反馈与瑞利商精细积分. *计算力学学报*, 1998, 15(4): 1~8
- 15 Zhong W X, Howson W P, Williams F W. *H<sub>2</sub>* filtering with secure eigenvalue calculation and precise integration. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1999, 46: 1017~1030

---

## 第三章 离散系统 $H_\infty$ 滤波

卡尔曼(Kalman)滤波器在含噪声信号的处理中应用非常广泛,这种滤波器要求知道信号的产生机理及噪声的统计特性,然而在许多情况下只能得到信号的近似模型,有时也无法获得信号的统计特性,这在一定程度上限制了卡尔曼滤波器的应用。另外,当信号模型存在不确定性时,卡尔曼滤波器的鲁棒性也较差。近年来, $H_\infty$ 滤波器引起越来越多的兴趣,并且已经取得许多理论研究成果<sup>[1]~[4]</sup>。 $H_\infty$ 滤波器可以确保从噪声到估计误差之间传递函数的 $H_\infty$ 范数小于某个给定的正数,且噪声可以是任意的有界信号。与卡尔曼滤波器相比, $H_\infty$ 滤波器对模型参数的不确定性不太敏感,鲁棒性较好。

在 $H_\infty$ 滤波器的设计中,系统最优 $H_\infty$ 范数的计算是一个基本环节。针对这一问题,本章在介绍 $H_\infty$ 滤波器设计理论的基础上讨论了离散 $H_\infty$ 滤波系统的最优范数计算问题。首先建立了 $\gamma_{\text{opt}}$ 与相关的Hamilton差分系统特征值之间的联系,进而给出了 $\gamma_{\text{opt}}$ 与广义矩阵特征值之间的对应关系。然后介绍了计算 $\gamma_{\text{opt}}$ 的方法。

### 3.1 离散 $H_\infty$ 滤波

考虑下述线性时变离散系统在有限区间上的滤波问题

$$x_{k+1} = A_k x_k + D_k w_k, x_0 = 0 \quad (3.1.1)$$

$$y_k = C_k x_k + v_k \quad (3.1.2)$$

$$z_k = H_k x_k \quad (3.1.3)$$



其中  $k \in [0, N-1]$ , 状态向量  $x_k \in \mathbf{R}^n$ , 量测向量  $y_k \in \mathbf{R}^q$ , 过程噪声向量  $w_k \in \mathbf{R}^l$ , 量测噪声向量  $v_k \in \mathbf{R}^m$ , 状态向量的线性组合  $z_k \in \mathbf{R}^p$  是需要估计的向量。其余矩阵均有恰当的维数。对于给定的正数  $\gamma$  及任意的  $w_k \in L_2[0, N-1]$  及  $\hat{x}_0 \in \mathbf{R}^n$ , 要求所设计的滤波器满足

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (z_k - \hat{z}_k)^T (z_k - \hat{z}_k) \\ & < \frac{1}{2} \gamma^2 \left[ \sum_{k=0}^{N-1} (w_k^T w_k + v_k^T v_k) + (\hat{x}_0 - x_0)^T Q_0^{-1} (\hat{x}_0 - x_0) \right] \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

其中  $\hat{z}_k$  是状态滤波  $\hat{x}_k$  的线性组合  $\hat{z}_k = H_k \hat{x}_k$ ,  $\hat{x}_0$  是对初始状态的估计, 并且  $Q_0^{-1} > 0$ 。最优  $H_\infty$  滤波的性能指标定义为<sup>[1,3]</sup>

$$\gamma_{\text{opt}} = \inf_{z, w, v, x_0} \sup_{\hat{x}_0} \frac{\|z_k - \hat{z}_k\|_2}{\|\hat{x}_0 - x_0\|_2 + \|w_k\|_2 + \|v_k\|_2} \quad (3.1.5)$$

其中  $\|\cdot\|_2$  表示信号的 2-范数。

对预先给定的噪声抑制指标  $\gamma > 0$ , 当且仅当下列离散 Riccati 方程存在稳定对称解  $\Sigma_k > 0$  时, 存在满足上述条件的  $H_\infty$  滤波器。

$$\begin{aligned} \Sigma_{k+1} &= A_k (\Sigma_k^{-1} + C_k^T C_k - \gamma^{-2} H_k^T H_k)^{-1} A_k^T + D_k D_k^T \\ \Sigma_0 &= Q_0 \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

而相应的中心  $H_\infty$  滤波器为

$$\hat{z}_k = H_k \hat{x}_k \quad (3.1.7a)$$

$$\hat{x}_{k+1} = A_k \hat{x}_k + K_k (y_k - C_k \hat{x}_k) \quad (3.1.7b)$$

其中  $K_k$  是滤波增益

$$K_k = A_k \Sigma_k (I - \gamma^{-2} H_k^T H_k + C_k^T C_k)^{-1} C_k^T \quad (3.1.8)$$

显然, 当  $\gamma = 0$  时, 滤波器的结构与卡尔曼滤波器是相同的; 而当  $\gamma$  趋近于  $\gamma_{\text{opt}}$  时, Riccati 方程解矩阵的特征值将趋近于无穷大<sup>[2]</sup>。定义一个  $\gamma$  的集合  $\Gamma_F$ , 其中所有元素  $\gamma > 0$  且使得 Riccati 方程

(3.1.6) 存在稳定对称正定解, 则  $\gamma_{\text{opt}} := \inf\{\gamma : \gamma \in \Gamma_F\}^{[1]}$ 。

基于线性时变系统  $H_\infty$  滤波器的结构, 可以很容易地给出下列线性定常系统

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{D}\mathbf{w}_k, \mathbf{x}_0 = \mathbf{0} \quad (3.1.9)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (3.1.10)$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}\mathbf{x}_k \quad (3.1.11)$$

在有限区间  $k \in [0, N-1]$  上的  $H_\infty$  滤波器。对预先给定的噪声抑制指标  $\gamma > 0$ , 当且仅当下列 Riccati 方程存在稳定对称解  $\Sigma_k > 0$  时, 存在满足条件的  $H_\infty$  滤波器。

$$\Sigma_{k+1} = \mathbf{A}(\Sigma_k^{-1} - \mathbf{C}^T\mathbf{C} - \gamma^{-2}\mathbf{H}^T\mathbf{H})^{-1}\mathbf{A}^T + \mathbf{D}\mathbf{D}^T, \Sigma_0 = \mathbf{Q}_0 \quad (3.1.12)$$

其中心  $H_\infty$  滤波器的形式为

$$\hat{\mathbf{z}}_k = \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_k \quad (3.1.13a)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{K}_k(\mathbf{y}_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_k) \quad (3.1.13b)$$

其中  $\mathbf{K}_k$  是滤波增益

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{A}\Sigma_k(\mathbf{I} - \gamma^{-2}\mathbf{H}^T\mathbf{H} + \mathbf{C}^T\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}^T \quad (3.1.14)$$

现在考虑定常系统在无限区间内的  $H_\infty$  滤波问题。对预先给定的噪声抑制指标  $\gamma > 0$ , 当且仅当下列 Riccati 方程存在稳定对称解  $\Sigma_k > 0$  时, 存在满足条件的  $H_\infty$  滤波器。

$$\Sigma = \mathbf{A}(\Sigma^{-1} + \mathbf{C}^T\mathbf{C} - \gamma^{-2}\mathbf{H}^T\mathbf{H})^{-1}\mathbf{A}^T + \mathbf{D}\mathbf{D}^T \quad (3.1.15)$$

这种情况下的中心  $H_\infty$  滤波器形式为

$$\hat{\mathbf{z}}_k = \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_k \quad (3.1.16a)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{K}(\mathbf{y}_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_k) \quad (3.1.16b)$$

其中  $\mathbf{K}$  是稳态滤波增益

$$\mathbf{K} = \mathbf{A}\Sigma(\mathbf{I} - \gamma^{-2}\mathbf{H}^T\mathbf{H} + \mathbf{C}^T\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}^T \quad (3.1.17)$$

前面所介绍的  $H_\infty$  滤波器都利用了当前的测量值(current measurement), 文献 [2] 中称其为后验滤波器(a posteriori filter)。

如果滤波器只能利用前一时刻的测量值,即一步延迟测量值(one step delay measurement),则称之为先验滤波器(a priori filter),这种滤波器的形式为

$$\hat{z}_k = H\hat{x}_k \quad (3.1.18a)$$

$$\hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + K_o(y_k - C\hat{x}_k) \quad (3.1.18b)$$

其中的滤波增益  $K_o$  为

$$K_o = A\tilde{\Sigma}C^T(I + C\tilde{\Sigma}C^T)^{-1} \quad (3.1.19)$$

而  $\tilde{\Sigma}$  则需要满足下列形式的 Riccati 方程

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma} = & DD^T + A\tilde{\Sigma}A^T - A\tilde{\Sigma}C^T(I + C\tilde{\Sigma}C^T)^{-1}C\tilde{\Sigma}A^T + \\ & \tilde{\Sigma}H_\gamma^T(I + H_\gamma\tilde{\Sigma}H_\gamma^T)^{-1}H_\gamma\tilde{\Sigma} \end{aligned} \quad (3.1.20)$$

式中的  $H_\gamma = \gamma^{-1}H$ 。

先验  $H_\infty$  滤波与上一章介绍的离散  $H_\infty$  全信息反馈控制恰好构成对偶系统。这一点和连续系统的  $H_\infty$  滤波与  $H_\infty$  全信息反馈控制构成对偶问题有类似之处,但也存在着区别。对于连续系统,无论滤波还是控制,都可以利用当前状态的量测信息,本书中所讨论的连续系统的滤波和控制问题都利用了当前的状态量测信息。对于离散系统,通常所说的  $H_\infty$  滤波器,就是利用了当前量测信息的后验滤波器<sup>[12]</sup>。

需要指出的是,先验和后验  $H_\infty$  滤波器的最优  $H_\infty$  性能指标是不同的。对于给定的  $\gamma > 0$ ,如果式(3.1.20)存在正定解  $\tilde{\Sigma} > 0$ ,则式(3.1.15)必然存在正定解  $\Sigma > 0$ 。这是因为两者之间存在下列关系

$$\tilde{\Sigma}^{-1} = \Sigma^{-1} - H_\gamma^TH_\gamma \quad (3.1.21)$$

显然,  $\Sigma > 0$  并不能保证  $\tilde{\Sigma} > 0$ ,所以可以预料,通常所说的  $H_\infty$  滤波器,即后验  $H_\infty$  滤波器的最优  $H_\infty$  性能指标小于先验  $H_\infty$  滤波器

的最优性能指标<sup>[12]</sup>。其中一个原因应当是后验  $H_\infty$  滤波器利用了更多的信息,即系统当前的量测信息。

### 3.2 最优 $H_\infty$ 范数与 Hamilton 差分系统特征值

定义如下形式的目标函数<sup>[3]</sup>

$$J_\gamma(\hat{z}, w, v, x_0) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [\gamma^{-2} (z_k - \hat{z}_k)^T (z_k - \hat{z}_k) - (w_k^T w_k + v_k^T v_k)] - \frac{1}{2} (x_0 - \hat{x}_0)^T Q_0^{-1} (x_0 - \hat{x}_0) \quad (3.2.1)$$

利用 Lagrange 乘子  $\lambda_k$  可以将约束(3.1.1)引入目标函数,并考虑到式(3.1.2)和(3.1.3),得到增广的性能指标泛函

$$\begin{aligned} J_\gamma(\hat{z}, w, v, x_0) &= \sum_{k=0}^{N-1} \left[ \lambda_{k+1}^T (x_{k+1} - A_k x_k - D_k w_k) + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} \gamma^{-2} (x_k - \hat{x}_k)^T H_k^T H_k (x_k - \hat{x}_k) - \frac{1}{2} w_k^T w_k - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} (y_k - C_k x_k)^T (y_k - C_k x_k) \right] - \\ &\quad \frac{1}{2} (x_0 - \hat{x}_0)^T Q_0^{-1} (x_0 - \hat{x}_0) \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

由这一性能指标泛函驻值的必要条件可得两端边值问题

$$x_{k+1} = A_k x_k + D_k D_k^T \lambda_{k+1} \quad (3.2.3a)$$

$$\lambda_k = (\gamma^{-2} H_k^T H_k - C_k^T C_k) x_k + A_k^T \lambda_{k+1} + C_k^T y_k - \gamma^{-2} H_k^T H_k \hat{x}_k \quad (3.2.3b)$$

边界条件为

$$x_0 = \hat{x}_0 + Q_0 \lambda_0, \lambda_N = 0 \quad (3.2.3c)$$

实际上离散 Riccati 方程(3.1.6)的解由式(3.2.3)的齐次方程就

可以确定,即

$$x_{k+1} = A_k x_k + D_k D_k^T \lambda_{k+1} \quad (3.2.4a)$$

$$\lambda_k = (\gamma^{-2} H_k^T H_k - C_k^T C_k) x_k + A_k^T \lambda_{k+1} \quad (3.2.4b)$$

边界条件为

$$x_0 = Q_0 \lambda_0, \quad \lambda_N = 0 \quad (3.2.4c)$$

边值问题(3.2.4)存在非平凡解时,相应的 $\gamma^{-2}$ 是其特征值。由于式(3.2.4)属于Hamilton差分方程,为了讨论问题方便,虽然上一章中已经有一些介绍,这里仍给出这类方程特征值问题的有关结论。考虑一般形式的离散Hamilton差分系统特征值问题

$$\Delta x_k = \tilde{A}_k x_k + \tilde{D}_k \tilde{D}_k^T \lambda_{k+1} \quad (3.2.5a)$$

$$\Delta \lambda_k = (\tilde{C}_k^T \tilde{C}_k - \gamma^{-2} \tilde{H}_k^T \tilde{H}_k) x_k - \tilde{A}_k^T \lambda_{k+1} \quad (3.2.5b)$$

其中差分算子 $\Delta$ 的定义为 $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ ,且 $k \in [0, N-1]$ 。其边界条件为

$$R^* \begin{bmatrix} -x_0 \\ x_{N-1} \end{bmatrix} + R \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_{N+1} \end{bmatrix} = 0 \quad (3.2.5c)$$

方程(3.2.5a)及(3.2.5b)的矩阵形式为

$$\Delta X_k = \tilde{A}_k X_k + \tilde{D}_k \tilde{D}_k^T \Lambda_{k+1} \quad (3.2.6a)$$

$$\Delta \Lambda_k = (\tilde{C}_k^T \tilde{C}_k - \gamma^{-2} \tilde{H}_k^T \tilde{H}_k) X_k - \tilde{A}_k^T \Lambda_{k+1} \quad (3.2.6b)$$

如果对于所有的 $k \in [0, N-1]$ ,Hamilton差分方程(3.2.6)的解矩阵 $X_k, \Lambda_k$ 满足 $\text{rank}(X_k^T \Lambda_k^T) = n$ 及 $X_k^T \Lambda_k = \Lambda_k^T X_k$ ,则 $(X, \Lambda)$ 称为Hamilton差分方程的一个联合基<sup>[7-8]</sup>。

**定理 3.1<sup>[7]</sup>** 若差分方程的边界条件为可分离形式

$$R^* = \begin{bmatrix} -R_0^* & 0 \\ 0 & R_N^* \end{bmatrix} \quad (3.2.7a)$$

$$R = \begin{bmatrix} R_0 & 0 \\ 0 & R_N \end{bmatrix} \quad (3.2.7b)$$

并设 $(X, \Lambda)$ 为式(3.2.6)的联合基,且 $X_0 = -R_0^T, \Lambda_0 = R_0^{*T}$ ,则

$\gamma^{-2}$  为式 (3.2.6) 及 (3.2.7) 的特征值当且仅当  $R_N^* X_N + R_N \Lambda_N$  为奇异矩阵。

□

为建立 Riccati 方程与 Hamilton 差分方程的联系, 令  $A_k = I + \tilde{A}_k$ ,  $D_k = \tilde{D}_k$ ,  $H_k = \tilde{H}_k$ ,  $C_k = \tilde{C}_k$ , 则可将方程 (3.2.7) 变换为 (3.2.4) 的形式, 两者等价。而由 Hamilton 差分方程 (3.2.6) 的联合基即可构造 Riccati 方程的解。令  $Q_k = X_k \Lambda_k^{-1}$ , 可将 (3.2.6a) 及 (3.2.6b) 变换为

$$Q_{k+1} = A_k Q_k \Lambda_{k+1}^{-1} + D_k D_k^T \quad (3.2.8a)$$

$$I + (C_k^T C_k - \gamma^{-2} H_k^T H_k) Q_k = A_k \Lambda_{k+1} \Lambda_k^{-1} \quad (3.2.8b)$$

从而有

$$Q_{k+1} = A_k Q_k [I + (C_k^T C_k - \gamma^{-2} H_k^T H_k) Q_k]^{-1} A_k^T + D_k D_k^T \quad (3.2.9)$$

显然此方程就是 Riccati 方程 (3.1.6)。若令

$$R^* = \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.10a)$$

$$R = \begin{bmatrix} -Q_0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (3.2.10b)$$

则对于  $(X, \Lambda)$ ,  $X = Q_0$ ,  $\Lambda_0 = I$ , 从而  $Q_0 = X_0 \Lambda_0^{-1}$ 。又因为  $R_N^* = 0$ ,  $R_N = I$ , 所以  $R_N^* X_N + R_N \Lambda_N = \Lambda_N$ 。显然当  $\gamma^{-2}$  为离散 Hamilton 系统的特征值时, 必定有  $\Lambda_N$  奇异, 从而 Riccati 方程 (3.1.6) 在此点无定义。从  $H_\infty$  滤波的角度来看, 则表明当  $\gamma^{-2}$  等于一阶特征值  $r_1^{-2}$  时, 次优  $H_\infty$  滤波器不存在, 此时的  $\gamma$  就是  $H_\infty$  滤波系统的最优性能指标。至此已经建立了最优  $H_\infty$  范数与离散 Hamilton 系统一阶特征值之间的关系。

另外, Hamilton 差分方程 (3.2.3) 还是下列离散变分驻值问题的必要条件

$$J = \sum_{k=0}^{K-1} \left[ \lambda_{k+1}^T x_{k+1} - \lambda_{k+1}^T A_k x_k - \frac{1}{2} x_k^T (C_k^T C_k + \gamma^{-2} H_k^T H_k) x_k - \frac{1}{2} \lambda_{k+1}^T D_k^T D_k \lambda_{k+1} \right] + \frac{1}{2} x_0^T Q_0^{-1} x_0 \quad (3.2.11)$$

$$\delta J = 0$$

因此当  $x_k, \lambda_k$  的选取使得  $\delta J = 0$  时, 有

$$\gamma^{-2} = \text{st} \frac{\Pi_1}{\Pi_2} \quad (3.2.12)$$

$$\Pi_1 = \sum_{k=0}^{N-1} \left[ \lambda_{k+1}^T x_{k+1} - \lambda_{k+1}^T A_k x_k + \frac{1}{2} x_k^T C_k^T C_k x_k - \frac{1}{2} \lambda_{k+1}^T D_k^T D_k \lambda_{k+1} \right] + \frac{1}{2} x_0^T Q_0^{-1} x_0 \quad (3.2.13a)$$

$$\Pi_2 = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} x_k^T H_k^T H_k x_k \quad (3.2.13b)$$

式(3.2.12) 具有两类变量广义 Rayleigh 商驻值的形式。下一节将通过离散 Legendre 变换将一般的矩阵广义特征值问题(一类变量 Rayleigh 商驻值问题)变换成两类变量广义 Rayleigh 商驻值的形式, 这是应用扩展 Wittrick-Williams 算法计算最优  $H_\infty$  范数的前提。

### 3.3 矩阵特征值及广义 Rayleigh 商

考虑下列广义矩阵特征值问题

$$(K - \rho M)d = 0 \quad (3.3.1)$$

其中对称矩阵  $K \geq 0, M > 0$ , 向量  $d \in \mathbf{R}^{Nn-n}$ , 并分别具有下列形式

$$K = \begin{bmatrix} K_{aa1} + S_1^{-1} & K_{ab0} & & \\ & K_{bb0} + K_{aa1} & & \\ & & \ddots & K_{abN} \\ & & & K_{bbN} \end{bmatrix} \quad (3.3.2a)$$

symmetry

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_0 & & & \\ & \mathbf{M}_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{M}_{N-1} \end{bmatrix} \quad (3.3.2b)$$

$$\mathbf{d} = [\mathbf{d}_0^\top, \mathbf{d}_1^\top, \dots, \mathbf{d}_N^\top]^\top \quad (3.3.2c)$$

其中  $\mathbf{K}_{aai}, \mathbf{K}_{bbi}$  为对称阵,  $\mathbf{K}_{abi}^\top = \mathbf{K}_{baa}, \mathbf{K}_{aai}, \mathbf{K}_{bbi}, \mathbf{K}_{abi} \in \mathbf{R}^{n \times n}, \mathbf{d}_i \in \mathbf{R}^n (i = 0, 1, \dots, N-1)$ 。众所周知, 广义特征值问题(3.3.1)的特征值是下列 Rayleigh 商的驻值

$$\rho = \text{st} \frac{\mathbf{d}^\top \mathbf{K} \mathbf{d}}{\mathbf{d}^\top \mathbf{M} \mathbf{d}} \quad (3.3.3)$$

即

$$\rho = \text{st} \frac{\sum_{k=0}^{N-1} U_k^0(\mathbf{d}_k, \mathbf{d}_{k+1}) + \frac{1}{2} \mathbf{d}_0^\top \mathbf{S}_0^{-1} \mathbf{d}_0}{\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{d}_k^\top \mathbf{M}_k \mathbf{d}_k} \quad (3.3.4)$$

其中

$$U_k^0(\mathbf{d}_k, \mathbf{d}_{k+1}) = \frac{1}{2} \mathbf{d}_k^\top \mathbf{K}_{aak} \mathbf{d}_k + \mathbf{d}_{k+1}^\top \mathbf{K}_{bak} \mathbf{d}_k + \frac{1}{2} \mathbf{d}_{k+1}^\top \mathbf{K}_{bbk} \mathbf{d}_{k+1} \quad (3.3.5)$$

因为特征值问题(3.3.1)等价于变分问题

$$\delta \left[ \frac{1}{2} \mathbf{d}^\top (\mathbf{K} - \rho \mathbf{M}) \mathbf{d} \right] = 0 \quad (3.3.6)$$

即

$$\delta \left[ \sum_{k=0}^{N-1} U_k^0(\mathbf{d}_k, \mathbf{d}_{k+1}) + \frac{1}{2} \mathbf{d}_0^\top \mathbf{S}_0^{-1} \mathbf{d}_0 - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \rho \mathbf{d}_k^\top \mathbf{M}_k \mathbf{d}_k \right] = 0 \quad (3.3.7)$$

现在令

$$U_k(\mathbf{d}_k, \mathbf{d}_{k+1}) = U_k^0(\mathbf{d}_k, \mathbf{d}_{k+1}) - \frac{1}{2} \rho \mathbf{d}_k^\top \mathbf{M}_k \mathbf{d}_k \quad (3.3.8)$$



通过下列离散 Legendre 变换, 变分问题(3.3.7) 可以变换为等价的正则形式。定义

$$\mathbf{n}_k = - \frac{\partial U_k}{\partial \mathbf{d}_k} = - \mathbf{K}_{aak} \mathbf{d}_k + \rho \mathbf{M}_k \mathbf{d}_k - \mathbf{K}_{abk} \mathbf{d}_{k+1} \quad (3.3.9a)$$

$$\mathbf{n}_{k+1} = \frac{\partial U_k}{\partial \mathbf{d}_{k+1}} = \mathbf{K}_{aak} \mathbf{d}_k - \mathbf{K}_{bbk} \mathbf{d}_{k+1} \quad (3.3.9b)$$

则  $U_k$  可以表示为

$$U_k(\mathbf{d}_k, \mathbf{d}_{k+1}) = - \frac{1}{2} \mathbf{n}_k^T \mathbf{d}_k + \frac{1}{2} \mathbf{n}_{k+1}^T \mathbf{d}_{k+1} \quad (3.3.10)$$

令

$$H_k(\mathbf{n}_k, \mathbf{d}_{k+1}) = \mathbf{d}_{k+1}^T \mathbf{n}_{k+1} - U_k(\mathbf{d}_k, \mathbf{d}_{k+1}) \quad (3.3.11)$$

由(3.3.9) 求解  $\mathbf{n}_{k+1}$  和  $\mathbf{d}_k$ , 可得下列对偶方程

$$\mathbf{d}_{k+1} = \mathbf{F}_k \mathbf{d}_k + \mathbf{G}_k \mathbf{n}_{k+1} \quad (3.3.12a)$$

$$\mathbf{n}_k = - \mathbf{E}_k \mathbf{d}_k + \mathbf{F}_k^T \mathbf{n}_{k+1} \quad (3.3.12b)$$

其中

$$\mathbf{F}_k = - \mathbf{K}_{bbk}^{-1} \mathbf{K}_{bak} \quad (3.3.13a)$$

$$\mathbf{G}_k = \mathbf{K}_{bbk}^{-1} \quad (3.3.13b)$$

$$\mathbf{E}_k = \mathbf{K}_{aak} - \mathbf{K}_{abk} \mathbf{K}_{bbk}^{-1} \mathbf{K}_{bak} - \rho \mathbf{M}_k = \mathbf{E}_k^0 - \rho \mathbf{M}_k \quad (3.3.13c)$$

这些矩阵称为区段矩阵。而 Hamilton 函数  $H_k(\mathbf{n}_k, \mathbf{d}_{k+1})$  可表示为

$$H_k(\mathbf{n}_k, \mathbf{d}_{k+1}) = \frac{1}{2} \mathbf{d}_k^T \mathbf{E}_k \mathbf{d}_k + \mathbf{n}_{k+1}^T \mathbf{F}_k \mathbf{d}_k + \frac{1}{2} \mathbf{n}_{k+1}^T \mathbf{G}_k \mathbf{n}_{k+1} \quad (3.3.14)$$

从而得到与变分问题(3.3.7) 等类的两类变量变分问题

$$\delta \left[ \sum_{k=0}^{N-1} (\mathbf{n}_{k+1}^T \mathbf{d}_{k+1} - \left( \mathbf{n}_{k+1}^T \mathbf{F}_k \mathbf{d}_k - \frac{1}{2} \mathbf{d}_k^T \mathbf{E}_k \mathbf{d}_k + \frac{1}{2} \mathbf{n}_{k+1}^T \mathbf{G}_k \mathbf{n}_{k+1} \right)) + \frac{1}{2} \mathbf{d}_0^T \mathbf{S}_c^{-1} \mathbf{d}_0 \right] = 0 \quad (3.3.15)$$

根据上述结果, Rayleigh 商(3.3.4) 可以变换为等类的两类变量广义 Rayleigh 商的形式

$$\rho = \text{st} \frac{\Phi_1}{\Phi_2} \quad (3.3.16)$$

其中

$$\Phi_1 = \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \mathbf{n}_{k+1}^T \mathbf{d}_{k+1} - \mathbf{n}_{k+1}^T \mathbf{F}_k \mathbf{d}_k + \frac{1}{2} \mathbf{d}_k^T \mathbf{E}_k^0 \mathbf{d}_k + \frac{1}{2} \mathbf{n}_{k+1}^T \mathbf{G}_k \mathbf{n}_{k+1} \right\} + \frac{1}{2} \mathbf{d}_0^T \mathbf{Q}_0^{-1} \mathbf{d}_0 \quad (3.3.17a)$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{d}_k^T \mathbf{M}_k \mathbf{d}_k \quad (3.3.17b)$$

比较式(3.3.16)及(3.2.12)可知其形式与意义完全一致,所以计算广义 Rayleigh 商驻值的算法也可以用来计算最优  $H_\infty$  范数。因为  $\mathbf{d} \in \mathbf{R}^{N \times n}$ ,一般来讲特征值问题(3.3.1)的维数会非常大,但这里仅需要计算一阶特征值,所以应当选择适合于这类问题的算法。这里采用扩展 Wittrick-Williams 算法结合  $2^N$  类型的区段合并公式<sup>[9]</sup> 解决这一问题。合并公式是通过定义

$$\mathbf{d}_k = \mathbf{F}_1 \mathbf{d}_{k-1} + \mathbf{G}_1 \mathbf{n}_k \quad (3.3.18a)$$

$$\mathbf{n}_{k-1} = -\mathbf{E}_1 \mathbf{d}_{k-1} + \mathbf{F}_1^T \mathbf{n}_k \quad (3.3.18b)$$

$$\mathbf{d}_{k+1} = \mathbf{F}_2 \mathbf{d}_k + \mathbf{G}_2 \mathbf{n}_{k+1} \quad (3.3.19a)$$

$$\mathbf{n}_k = -\mathbf{E}_2 \mathbf{d}_k + \mathbf{F}_2^T \mathbf{n}_{k+1} \quad (3.3.19b)$$

$$\mathbf{d}_{k+1} = \mathbf{F}_c \mathbf{d}_{k-1} + \mathbf{G}_c \mathbf{n}_{k+1} \quad (3.3.20a)$$

$$\mathbf{n}_{k-1} = -\mathbf{E}_c \mathbf{d}_{k-1} + \mathbf{F}_c^T \mathbf{n}_{k+1} \quad (3.3.20b)$$

而导出的公式

$$\mathbf{G}_c = \mathbf{G}_2 + \mathbf{F}_2 (\mathbf{G}_1^{-1} + \mathbf{E}_2)^{-1} \mathbf{F}_2^T \quad (3.3.21a)$$

$$\mathbf{E}_c = \mathbf{E}_1 + \mathbf{F}_1^T (\mathbf{E}_2^{-1} + \mathbf{G}_1)^{-1} \mathbf{F}_1 \quad (3.3.21b)$$

$$\mathbf{F}_c = \mathbf{F}_2 (\mathbf{I} + \mathbf{G}_1 \mathbf{E}_2)^{-1} \mathbf{F}_1 \quad (3.3.21c)$$

很明显,这种差分方程系数之间的关系不仅只对式(3.3.18 ~ 3.3.21)的情况成立,任意两个相邻区间 1 和 2 合并构成一个新区间  $c$  时,对应的差分方程系数都有这一关系<sup>[9]</sup>。

### 3.4 最优 $H_\infty$ 范数计算

#### 3.4.1 扩展 Wittrick-Williams 特征值计数公式

第二章中已经给出了 Wittrick-Williams 特征值计数公式, 为方便讨论与阅读, 这里再简要复述一下。对于广义特征值问题

$$(K - \rho M)x = 0 \quad (3.4.1)$$

其中  $K > 0, K^T = K, M > 0, M^T = M, x \in \mathbb{R}^n$ , 用  $s\{A\}$  表示对称矩阵  $A$  的负特征值个数, 定义广义特征值问题 (3.4.1) 小于给定值  $\rho_\pi$  的特征值个数为其特征值计数, 用  $J(\rho_\pi)$  表示, 则有

$$J(\rho_\pi) = s\{K - \rho_\pi M\} \quad (3.4.2)$$

如果将矩阵及向量分块表示为下列形式

$$\left\{ \begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ -K_{ba} & K_{bb} \end{bmatrix} - \rho \begin{bmatrix} M_{aa} & M_{ab} \\ M_{ba} & M_{bb} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix} = 0 \quad (3.4.3)$$

其中  $x_a \in \mathbb{R}^r, x_b \in \mathbb{R}^{n-r}$ , 设  $x_a = 0$ , 则有

$$(K_{bb} - \rho M_{bb})x_b = 0 \quad (3.4.4)$$

记 (3.4.4) 式小于  $\rho_\pi$  的特征值计数为  $J_c(\rho_\pi)$ , 并记

$$D(\rho_\pi) = K_{aa} - \rho_\pi M_{aa} - (K_{ab} - \rho_\pi M_{ab})(K_{bb} - \rho_\pi M_{bb})^{-1} \cdot (K_{ba} - \rho_\pi M_{ba}) \quad (3.4.5)$$

则有

$$J(\rho_\pi) = J_c(\rho_\pi) + s\{D(\rho_\pi)\} \quad (3.4.6)$$

当  $n \rightarrow \infty$ ,  $D(\rho)$  是  $\rho$  的超越函数时上述等式依然成立。

下面介绍扩展 Wittrick-Williams 特征值计数公式及其证明, 这里的公式是适用于  $H_\infty$  滤波问题的形式, 与第二章中介绍的内容有所区别。

**A: 无约束情况**

对于特征值问题

$$\begin{bmatrix} K_{aa1} & K_{ab1} \\ K_{ba1} & K_{bb1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k-1} \\ x_k \end{bmatrix} = 0 \quad (3.4.7)$$

若  $x_{k-1} = 0, x_k \neq 0$ , 则有

$$K_{bb1} x_k = 0 \quad (3.4.8)$$

其特征值计数为

$$J_{K1}(\rho_\pi) = s\{K_{bb1}\} = s\{G_1\} \quad (3.4.9)$$

由 Wittrick-Williams 特征值计数定理, 并利用式(3.3.14) 可得问题(3.4.7) 的特征值计数

$$J_1(\rho_\pi) = J_{K1}(\rho_\pi) + s\{E_1\} \quad (3.4.10)$$

对于特征值问题

$$\begin{bmatrix} K_{aa2} & K_{ab2} \\ K_{ba2} & K_{bb2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k+1} \end{bmatrix} = 0 \quad (3.4.11)$$

同理可得

$$J_{K2}(\rho_\pi) = s\{K_{bb2}\} = s\{G_2\} \quad (3.4.12)$$

$$J_2(\rho_\pi) = J_{K2}(\rho_\pi) + s\{E_2\} \quad (3.4.13)$$

而对于特征值问题

$$\begin{bmatrix} K_{aa1} & K_{ab1} \\ K_{ba1} & K_{aa2} + K_{bb1} & K_{ab2} \\ & K_{ba2} & K_{bb2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k-1} \\ x_k \\ x_{k+1} \end{bmatrix} \quad (3.4.14)$$

设  $x_{k-1} = 0, x_k, x_{k+1} \neq 0$ , 则有特征值问题

$$\begin{bmatrix} K_{bb1} + K_{aa2} & K_{ab2} \\ K_{ba2} & K_{bb2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k+1} \end{bmatrix} \quad (3.4.15)$$

对其进行 Schur 分解

$$\begin{bmatrix} K_{bb1} + K_{aa2} & K_{ab2} \\ K_{ba2} & K_{bb2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{bb1} + K_{bb2} - K_{ab2} K_{bb2}^{-1} K_{ba2} & K_{ab2} \\ & K_{bb2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I & 0 \\ K_{bb2}^{-1} K_{ab2} & I \end{bmatrix} \quad (3.4.16)$$

则特征值问题(3.4.15)的特征值计数可表示为

$$J_{K_0}(\rho_\pi) = J_{K_1}(\rho_\pi) + J_{K_2}(\rho_\pi) - s\{G_1\} + s\{G_1^{-1} + E_2\} \quad (3.4.17)$$

### B: 有约束情况

考虑特征值问题

$$\begin{bmatrix} K_{aa1} & K_{ab1} \\ K_{ba1} & K_{bb1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k-1} \\ x_k \end{bmatrix} = 0 \quad (3.4.18)$$

在约束  $x_{k-1} = S_0 \lambda_{k-1}$ ,  $\lambda_k = 0$  情况下的特征值计数。利用

$$\lambda_{k-1} = -K_{aa1}x_{k-1} - K_{ab1}x_k \quad (3.4.19)$$

将其转化为无约束特征值问题。

$$\begin{bmatrix} S_0^{-1} + K_{aa1} & K_{ab1} \\ K_{ba1} & K_{bb1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k-1} \\ x_k \end{bmatrix} = 0 \quad (3.4.20)$$

注意其中  $\lambda_k = 0$  的条件是自然满足的。进行 Schur 分解后可得到其特征值计数公式

$$J_{K_{0,1}}(\rho_\pi) = J_{K_1}(\rho_\pi) + s\{S_0^{-1} + E_1\} \quad (3.4.21)$$

再考虑特征值问题

$$\begin{bmatrix} S_0^{-1} + K_{aa1} & K_{ab1} \\ K_{ba1} & K_{bb1} + K_{bb2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k-1} \\ x_k \end{bmatrix} = 0 \quad (3.4.22)$$

设  $x_{k-1} = 0$ , 则有特征值问题

$$\begin{bmatrix} K_{bb1} + K_{aa2} & K_{ab2} \\ K_{ba2} & K_{bb2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k+1} \end{bmatrix} = 0 \quad (3.4.23)$$

记其特征值计数为  $J_0(\rho_\pi)$ , 显然有

$$J_0(\rho_\pi) = J_{K_0}(\rho_\pi) \quad (3.4.24)$$

按照式(3.4.5), 有

$$D(\rho_\pi) = (S_0^{-1} + K_{aa2}) - [K_{ab1} \ 0] \begin{bmatrix} K_{bb1} + K_{aa2} & K_{ab2} \\ K_{ba2} & K_{bb2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} K_{ba1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.4.25)$$

由分块矩阵求逆定理得

$$D(\rho_\pi) = S_0^{-1} + E_1 + F_1^1 [G_1^{-1} - (I + E_2 G_1)^{-1} G_1^{-1}] F_1 \quad (3.4.26)$$

根据式(3.3.21)可进一步将其变换为

$$D(\rho_\pi) = S_0^{-1} + E_c \quad (3.4.27)$$

从而特征值问题(3.4.22)的特征值计数为

$$J_{RGc}(\rho_\pi) = J_{Rc}(\rho_\pi) + s\{S_0^{-1} + E_c\} \quad (3.4.28)$$

### 3.4.2 算法描述

综上所述,现将定常系统最优  $H_\infty$  范数计算的步骤给出,时变系统的算法是类似的,只不过需要给定系数矩阵  $A_k, D_k, C_k, H_k$  在各时刻的值。

**Step0.** { 选择合适的  $\gamma_\pi^{-2}; E = C^1 C - \gamma_\pi^{-2} H^T H; F = A; G = DD^T$  }

**Step1.** {  $E_2 = E; G_2 = G; F_2 = F; J_{R2} = 0; E_1 = 0; G_1 = Q_0; F_1 = I; J_{R1} = 0$  }

**Step2.** for ( $k = 1; k \leq K - 1; k++$ ) {

{ 由(3.3.22a ~ c), (3.4.28) 计算  $E_c, G_c, F_c$  和  $J_{RGc}$  }

{  $E_1 = E_c; G_1 = G_c; F_1 = F_c; J_{R2} = J_{RGc}$  }

if ( $J_{Rc} > 0$ ) { 中断循环; 选择较小的  $\gamma_\pi^{-2}$  重新开始 } }

**Step3.** if ( $J_{RGc} > 0$ )

{  $\gamma_\pi^{-2}$  是  $\gamma_{opt}^{-2}$  的一个上界 (upperbound), 在重新计算时应减小 }

else

{  $\gamma_\pi^{-2}$  为次优参数, 是  $\gamma_{opt}^{-2}$  的一个下界 (lowerbound) }

if (upperbound-lowerbound)  $> \epsilon$  ( $\epsilon$  是预先选定的小

止实数)

{增加  $\gamma_{\pi}^{-2}$  重新计算}

else

{break}

迭代可以在满足精度要求后终止, 并取 lowerbound 作为  $\gamma_{\text{opt}}^{-2}$ 。另外, 上述算法中计算出的序列  $G_k$  就是 Riccati 方程 (3.1.12) 的解矩阵  $\Sigma_k$ , 这与连续系统的结果是一致的<sup>[5]</sup>。对于给定的  $\gamma > \gamma_{\text{opt}}$ , 当  $N$  趋向于无穷时,  $\Sigma_N$  趋近于 Riccati 代数方程 (3.1.15) 的解。

### 3.5 算 例

**算例 1:**

第一个算例取自文献[3], 参数如下

$$A = \begin{bmatrix} 0.5079 & 0.7594 \\ -0.7594 & 0.2801 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.4921 \\ 0.7504 \end{bmatrix}$$

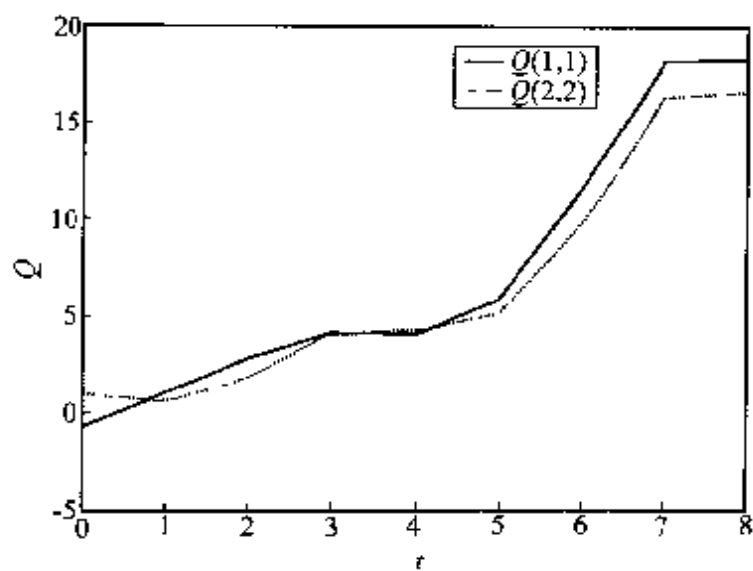
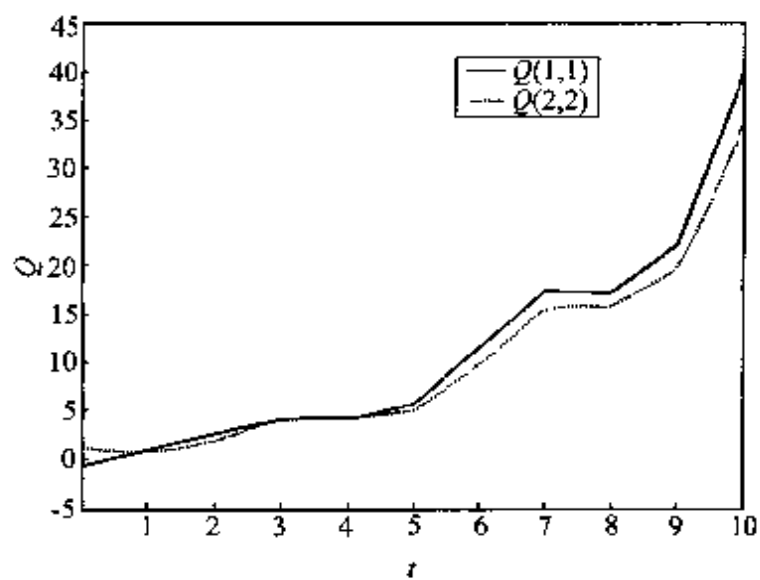
$$C = [0 \quad 1], \quad H = [1 \quad 0]$$

计算结果见表 3-1, 当  $N$  逐渐增大时, 最优  $H_{\infty}$  范数趋近于一个定值, 这个值也是无限时间滤波问题的最优  $H_{\infty}$  范数。

表 3-1 算例 1 的  $\gamma_{\text{opt}}$

$N$	$2^2$	$2^3$	$2^4$	$2^5$
$\gamma_{\text{opt}}$	1.17627	1.18541	1.18609	1.19609
$N$	$2^6$	$2^7$	$2^8$	$2^9$
$\gamma_{\text{opt}}$	1.18609	1.18609	1.18609	1.18609

图 3.1 至图 3.4 则给出了  $\gamma^{-2} = \gamma_{\text{opt}}^{-2}$  时, 不同区间长度内 Riccati 方程解的变化情况。由图中可见 Riccati 方程解的增长趋势。


 图 3.1 算例 1 Riccati 方程的解 ( $N=8, \gamma^{-2} = \gamma_{\text{opt}}^2$ )

 图 3.2 算例 1 Riccati 方程的解 ( $N=10, \gamma^{-2} = \gamma_{\text{opt}}^2$ )



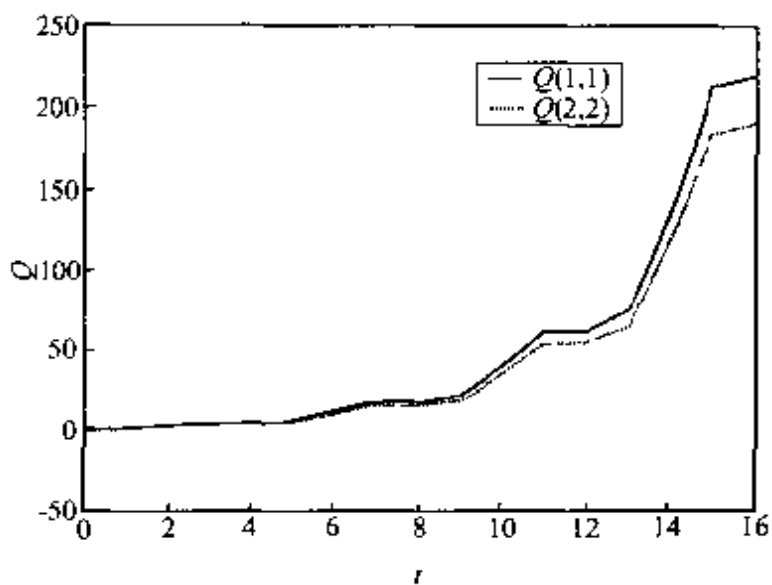
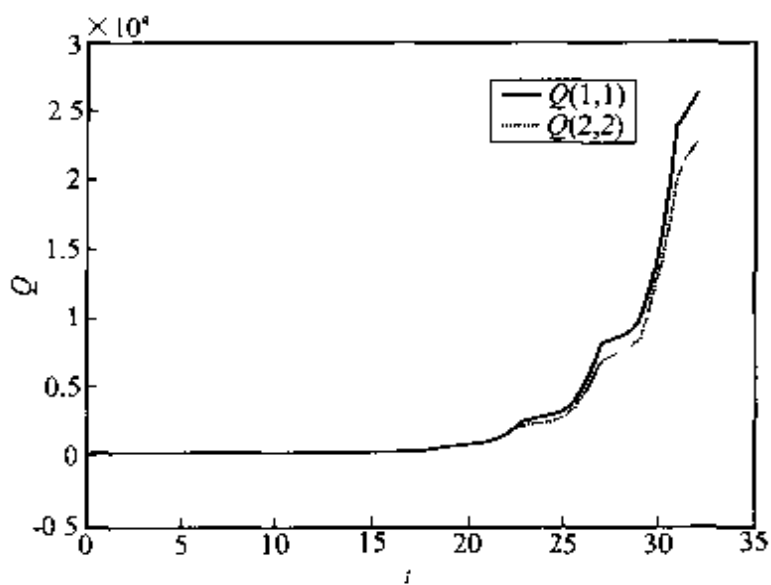
图 3.3 算例 1 Riccati 方程的解 ( $N = 16, \gamma^{-2} = \gamma_{\text{opt}}^2$ )图 3.4 算例 1 Riccati 方程的解 ( $N = 32, \gamma^{-2} = \gamma_{\text{opt}}^2$ )

图 3.5 至图 3.7 给出了  $\gamma^{-2} = 0.9 \times \gamma_{\text{opt}}^{-2}$  时, 不同区间长度内 Riccati 方程解的变化情况。

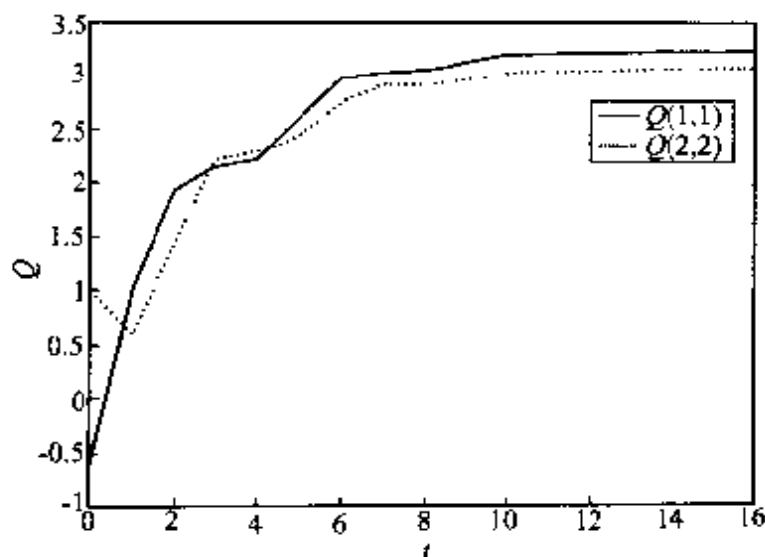


图 3.5 算例 1 Riccati 方程的解 ( $N = 16, \gamma^{-2} = 0.9 \times \gamma_{\text{opt}}^{-2}$ )

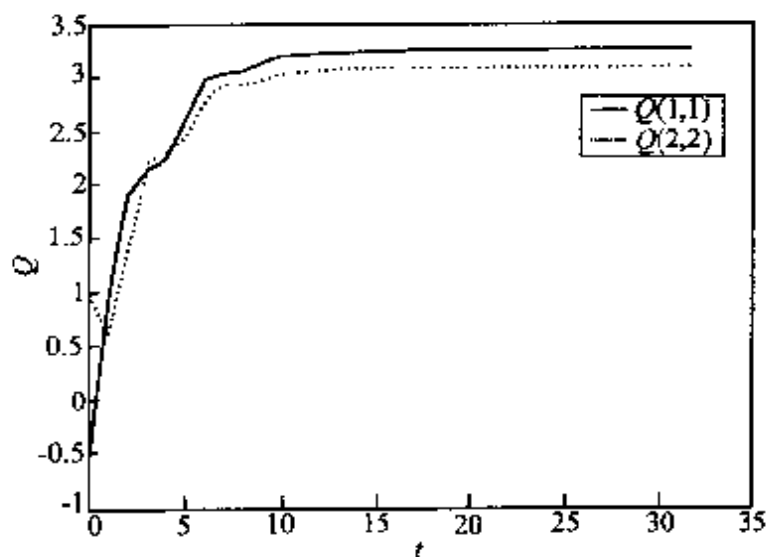


图 3.6 算例 1 Riccati 方程的解 ( $N = 32, \gamma^{-2} = 0.9 \times \gamma_{\text{opt}}^{-2}$ )

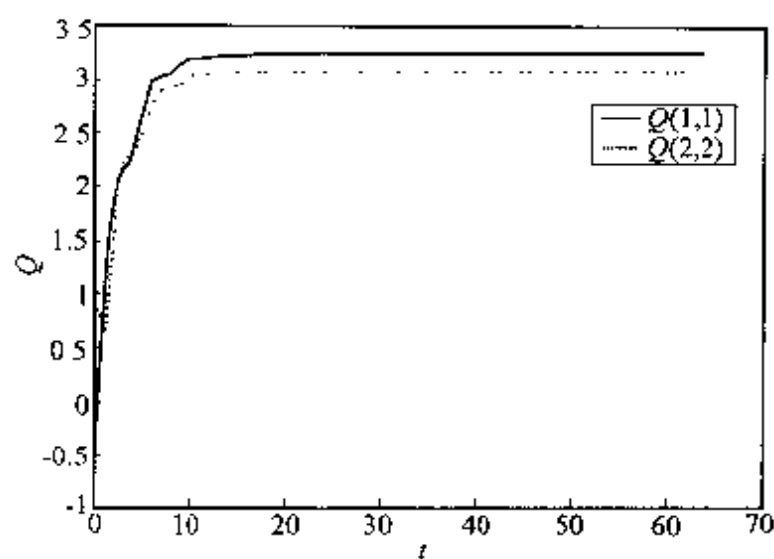


图 3.7 算例 1 Riccati 方程的解 ( $N = 64, \gamma^{-2} = 0.9 \times \gamma_{\text{opt}}^2$ )

图 3.8 至图 3.10 给出了  $\gamma^{-2} = 0.2 \times \gamma_{\text{opt}}^2$  时, 不同区间长度内 Riccati 方程解的变化情况。随着时间的增长, Riccati 方程的解趋于常数值。

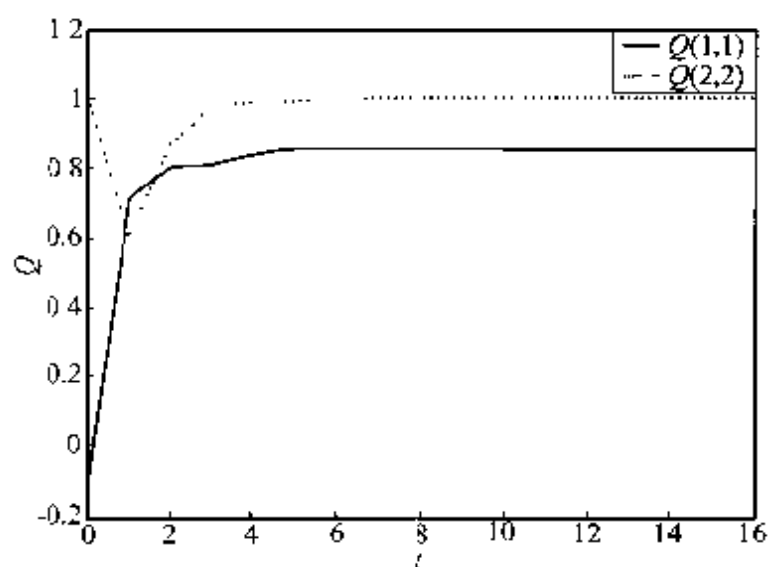
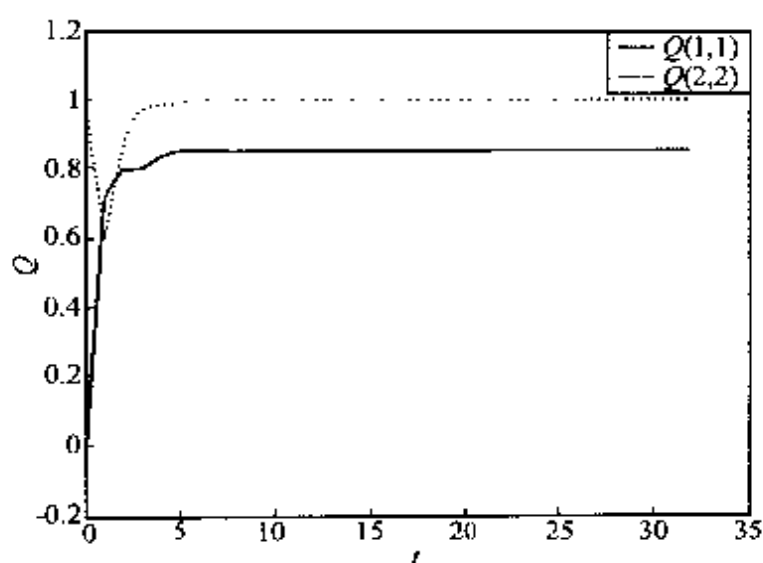
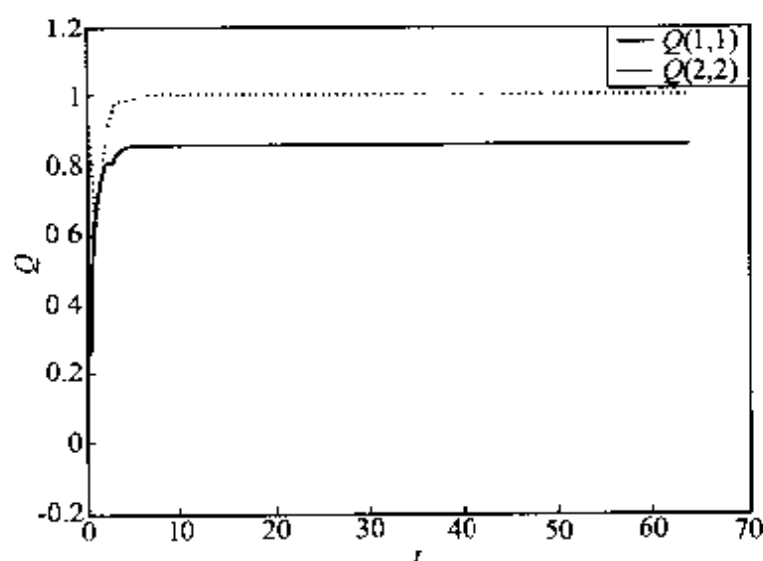


图 3.8 算例 1 Riccati 方程的解 ( $N = 16, \gamma^{-2} = 0.2 \times \gamma_{\text{opt}}^2$ )

图 3.9 算例 1 Riccati 方程的解 ( $N = 32, \gamma^{-2} = 0.2 \times \gamma_{\text{opt}}^2$ )图 3.10 算例 1 Riccati 方程的解 ( $N = 64, \gamma^{-2} = 0.2 \times \gamma_{\text{opt}}^2$ )

$H$  矩阵是需估计向量的组合系数矩阵, 当  $H$  矩阵变化时, 系统的最优性能指标当然也会变化, 表 3-2 给出  $H = \begin{bmatrix} 3 & 0 \end{bmatrix}$  时的计算结果。

表 3-2  $H$  矩阵变化后算例 1 的  $\gamma_{\text{opt}}$ 

$N$	$2^7$	$2^8$	$2^9$	$2^{10}$
$\gamma_{\text{opt}}$	1.07669	3.55826	3.55827	3.55829
$N$	$2^6$	$2^7$	$2^8$	$2^9$
$\gamma_{\text{opt}}$	3.55829	3.55829	3.55829	3.55829

**算例 2:**

第二个算例是将文献 5 中例 2 连续系统离散化后的系统,原连续系统为

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 \\ 39.4 & 3.8 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0.0 \\ 1.0 \end{bmatrix} w \\ y &= [1.0 \quad 0.0]x + v \\ z &= [0.0 \quad 0.2]x\end{aligned}$$

设输入端有零阶保持器,采样时间为  $\Delta T = 10/2^7 = 0.078125$ ,则离散后的系统为

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= \begin{bmatrix} 1.136 & 0.095 \\ 3.729 & 1.495 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0.003 \\ 0.095 \end{bmatrix} w_k \\ y_k &= [1.0 \quad 0.0]x_k + v_k \\ z_k &= [0.0 \quad 0.2]x_k\end{aligned}$$

取  $N = 2^7$  计算,得  $\gamma_{\text{opt}} = 1.69185$ 。为进行比较,取同样长的时间段,即对原连续系统取  $T = 10$  计算,得  $\gamma_{\text{opt}} = 1.69183$ ,可见两个结果一致。而表 3-3 则是不同时间长度的最优范数值,采样间隔仍然是  $\Delta T$ 。

表 3-3 算例 2 的  $\gamma_{\text{opt}}$ 

$N$	$2^2$	$2^3$	$2^4$	$2^5$
$\gamma_{\text{opt}}$	1.29196	1.69184	1.69185	1.69185
$N$	$2^6$	$2^7$	$2^8$	$2^9$
$\gamma_{\text{opt}}$	1.69185	1.69185	1.69185	1.69185

表 3-4 给出的是  $H = [0 \quad 1]$  时的计算结果。

表 3-4  $H$  矩阵变化后算例 2 的  $\gamma_{opt}$

$N$	$2^2$	$2^3$	$2^4$	$2^5$
$\gamma_{opt}$	6.45976	8.45919	8.45920	9.45920
$N$	$2^6$	$2^7$	$2^8$	$2^9$
$\gamma_{opt}$	8.45920	8.45920	8.45920	9.45920

### 算例 3

第三个算例同样也是将一个连续系统离散化后的系统,该连续系统数据为

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 4.04 & -7.50 & 6.29 & -20.33 & -11.85 & 37.20 & -9.83 \\ 3.84 & -5.57 & 2.97 & -16.00 & -5.24 & -12.06 & 4.37 \\ 0.0 & 0.0 & 6.36 & -4.69 & 3.61 & -1.64 & -6.16 \\ 0.0 & 0.0 & 0.31 & -1.20 & -0.03 & -2.35 & -0.97 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.42 & -3.12 & -0.74 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.01 & 8.93 & -0.04 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 2.0 & -4.87 \end{bmatrix} \\
 B^T &= \begin{bmatrix} -7.094 & -7.507 & -1.455 & -7.34 & 3.12 & 6.04 & -3.1 \\ -3.788 & 2.101 & 1.835 & -9.60 & -1.418 & -1.98 & -4.2 \end{bmatrix} \\
 C &= \begin{bmatrix} 5.320 & 9.13 & 2.422 & 1.67 & -5.541 & -6.43 & -7.63 \\ -1.27 & 6.35 & -4.75 & 3.03 & -3.26 & -5.21 & 2.18 \end{bmatrix} \\
 L &= (-0.10 \quad 0.40 \quad 0.26 \quad 0.39 \quad -0.21 \quad 0.45 \quad -0.67)
 \end{aligned}$$

采样间隔取 0.02, 则离散后的系统为

$$A = \begin{bmatrix} 1.0780 & -0.1555 & 0.1332 & -0.3989 & -0.2324 & -0.8145 & -0.2043 \\ 0.0756 & 0.8888 & 0.0639 & -0.3168 & -0.1052 & -0.2677 & 0.0804 \\ 0.0 & 0.0 & 1.1353 & -0.0989 & 0.0767 & -0.0409 & -0.1249 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0065 & 0.9760 & -0.0004 & -0.0514 & -0.0186 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.9916 & -0.0683 & 0.0140 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0002 & 1.1955 & -0.0008 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0418 & 0.9072 \end{bmatrix}$$

$$B^1 = \begin{bmatrix} -0.1412 & -0.1411 & -0.0192 & -0.1466 & 0.0599 & 0.0885 & -0.0574 \\ 0.0182 & 0.0692 & -0.0249 & -0.1880 & -0.0263 & -0.0433 & 0.0809 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 5.320 & 9.13 & 2.422 & 1.67 & -5.541 & -6.43 & 7.63 \\ -1.25 & 6.35 & -1.75 & 3.03 & -3.26 & 5.21 & 2.18 \end{bmatrix}$$

不同区间长度的最优  $H_\infty$  范数计算结果见表 3-5。当  $N$  逐渐增大时,最优  $H_\infty$  范数趋近于一个定值。

表 3-5 算例 3 的  $\gamma_{opt}$

$N$	$2^2$	$2^3$	$2^4$	$2^5$
$\gamma_{opt}$	0.177778	0.177778	1.12698	4.25877
$N$	$2^6$	$2^7$	$2^8$	$2^9$
$\gamma_{opt}$	4.25877	4.25877	4.25877	4.25877

表 3-6 给出的是将  $H$  矩阵中所有元素乘以 2 后的计算结果。

表 3-6  $H$  矩阵变化后算例 3 的  $\gamma_{opt}$

$N$	$2^2$	$2^3$	$2^4$	$2^5$
$\gamma_{opt}$	0.116689	0.355555	2.25395	8.51752
$N$	$2^6$	$2^7$	$2^8$	$2^9$
$\gamma_{opt}$	8.51752	8.51752	8.51752	8.51752

本章建立了离散  $H_\infty$  滤波系统的最优范数  $\gamma_{opt}$  与 Hamilton 差分系统一阶特征值之间的关系。并在离散形式 Legendre 变换及广义 Rayleigh 商的基础上指出了  $\gamma_{opt}^2$  与矩阵广义特征值的对应关系。最后介绍了  $\gamma_{opt}$  的计算方法。类似地,对于连续  $H_\infty$  滤波系统,  $\gamma_{opt}^2$  则是 Hamilton 微分方程两端边值问题的一阶特征值,本书的第五章将详细讨论这一问题。

## 参考文献

- 1 Nagpal K M, Khargonekar P P. Filtering and smoothing in an  $H_\infty$  setting. IEEE Trans Automatic Control, 1991, 36: 152~166
- 2 Yaesh I, Shaked U. Game theory approach to *optimal* linear state estimation and its relation to the minimum  $H_\infty$ -norm estimation. IEEE Trans Automatic Control, 1992, 37: 828~831
- 3 Shen X, Deng L. Game theory approach to discrete  $H_\infty$  filter design. IEEE Trans Signal Processing, 1997, 45: 1092~1095
- 4 Basar T, Bernhard P.  $H_\infty$  Optimal Control and Related Minimax Design Problems: A Dynamic Game Approach. Boston: Birkhauser, 1995
- 5 Zhong W X, Williams F W.  $H_\infty$  filtering with secure eigenvalue calculation and precise integration. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1999, 46: 1017~1030
- 6 Zhong W X, Williams F W, Bennett P N. Extension of the Wittrick-Williams algorithm to mixed variable systems. Journal of Vibration and Acoustics, 1997, 119(3): 334~340
- 7 Bohner M. Discrete Linear Hamiltonian Eigenvalue Problems. Computers & Mathematics with Applications, 1998, 36: 179~192
- 8 Bohner M. Linear Hamiltonian Difference Systems: Disconjugacy and Jacobi Type Conditions. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1996, 199: 804~826
- 9 Zhong W X, Lin J H, Qiu C H. Computational structural mechanics and *optimal* control: - the simulation of substructural chain theory to linear quadratic *optimal* control problems. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1992, 33: 197~211
- 10 Wittrick W H, Williams F W. A general algorithm for computing natural frequencies of elastic structures. Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, 1971, 21(3): 263~284
- 11 Balakrishnan A V. Generalization of the Wittrick-Williams formula for



- counting modes of flexible structures. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 1995, 18: 1410~1415
- 12 Yaesh I, Shaked U. A transfer function approach to the problems of discrete-time systems:  $H_2$ -optimal linear control and filtering. *IEEE Trans Automatic Control*, 1991, 36: 1264~1271
- 13 Yaesh I, Shaked U.  $H_2$ -optimal one-step-ahead output feedback control of discrete-time systems. *IEEE Trans Automatic Control*, 1992, 37: 1245~1250

---

## 第四章 离散系统 $H_\infty$ 输出反馈控制简介

前两章分别介绍了离散  $H_2$  全信息控制和  $H_\infty$  滤波问题,如果可供控制器利用的只有可测量的输出信号而不是全部状态信号,并且输出信号中还夹杂着噪声干扰,则控制问题成为输出反馈控制或广义调节器问题<sup>[1~4]</sup>。本章将简单介绍离散  $H_\infty$  输出反馈控制问题的基本概念和基本理论,内容主要取自文献 1~2,通过对比可以发现离散  $H_\infty$  输出反馈控制与前两章所介绍的离散  $H_2$  全信息控制及离散  $H_\infty$  滤波之间的区别与联系。

虽然基于连续系统  $H_\infty$  控制的理论可以解决离散系统  $H_\infty$  控制器的设计问题<sup>[2]</sup>,即首先通过双线性变换  $z \rightarrow s = (z - 1)/(z + 1)$  将离散系统转化为连续系统,然后设计该连续系统的控制器,最后再通过逆变换  $z = (1 + s)/(1 - s)$  将其转化为离散系统的控制器,但这种方法存在一些固有的缺点,如无法用于时变系统或有限时间控制等问题。直接从离散系统出发研究其  $H_\infty$  控制器设计问题在理论与实际上都有其独特的优势,利用博弈论(dynamic game theory)研究离散  $H_\infty$  控制问题被认为是最简单和最直观的方法<sup>[1]</sup>,因为所有的  $H_\infty$  最优控制问题实际上就是一个极大极小优化问题,即零和博弈问题。 $H_\infty$  优化问题大都可以利用线性二次零和博弈(linear-quadratic zero-sum dynamic game)理论研究解决<sup>[1]</sup>。

### 4.1 时变系统输出反馈控制

首先考虑下列线性时变系统的有限时间控制问题

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{D}_k \mathbf{w}_k \quad (4.1.1)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{L}_k \mathbf{w}_k \quad (4.1.2)$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{R}_k \mathbf{u}_k \quad (4.1.3)$$

其中  $k \in [0, N-1]$ 。指标泛函定义为

$$J(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \|\mathbf{x}_N\|_{\mathbf{Q}_1}^2 + \|\mathbf{x}\|_{\mathbf{Q}_k}^2 + \|\mathbf{u}\|^2 + \gamma^2 \|\mathbf{w}\|^2 + \gamma^2 \|\mathbf{x}_0\|_{\mathbf{Q}_0}^2 \quad (4.1.4)$$

其中  $\mathbf{Q}_1 > 0, \mathbf{Q}_0 > 0$ , 且

$$\mathbf{H}_k^\top \mathbf{H}_k = \mathbf{Q}_k \quad (4.1.5a)$$

$$\mathbf{R}_k^\top \mathbf{R}_k = \mathbf{I} \quad (4.1.5b)$$

$$\mathbf{H}_k^\top \mathbf{R}_k = \mathbf{0} \quad (4.1.5c)$$

$$\mathbf{L}_k \mathbf{L}_k^\top = \mathbf{N}_k > 0 \quad (4.1.5d)$$

$$\mathbf{D}_k \mathbf{L}_k^\top = \mathbf{0} \quad (4.1.5e)$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_k \\ \mathbf{H}_k \end{bmatrix} = n \quad (4.1.6a)$$

$$\text{rank} [\mathbf{A}_k \quad \mathbf{D}_k] = n \quad (4.1.6b)$$

**定理 4.1<sup>[1]</sup>** 若在时刻  $k$  可以利用的量测信息为  $\mathbf{y}_i (i = 1, 2, \dots, k-1)$ , 则对于给定的正数  $\gamma$ , 上述线性系统存在满足

$$\|\mathcal{J}_{\gamma, \infty}^-(\mathbf{u})\|_{[0, N-1]}^2 = \frac{\|\mathbf{x}_N\|_{\mathbf{Q}_1}^2 + \|\mathbf{x}\|_{\mathbf{Q}_k}^2 + \|\mathbf{u}\|^2}{\|\mathbf{w}\|^2 + \|\mathbf{x}_0\|_{\mathbf{Q}_0}^2} < \gamma^2 \quad (4.1.7)$$

的  $H_\infty$  控制器的条件为

(1) Riccati 方程

$$\mathbf{M}_k = \mathbf{A}_k^\top (\mathbf{M}_{k+1}^{-1} + \mathbf{B}_k \mathbf{B}_k^\top - \gamma^{-2} \mathbf{D}_k \mathbf{D}_k^\top)^{-1} \mathbf{A}_k + \mathbf{H}_k^\top \mathbf{H}_k, \mathbf{M}_N = \mathbf{Q}_1 \quad (4.1.8a)$$

存在满足

$$\rho(\mathbf{M}_{k+1} \mathbf{D}_k \mathbf{D}_k^\top) < \gamma^2 \quad (4.1.8b)$$

的解。

(2) Riccati 方程

$$\Sigma_{k+1} = A_k(\Sigma_k^{-1} + C_k^T N_k^{-1} C_k - \gamma^{-2} H_k^T H_k)^{-1} A_k^T + D_k D_k^T, \Sigma_0 = Q_0^{-1} \quad (4.1.9a)$$

存在满足

$$\rho(\Sigma_k H_k^T H_k) < \gamma^2 \quad (4.1.9b)$$

的解。

(3) 下列两个条件中任一条件成立

$$\rho(\tilde{\Sigma}_{k+1} \tilde{M}_{k+1}) < \gamma^2 \quad (4.1.10a)$$

$$\rho(\Sigma_k \tilde{M}_k) < \gamma^2 \quad (4.1.10b)$$

其中

$$\tilde{M}_k = A_k^T (M_{k+1}^{-1} - \gamma^{-2} D_k D_k^T)^{-1} A_k + H_k^T H_k \quad (4.1.11)$$

$$\tilde{\Sigma}_{k+1} = A_k (\Sigma_k^{-1} - \gamma^{-2} H_k^T H_k)^{-1} A_k^T + D_k D_k^T \quad (4.1.12)$$

若上述三个条件同时成立, 则  $\gamma > \gamma_{\text{opt}}$  ( $\gamma_{\text{opt}}$  是系统的最优  $H_\infty$  范数), 而相应的  $H_\infty$  控制器为

$$\hat{u}_k = -B_k^T (M_{k+1}^{-1} + B_k B_k^T - \gamma^{-2} D_k D_k^T)^{-1} A_k (I - \gamma^{-2} \Sigma_k M_k)^{-1} \hat{x}_k \quad (4.1.13a)$$

其中

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1} = & A_k \hat{x}_k + B_k \hat{u}_k + A_k (\Sigma_k^{-1} + C_k^T N_k^{-1} C_k - \gamma^{-2} Q_k)^{-1} \cdot \\ & [\gamma^{-2} Q_k \hat{x}_k + C_k^T N_k^{-1} (y_k - C_k \hat{x}_k)], \hat{x}_1 = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.1.13b)$$

如果上述三个条件中的任何一个不成立, 则不存在满足条件 (4.1.7) 的控制器。□

## 4.2 定常系统输出反馈控制

上一节给出了时变系统输出反馈控制器存在的条件及控制器的形式, 在时变系统  $H_\infty$  输出反馈控制器的基础上, 可以很容易地

构造定常系统的  $H_\infty$  控制器。考虑下列线性定常系统无限区间的控制问题

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + Dw_k \quad (4.2.1)$$

$$y_k = Cx_k + Lw_k \quad (4.2.2)$$

$$z_k = Hx_k + Ru_k \quad (4.2.3)$$

其中  $(A, D)$  可控,  $(A, H)$  可观,  $H^T H = Q$ 。

**定理 4.2.1** 对于给定的正数  $\gamma$ , 线性系统 (4.2.1 ~ 4.2.3) 存在满足

$$\|z_{\infty}(u)\| < \gamma \quad (4.2.4)$$

的  $H_\infty$  控制器的条件为: Riccati 方程

$$M = A^T(M^{-1} + BB^T - \gamma^{-2}DD^T)^{-1}A + Q \quad (4.2.5)$$

及

$$\Sigma = A(\Sigma^{-1} + C^T N^{-1}C - \gamma^{-2}Q)^{-1}A^T + DD^T \quad (4.2.6)$$

存在半正定稳定化解。并且上述两个 Riccati 方程的解同时满足下列两个条件

$$\rho(\Sigma Q) < \gamma^2 \quad (4.2.7a)$$

$$\rho(\tilde{\Sigma} M) < \gamma^2 \quad (4.2.7b)$$

或者同时满足与 (4.2.7) 等价的两个条件, 即

$$\rho(MDD^T) < \gamma^2 \quad (4.2.8a)$$

$$\rho(\Sigma \tilde{M}) < \gamma^2 \quad (4.2.8b)$$

式 (4.2.7b) 及 (4.2.8b) 中的  $\tilde{\Sigma}$  和  $\tilde{M}$  和分别为

$$\tilde{\Sigma} = A(\Sigma^{-1} - \gamma^{-2}Q)^{-1}A^T + DD^T \quad (4.2.9)$$

$$\tilde{M} = A^T(M^{-1} - \gamma^{-2}DD^T)^{-1}A + Q \quad (4.2.10)$$

在上述条件成立的前提下, 相应的  $H_\infty$  控制器为

$$\hat{u}_k = -B^T(M^{-1} + BB^T - \gamma^{-2}DD^T)^{-1}A(I - \gamma^{-2}\Sigma M)^{-1}\hat{x}_k \quad (4.2.11a)$$

其中

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1} = & A\hat{x}_k + Bu_k + A(\Sigma^{-1} + C^1N^{-1}C - \gamma^{-2}Q)^{-1} \cdot [\gamma^{-2}Q\hat{x}_k + \\ & C^1N^{-1}(y_k - C\hat{x}_k)], \hat{x}_1 = 0 \end{aligned} \quad (4.2.11b)$$

如果上述条件中的任何一个不成立, 则  $\gamma < \gamma_{\text{opt}}$ , 即不存在满足条件(4.2.4)的控制器。□

与连续系统  $H_\infty$  输出反馈控制器存在的条件比较可以发现, 离散  $H_\infty$  输出反馈控制问题相对复杂一些, 对离散  $H_\infty$  输出反馈控制理论更深入的研究见本章所列参考文献。基于上述结果就可以设计离散输出反馈  $H_\infty$  控制器。文献 5, 6 研究了离散线性定常系统无限时间  $H_\infty$  控制中的最优范数计算问题。

### 4.3 延时反馈控制

如果信号传输有一定的迟滞, 即在时刻  $k$  可以利用的输出信息只有  $y_i (i = 1, 2, \dots, k - \theta)$ , 其中  $\theta$  是一给定的正整数, 则称这个问题为延时量测反馈控制问题, 也可以称为  $\theta$  步预测控制问题。4.1 节所讨论的问题可以认为是预测控制问题的一个特例, 即一步预测控制问题。

考虑下列线性系统的延时量测反馈控制问题

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k + D_k w_k \quad (4.3.1)$$

$$y_k = C_k x_k + L_k w_k \quad (4.3.2)$$

$$z_k = H_k x_k + R_k u_k \quad (4.3.3)$$

其中  $k \in [0, N - 1]$ 。指标泛函仍然定义为

$$J(u, w) = \|x_N\|_{Q_f}^2 + \|x\|_{Q_0}^2 + \|u\|^2 - \gamma^2 \|w\|^2 - \gamma^2 \|x_0\|_{Q_0}^2 \quad (4.3.4)$$

其中  $Q_f > 0, Q_0 > 0$ , 其它条件与式(4.1.5)和(4.1.6)相同。

**定理 4.3<sup>[1]</sup>** 若在时刻  $k$  可供控制器利用的量测信息只有  $y_i (i = 1, 2, \dots, k - \theta)$ , 则对于给定的正数  $\gamma$ , 上述线性系统存在满

足

$$\|\mathcal{G}_{ss}(\mathbf{u})\|_{[0, N-1]} < \gamma \quad (4.3.5)$$

的  $H_\infty$  控制器的条件为

(1) 对于  $k \in [0, N]$ , 下列 Riccati 方程的解存在

$$\mathbf{M}_k = \mathbf{A}_k^\top (\mathbf{M}_{k+1}^{-1} + \mathbf{B}_k \mathbf{B}_k^\top - \gamma^{-2} \mathbf{D}_k \mathbf{D}_k^\top)^{-1} \mathbf{A}_k + \mathbf{H}_k^\top \mathbf{H}_k, \mathbf{M}_N = \mathbf{Q}_0 \quad (4.3.6a)$$

且满足

$$\rho(\mathbf{M}_{k+1} \mathbf{D}_k \mathbf{D}_k^\top) < \gamma^2 \quad (4.3.6b)$$

(2) 对于  $k \in [0, N - \theta]$ , 下列 Riccati 方程的解存在

$$\Sigma_{k-1} = \mathbf{A}_k (\Sigma_k^{-1} + \mathbf{C}_k^\top \mathbf{N}_k^{-1} \mathbf{C}_k - \gamma^{-2} \mathbf{H}_k^\top \mathbf{H}_k)^{-1} \mathbf{A}_k^\top + \mathbf{D}_k \mathbf{D}_k^\top, \Sigma_0 = \mathbf{Q}_0^{-1} \quad (4.3.7)$$

(3) 对于  $\tau = 0, \dots, N - 1, k = \tau + 1$ , 下列 Riccati 方程的解存在

$$\tilde{\Sigma}_{k-1} = \mathbf{A}_k (\tilde{\Sigma}_k^{-1} - \gamma^{-2} \mathbf{H}_k^\top \mathbf{H}_k)^{-1} \mathbf{A}_k^\top + \mathbf{D}_k \mathbf{D}_k^\top \quad (4.3.8a)$$

其初始条件为

$$\begin{cases} \tilde{\Sigma}_\tau = \mathbf{Q}_0^{-1} & (\tau \leq \theta) \\ \Sigma_{\tau-\theta+1} = \Sigma_{\tau-\theta-1} & (\tau > \theta) \end{cases} \quad (4.3.8b)$$

且此 Riccati 方程的解满足

$$\rho(\tilde{\Sigma}_k \mathbf{Q}_k) < \gamma^2 \quad (4.3.9)$$

(4) 对于所有的  $\tau \in [0, N]$

$$\rho(\tilde{\Sigma}_{\tau+1} \mathbf{M}_{\tau-1}) < \gamma^2 \quad (4.3.10)$$

若上述四个条件同时成立, 则  $\gamma > \gamma_{\text{opt}}$ , 相应的  $H_\infty$  控制器为

$$\hat{\mathbf{u}}_\tau = -\mathbf{B}_\tau^\top (\mathbf{M}_{\tau+1}^{-1} + \mathbf{B}_\tau \mathbf{B}_\tau^\top - \gamma^{-2} \mathbf{D}_\tau \mathbf{D}_\tau^\top)^{-1} \mathbf{A}_\tau (\mathbf{I} - \gamma^{-2} \tilde{\Sigma}_\tau \mathbf{M}_\tau)^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_\tau \quad (4.3.11)$$

其中

$$\bar{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{A}_k(\mathbf{I} - \gamma^{-2}\bar{\boldsymbol{\Sigma}}_k\mathbf{Q}_k)^{-1}\bar{\mathbf{x}}_k + \mathbf{B}_k\bar{\mathbf{u}}_k \quad (4.3.12a)$$

方程的初始条件为

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{0} & (\tau \leq \theta) \\ \bar{\mathbf{x}}_{\tau-\theta+1} = \bar{\mathbf{x}}_{\tau-\theta+1} & (\tau > \theta) \end{cases} \quad (4.3.12b)$$

而  $\bar{\mathbf{x}}_{\tau-\theta+1}$  由式(4.1.13b) 给定。如果上述四个条件中的任何一个不成立,则不存在满足条件式(4.3.5) 的控制器。□

## 4.4 即时反馈控制

本章 4.1 节中所介绍的输出反馈控制问题中假设  $k$  时刻控制器可以利用的输出信息为  $y_i (i = 1, 2, \dots, k-1)$ , 是一个一步预测控制问题。若在  $k$  时刻可以利用的输出信息为  $y_i (i = 1, 2, \dots, k)$ , 即时刻  $k$  的信息也可以利用, 则成为即时反馈控制问题。下面的定理给出了即时反馈控制器存在的条件和形式。

**定理 4.4<sup>[1]</sup>** 若在时刻  $k$  可以利用的输出信息为  $y_i (i = 1, 2, \dots, k)$ , 则对于给定的正数  $\gamma$ , 线性系统(式 4.3.1 ~ 4.3.3) 存在满足

$$\|\mathcal{S}_{zw}(\mathbf{u})\|_{[0, N-1]} < \gamma \quad (4.4.1)$$

的  $H_\infty$  控制器的条件为:

(1) 下列 Riccati 方程的解存在

$$\mathbf{M}_k = \mathbf{A}_k^T(\mathbf{M}_{k+1}^{-1} + \mathbf{B}_k\mathbf{B}_k^T - \gamma^{-2}\mathbf{D}_k\mathbf{D}_k^T)^{-1}\mathbf{A}_k + \mathbf{H}_k^T\mathbf{H}_k, \mathbf{M}_N = \mathbf{Q}_f \quad (4.4.2a)$$

且满足

$$\rho(\mathbf{M}_{k+1}\mathbf{D}_k\mathbf{D}_k^T) < \gamma^2 \quad (4.4.2b)$$

(2) 下列 Riccati 方程的解存在



$$\Sigma_{k+1} = A_k(\Sigma_k^{-1} + C_k^T N_k^{-1} C_k - \gamma^{-2} H_k^T H_k)^{-1} A_k^T + D_k D_k^T, \Sigma_0 = Q^{-1} \quad (4.4.3a)$$

且对所有的  $\tau = 0, \dots, N-1$  满足

$$\Sigma_\tau^{-1} + C_\tau^T N_\tau^{-1} C_\tau - \gamma^{-2} H_\tau^T H_\tau > 0 \quad (4.4.3b)$$

(3) 对所有的  $\tau = 0, \dots, N-1$  有

$$\rho(\Sigma_{\tau+1} M_{\tau+1}) < \gamma^2 \quad (4.4.4)$$

若上述条件成立, 则存在  $\gamma > \gamma_{\text{opt}}$ , 而相应的  $H_\infty$  控制器为

$$\hat{u}_\tau = B_\tau^T (M_\tau^{-1} + B_\tau B_\tau^T - \gamma^{-2} D_\tau D_\tau^T)^{-1} A_\tau \hat{x}_\tau \quad (4.4.5)$$

其中

$$\hat{x}_\tau = [I - \Sigma_\tau (\gamma^{-2} M_\tau + C_\tau^T N_\tau^{-1} C_\tau)]^{-1} (\hat{x}_\tau + \Sigma_\tau C_\tau^T N_\tau^{-1} y_\tau) \quad (4.4.6)$$

上式中的  $\hat{x}_\tau$  由式(4.1.13b) 给定。如果上述条件中的任何一个不成立, 则不存在满足条件(4.4.1) 的控制器。□

### 参考文献

- 1 Basar T, Bernhard P.  $H_\infty$  Optimal Control and Related Minimax Design Problems -- A Dynamic Game Approach. Boston: Birkhauser, 1995
- 2 Green M, Limbeer D J N. Linear Robust Control. New Jersey: Prentice Hall, 1995
- 3 Iglesias P A, Glover K. State-space approach to discrete time  $H_\infty$  control. International Journal of Control, 1991, 54(5): 1031~1073.
- 4 Stoorvogel A. The discrete time  $H_\infty$  control problem with measurement feedback. SIAM Journal on Control and Optimization, 1992, 30(1): 180~202
- 5 Chen B M. Robust and  $H_\infty$  Control. London: Springer, 2000
- 6 Lin W W, Wang C S, Xu Q F. Numerical computation of the minimal  $H_\infty$  norm of the discrete-time output feedback control problem. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2000, 38(2): 515~547

---

## 第五章 连续系统 $H_\infty$ 滤波

前面的章节中介绍了离散系统  $H_\infty$  控制和滤波的基本理论和有关的算法。本章将首先介绍连续系统的  $H_\infty$  滤波理论,然后介绍系统设计中一些关键计算问题的求解方法。大多数  $H_\infty$  控制理论专著中都是先介绍  $H_\infty$  控制问题,然后基于对偶系统的概念研究  $H_\infty$  滤波问题<sup>[1~3]</sup>。但本书将首先介绍  $H_\infty$  滤波问题,这是为了更方便地基于 Hamilton 微分系统的特征值理论介绍算法。在第二章和第三章中已经介绍了离散  $H_\infty$  控制和  $H_\infty$  滤波系统的最优  $H_\infty$  范数  $\gamma_{\text{opt}}$  与 Hamilton 差分系统特征值之间的关系,并给出了相应的计算方法。通过对连续系统进行适当的离散化,也可以将这些方法用于连续系统。

### 5.1 连续系统 $H_\infty$ 滤波

考虑下列线性系统在区间  $t \in [0, t_f]$  上的  $H_\infty$  滤波器设计问题

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)w, x(0) = x_0 \quad (5.1.1a)$$

$$y = C(t)x + D(t)v \quad (5.1.1b)$$

$$z = L(t)x \quad (5.1.1c)$$

其中干扰向量  $w, v \in L_2[0, t_f]$ ,  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbf{R}^{n \times l}$ ,  $C \in \mathbf{R}^{q \times n}$ ,  $D \in \mathbf{R}^{q \times m}$ ,  $L \in \mathbf{R}^{p \times n}$ ,  $D^T D = I$ 。用  $\hat{x}(t)$  表示状态  $x(t)$  的滤波估计,  $\hat{x}(0) = \hat{x}_0$  为给定值,并定义

$$\|\mathcal{R}\|_{\infty, [0, t_f]}^2 = \sup_{w \neq 0} \frac{\int_0^{t_f} (\hat{z} - Lx)^T (\hat{z} - Lx) dt}{(\hat{x}_0 - x_0)^T Q_0^{-1} (\hat{x}_0 - x_0) + \int_0^{t_f} (w^T w + v^T v) dt} \quad (5.1.2)$$

其中  $\hat{z} - Lx$  是估计误差,  $\hat{x}_0 - x_0$  是对初始状态的估计误差, 对称矩阵  $Q_0^{-1} > 0$ 。要求  $H_\infty$  滤波器满足条件

$$\|\mathcal{R}\|_{\infty, t_f}^2 < \gamma^2 \quad (5.1.3)$$

而正数  $\gamma$  的下界定义为  $\gamma_{opt}$ 。

**定理 5.1<sup>[1]</sup>** 当且仅当 Riccati 微分方程

$$\begin{aligned} \dot{Q}(t) &= B(t)B^T(t) + A(t)Q(t) + Q(t)A^T(t) - \\ &\quad Q(t)[C^T(t)C(t) - \gamma^{-2}L^T(t)L(t)]Q(t) \\ Q(0) &= Q_0 \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

在区间  $t \in [0, t_f]$  上有解时存在满足条件的  $H_\infty$  滤波器。中心  $H_\infty$  滤波器的形式为

$$\dot{\hat{x}} = A(t)\hat{x} + Q(t)C^T(t)[y - C(t)\hat{x}], \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \quad (5.1.5a)$$

$$\hat{z} = L(t)\hat{x} \quad (5.1.5b)$$

□

当系统矩阵为常值矩阵时, 则成为定常系统的  $H_\infty$  滤波问题。此时的 Riccati 微分方程 (5.1.4) 可简写成

$$\begin{aligned} \dot{Q}(t) &= BB^T + AQ(t) + Q(t)A^T - Q(t)[C^TC - \\ &\quad \gamma^{-2}L^TL]Q(t) \\ Q(0) &= Q_0 \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

系统的状态方程也可以写成式 (5.1.7) 的形式。当  $t_f \rightarrow \infty$  时, 问题成为定常系统无限时间滤波问题。

$$\dot{x} = Ax + Bw, x(0) = x_0 \quad (5.1.7a)$$

$$y = Cx + Dv \quad (5.1.7b)$$

$$z = Lx \quad (5.1.7c)$$

其中  $(A, B)$  可控,  $(A, C)$  可观。

**定理 5.2<sup>[1]</sup>** 当且仅当 Riccati 代数方程

$$BB^T + AQ + QA^T - Q(C^T C - \gamma^{-2} L^T L)Q = 0 \quad (5.1.8)$$

存在使  $A - Q(C^T C - \gamma^{-2} L^T L)$  渐进稳定的半正定解时, 存在满足条件的  $H_\infty$  滤波器, 而中心滤波器为

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + QC^T(y - C\hat{x}), \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \quad (5.1.9a)$$

$$\hat{z} = L\hat{x} \quad (5.1.9b)$$

□

上述  $H_\infty$  滤波器都是次优滤波器, 通过不断减小  $\gamma$ , 可以构造一系列次优  $H_\infty$  滤波器逼近“最优” $H_\infty$  滤波器, 直到满足条件的次优  $H_\infty$  滤波器不存在为止, 此时  $\gamma = \gamma_{\text{opt}}^{[2,3]}$ 。因为 Riccati 微分方程解的存在性与次优  $H_\infty$  滤波器存在条件等价, 此时 Riccati 微分方程在  $[0, t_f]$  区间上无解,  $\gamma_{\text{opt}}$  则是使 Riccati 微分方程在  $[0, t_f]$  区间上无解的所有  $\gamma$  值的上界。基于这一基本事实, 可以建立  $\gamma_{\text{opt}}$  与 Hamilton 微分系统特征值的联系。

## 5.2 Hamilton 微分系统特征值

### 5.2.1 Hamilton 微分方程的共轭点

Riccati 方程 (5.1.6) 的解与 Hamilton 微分方程

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & BB^T \\ C^T C - \gamma^{-2} L^T L & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} \quad (5.2.1a)$$

$$x(0) = Q_0 \lambda(0), \lambda(t_f) = 0 \quad (5.2.1b)$$

的状态转移矩阵及其边值问题的特征值之间有密切的联系。定义

$$H(x, \lambda) = \lambda^T A x - \frac{1}{2} x^T (C^T C - \gamma^{-2} L^T L) x + \frac{1}{2} \lambda^T B B^T \lambda \quad (5.2.2)$$

则上述边值问题可由下列变分问题导出

$$J = \int_0^{t_1} [\lambda^T \dot{x} - H(x, \lambda)] dt + \frac{1}{2} x_0^T Q_0^{-1} x_0, \delta J = 0 \quad (5.2.3)$$

当方程(5.2.1)存在非平凡解,即 $\gamma^{-2}$ 为其特征值时,利用式(5.1.1a)可将方程(5.2.3)变换为

$$\gamma^{-2} = \frac{\Pi_1}{\Pi_2} \quad (5.2.4)$$

其中

$$\Pi_1 = \int_0^{t_1} \left( \lambda^T \dot{x} - \lambda^T A x + \frac{1}{2} x^T C^T C x - \frac{1}{2} \lambda^T B B^T \lambda \right) dt + \frac{1}{2} x_0^T Q_0^{-1} x_0 \quad (5.2.5a)$$

$$\Pi_2 = \int_0^{t_1} \frac{1}{2} x^T L^T L x dt \quad (5.2.5b)$$

并记

$$R(x, \lambda) = \frac{\Pi_1}{\Pi_2} \quad (5.2.6)$$

定义方程(5.2.1)的状态转移矩阵为 $\Phi(0, t)$

$$\frac{d}{dt} \Phi(0, t) = H \Phi(0, t), \Phi(0, 0) = I \quad (5.2.7)$$

其中

$$H = \begin{bmatrix} A & B B^T \\ C^T C - \gamma^{-2} L^T L & -A^T \end{bmatrix} \quad (5.2.8)$$

则

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(0, t) & \Phi_{12}(0, t) \\ \Phi_{21}(0, t) & \Phi_{22}(0, t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ \lambda(0) \end{bmatrix} \quad (5.2.9)$$

并可以证明<sup>[1]</sup>

$$x(t) = Q(t) \lambda(t) \quad (5.2.10)$$

其中

$$Q(t) = [\Phi_{11}(0, t) Q_0 + \Phi_{12}(0, t)] [\Phi_{21}(0, t) Q_0 + \Phi_{22}(0, t)]^{-1} \quad (5.2.11)$$

即 Riccati 微分方程的解可以表示成式(5.2.11)的形式。

现在介绍共轭点的概念,对于区间  $[0, t_f]$  内的  $t_0, t_1$  ( $t_0 \leq t_1$ ) 及给定的  $Q_0$ , 如果对偶微分方程(5.2.1a)存在非平凡解且满足  $x(t) = Q_0 \lambda(t_0), \lambda(t_1) = 0$ , 则称  $t_0, t_1$  为其共轭点。

**定理 5.3** 若  $\Phi(0, t)$  是方程(5.2.1)的状态转移矩阵, 则矩阵  $\Phi_{21}(t_0, t_1)Q_0 + \Phi_{22}(t_0, t_1)$  是奇异矩阵  $\Leftrightarrow t_0$  与  $t_1$  为共轭点。如果不存在  $t \in [0, t_f]$  使得 0 和  $t$  为共轭点, 则 Riccati 方程(5.1.6)在  $[0, t_f]$  上有解。  $\square$

**证明** 设  $t_0, t_1$  为共轭点, 则方程存在非平凡解且  $x(t_0) = Q_0 \lambda(t_0), \lambda(t_1) = 0$ , 所以

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t_0, t) & \Phi_{12}(t_0, t) \\ \Phi_{21}(t_0, t) & \Phi_{22}(t_0, t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_0 \\ I \end{bmatrix} \lambda(t_0)$$

其中  $\lambda(t_0) \neq 0$ , 这是因为  $x(t)$  与  $\lambda(t)$  不可能同时为 0, 并且  $\Phi(0, t)$  非奇异。由于

$$\lambda(t_1) = [\Phi_{21}(t_0, t_1)Q_0 + \Phi_{22}(t_0, t_1)]\lambda(t_0) = 0$$

所以必然有  $\Phi_{21}(t_0, t_1)Q_0 + \Phi_{22}(t_0, t_1)$  奇异。

再设  $\Phi_{21}(t_0, t_1)Q_0 + \Phi_{22}(t_0, t_1)$  奇异, 则必存在向量  $g \neq 0$ , 满足  $0 = [\Phi_{21}(t_0, t_1)Q_0 + \Phi_{22}(t_0, t_1)]g$ , 令  $\lambda(t_0) = g$ , 则有  $x(t_0) = Q_0 \lambda(t_0), \lambda(t_1) = 0$ , 又因为  $\lambda(t)$  不恒为 0, 所以  $t_0, t_1$  为共轭点。

另外, 因为 Riccati 微分方程的解可以表示为式(5.2.11)的形式, 所以如果不存在  $t \in [0, t_f]$  使得 0 和  $t$  为共轭点, 则  $\Phi_{21}(0, t)Q_0 + \Phi_{22}(0, t)$  必然可逆, 从而 Riccati 方程(5.1.6)在  $[0, t_f]$  上有解。  $\square$

### 5.2.2 Rayleigh 原理

现在考察式(5.2.1)的特征值问题, 显然仅当  $\gamma^{-2}$  是其特征值时, 两端边值问题存在非平凡解。边界条件  $x(0) = Q_0 \lambda(0), \lambda(t_f) = 0$  表明 0 和  $t_f$  是此边值问题的共轭点, 所以  $\Phi_{21}(0, t_f)Q_0 +$

$\Phi_{zz}(0, t_f)$  必定是奇异矩阵, 其逆矩阵不存在, 此时 Riccati 微分方程 (5.1.6) 在区间  $[0, t_f]$  上无解, 相应地次优  $H_\infty$  滤波器也不存在。

方程 (5.2.1) 的各阶特征值满足  $\gamma_1^{-2} \leq \gamma_2^{-2} \leq \dots \leq \gamma_m^{-2}$ , 所以  $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \dots \geq \gamma_m$ , 即  $\gamma_1$  是使两端边值问题存在非平凡解的  $\gamma$  值的上界, 也是使 Riccati 微分方程 (5.1.6) 在  $[0, t_f]$  上无解的  $\gamma$  值的上界。两端边值问题的一阶特征值  $\gamma_1^{-2}$  与最优  $H_\infty$  范数  $\gamma_{\text{opt}}$  之间的关系为  $\gamma_1 = \gamma_{\text{opt}}$ 。因此最优  $H_\infty$  范数可以通过计算与 Riccati 微分方程相关的 Hamilton 微分方程两端边值问题的特征值得到。事实上, 对于两端边值问题 (5.2.1) 有如下定理。

**定理 5.4<sup>[4~5]</sup>** 若 (A1): 矩阵  $BB^T, C^TC, L^TL$  对称, 且  $BB^T \geq 0, L^TL \geq 0$ ; (A2):  $S_{13} \begin{bmatrix} -x(0) \\ x(t_f) \end{bmatrix} + S_{21} \begin{bmatrix} \lambda(0) \\ \lambda(t_f) \end{bmatrix} = 0$ , 并记满足条件的  $(x, \lambda) \in \Omega$ , 其中  $S_{13}, S_{21} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ , 且  $\text{rank}(S_{13}, S_{21}) = 2n, S_{13}S_{21}^T = S_{21}S_{13}^T$ ; (A3):  $(A, BB^T)$  可控,  $(A, BB^T, L^TL)$  “强可观”。则

(1) 边值问题 (5.2.1) 存在可数无穷多个特征值  $\gamma_k^{-2}, \gamma_1^{-2} \leq \gamma_2^{-2} \leq \dots$  (包括重特征值), 及相应的正交特征函数  $(\phi_1, \Psi_1), (\phi_2, \Psi_2), \dots$ , 且  $\langle \phi_i, \phi_j \rangle = \int_0^{t_f} \phi_i^T(t) L^T L \phi_j(t) dt = \delta_{ij}$ 。

(2) Rayleigh 原理: 对于  $m = 0, 1, 2, \dots$ , 有

$$\gamma_{m+1}^{-2} = \min \{ R(x, \lambda) \mid (x, \lambda) \in \Omega, x \neq 0, x \perp \phi_1, \dots, \phi_m \} \quad (5.2.12)$$

其中  $R(x, \lambda)$  由式 (5.2.6) 定义, 具有广义 Rayleigh 商的形式。而  $x \perp \phi_i (i = 1, 2, \dots, m)$  是指

$$\langle x, \phi_i \rangle = \int_0^{t_f} x^T(t) L^T L \phi_i(t) dt = 0$$

(3) 展开定理

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|x - s_m\| = 0 \quad (5.2.13)$$

其中  $s_m = \sum_{i=1}^m c_i \phi_i$ , 而  $c_i = \langle \phi_i, x \rangle = \int_0^{t_f} \phi_i^T(t) L^T L x(t) dt$

□

这个定理可以认为是 Sturm-Liouville 特征值定理的推广<sup>[5]</sup>。这里所研究的问题显然满足定理中的前提条件,分别说明如下:

(A1) 显然满足。

(A2) 因为  $S_{13} = \begin{bmatrix} Q_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $S_{24} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ , 显然  $\text{rank}(S_{13}, S_{24}) = 2n$ ,  $S_{13}S_{24}^T = S_{24}S_{13}^T = 0$ 。

(A3) 因为  $(A, B)$  可控, 显然有  $\text{rank} P_c = n$  及  $\text{rank}(P_c P_c^T) = n$ , 其中矩阵

$$P_c = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B]$$

$$P_c P_c^T = [B, AB, \dots, A^{n-1}B][B, AB, \dots, A^{n-1}B]^T = \\ [BB^T, ABB^T, \dots, A^{n-1}BB^T][I, A, \dots, A^{n-1}]^T$$

令  $P_{co} = [BB^T, ABB^T, \dots, A^{n-1}BB^T]$ ,  $A_o = [I, A, \dots, A^{n-1}]^T$  则有

$$n = \text{rank}(P_c P_c^T) = \text{rank}(P_{co} A_o) \\ \leq \min\{\text{rank}(P_{co}), \text{rank}(A_o)\} \quad (5.2.14)$$

而  $\text{rank}(A_o) = n$ , 所以应有  $\text{rank}(P_{co}) \geq n$ . 但  $P_{co} \in \mathbf{R}^{n \times nm}$ , 因而  $\text{rank}(P_{co}) = n$ , 则  $(A, BB^T)$  可控的条件满足。因为矩阵  $L$  的选择应确保在区间  $[t_1, t_2]$  上  $Lx(t) \equiv 0$  时必有  $x(t) \equiv 0$ , 否则状态估计便无意义, 所以也满足文献 4 中所谓的“强可观”条件。

由于  $H_\infty$  控制问题及“控制型”Riccati 微分方程与  $H_\infty$  滤波问题及“滤波型”Riccati 微分方程存在一定的对偶关系。利用这一对偶关系可以自然地将本章所述的定理与结论应用到  $H_\infty$  控制问题, 而且还应注意到对偶系统的  $H_\infty$  范数是相等的<sup>[2]</sup>。

### 5.3 Hamilton 微分方程 特征值问题离散化

特征值问题可以表达为广义 Rayleigh 商驻值的形式



(5.2.4), 可以用 Rayleigh-Ritz 法计算特征值, 也可以用差分法、打靶等方法计算。正如第二章和第三章中所指出的, 如果只需计算最小特征值, 采用类似于 Householder 特征值计数方法的扩展 Wittrick-Williams 算法<sup>[9]</sup>更为合适。本节介绍 Hamilton 微分方程的离散化, 及其与 Sturm-Liouville 型微分方程特征值问题的联系。

### 5.3.1 Hamilton 及 Sturm-Liouville 型微分方程离散化

将区间  $[0, t_f]$  等间距离散为  $K$  段, 并令  $\eta = t_{k-1} - t_k (k = 0, 1, 2, \dots, K-1)$ , 且  $K\eta = t_f, t_0 = 0, t_K = t_f$ 。对于任意区段  $(t_k, t_{k+1})$ , 若给定两端边值  $x(t_k)$  及  $\lambda(t_{k+1})$ , 当然可以确定微分方程 (5.2.1) 在  $(t_k, t_{k+1})$  内的解。采取对  $x$  向前差分, 对  $\lambda$  向后差分, 离散化后有差分方程

$$x_{k+1} = Fx_k + G\lambda_{k+1}, \quad x_0 = Q_0\lambda_0 \quad (5.3.1a)$$

$$\lambda_k = -Ex_k + F^T\lambda_{k+1}, \quad \lambda_K = 0 \quad (5.3.1b)$$

差分方程中各系数矩阵  $F, G, E$  是计算特征值的基本数据, 其性质和意义将在后文解释。

考虑同样定义在区间  $t \in [0, t_f]$  上的 Sturm-Liouville 型二阶微分方程

$$K_{22}\ddot{x} + (K_{21} - K_{12})\dot{x} - K_{11}x + \rho Mx = 0 \quad (5.3.2)$$

边界条件为  $x(0) = x_0, x(t_f) = x_q$ 。且  $K_{11}, K_{22}, M$  为对称矩阵,  $K_{22}$  非奇异,  $K_{12} = K_{21}^T$ 。当  $\rho$  的取值可以使方程存在满足边界条件的非平凡解时, 称  $\rho$  为其特征值, 而对应的解为特征函数。定义

$$L(x, \dot{x}) = \dot{x}^T K_{22} \dot{x} + \dot{x}^T K_{21} x + x^T K_{12} \dot{x} + x^T (K_{11} - \rho M) x \quad (5.3.3)$$

则微分方程边值问题与下列变分驻值问题等价

$$\delta \int_0^{t_f} L(x, \dot{x}) dt = 0, \quad x(0) = x_0, \quad x(t_f) = x_q \quad (5.3.4)$$

进行 Legendre 变换可将其转化为正则形式, 进而得到等价的

Hamilton 正则微分方程, 令

$$\lambda = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \quad (5.3.5)$$

$$H(x, \lambda) = \lambda^T \dot{x} - L(x, \dot{x}) \quad (5.3.6)$$

则有

$$\delta \int_0^{t_f} [\lambda^T \dot{x} - H(x, \lambda)] dt = 0 \quad (5.3.7)$$

且根据

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \quad (5.3.8a)$$

$$\dot{\lambda} = - \frac{\partial H}{\partial x} \quad (5.3.8b)$$

可得

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_{22}^{-1}K_{21} & K_{22}^{-1} \\ K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{21} - \rho M & K_{12}K_{22}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} \quad (5.3.9)$$

若令  $A = -K_{22}^{-1}K_{21}$ ,  $BB^T = K_{22}^{-1}$ ,  $L^T L = M$ ,  $C^T C = K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{21}$ , 则方程(5.3.9)与方程(5.2.1)完全一致, 只需再将方程(5.2.1)的边界条件也做相应的变换, 微分方程(5.3.9)的特征值问题就与方程(5.2.1)的特征值问题等价。

对 Sturm-Liouville 型微分方程特征值问题的研究是经典的课题, 也不乏计算特征值的数值方法。例如通过将微分方程离散化为差分方程, 即可利用许多有效的算法计算特征值。因为这里关心的是一阶特征值的计算, 可以采用特定形式的离散化方法。从变分式(5.3.4)的离散化开始, 将  $[0, t_f]$  等间距离散为  $K$  段, 并令  $\eta = t_{k+1} - t_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, K-1$ ), 可得式(5.3.4)的离散形式

$$\delta \left\{ \sum_{k=0}^{K-1} L_k(x_k, x_{k+1}) \right\} = 0 \quad (5.3.10)$$

边界条件与式(5.3.4)中相同, 且

$$L_k(x_k, x_{k-1}) = x_k^T K_{aa} x_k + x_{k+1}^T K_{ba} x_k + x_k^T K_{ab} x_{k-1} + x_{k-1}^T K_{bb} x_{k+1} \quad (5.3.11)$$

上式中的系数矩阵  $K_{aa}, K_{ab} = K_{ba}^T$  和  $K_{bb}$  由  $K_{11}, K_{12}, K_{22}, \eta, \rho$  确定。对于线性定常系统及  $\eta$  给定的等距离散化, 可以认为系数矩阵仅是  $\rho$  的函数。由式(5.3.10)可得

$$\begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-1} \end{bmatrix} = 0 \quad (5.3.12)$$

利用式(5.3.12)中的系数矩阵  $K_{aa}, K_{ab}, K_{bb}$ , 根据 Wittrick-Williams 特征值计数定理可以计算其一阶特征值到指定的精度, 当然其他阶特征值也可同样计算。定义离散形式的 Legendre 变换为

$$\lambda_k = \frac{\partial L_k}{\partial x_k} = - (K_{aa} x_k + K_{ab} x_{k-1}) \quad (5.3.13a)$$

$$\lambda_{k+1} = \frac{\partial L_k}{\partial x_{k+1}} = K_{ba} x_k + K_{bb} x_{k+1} \quad (5.3.13b)$$

由此得

$$x_{k+1} = -K_{bb}^{-1} K_{ba} x_k + K_{bb}^{-1} \lambda_{k+1} \quad (5.3.14a)$$

$$\lambda_k = (-K_{aa} + K_{ab} K_{bb}^{-1} K_{ba}) x_k - K_{ab} K_{bb}^{-1} \lambda_{k+1} \quad (5.3.14b)$$

若令

$$F = -K_{bb}^{-1} K_{ba} \quad (5.3.15a)$$

$$G = K_{bb}^{-1} \quad (5.3.15b)$$

$$E = K_{aa} - K_{ab} K_{bb}^{-1} K_{ba} \quad (5.3.15c)$$

则式(5.3.14)与(5.3.1)的形式一致。与式(5.3.12)特征值的求解类似, 由上述差分方程的系数矩阵  $F, G, E$  也可计算特征值, 但需要利用适应于对偶变量体系的扩展 Wittrick-Williams 算法。

### 5.3.2 混合能矩阵合并公式及特征值计数公式

差分方程(5.3.1)与离散形式的变分驻值问题

$$\delta \left\{ \sum_{k=0}^{K-1} \left[ \lambda_{k+1}^T x_{k+1} - \left( \lambda_{k+1}^T F x_k - \frac{1}{2} x_k^T E x_k + \frac{1}{2} \lambda_{k+1}^T G \lambda_{k+1} \right) \right] + \frac{1}{2} x_0^T Q_0^{-1} x_0 \right\} \quad (5.3.16)$$

是等价的。由式(5.3.16)可定义区段  $(t_k, t_{k+1})$  的混合能

$$V(x_k, \lambda_{k+1}) = \lambda_{k+1}^T F x_k - \frac{1}{2} x_k^T E x_k + \frac{1}{2} \lambda_{k+1}^T G \lambda_{k+1} \quad (5.3.17)$$

因为  $V(x_k, \lambda_{k+1})$  具有能量的形式, 系数矩阵  $F, G, E$  亦称为区段混合能矩阵。显然差分方程的解  $x_k, \lambda_k$  逼近微分方程解  $x(t_k), \lambda(t_k)$  的精度取决于  $F, G, E$  的精度。对于线性定常系统, 矩阵  $F, G, E$  仅是区间长度  $\eta$  的函数, 可表示为  $F(\eta), G(\eta), E(\eta)$ 。区间长度为  $\eta$  时, 本章中用简化的形式, 即  $F, G, E$ ; 对区间长度  $k\eta$ , 则记为  $F(k\eta), G(k\eta), E(k\eta)$ 。当  $\eta \rightarrow 0$  时

$$E \rightarrow 0, G \rightarrow 0, F \rightarrow I \quad (5.3.18)$$

由差分方程(5.3.1), 可设

$$x_{k+1} = F(2\eta)x_{k+1} + G(2\eta)\lambda_{k+1} \quad (5.3.19a)$$

$$\lambda_{k+1} = -E(2\eta)x_{k+1} + F^T(2\eta)\lambda_{k+1} \quad (5.3.19b)$$

将

$$x_k = (I + GE)^{-1}(Fx_{k+1} + GF^T\lambda_{k+1}) \quad (5.3.20a)$$

$$\lambda_k = (I + EG)^{-1}(-EFx_{k+1} + F^T\lambda_{k+1}) \quad (5.3.20b)$$

代入式(5.3.1)可得

$$x_{k+1} = F(I + GE)^{-1}Fx_{k+1} + [G + F(I + GE)^{-1}GF^T]\lambda_{k+1} \quad (5.3.21a)$$

$$\lambda_{k+1} = -[E + F^T(I + EG)^{-1}EF]x_{k+1} + F^T(I + EG)^{-1}F^T\lambda_{k+1} \quad (5.3.21b)$$

与式(5.3.19)比较可知

$$G(2\eta) = G + F(G^{-1} + E)^{-1}F^T \quad (5.3.22a)$$

$$E(2\eta) = E + F^T(E^{-1} + G)^{-1}F \quad (5.3.22b)$$

$$F(2\eta) = F(I + GE)^{-1}F \quad (5.3.22c)$$

同理可证下列公式

$$G(i\eta + j\eta) = G(j\eta) + F(j\eta)[G^{-1}(i\eta) + E(j\eta)]^{-1}F^T(j\eta) \quad (5.3.23a)$$

$$E(i\eta - j\eta) = E(i\eta) + F^T(i\eta)[E^{-1}(j\eta) + G(i\eta)]^{-1}F(i\eta) \quad (5.3.23b)$$

$$F(i\eta + j\eta) = F(j\eta)[I + G(i\eta)E(j\eta)]^{-1}F(i\eta) \quad (5.3.23c)$$

用图 5.1 中区段 1 和 2 分别代表式(5.3.23)中不同长度区段, 则上述公式可以简洁地表示为

$$G_c = G_2 + F_2(G_1^{-1} + E_2)^{-1}F_2^T \quad (5.3.24a)$$

$$E_c = E_1 + F_1^T(E_2^{-1} + G_1)^{-1}F_1 \quad (5.3.24b)$$

$$F_c = F_2(I + G_1E_2)^{-1}F_1 \quad (5.3.24c)$$

并称之为区段合并公式。

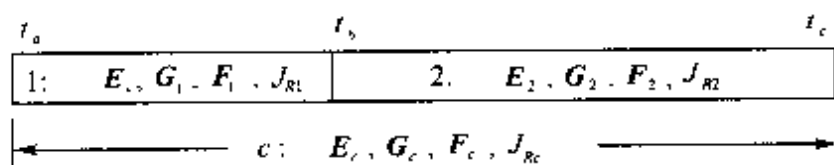


图 5.1 区段合并

如图 5.1 所示, 区段 1 的特征值计数定义为: 对给定  $\gamma_{\pi}^{-2}$ , 在  $x_a = 0, \lambda_b = 0$  的条件下, 区段 1 特征值小于  $\gamma_{\pi}^{-2}$  的数目, 并用  $J_{R1}$  表示,  $J_{R1}$  是  $\eta$  及  $\gamma_{\pi}^{-2}$  的函数, 可写成  $J_{R1}(\gamma_{\pi}^{-2}, \eta)$ , 为简单起见用  $J_{R1}(\gamma_{\pi}^{-2})$  表示, 区段 2 和  $c$  的特征值计数分别记作  $J_{R2}(\gamma_{\pi}^{-2})$ ,  $J_{Rc}(\gamma_{\pi}^{-2})$ 。各特征值计数之间的关系为<sup>[7]</sup>

$$J_{Rc}(\gamma_{\pi}^{-2}) = J_{R1}(\gamma_{\pi}^{-2}) + J_{R2}(\gamma_{\pi}^{-2}) - s\{G_1\} + s\{G_1^{-1} + E_2\} \quad (5.3.25)$$

其中  $s\{M\}$  表示矩阵  $M$  的负特征值个数。 $t_a \rightarrow t_b$  时, 对于给定的有限值  $\gamma_{\pm}^{-2}$ , 有  $J_{R1}(\gamma_{\pm}^{-2}) = 0$ 。

### 5.3.3 混合能矩阵的微分方程

设  $t_k, x_k, \lambda_k$  不变,  $t_{k+1}$  增加微量  $dt, x_{k+1}, \lambda_{k+1}$  及  $F, G, E$  当然有相应的变化。利用差分方程(5.3.1)及微分方程(5.2.1a)可以导出这些矩阵满足的微分方程。将式(5.3.1)各项求导得

$$\frac{dx_{k+1}}{dt} = \frac{dF}{dt}x_k + \frac{dG}{dt}\lambda_{k+1} + G \frac{d\lambda_{k+1}}{dt} \quad (5.3.26a)$$

$$0 = -\frac{dE}{dt}x_k + \frac{dF^T}{dt}\lambda_{k+1} + F^T \frac{d\lambda_{k+1}}{dt} \quad (5.3.26b)$$

将方程(5.2.1a)在  $t = t_{k+1}$  处的等式关系代入上式得

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt}x_k + \left\{ \frac{dG}{dt} - GA^T - BB^T \right\} - \\ \lambda_{k+1}[A - G(C^T C - \gamma^{-2}L^T L)]x_{k+1} = 0 \end{aligned} \quad (5.3.27a)$$

$$-\frac{dE}{dt}x_k + \left\{ \frac{dF^T}{dt} - F^T A^T \right\} \lambda_{k+1} + F^T (C^T C - \gamma^{-2}L^T L)x_{k+1} = 0 \quad (5.3.27b)$$

再将差分方程(5.3.1a)代入上式消去变量  $x_{k+1}$  后得

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{dF}{dt} - [A - G(C^T C - \gamma^{-2}L^T L)]F \right\} x_k + \\ \left\{ \frac{dG}{dt} - AG - GA^T - BB^T + G(C^T C - \gamma^{-2}L^T L)G \right\} \lambda_{k+1} = 0 \end{aligned} \quad (5.3.28a)$$

$$\begin{aligned} \left\{ -\frac{dE}{dt} + F^T (C^T C - \gamma^{-2}L^T L)F \right\} x_k + \\ \left\{ \frac{dF^T}{dt} - F^T [A^T - (C^T C - \gamma^{-2}L^T L)^T G^T] \right\} \lambda_{k+1} = 0 \end{aligned} \quad (5.3.28b)$$

由于  $x_k$  及  $\lambda_{k+1}$  的任意性, 必有下列微分方程成立

$$\frac{dG}{dt} = BB^T + AG + GA^T - G(C^TC - \gamma^{-2}L^TL)G \quad (5.3.29a)$$

$$\frac{dE}{dt} = F^T(C^TC - \gamma^{-2}L^TL)F \quad (5.3.29b)$$

$$\frac{dF}{dt} = [A - G(C^TC - \gamma^{-2}L^TL)]F \quad (5.3.29c)$$

式(5.3.18)是这些方程的初始条件。按照线性系统理论,由上述方程可知各混合能矩阵(即差分方程(5.3.1)的系数矩阵)的意义: $G$ 是Riccati微分方程的解, $F$ 是 $A - G(C^TC - \gamma^{-2}L^TL)$ 的状态转移矩阵,而 $E$ 是 $[A - G(C^TC - \gamma^{-2}L^TL), C_0^T]$ 的可观性矩阵,其中 $C_0^TC_0 = C^TC - \gamma^{-2}L^TL$ 。通过微分方程的积分可以计算这些系数矩阵,而这些方程的积分亦可根据式(5.3.24)来进行。这是精细积分算法所要解决的问题。

#### 5.3.4 混合能矩阵计算

差分方程(5.3.1)解的精度由其系数矩阵 $F, G, E$ 决定。另外,由上节介绍的特征值计数公式(5.3.25)可知,特征值计数的精度也依赖于 $F, G, E$ 的精度。按常规的微分方程离散化方法计算这些差分方程的系数不能满足这里的需要,况且在上文中已经给出了系数矩阵满足的微分方程(5.3.29)以及合并关系式(5.3.24),所以本节将利用精细积分法计算区段长度为 $\eta$ 的系数矩阵(混合能矩阵) $F(\eta), G(\eta), E(\eta)$ 。实质上这一步骤是将计算矩阵 $F(k\eta), G(k\eta), E(k\eta)$ 的公式(5.3.24)应用于区段 $\eta$ ,如图5.2所示。

根据 $2^N$ 类算法的特点及精细积分法的要求,一般取 $N = 20$ ,将 $\eta$ 等分为

$$\tau = \eta/2^N \approx \eta \cdot 10^{-7} \quad (5.3.30)$$

需要指出的是,精细积分法仅在这一阶段对区段 $\eta = t_1 - t_0$ 进行了进一步的细分,并没有对整个区间 $[0, t_f]$ 内其他区段进行同样的细分。由于 $2^N$ 类算法的特点,这样的区间细分所增加的计算量

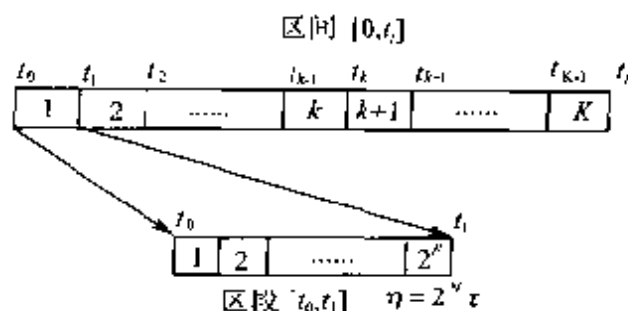


图 5.2 区间等距离散及区段的细化

相对于全部计算量并不占多大比例。

由于  $\tau$  非常小, 可以对区段矩阵  $F(\tau)$ ,  $G(\tau)$ ,  $E(\tau)$  作 Taylor 级数展开。因为更高阶项对计算结果没有影响, 因此这里忽略高于 4 阶的项, 则有

$$E(\tau) \approx e_1\tau + e_2\tau^2 + e_3\tau^3 + e_4\tau^4 \quad (5.3.31a)$$

$$G(\tau) \approx g_1\tau + g_2\tau^2 + g_3\tau^3 + g_4\tau^4 \quad (5.3.31b)$$

$$F(\tau) \approx I + f_1\tau + f_2\tau^2 + f_3\tau^3 + f_4\tau^4 = I + F'(\tau) \quad (5.3.31c)$$

将式 (5.3.31a) ~ (5.3.31c) 分别代入微分方程 (5.3.29a) ~ (5.3.29c), 比较同幂次项的系数有

$$\begin{aligned} e_1 &= C^T C - \gamma^{-2} L^T L \\ e_2 &= (f_1^T e_1 + e_1 f_1) / 2 \\ e_3 &= (f_2^T e_1 + e_1 f_2 + f_1^T e_1 f_1) / 3 \\ e_4 &= (f_3^T e_1 + e_1 f_3 + f_2^T e_1 f_1 + f_1^T e_1 f_2) / 4 \end{aligned} \quad (5.3.32a)$$

$$\begin{aligned} g_1 &= B B^T \\ g_2 &= (A g_1 + g_1 A^T) / 2 \\ g_3 &= (A g_2 + g_2 A^T - g_1 e_1 g_1) / 3 \\ g_4 &= (A g_3 + g_3 A^T - g_2 e_1 g_1 - g_1 e_1 g_2) / 4 \end{aligned} \quad (5.3.32b)$$

$$\begin{aligned} f &= A \\ f_2 &= (A f_1 - g_1 e_1) / 2 \end{aligned}$$



$$f_3 = (Af_2 - g_2 e_1 - g_1 e_2 f_2)/3$$

$$f_4 = (Af_3 - g_3 e_1 - g_2 e_2 f_1 - g_1 e_3 f_2)/4 \quad (5.3.32c)$$

为避免计算精度的丧失,在此计算阶段,合并公式(5.3.24c)由下式代替

$$\begin{aligned} F' &= \left\{ F' - \frac{1}{2}GE \right\} (I + GE)^{-1} + \\ & (I - GE)^{-1} \left\{ F' - \frac{1}{2}GE \right\} - F' (I + GE)^{-1} F' \end{aligned} \quad (5.3.24c')$$

这是精细积分算法的关键步骤之一。 $F(\tau), G(\tau), E(\tau)$  当然是  $\gamma^{-2}$  的函数,因此由  $F(\tau), G(\tau), E(\tau)$  通过式(5.3.24)计算  $E(\tau), G(\tau), F(\tau)$  的过程中也需要特征值计数,以保证此区段的一阶特征值大于给定值  $\gamma_{\pi}^{-2}$ 。其实质是要求在区域  $[0, \eta]$  上,Hamilton 微分方程(5.2.1)的一阶特征值大于  $\gamma_{\pi}^{-2}$ ,也就是  $\gamma_{\mu} > \gamma_{opt}$ 。

## 5.4 最优 $H_{\infty}$ 范数计算

Hamilton 微分方程(5.2.1)离散化之后,其边值问题特征值的计算就可以利用差分方程(5.3.1)的系数,由公式(5.3.24)结合扩展形式的 Wittrick-Williams 特征值计数公式(5.3.25)进行。当最终计算到  $E(K\eta), G(K\eta), F(K\eta)$  时,对差分方程整个定义区间的特征值计数也同时完成,从而可以判定该边值问题的特征值小于给定值  $\gamma_{\pi}^{-2}$  的个数。对于求一阶特征值来讲,若特征值计数  $J_K(\gamma_{\pi}^{-2}) = 0$ ,则表示  $\gamma_{\pi}^{-2}$  小于一阶特征值,即  $\gamma_{\pi}^{-2} < \gamma_{opt}^{-2}$ ,可以增大  $\gamma_{\pi}^{-2}$  重新计算以更接近  $\gamma_{opt}^{-2}$ ;若  $J_K(\gamma_{\pi}^{-2}) \neq 0$ ,则应减小  $\gamma_{\pi}^{-2}$ 。当然,由于特征值的计数始终在计算过程中进行,所以可以在算法中设定,使得只要出现  $J_K(\gamma_{\pi}^{-2}) \neq 0$  就修改  $\gamma_{\pi}^{-2}$  重新计算,以提高效率。这也是扩展的 Wittrick-Williams 特征值计数公式的特点之一。

由  $E(\eta), G(\eta), F(\eta)$  可以递推计算长度为  $2\eta, 3\eta, \dots, k\eta$  的区段矩阵  $E(k\eta), G(k\eta), F(k\eta)$ 。这样计算的  $E(k\eta)$  是 Riccati 微分方程 (5.1.6) 在边界条件为 0 时的解。方程 (5.1.6) 在边界条件为  $Q_0$  时的解  $Q(k\eta)$  为

$$Q(k\eta) = G(k\eta) + F(k\eta)(Q_0^{-1} + E(k\eta))^{-1}F^T(k\eta) \quad (5.4.1)$$

这个等式在许多研究 Riccati 微分方程的文献中出现,也可以用结构力学中的方法证明<sup>[9]</sup>。

#### 5.4.1 算法描述

最优  $H_\infty$  范数计算的步骤如下:

A: 计算差分方程 (5.3.1) 的系数 (即  $\eta$  区段混合能矩阵)  $E(\eta), G(\eta), F(\eta)$  的步骤为

**Step 1** 给定  $\gamma_u^{-2}$

**Step 2** 由式 (5.3.31a) ~ (5.3.31c) 计算  $E(\tau), G(\tau), F'(\tau)$  作为  $E_c, G_c, F'_c$ , 且  $J_K = 0$

**Step 3** for ( $i = 0; i < N; i++$ ) {  
 $\{E_1 = E_2 = E_c; G_1 = G_2 = G_c; F'_1 = F'_2 = F'_c\}$   
 {按式 (5.3.25) 计算  $J_K$ } (若  $J_K > 0$ , 则减小  $\gamma_u^{-2}$  并从 Step1 重新开始)  
 {按式 (5.3.24a), (5.3.24b), (5.3.24c') 计算新的  $E_c, G_c, F'_c$ }  
 }

**Step 4**  $F_c = I + F'_c$

B: 计算最优  $H_\infty$  范数的步骤为

**Step 1**  $\{E_1 = 0; G_1 = Q_0; F_1 = I; J_{K1} = 0; E_2 = E_c; G_2 = G_c; F_2 = F_c; J_{K2} = 0\}$

**Step 2** for ( $i = 0; i < K; i++$ ) {  
 {按式 (5.3.25) 计算  $J_K$ , 若  $J_K > 0$ , 则减小  $\gamma_u^{-2}$ }

并从 Step 1 重新开始}

{按式(5.3.24) 计算新的  $E_i, G_i, F_i$ }

}

**Step 3** if ( $J_{K_i} > 0$ )

{ $\gamma_{\pm}^2$  是  $\gamma_{\text{opt}}^2$  的上界 (upperbound), 减小  $\gamma_{\pm}^2$  再从 Step 1 开始}

else

{ $\gamma_{\mp}^2$  是  $\gamma_{\text{opt}}^2$  的下界 (lowerbound), 增大  $\gamma_{\mp}^2$  再从 Step 1 开始;

if (upperbound-lowerbound)  $> \epsilon$  ( $\epsilon$  是指定的小正实数)

{增大  $\gamma_{\mp}^2$  再从 Step 1 开始}

else

{break}

}

#### 5.4.2 算例

**算例 1:**

算例 1 是一个二维系统, 参数如下

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -39.4 & 3.8 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0] \quad L = [0 \quad 0.2] \\ D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Q_0 = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}$$

表 5-1 给出了最优  $H_{\infty}$  范数随区间长度变化而变化的结果, 区间长度的增加使得  $\gamma_{\text{opt}}$  趋于一个定值, 这个值也是无限区间上  $H_{\infty}$  滤波器的最优  $H_{\infty}$  范数。表 5-2 给出了  $Q_0 = I_2$  时最优  $H_{\infty}$  范数随区间长度变化的结果, 表 5-3 给出了  $Q_0 = 10 \times I_2$  时系统最优  $H_{\infty}$  范数随区间长度变化的结果, 事实上, 计算无限区间的最优  $H_{\infty}$  范数时, 将这里的算法稍作改动效率会更高, 具体方法可参考第二章

和第三章的内容及文献 6,7,这里不作更多的讨论。

表 5-1 算例 1 的  $\gamma_{\text{opt}}(Q_0 = 0.01 \times I_2)$

$t_f$	0.25	0.50	0.75	1.00	2.00	4.00
$\gamma_{\text{opt}}$	0.12931	0.94854	1.66552	1.69144	1.69184	1.69184

表 5-2 算例 1 的  $\gamma_{\text{opt}}(Q_0 = I_2)$

$t_f$	0.25	0.50	0.75	1.00	2.00	4.00
$\gamma_{\text{opt}}$	0.84834	1.64688	1.69060	1.69180	1.69183	1.69184

表 5-3 算例 1 的  $\gamma_{\text{opt}}(Q_0 = 10 \times I_2)$

$t_f$	0.25	0.50	0.75	1.00	2.00	4.00
$\gamma_{\text{opt}}$	1.24727	1.67313	1.69167	1.69191	1.69191	1.69191

图 5.3 至图 5.6 给出了  $\gamma = \gamma_{\text{opt}}$  时,系统在不同时间区间内 Riccati 方程解的变化情况,因为参数  $\gamma$  取的是最优值, Riccati 方程解矩阵的元素趋于无穷大。

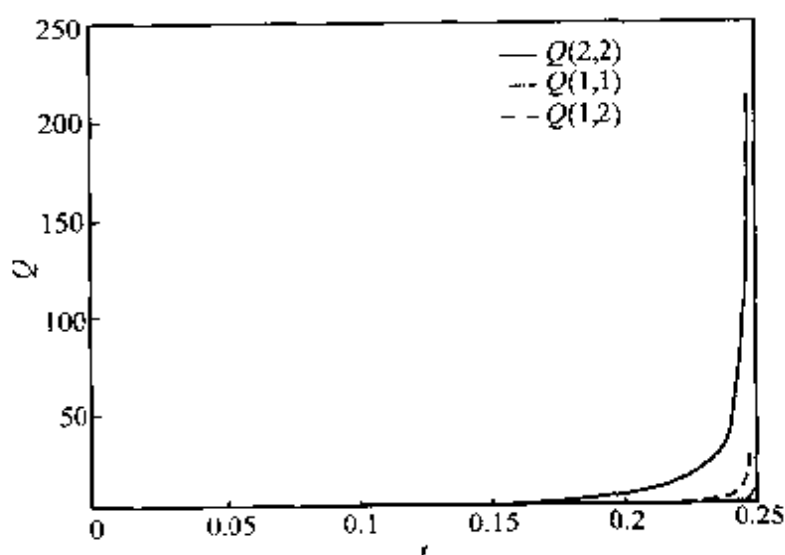
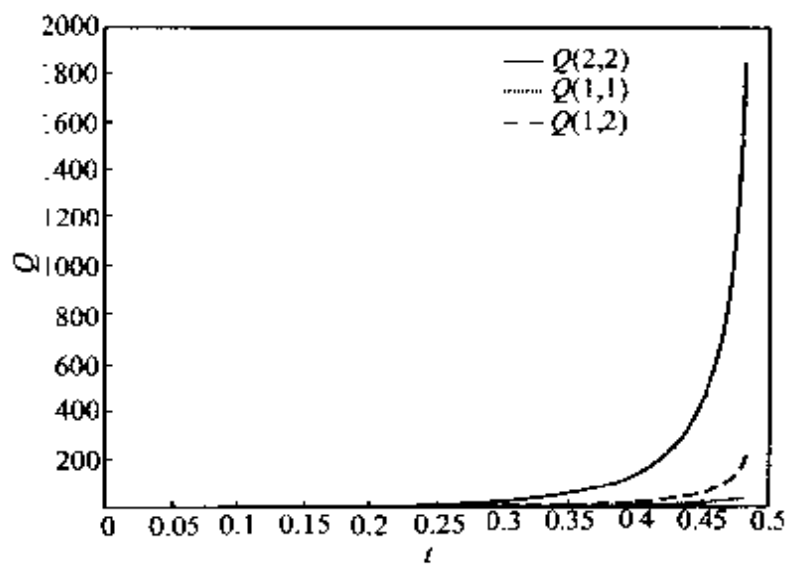
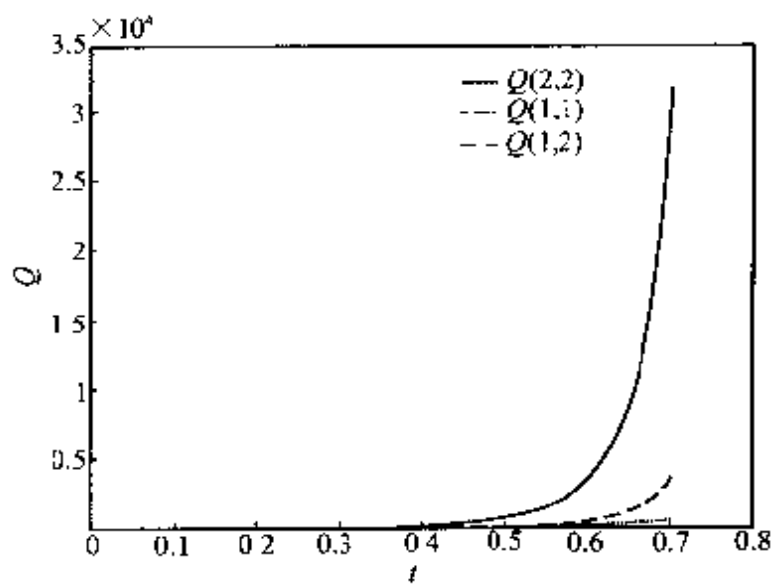


图 5.3 算例 1 中 Riccati 方程的解 ( $\gamma = \gamma_{\text{opt}}, t_f = 0.25$ )

图 5.4 算例 1 中 Riccati 方程的解 ( $Y = Y_{\text{opt}}, t_f = 0.5$ )图 5.5 算例 1 中 Riccati 方程的解 ( $Y = Y_{\text{opt}}, t_f = 0.75$ )

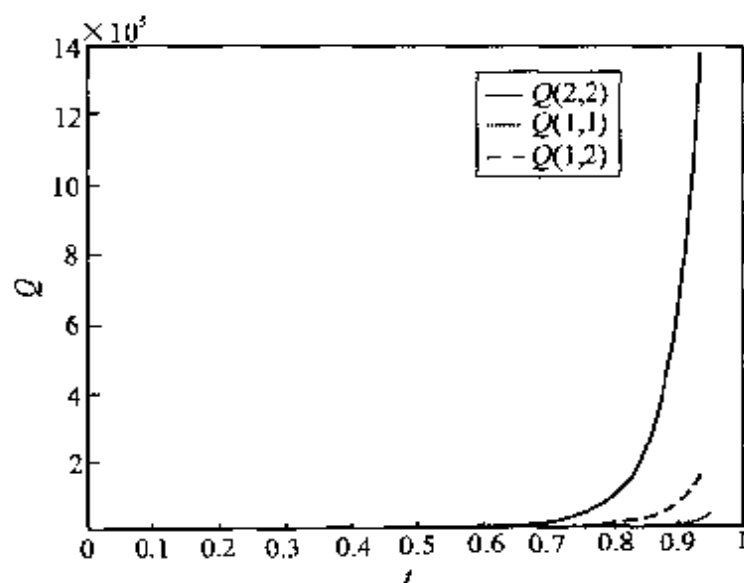
图 5.6 算例 1 中 Riccati 方程的解 ( $\gamma = \gamma_{\text{opt}}, t_f = 1$ )

图 5.7 至图 5.9 则给出了  $\gamma^{-2} = 0.3 \times \gamma_{\text{opt}}^{-2}$  时不同时间区间内 Riccati 方程解的变化情况, 随着时间的增加, 该解趋于一个定值。

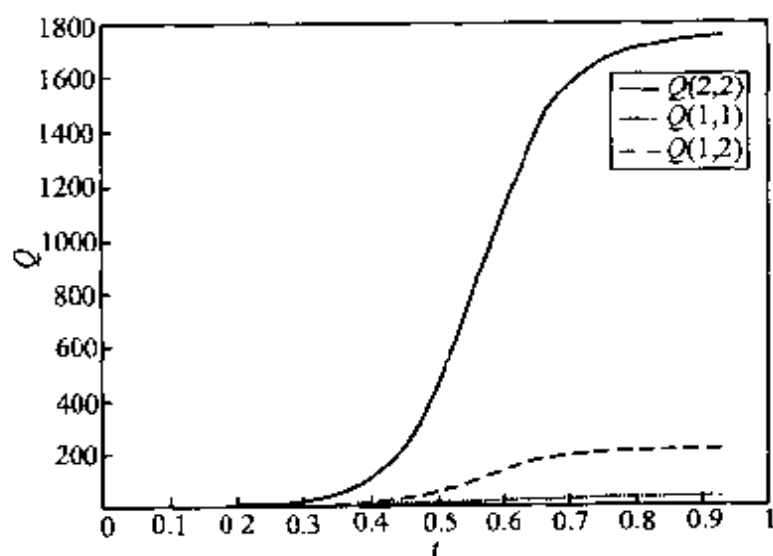


图 5.7 算例 1 中 Riccati 方程的解

( $\gamma^{-2} = 0.3 \times \gamma_{\text{opt}}^{-2}, t_f = 1$ )

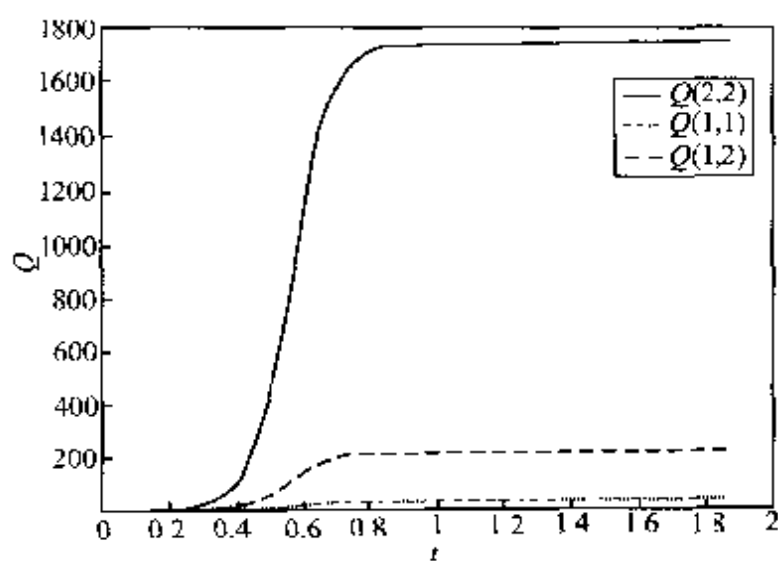


图 5.8 算例 1 中 Riccati 方程的解

$$(\gamma^{-2} = 0.3 \times \gamma_{\text{opt}}^2, t_f = 2)$$

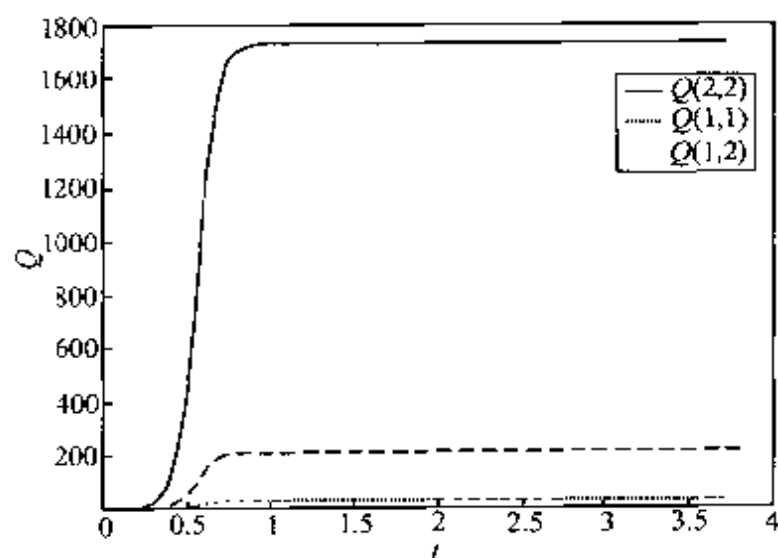


图 5.9 算例 1 中 Riccati 方程的解

$$(\gamma^{-2} = 0.3 \times \gamma_{\text{opt}}^2, t_f = 4)$$

**算例 2:**

算例 2 取自文献 10, 参数如下:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -2 & \\ & & -3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 25 \\ 25 \\ -25 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = [-1 \quad 2 \quad 1] \quad \mathbf{L} = [1 \quad 1 \quad 1]$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

表 5-4 给出了  $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{0}$  时最优  $H_\infty$  范数随区间长度变化的结果, 随着区间长度的增加,  $\gamma_{\text{opt}}$  趋于一个定值, 这个值与文献 10 的计算结果是一致的。表 5-5 则给出了  $\mathbf{Q}_0 = 0.1 \times \mathbf{I}_3$  时的计算结果。

**表 5-4** 算例 2 的  $\gamma_{\text{opt}}(\mathbf{Q}_0 = \mathbf{0})$

$t_f$	1	2	3	5	10	15
$\gamma_{\text{opt}}$	9.22589	9.37009	9.37453	9.37475	9.37475	9.37475

**表 5-5** 算例 2 的  $\gamma_{\text{opt}}(\mathbf{Q}_0 = 0.1 \times \mathbf{I}_3)$

$t_f$	1	2	3	5	10	15
$\gamma_{\text{opt}}$	9.34095	9.37398	9.37467	9.37475	9.37475	9.37475

图 5.10 至图 5.14 给出了  $\gamma^{-2} = 0.5 \times \gamma_{\text{opt}}^2$  时, 系统在不同时间区间内 Riccati 方程解的变化情况。



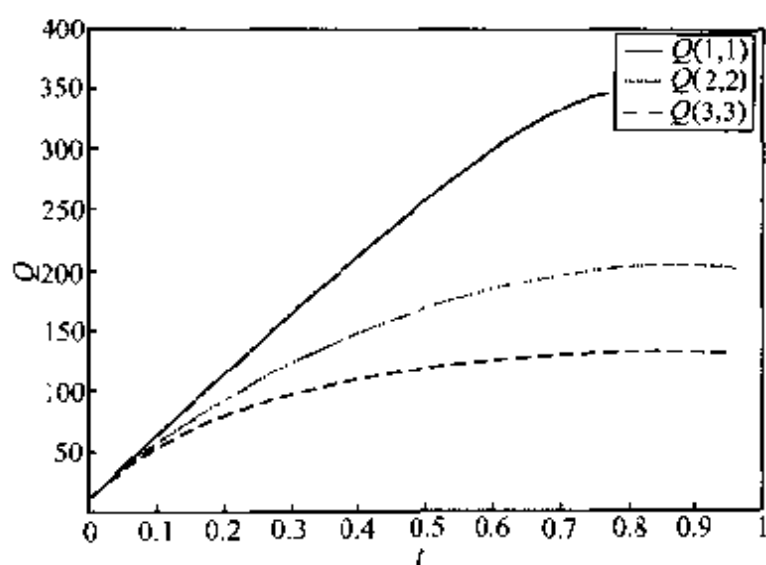


图 5.10 算例 2 中 Riccati 方程的解

$$(\gamma^{-2} = 0.5 \times \gamma_{\text{opt}}^2, t_f = 1)$$

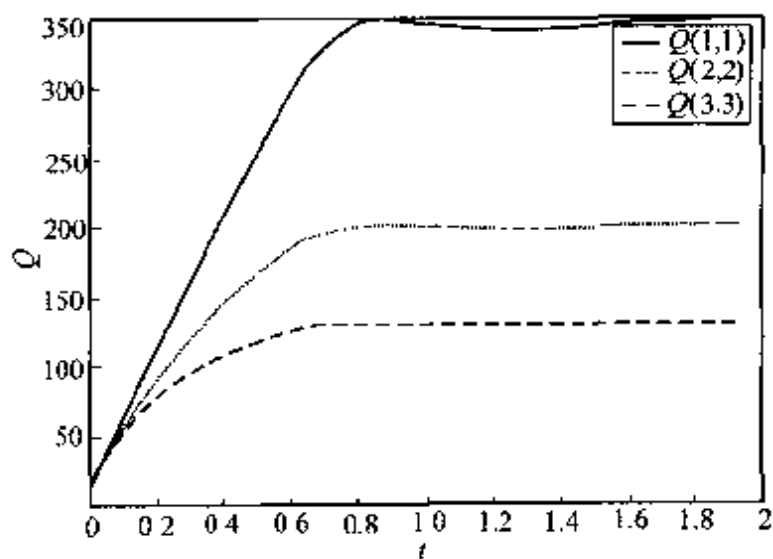


图 5.11 算例 2 中 Riccati 方程的解

$$(\gamma^{-2} = 0.5 \times \gamma_{\text{opt}}^2, t_f = 2)$$

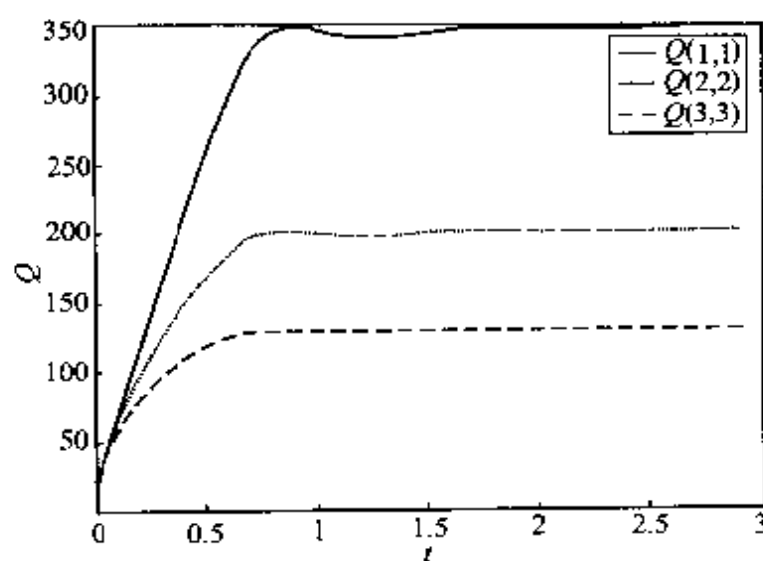


图 5.12 算例 2 中 Riccati 方程的解

$$(\gamma^{-2} = 0.5 \times \gamma_{\text{opt}}^{-2}, t_f = 3)$$

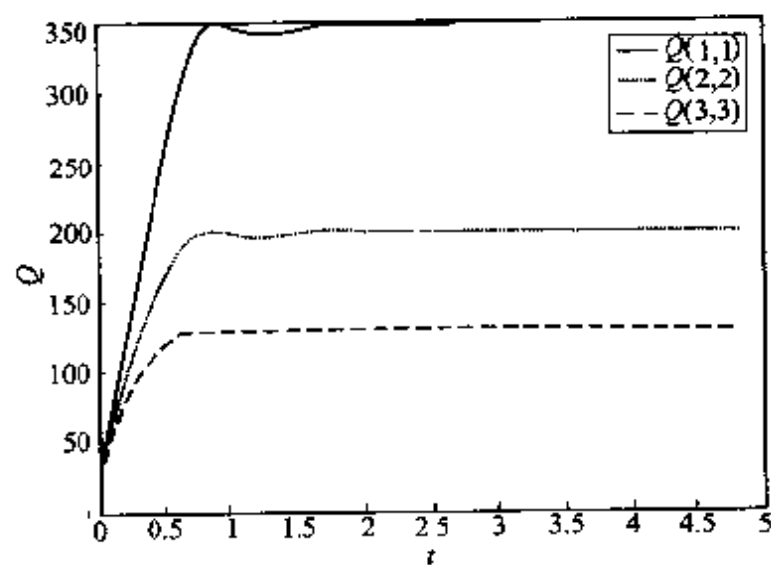


图 5.13 算例 2 中 Riccati 方程的解

$$(\gamma^{-2} = 0.5 \times \gamma_{\text{opt}}^{-2}, t_f = 5)$$

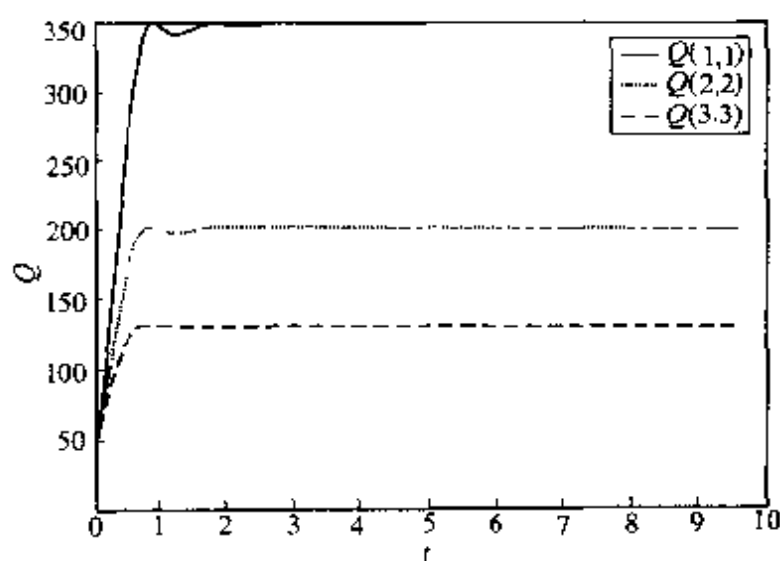


图 5.14 算例 2 中 Riccati 方程的解

$$(\gamma^{-2} = 0.5 \times \gamma_{\text{opt}}^2, t_f = 10)$$

图 5.15 至图 5.19 给出了  $\gamma^{-2} = 0.1 \times \gamma_{\text{opt}}^2$  时, 系统在不同时间区间内 Riccati 方程解的变化情况。

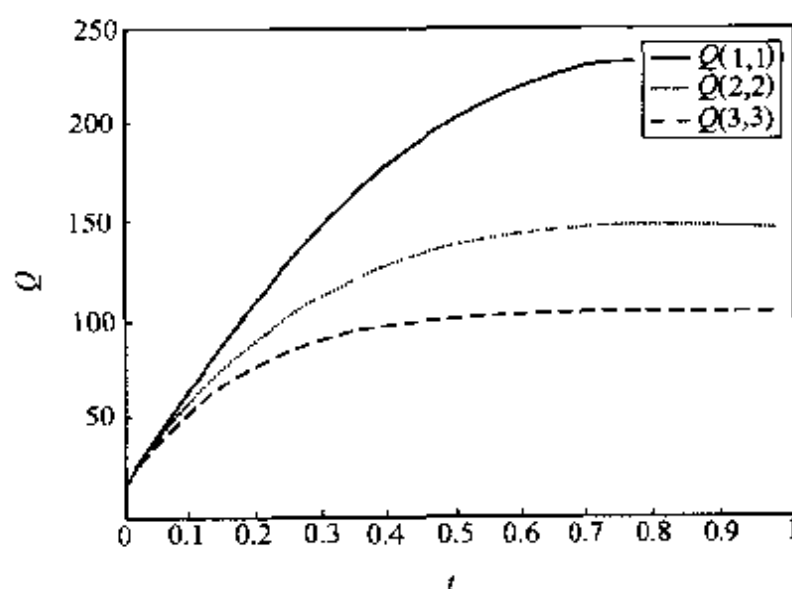


图 5.15 算例 2 中 Riccati 方程的解

$$(\gamma^{-2} = 0.1 \times \gamma_{\text{opt}}^2, t_f = 1)$$

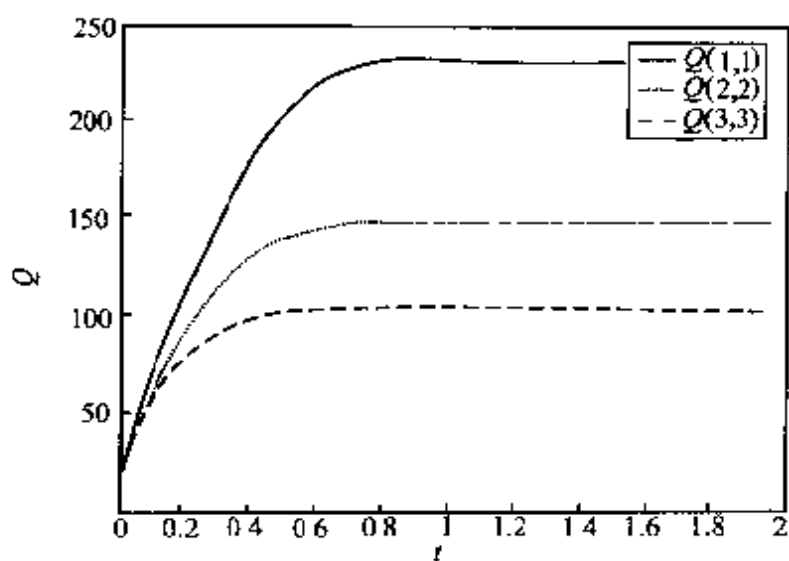


图 5.16 算例 2 中 Riccati 方程的解

$$(\gamma^{-2} = 0.1 \times \gamma_{\text{opt}}^{-2}, t_f = 2)$$

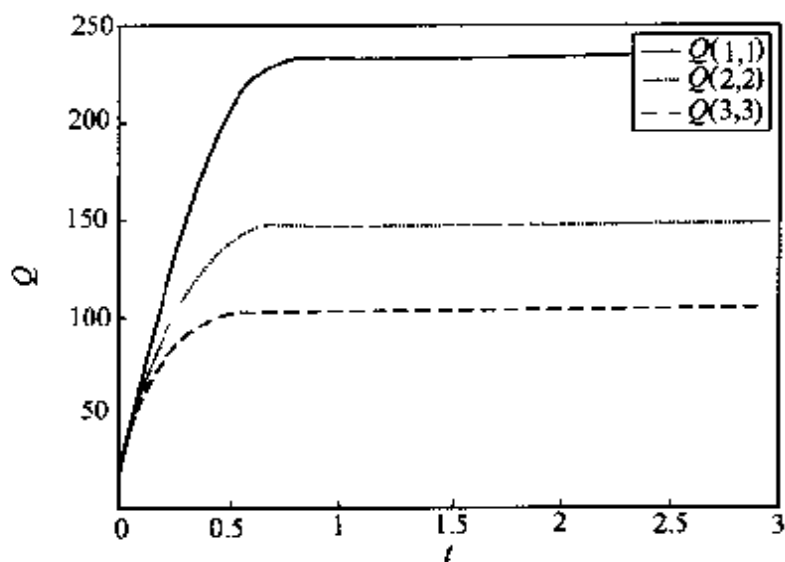


图 5.17 算例 2 中 Riccati 方程的解

$$(\gamma^{-2} = 0.1 \times \gamma_{\text{opt}}^{-2}, t_f = 3)$$

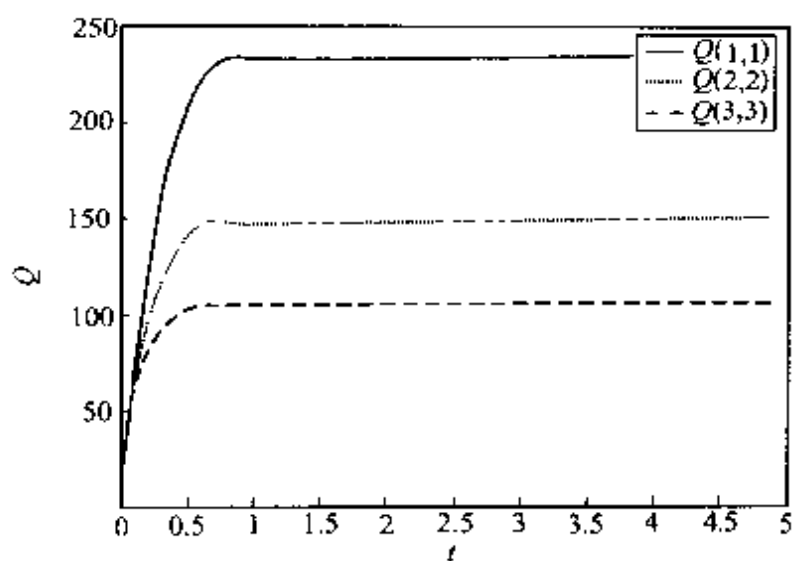


图 5.18 算例 2 中 Riccati 方程的解

$$(\gamma^{-2} = 0.1 \times \gamma_{\text{opt}}^2, t_f = 5)$$

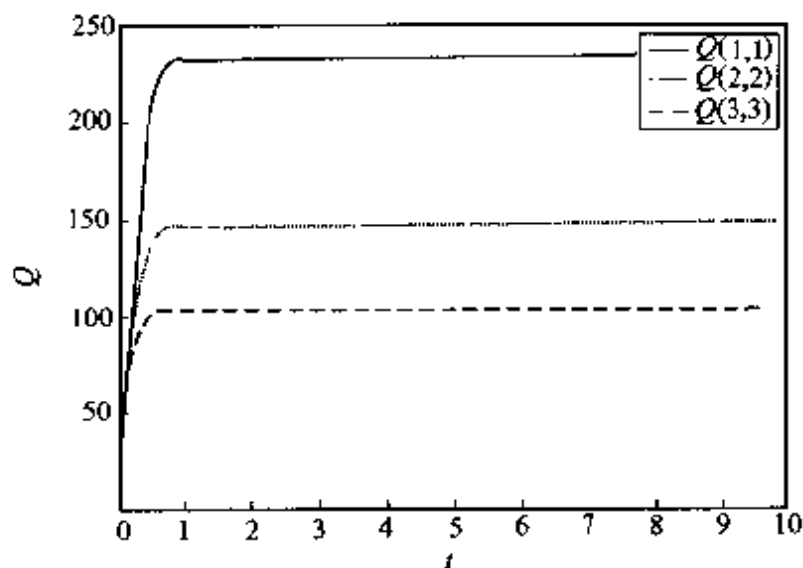


图 5.19 算例 2 中 Riccati 方程的解

$$(\gamma^{-2} = 0.1 \times \gamma_{\text{opt}}^2, t_f = 10)$$

**算例 3:**

算例 3 是一个 7 维系统, 参数如下

$$A = \begin{bmatrix} 4.04 & 7.90 & 6.29 & -20.33 & -11.85 & -37.20 & -9.83 \\ 3.84 & -5.57 & 2.97 & -16.00 & -5.24 & -12.06 & 4.87 \\ 0.0 & 0.0 & 6.36 & -4.69 & 3.61 & -1.64 & -6.16 \\ 0.0 & 0.0 & 0.31 & -1.20 & 0.03 & -2.35 & -0.97 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.42 & -3.12 & -0.74 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.01 & 8.93 & -0.04 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 2.0 & -4.87 \end{bmatrix}$$

$$B^T = \begin{bmatrix} -70.94 & -75.07 & 14.55 & -7.34 & 3.12 & 4.04 & -3.1 \\ -37.88 & 21.01 & 18.35 & -9.60 & -14.18 & -1.98 & -4.2 \end{bmatrix}$$

$$C^T = \begin{bmatrix} 53.20 & 9.13 & 24.22 & 1.67 & 55.41 & -5.43 & -7.63 \\ -1.27 & 5.35 & -4.75 & 3.03 & -3.26 & -5.21 & 2.18 \end{bmatrix}$$

$$L = [-0.10 \quad -0.40 \quad 0.26 \quad 0.39 \quad -0.21 \quad 0.45 \quad -0.67]$$

表 5-6 给出了  $Q_0 = 0.1 \times I_7$  时  $\gamma_{\text{opt}}^{-2}$  随区间长度变化的结果, 随着区间长度的增加,  $\gamma_{\text{opt}}^{-2}$  趋于一个定值。表 5-7 和表 5-8 分别给出了  $Q_0 = I_7$  和  $Q_0 = 10 \times I_7$  时系统的  $\gamma_{\text{opt}}^{-2}$  随区间长度变化的结果。注意这里给出的不是  $\gamma_{\text{opt}}^{-2}$ , 所以数据随区间长度的变化趋势不同。

**表 5-6** 算例 3 的  $\gamma_{\text{opt}}^{-2}(Q_0 = 0.1 \times I_7)$

$t_f$	1	3	5	15
$\gamma_{\text{opt}}^{-2}$	0.311652	0.144931	0.140925	0.030391
$t_f$	20	25	30	50
$\gamma_{\text{opt}}^{-2}$	0.0288361	0.0287575	0.0287535	0.0287533

**表 5-7** 算例 3 的  $\gamma_{\text{opt}}^{-2}(Q_0 = I_7)$

$t_f$	1	3	5	15
$\gamma_{\text{opt}}^{-2}$	0.169983	0.129470	0.0865784	0.0289278
$t_f$	20	25	30	50
$\gamma_{\text{opt}}^{-2}$	0.0287621	0.0287537	0.0287533	0.0287533

表 5-8 算例 3 的  $\gamma_{\text{opt}}^2(Q_0 = 10 \times I_7)$ 

$t_f$	1	3	5	15
$\gamma_{\text{opt}}^2$	0.111533	0.0530400	0.0337076	0.0287705
$t_f$	20	25	30	50
$\gamma_{\text{opt}}^2$	0.0287542	0.0287533	0.0287533	0.0297533

至此,本章在研究最优  $H_\infty$  范数  $\gamma_{\text{opt}}$ 、Riccati 微分方程解的存在条件、Hamilton 微分方程边值问题特征值之间关系的基础上,介绍了计算最优  $H_\infty$  范数的特征值算法。求 Hamilton 微分方程特征值问题的数值解需要将微分方程定义区间离散化,上文也介绍了此类方程与 Sturm-Liouville 型微分方程的关系及将其离散化为差分方程的过程。差分方程中的系数矩阵(混合能矩阵)不仅是特征值计算中的基本数据,而且具有特定的意义。

## 5.5 Riccati 微分方程解的有限逃逸现象

本节基于前面介绍的理论与方法研究  $H_\infty$ -Riccati 微分方程解的有限逃逸现象。在有限时间滤波问题中,Riccati 微分方程解的存在性由系统的  $H_\infty$  诱导范数决定,最优范数  $\gamma_{\text{opt}}$  是含有非定号二次项的  $H_\infty$ -Riccati 微分方程出现有限逃逸现象的临界参数。事实上,对  $H_2$  滤波与控制中定号 Riccati 微分方程的研究也是一个重要的内容,文献 11、文献 12 介绍了其有限逃逸现象(finite escape phenomena)。同样,由于含有非定号二次项的  $H_\infty$ -Riccati 微分方程在  $H_\infty$  滤波与控制中的关键作用,对其有限逃逸等瞬态性质的研究 also 具有重要意义。文献 13 给出了几个判定解的有界性和收敛性的充分条件,这些条件可以保证微分方程的解在初值小于某个上界时的收敛性。

当其他条件一定时, $H_\infty$ -Riccati 微分方程解的存在性由参数

$\gamma$  决定。对于足够大的  $\gamma$ ,  $H_\infty$ -Riccati 微分方程总存在一个解; 当  $\gamma$  从大于  $\gamma_{opt}$  逐渐趋近于滤波器的最优  $H_\infty$  范数  $\gamma_{opt}$  时, 方程的解矩阵在终端时刻也将趋于无穷大; 而当  $\gamma = \gamma_{opt}$  时, 方程的解存在有限逃逸时刻。基于 Riccati 微分方程的解与 Hamilton 微分方程共轭点之间的关系, 5.2 节和 5.3 节中建立了  $\gamma_{opt}^2$  与 Hamilton 微分系统特征值之间的对应关系, 并利用计算 Hamilton 微分系统特征值的方法来计算  $\gamma_{opt}^2$ 。

### 5.5.1 有限逃逸条件

考虑线性系统

$$\dot{x} = Ax + Bw, x(0) = x_0 \quad (5.5.1a)$$

$$y = Cx + v \quad (5.5.1b)$$

$$z = Lx \quad (5.5.1c)$$

$H_\infty$  滤波问题解的存在性由 Riccati 微分方程 (5.5.2) 解的存在性决定。Riccati 微分方程

$$\dot{Q} = BB^T + AQ + QA^T - Q(C^T C - \gamma^{-2} L^T L)Q, Q(0) = Q_0 \quad (5.5.2)$$

定义在区间  $[0, t_f]$  上, 其解可以由 Hamilton 微分方程

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & BB^T \\ C^T C - \gamma^{-2} L^T L & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} \quad (5.5.3a)$$

$$x(0) = Q_0 \lambda(0), \lambda(t_f) = 0 \quad (5.5.3b)$$

的状态转移矩阵  $\Phi(0, t)$  表示, 即对于

$$\frac{d}{dt} \Phi(0, t) = H \Phi(0, t), \quad \Phi(0, 0) = I \quad (5.5.4)$$

有

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(0, t) & \Phi_{12}(0, t) \\ \Phi_{21}(0, t) & \Phi_{22}(0, t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ \lambda(0) \end{bmatrix} \quad (5.5.5)$$

其中



$$H = \begin{bmatrix} A & BB^T \\ C^T C - \gamma^{-2} L^T L & -A^T \end{bmatrix} \quad (5.5.6)$$

并且

$$Q(t) = [\Phi_{11}(0, t)Q_0 \quad \Phi_{12}(0, t)] [\Phi_{21}(0, t)Q_0 \quad \Phi_{22}(0, t)]^{-1} \quad (5.5.7)$$

根据定理 5.4, 边值问题 (5.5.3) 存在可数无穷多个特征值  $\gamma_k^{-2}$  ( $\gamma_1^{-2} \leq \gamma_2^{-2} \leq \dots$ ) 及相应的正交特征函数  $(\phi_1, \psi_1), (\phi_2, \psi_2), \dots$ , 且

$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle = \int_0^{t_f} \phi_i^T(t) L^T L \phi_j(t) dt = \delta_{ij} \quad (5.5.8)$$

另外有

$$\gamma_{m+1}^{-2} = \min \{R(x, \lambda) \mid x \neq 0, x \perp \phi_1, \dots, \phi_m\} \quad (5.5.9)$$

其中  $m = 0, 1, 2, \dots$ , 而  $x \perp \phi_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) 是指  $\langle x, \phi_i \rangle = \int_0^{t_f} x^T(t) L^T L \phi_i(t) dt = 0$ .  $R(x, \lambda)$  的定义为

$$R(x, \lambda) = \frac{\Pi_1}{\Pi_2} \quad (5.5.10)$$

其中

$$\Pi_1 = \int_0^{t_f} (\lambda^T \dot{x} - \lambda^T A x + \frac{1}{2} x^T C^T C x - \frac{1}{2} \lambda^T B B^T \lambda) dt + \frac{1}{2} x_0^T Q_0^{-1} x_0 \quad (5.5.11a)$$

$$\Pi_2 = \int_0^{t_f} \frac{1}{2} x^T L^T L x dt \quad (5.5.11b)$$

当  $\gamma^{-2}$  是其特征值时, 边值问题 (5.5.3) 存在非平凡解。边界条件  $x(0) = Q_0 \lambda(0)$  及  $\lambda(t_f) = 0$  又表明 0 和  $t_f$  是此边值问题的共轭点, 所以  $\Phi_{21}(0, t_f)Q_0 + \Phi_{22}(0, t_f)$  必定是奇异矩阵, 因此其逆矩阵不存在, Riccati 微分方程的解在  $t_f$  时刻为无穷大, 出现有限逃逸现象。因为各阶特征值满足  $\gamma_1^{-2} \leq \gamma_2^{-2} \leq \dots \gamma_m^{-2}$ , 所以  $\gamma_1$  是使两端边值问题存在非平凡解的  $\gamma$  值的上界, 也是使 Riccati 微分方程在  $t_f$

时刻出现有限逃逸现象的  $\gamma$  值的上界, 即  $\gamma_1 = \gamma_{\text{opt}} \gamma_{\text{cpt}}$  是判定  $H_\infty$ -Riccati 微分方程是否存在有限逃逸现象的临界值。另外, 按照结构力学与最优控制的模拟理论, 这里的  $H_\infty$ -Riccati 微分方程的解矩阵对应于结构链的动柔度矩阵<sup>[7,9]</sup>, 而子结构链的动柔度矩阵是随结构的振动频率变化的, 当振动频率为结构的固有频率时, 其右端的动柔度矩阵也趋向于无穷大, 实质上就是  $H_\infty$ -Riccati 微分方程解的有限逃逸现象。

### 5.5.2 算例

本节中将首先用精细积分结合扩展的 Wittrick-Williams 算法计算  $\gamma_{\text{opt}}^{-2}$ , 而用改进的 Davison-Maki 算法<sup>[7,4]</sup> 求解给定  $\gamma^{-2}$  时的  $H_\infty$ -Riccati 微分方程。按照文献 13 中定理 4 的第一部分也可以计算  $H_\infty$ -Riccati 方程在无限区间  $(0, \infty)$  的临界参数  $\gamma_{\text{opt}}^{-2}$ , 即当且仅当

$$C^T C - \frac{1}{\gamma^2} L^T L \geq 0$$

时, 方程 (5.5.2) 的解在区间  $(0, \infty)$  不会发生有限逃逸现象。

#### 算例 1:

算例 1 取自文献 13, 系统参数为  $A = -1, C = 1, B = \sqrt{3/2}, L = \sqrt{5}$ 。按照上述条件,  $\gamma^{-2} \leq 0.2$  时, 方程 (5.5.2) 的解在区间  $(0, \infty)$  不会发生有限逃逸现象。按照本节的判定条件和算法, 同样可以计算出  $\gamma_{\text{opt}}^{-2}$  的值为 0.2。对于有限区间, 则无法按照文献 13 中的定理来判断并计算  $\gamma_{\text{opt}}^{-2}$ 。本节的方法则可以对任意区间长度及任意初始值计算  $\gamma_{\text{opt}}^{-2}$ 。设  $t_f = 5, Q_0 = 10$ , 可以计算出使  $H_\infty$ -Riccati 微分方程的解在区间末端趋于无穷大的临界值  $\gamma_{\text{opt}}^{-2} = 0.2370063215$ 。如图 5.20 中所示, 当取  $\gamma^{-2} = \gamma_{\text{opt}}^{-2}$  时,  $H_\infty$ -Riccati 微分方程的解在  $t = 5$  处趋向于无穷大。另外, 当  $\gamma^{-2} > 0.2370063215$  时, 方程的解在  $t < 5$  的某点趋向于无穷大。取  $\gamma^{-2} = 0.25$ , 则方程的解在  $t = 0.7$  附近趋向于无穷大, 如图 5.21 中所

示。注意图 5.20 至图 5.23 的纵坐标均为以 10 为底的对数坐标, 这样可以更清楚地表示解的有限逃逸现象。

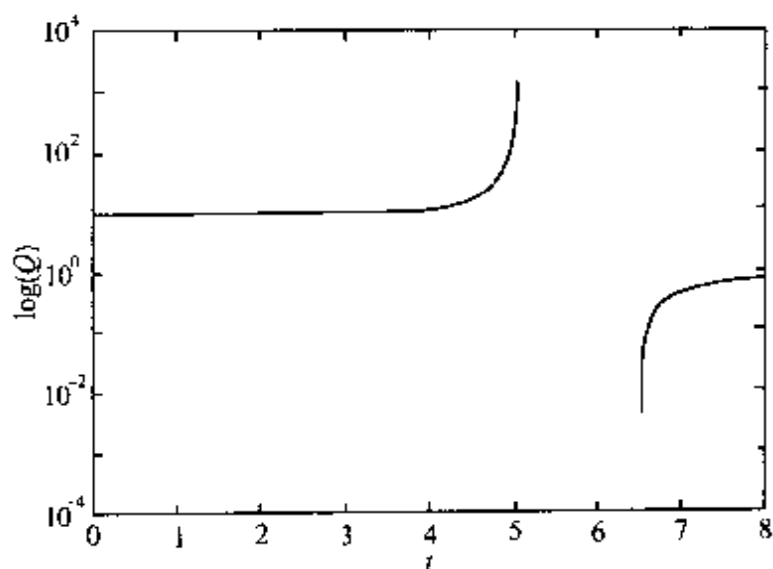


图 5.20 一维系统  $\gamma^{-2} = \gamma_{\infty}^2$  时 Riccati 方程的解

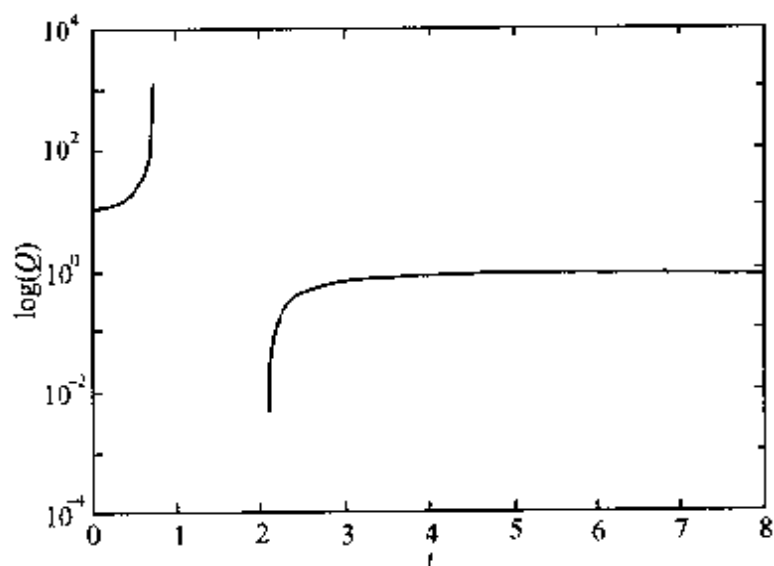
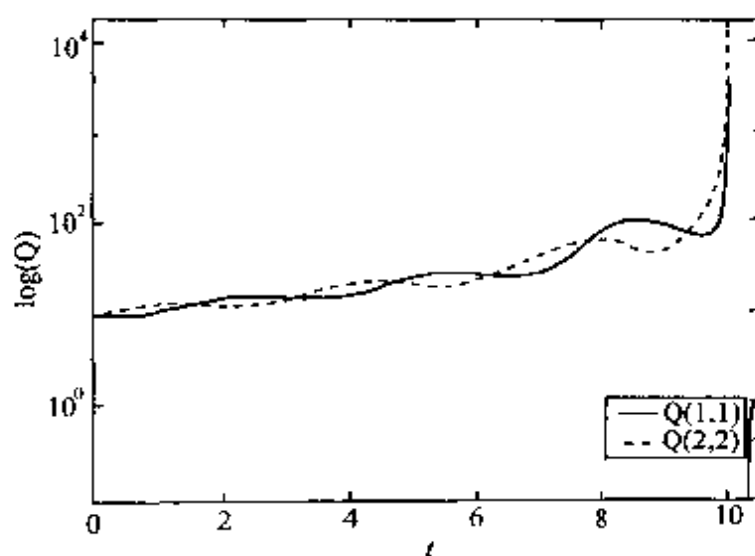
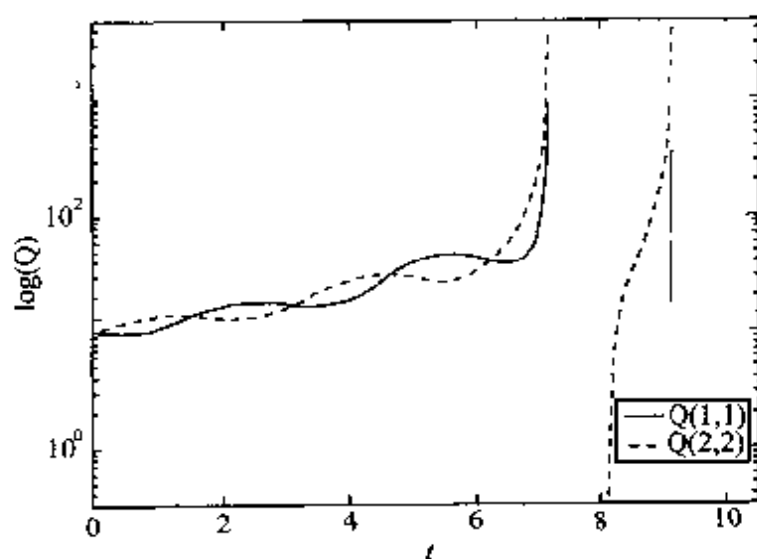


图 5.21 一维系统  $\gamma^{-2} = 0.25$  时 Riccati 方程的解

### 算例 2:

算例 2 是一个 2 维系统。系统参数为

图 5.22 二维系统  $\gamma^2 = \gamma_{opt}^2$  时 Riccati 方程的解图 5.23 二维系统  $\gamma^2 = 1$  时 Riccati 方程的解

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} \quad L = [0 \quad 0.2]$$

可以判定当  $\gamma^2 \leq 0.25$  时,  $H_\infty$ -Riccati 微分方程在区间  $(0, \infty)$  内不会出现有限逃逸现象。按照文献 13 及本节的方法得到的结果是一样的。若取  $t_f = 10$ ,  $Q_0 = \text{diag}[10, 10]$ , 则临界参数为  $\gamma_{opt}^2 =$

0.8727444219。

如图 5.22 所示,当取  $\gamma^{-2} = \gamma_{cp}^{-2}$  时,  $H_{\infty}$ -Riccati 微分方程的解在  $t = 10$  处趋向于无穷大,而当  $\gamma^{-2} > 0.8727444219$  时,方程的解会在  $t < 10$  的某点趋向于无穷大。如图 5.23 中所示,取  $\gamma^{-2} = 1$ ,则方程的解在  $t = 7$  附近趋向于无穷大。

### 参考文献

- 1 Green M., Limbeer D J N. Linear Robust Control. New Jersey: Prentice Hall, 1995
- 2 Burl J B. Linear Optimal Control:  $H_2$  and  $H_{\infty}$  Methods. California: Addison Wesley Longman, 1998
- 3 Basar T, Bernhard P.  $H_{\infty}$ -optimal Control and Related Minimax Design Problems. Boston: Birkhauser, 1995
- 4 Kratz W. An oscillation theorem for self-adjoint differential systems and the Rayleigh principle for quadratic functionals. Journal of the London Mathematical Society, 1995, 51: 401~416
- 5 Kratz W. Quadratic Functionals in Variational Analysis and Control Theory. Berlin: Akademie Verlag, 1995
- 6 钟万勰.  $H_{\infty}$  状态反馈与瑞利商精细积分. 计算力学学报, 1998, 15(4): 1~8
- 7 Zhong W X, Williams F W.  $H_{\infty}$  filtering with secure eigenvalue calculation and precise integration. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1999, 46: 1017~1030
- 8 Zhong W X, Williams F W, Bennett P N. Extension of the Wittrick-Williams algorithm to mixed variable systems. Journal of Vibration and Acoustics, 1997, 119(3): 334~340
- 9 钟万勰, 欧阳华江, 邓子辰. 计算结构力学与最优控制. 大连: 大连理工大学出版社, 1993
- 10 Shaked U.  $H_{\infty}$ -minimum error state estimation of linear stationary process. IEEE Trans Automatic Control, 1990, 35: 554~558
- 11 Bittanti S, Laub A J, Willems J C. The Riccati Equation. Heidelberg:

---

Springer-verlag, 1991

- 12 Crouch P E, Pavon M. On the existence of solutions of the Riccati differential equation. System & Control Letters, 1987, 9: 203~206
- 13 Bolzern P, Colaneri P, Nicolao G D.  $H_\infty$ -differential Riccati equations: convergence properties and finite escape phenomena. IEEE Trans Automatic Control, 1997, 42: 113~118
- 14 Kenney C S, Leipnik R B. Numerical integration of the differential matrix Riccati equation. IEEE Trans Automatic Control, 1985, 30: 962~970

## 第六章 $H_\infty$ 滤波微分方程求解

$H_\infty$  滤波是  $H_\infty$  控制理论的核心内容之一,在前一章中已经介绍了有关的基本理论及算法。有限时间  $H_\infty$  滤波问题中的 Riccati 微分方程和滤波微分方程分别为非线性矩阵微分方程和线性变系数微分方程,Riccati 微分方程解的存在性还依赖于参数  $\gamma^{-2}(1-\epsilon^2)$ 。上述微分方程的数值求解比较困难,但对于线性定常系统,只要已经确定最优参数  $\gamma_{\text{opt}}^2$ ,随后的数值计算都可以纳入精细积分体系中进行<sup>[4~8]</sup>,本章将介绍这两类微分方程的求解。

### 6.1 定常线性系统 $H_\infty$ 滤波器

考虑线性系统

$$\dot{x} = Ax + Bw, x(0) = x_0 \quad (6.1.1a)$$

$$y = Cx + v \quad (6.1.1b)$$

$$z = Lx \quad (6.1.1c)$$

其中  $x$  为  $n$  维状态向量,  $y$  为  $q$  维量测向量,  $z$  为  $p$  维输出向量,  $w$  为  $l$  维过程干扰向量,  $v$  为  $q$  维量测干扰向量,  $w, v \in L_2[0, t_f]$ 。定常矩阵  $A, B, C$  和  $L$  有恰当的维数,且  $(A, B)$  和  $(A, C)$  分别可控可观。 $H_\infty$  滤波器需要利用量测信息  $y$  给出对系统状态线性组合  $z = Lx$  的最优估计

$$\hat{z} = \mathcal{F}y \quad (6.1.2)$$

其中滤波器  $\mathcal{F}$  为线性因果算子。并且估计误差  $(\hat{z} - Lx)$  满足

$$\int_0^{t_f} (\hat{z} - Lx)^T (\hat{z} - Lx) dt < \gamma^2 \int_0^{t_f} (w^T w + v^T v) dt \quad (6.1.3)$$

如图 6.1 所示, 方程 (6.1.4) 描述的滤波器是上述问题的一个解。

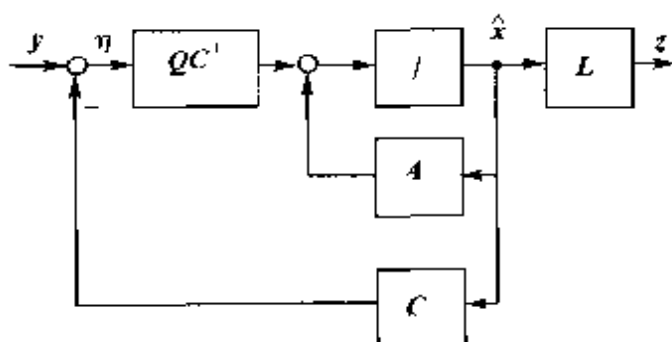


图 6.1  $H_\infty$  滤波器

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + QC^T(y - C\hat{x}), \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \quad (6.1.4a)$$

$$\hat{z} = L\hat{x} \quad (6.1.4b)$$

其中  $Q$  满足 Riccati 微分方程

$$\dot{Q} = BB^T + AQ + QA^T - Q(C^TC - \gamma^{-2}L^TL)Q, Q(0) = Q_0 \quad (6.1.5)$$

上述 Riccati 微分方程中的参数  $\gamma^{-2}$  大于临界值  $\gamma_{opt}^{-2}$  时, 方程在区间  $[0, t_f]$  上无解。所以需要首先确定  $\gamma_{opt}^{-2}$ , 并根据  $\gamma_{opt}^{-2}$  的值选定合适的  $\gamma^{-2}$ , 再求解相应的 Riccati 方程以构造滤波器。在上一章中已经指出  $\gamma_{opt}^{-2}$  对应于 Hamilton 微分方程边值问题的一阶特征值, 并可以表示为广义 Rayleigh 商驻值的形式, 即

$$\gamma_{opt}^{-2} = \inf \frac{\Pi_1}{\Pi_2} \quad (6.1.6)$$

其中

$$\Pi_1 = \int_0^{t_f} (\lambda^T \dot{x} - \lambda^T A x + \frac{1}{2} x^T C^T C x - \frac{1}{2} \lambda^T B B^T \lambda) dt + \frac{1}{2} x_0^T Q_0^{-1} x_0 \quad (6.1.7a)$$

$$\Pi_2 = \int_0^{t_f} \frac{1}{2} x^T L^T L x dt \quad (6.1.7b)$$



临界参数  $\gamma_{\text{opt}}^{-2}$  的计算需利用扩展的 Wittrick Williams 方法结合区段混合能矩阵微分方程的精细积分进行,第五章对此有详细介绍。

由对偶方程

$$\dot{x} = Ax + BB^T\lambda \quad (6.1.8a)$$

$$\dot{\lambda} = (C^TC - \gamma^{-2}L^TL)x - A^T\lambda - C^Ty + \gamma^{-2}L^T\dot{z} \quad (6.1.8b)$$

可以导出 Riccati 微分方程(6.1.5)和滤波方程(6.1.4a)<sup>[4]</sup>,而且对偶方程(6.1.8)等价于下列变分驻值问题

$$J = \int_0^t [\lambda^T \dot{x} - H(x, \lambda) - x^T C^T y + \gamma^{-2} x^T L^T \dot{z}] dt, \delta J = 0 \quad (6.1.9)$$

其中

$$H(x, \lambda) = \lambda^T Ax - \frac{1}{2} x^T (C^TC - \gamma^{-2}L^TL)x + \frac{1}{2} \lambda^T BB^T\lambda \quad (6.1.10)$$

无限长时间  $H_\infty$  滤波问题需求解 Riccati 代数方程及定常线性滤波微分方程,相对简单一些。本章主要讨论有限时间  $H_\infty$  滤波问题,这里的方法可稍作变化用于解决无限长时间  $H_\infty$  滤波中的计算问题。

## 6.2 混合能矩阵和向量的微分方程

### 6.2.1 混合能矩阵及向量

如果仅求解 Riccati 微分方程,则按照上一章中的方法,利用精细积分方法求解混合能矩阵所满足的微分方程即可。因为还要求解滤波微分方程,所以需定义相应的混合能向量,并利用精细积分方法求解。本节介绍精细积分法求解中心  $H_\infty$  滤波方程的具体步骤。首先设定步长  $\eta$  及需进行计算的时刻

$$t_0 = 0, t_1 = \eta, t_2 = 2\eta, \dots, t_k = k\eta, \dots, t_l = k_l\eta \quad (6.2.1)$$

根据  $2^N$  类算法的特点及精细积分法的要求, 取  $N = 20$ , 将  $\eta$  等分为

$$\tau = \eta/2^N \approx \eta \cdot 10^{-6} \quad (6.2.2)$$



图 6.2 区段合并

按照式(6.1.9), 对图 6.2 中所示区段  $(t_a, t_b)$  定义区段混合能

$$V(x_a, \lambda_b) = \lambda_b^T x_a - \int_{t_a}^{t_b} [\lambda^T \dot{x} - H(x, \lambda) - x^T C^T y + \gamma^{-2} x^T L^T \dot{z}] dt \quad (6.2.3)$$

其中  $0 \leq t_a \leq t_b \leq t_l$ 。显然  $V(x_a, \lambda_b)$  是  $x_a$  与  $\lambda_b$  的二次式, 其一般形式为

$$V(x_a, \lambda_b) = \lambda_b^T F x_a - \frac{1}{2} x_a^T E x_a + \frac{1}{2} \lambda_b^T G \lambda_b + \lambda_b^T r_x + x_a^T r_\lambda \quad (6.2.4)$$

其中  $E, G, F$  为  $n \times n$  阶区段混合能矩阵,  $E^T = E, G^T = G, r_x$  和  $r_\lambda$  为  $n$  维向量。对定常系统, 矩阵  $E, G, F$  及向量  $r_x$  和  $r_\lambda$  分别满足下列微分方程

$$\frac{dG}{dt} = BB^T + AG + GA^T - G(C^T C - \gamma^{-2} L^T L)G \quad (6.2.5a)$$

$$\frac{dE}{dt} = F^T (C^T C - \gamma^{-2} L^T L) F \quad (6.2.5b)$$

$$\frac{dF}{dt} = (A - G(C^T C - \gamma^{-2} L^T L)) F \quad (6.2.5c)$$

$$\frac{dr_x}{dt} = Ar_x + GC^T(y - Cr_x) + \gamma^{-2}GL^T(Lr_x - \dot{z}) \quad (6.2.6a)$$

$$\frac{dr_\lambda}{dt} = F^T C^T(y - Cr_x) - \gamma^{-2}F^T L^T(Lr_x - \dot{z}) \quad (6.2.6b)$$

比较方程(6.2.6a)与滤波方程(6.1.4a),若以 $\hat{x}$ 代替 $r_x$ ,并利用式(6.1.4b),可将式(6.2.6a)及式(6.2.6b)分别变换为

$$\frac{d\hat{r}_x}{dt} = A\hat{r}_x - GC^T(y - C\hat{r}_x) \quad (6.2.7a)$$

$$\frac{d\hat{r}_\lambda}{dt} = F^T C^T(y - C\hat{r}_x) \quad (6.2.7b)$$

显然,当 $t_a \rightarrow t_b$ 时有

$$E \rightarrow 0, G \rightarrow 0, F \rightarrow I_n, r_x \rightarrow 0, r_\lambda \rightarrow 0 \quad (6.2.8)$$

其中 $I_n$ 为 $n$ 阶单位阵(本章中未特别说明的 $I$ 矩阵是具有恰当维数的单位阵)。这是微分方程(6.2.5)和(6.2.7)的初值条件。设在 $(t_a, t_b)$ 区段内, $y(t)$ 线性变化,则 $y(t)$ 可以由矩阵 $Y_0 = I_p$ 及 $Y_1 = tI_p$ 的 $2p$ 个列向量线性组合而成, $I_p$ 为 $p$ 阶单位阵。从而可将向量微分方程(6.2.7)转化为等价的矩阵微分方程。

$$\frac{dR_x}{dt} = AR_x + GC^T(Y - CR_x) \quad (6.2.9a)$$

$$\frac{dR_\lambda}{dt} = F^T C^T(Y - CR_x) \quad (6.2.9b)$$

式中 $Y$ 是由 $y(t)$ 的基底向量构成的矩阵。将 $Y_0 = I_p$ 代入式(6.2.9a)及式(6.2.9b)积分所得矩阵记作 $R_x^{(0)}(\tau), R_\lambda^{(0)}(\tau)$ ,即这两个矩阵满足

$$\frac{dR_x^{(0)}}{dt} = AR_x^{(0)} + GC^T(I_p - CR_x^{(0)}) \quad (6.2.10a)$$

$$\frac{dR_\lambda^{(0)}}{dt} = F^T C^T(I_p - CR_x^{(0)}) \quad (6.2.10b)$$

将  $Y_1 = tI_q$  代入式(6.2.9) 积分所得矩阵记作  $R_x^{(1)}(0, \tau), R_\lambda^{(1)}(0, \tau)$ , 即这两个矩阵满足

$$\frac{dR_x^{(1)}}{dt} = AR_x^{(1)} + GC^T(tI_q - CR_x^{(1)}) \quad (6.2.11a)$$

$$\frac{dR_\lambda^{(1)}}{dt} = F^TC^1(tI_q - CR_x^{(1)}) \quad (6.2.11b)$$

比较方程(6.2.5a)与 Riccati 方程(6.1.5) 可知两者仅在初值条件上有差别, 相应地方程(6.2.7a) 和滤波方程(6.1.4a) 的差别为  $G$  和  $Q$ 。上述区段混合能矩阵和向量的微分方程都可以利用区段合并公式求解。

如图 6.2 所示, 相邻区段  $(t_a, t_b)$  及  $(t_b, t_c)$  通过对  $x_b, \lambda_b$  的消元合并成区段  $(t_a, t_c)$ , 该区段的混合能矩阵  $E_c, G_c, F_c$  和向量  $r_{x_c}, r_{\lambda_c}$  由原来两个区段的混合能参数表示为

$$G_c = G_2 + F_2(G_1^{-1} + E_2)^{-1}F_2^T \quad (6.2.12a)$$

$$E_c = E_1 + F_1^T(E_2^{-1} + G_1)^{-1}F_1 \quad (6.2.12b)$$

$$F_c = F_2(I + G_1E_2)^{-1}F_1 \quad (6.2.12c)$$

$$r_{\lambda_c} = r_{\lambda_1} + F_1^T(I + E_2G_1)^{-1}(r_{\lambda_2} - E_2r_{x_1}) \quad (6.2.13a)$$

$$r_{x_c} = r_{x_2} + F_2(I + G_1E_2)^{-1}(r_{x_1} + G_1r_{\lambda_2}) \quad (6.2.13b)$$

式(6.2.13) 为向量形式, 其矩阵形式为

$$R_{\lambda_c} = R_{\lambda_1} + F_1^T(I + E_2G_1)^{-1}(R_{\lambda_2} - E_2R_{x_1}) \quad (6.2.14a)$$

$$R_{x_c} = R_{x_2} + F_2(I + G_1E_2)^{-1}(R_{x_1} + G_1R_{\lambda_2}) \quad (6.2.14b)$$

区段合并后的本征值计数公式为

$$J_{R_c}(\gamma_{\bar{u}}^{-1}) = J_{R_1}(\gamma_{\bar{u}}^{-1}) + J_{R_2}(\gamma_{\bar{u}}^{-1}) - s\{G_2\} + s\{G_1^{-1} + E_2\} \quad (6.2.15)$$

式中各量的意义见前一章中的定义。

### 6.2.2 区段混合能矩阵计算

对长度为  $\tau$  的区段矩阵  $E(\tau), G(\tau), F(\tau), R_x^{(1)}(\tau), R_\lambda^{(1)}(\tau)$  作 Taylor 级数展开, 并忽略高于 4 阶的项, 可得

$$E(\tau) \approx e_1\tau + e_2\tau^2 + e_3\tau^3 + e_4\tau^4 \quad (6.2.16a)$$

$$G(\tau) \approx g_1\tau + g_2\tau^2 + g_3\tau^3 + g_4\tau^4 \quad (6.2.16b)$$

$$F(\tau) \approx I + f_1\tau + f_2\tau^2 + f_3\tau^3 + f_4\tau^4 = I + F'(\tau) \quad (6.2.16c)$$

$$R_x^{(c)}(\tau) \approx \rho_{x01}\tau + \rho_{x02}\tau^2 + \rho_{x03}\tau^3 + \rho_{x04}\tau^4 \quad (6.2.17a)$$

$$R_\lambda^{(c)}(\tau) \approx \rho_{\lambda01}\tau + \rho_{\lambda02}\tau^2 + \rho_{\lambda03}\tau^3 + \rho_{\lambda04}\tau^4 \quad (6.2.17b)$$

显然上述公式与微分方程(6.2.5a) ~ (6.2.5c) 和(6.2.7a) ~ (6.2.7c) 的初始条件(6.2.8) 相容。由于  $R_x^{(1)}(0, \tau)$  和  $R_\lambda^{(1)}(0, \tau)$  的特殊性, 还需单独介绍其算法。将式(6.2.16a) ~ (6.2.16c) 分别代入微分方程(6.2.5a) ~ (6.2.5c), 比较同幂次项有

$$e_1 = C^T C - \gamma^{-1} L^T L$$

$$e_2 = (f_1^T e_1 + e_1 f_1)/2$$

$$e_3 = (f_2^T e_1 + e_1 f_2 + f_1^T e_1 f_1)/3$$

$$e_4 = (f_3^T e_1 + e_1 f_3 + f_2^T e_1 f_1 + f_1^T e_1 f_2)/4 \quad (6.2.18a)$$

$$g_1 = BB^T$$

$$g_2 = (Ag_1 + g_1 A^T)/2$$

$$g_3 = (Ag_2 + g_2 A^T - g_1 e_1 g_1)/3$$

$$g_4 = (Ag_3 + g_3 A^T - g_2 e_1 g_1 - g_1 e_1 g_1)/4 \quad (6.2.18b)$$

$$f_1 = A$$

$$f_2 = (Af_1 - g_1 e_1)/2$$

$$f_3 = (Af_2 - g_2 e_1 - g_1 e_1 f_1)/3$$

$$f_4 = (Af_3 - g_3 e_1 - g_2 e_1 f_1 - g_1 e_1 f_2)/4 \quad (6.2.18c)$$

将式(6.2.17a) ~ (6.2.17b) 代入微分方程(6.2.10a) ~ (6.2.10b), 比较同幂次项有

$$\rho_{x01} = 0$$

$$\rho_{x02} = g_1^T C^T / 2$$

$$\rho_{x03} = (A\rho_{x02} + g_2 C^T)/3$$

$$\rho_{x01} = (A\rho_{x03} - g_2 e_1 \rho_{x02} + g_3 C^T)/4 \quad (6.2.19a)$$

$$\rho_{\lambda c1} = C^1$$

$$\rho_{\lambda c2} = f_1^1 C^T/2$$

$$\rho_{\lambda c3} = (f_2^1 C^T - e_1 \rho_{x02})/3$$

$$\rho_{\lambda c4} = (f_3^1 C^T - f_1^1 e_1 \rho_{x02} - e_1 \rho_{x03})/4 \quad (6.2.19b)$$

由于相邻区段的  $E(\tau), G(\tau), F(\tau), R_x^{(0)}(\tau), R_\lambda^{(0)}(\tau)$  相同, 因而由  $\tau$  时段的矩阵通过执行区段合并公式  $N$  次计算  $\eta$  时段的混合能矩阵并不需要其它的步骤, 而  $R_x^{(1)}(0, \tau)$  和  $R_\lambda^{(1)}(0, \tau)$  则不同。

按照式(6.2.17a)~(6.2.17c)计算时, 因区段非常短, 该区段的一阶本征值是一个非常大的正数, 对于任何给定的有限值  $\gamma_\#^2$ , 一般有  $J_R = 0$ ; 若  $J_R \neq 0$ , 只需将  $\tau$  取更小些使  $J_R = 0$  即可。为避免丧失计算精度, 此计算阶段中的合并公式(6.2.12c)由下式代替

$$\begin{aligned} F' = & \left[ F' - \frac{1}{2}GE \right] (I + GE)^{-1} + \\ & (I - GE)^{-1} \left[ F' - \frac{1}{2}GE \right] + F' (I + GE)^{-1} F' \end{aligned} \quad (6.2.12c')$$

这是精细积分算法的关键步骤之一。

因为矩阵  $R_x^{(1)}(0, \tau)$  和  $R_\lambda^{(1)}(0, \tau)$  满足的微分方程是(6.2.11a)~(6.2.11b), 其中含有  $\tau$ , 所以相邻两个区段  $(0, \tau)$  和  $(\tau, 2\tau)$  的矩阵  $R_{x1}^{(1)}, R_{\lambda1}^{(1)}$  和  $R_{x2}^{(1)}, R_{\lambda1}^{(1)}$  是不同的。但依据叠加原理及量测  $y(t)$  在  $\eta$  区段内线性变化的假设, 也可以得到适用于  $2^N$  算法的表达式。对于  $(0, \tau)$  区段

$$R_{x1}^{(1)} = R_x^{(1)}(0, \tau); \quad R_{\lambda1}^{(1)} = R_\lambda^{(1)}(0, \tau) \quad (6.2.20a)$$

对于  $(\tau, 2\tau)$  区段

$$R_{x2}^{(1)} = \tau R_x^{(0)}(\tau) + R_x^{(1)}(0, \tau); \quad R_{\lambda1}^{(1)} = \tau R_\lambda^{(0)}(\tau) + R_\lambda^{(1)}(0, \tau) \quad (6.2.20b)$$

式(6.2.20a)~(6.2.20b)中的 $R_x^{(0)}(\tau), R_\lambda^{(0)}(\tau)$ 由式(6.2.17a)~(6.2.17b)计算,而 $R_x^{(1)}(0,\tau)$ 和 $R_\lambda^{(1)}(0,\tau)$ 则由其Taylor级数展开式

$$R_x^{(1)}(0,\tau) \approx \rho_{x11}\tau + \rho_{x12}\tau^2 + \rho_{x13}\tau^3 + \rho_{x14}\tau^4 \quad (6.2.21a)$$

$$R_\lambda^{(1)}(0,\tau) \approx \rho_{\lambda11}\tau + \rho_{\lambda12}\tau^2 + \rho_{\lambda13}\tau^3 + \rho_{\lambda14}\tau^4 \quad (6.2.21b)$$

计算。将式(6.2.21a)~(6.2.21b)代入式(6.2.11a)~(6.2.11b),比较同幂次项得上式中的系数为

$$\rho_{x11} = 0$$

$$\rho_{x12} = 0$$

$$\rho_{x13} = g_1 C^T / 3$$

$$\rho_{x14} = (A\rho_{x13} + g_1 C^T) / 4 \quad (6.2.22a)$$

$$\rho_{\lambda11} = 0$$

$$\rho_{\lambda12} = C^T / 2$$

$$\rho_{\lambda13} = f_1^T C^T / 3$$

$$\rho_{\lambda14} = (f_2^T C^T - e_1 \rho_{x13}) / 4 \quad (6.2.22b)$$

计算 $\eta$ 区段混合能矩阵 $E(\eta), G(\eta), F(\eta), R_x^{(0)}(\eta), R_\lambda^{(0)}(\eta), R_x^{(1)}(0,\eta), R_\lambda^{(1)}(0,\eta)$ 的详细过程见6.4节。

## 6.3 Riccati 微分方程和滤波

### 微分方程的精细积分

#### 6.3.1 Riccati 微分方程精细积分

由 $E(\eta), G(\eta), F(\eta)$ 可以递推计算长度为 $2\eta, 3\eta, \dots, k\eta$ 区段的混合能矩阵。若已计算了 $k\eta$ 长的区段,以它为区段1,而 $\eta$ 长区段为区段2,由式(6.2.12a)~(6.2.12c)可以计算 $(k+1)\eta$ 长区段的 $E, G, F$ 。但按此计算的 $E$ 阵是方程(6.1.5)在边界条件为0时的解。为求方程在任意边界条件时的解,需假设在 $t_0$ 处有一集中区

段,该区段的混合能矩阵为  $G_1 = Q_0, F_1 = 0, F_2 = I$ , 以已经计算出的  $k\eta$  区段作为区段 2 按公式

$$Q = G + F(Q_0^{-1} + E)^{-1}F^T \quad (6.3.1)$$

$$F_q = F(I + Q_0 E)^{-1} \quad (6.3.2)$$

进行合并,即可得  $k\eta$  处 Riccati 方程 (6.1.5) 的解及微分方程 (6.2.5c) 在初始条件变化后的解。本征值计数也应按下述公式再执行一遍以确定  $\gamma_{\text{opt}}^{-2}$

$$J_{Rq} = J_R - s\{Q_0\} + s\{Q_0^{-1} + E\} \quad (6.3.3)$$

利用文献 8 中的方法,还可以证明

$$\frac{dQ}{dt} = BB^T + AQ + QA^T - Q(C^T C - \gamma^{-2} L^T L)Q \quad (6.3.4)$$

当  $t = 0$  时,  $E = G = 0, F = I$ , 可知由式 (6.3.1) 计算得到的  $Q(0) = Q_{0,0}$

滤波系统设计时,要求 Riccati 方程的解矩阵正定。在所考虑的区间,要求在最后执行完区段合并及本征值计数后  $J_{Rq} = 0$ 。这表示可以增大  $\gamma_{\text{opt}}^{-2}$ 。如果此时  $J_{Rq} > 0$ ,则表示  $\gamma_{\text{opt}}^{-2}$  应当减小。结合二分法经过多次迭代,可以得到满足给定精度要求的临界参数  $\gamma_{\text{opt}}^{-2}$ , 详细算法可参考前一章的内容。

### 6.3.2 滤波微分方程精细积分

得到临界参数  $\gamma_{\text{opt}}^{-2}$  后,可根据要求取小于  $\gamma_{\text{opt}}^{-2}$  的值,按上面的方法求解相应参数时的 Riccati 方程,为求解滤波方程提供数据,此时不再需要进行本征值计数。

可以验证式 (6.3.2) 中的  $F_q$  满足微分方程

$$\frac{dF_q}{dt} = (A - QC^T C)F_q \quad (6.3.5)$$

且  $F_q(0) = I_n$ , 所以  $F_q$  的各列向量必定满足滤波方程 (6.1.4a) 的齐次方程,则式 (6.1.4a) 的齐次方程的解可以表示为  $F_q \hat{x}_0$ 。根据线性微分方程解的叠加原理,齐次方程的解加上零初值条件时非



齐次方程的解可构成滤波方程完整的解。仍设在  $t_0$  处有一集中区段作为区段 1, 其区段矩阵为  $G_1 = Q_0, E_1 = 0, F_1 = I, R_{x1} = 0, R_{\lambda1} = 0$ , 而  $k\eta$  长的区段作为区段 2, 按合并公式(6.2.14)有

$$R_{xq} = R_x + F_q Q_0 R_\lambda \quad (6.3.6a)$$

$$R_{\lambda q} = (I + E Q_0)^{-1} R_\lambda \quad (6.3.6b)$$

其中  $F_q$  按式(6.3.2)计算。可以证明  $R_{xq}$  满足的微分方程为

$$\frac{dR_{xq}}{dt} = (A - QC^T C)R_{xq} + QC^T Y \quad (6.3.7)$$

这与滤波方程是相同的。因为  $y$  由矩阵  $Y$  线性组合而成,  $\hat{x}(t)$  可以由  $R_{xq}$  同样线性组合。并且  $t \rightarrow 0$  时,  $R_{xq} = 0$ , 所以  $R_{xq}$  是滤波方程零初值条件的解。

混合能矩阵  $E(\eta), G(\eta), F(\eta), R_x^{(0)}(\eta), R_\lambda^{(0)}(\eta), R_x^{(1)}(0, \eta), R_\lambda^{(1)}(0, \eta)$  与量测  $y$  无关, 可以先计算存储。滤波实时计算采用单步递推算法, 将已经得到的  $t_k = k\eta$  时刻的  $Q(k)$  和  $\hat{x}(k)$  作为  $Q_0, \hat{x}_0$  进行下一步的计算。详细步骤见 6.4 节。

## 6.4 算法与算例

### 6.4.1 算法描述

A: 区段  $\eta$  的混合能矩阵和向量计算

**Step 0** 给定一个  $\gamma_{\text{max}}$

**Step 1** 由式(6.2.16a) ~ (6.2.16c), (6.2.17a) ~ (6.2.17b) 计算  $E(\tau), G(\tau), F'(\tau), R_x^{(0)}(\tau), R_\lambda^{(0)}(\tau)$  作为  $E, G, F', R_x^{(0)}, R_\lambda^{(0)}, J_R = 0$

**Step 2** 由式(6.2.21a) ~ (6.2.21b) 计算  $R_x^{(1)}(0, \tau)$  及  $R_\lambda^{(1)}(0, \tau)$

**Step 3** for ( $i = 0; i < N; i++$ ) {

{ $E_1 = E_2 = E, G_1 = G_2 = G; F'_1 = F'_2 = F'; R_{x1}^{(0)} =$

$$R_{x_2}^{(0)} = R_{xc}^{(0)}; R_{\lambda_1}^{(0)} = R_{\lambda_2}^{(0)} = R_{\lambda_c}^{(0)}$$

{三角分解  $G_1$  及  $Q_2 + G_1^{-1}$ , 按式(6.2.15) 计算  $J_{Rc}$ ,  
若  $J_{Rc} > 0$ , 则减小  $\gamma_{\text{opt}}^{-2}$  并从 Step1 重新开始}

{按式(6.2.20) 计算  $R_{x_1}^{(1)}, R_{x_2}^{(1)}, R_{\lambda_1}^{(1)}, R_{\lambda_2}^{(1)}$ ; 并执行  $\tau = \tau + \tau$ }

{按式(6.2.12a) ~ (6.2.12b)、(6.2.12c') 及  
(6.2.14a) ~ (6.2.14b) 计算新的  $E_c, G_c, F_c', R_{xc}^{(0)}$ ,  
 $R_{\lambda_c}^{(0)}$  及  $R_{x_c'}^{(1)}(0, \tau), R_{\lambda_c'}^{(1)}(0, \tau)$ }

**Step 4**  $F_c = I + F_c'$

B. Riccati 方程及滤波方程的求解

**Step 1** 给定小于  $\gamma_{\text{opt}}^{-2}$  的参数  $\gamma^{-2}$ , 计算各混合能矩阵,  $J_R = 0$

**Step 2** 按式(6.2.12a) ~ (6.2.12c), (6.2.14a) ~  
(6.2.14b) 计算以式(6.2.8) 为初值条件的各时刻混合能矩阵

**Step 3** 按式(6.2.12a) ~ (6.2.12c), (6.2.14a) ~  
(6.2.14b) 计算以  $G_1 = Q_0, E_1 = 0, F_1 = I$  为初值条件的混合能矩  
阵  $E(k), G(k), F(k)$ , 此时  $G(k)$  成为 Riccati 方程的解  $Q(k)$

**Step 4** for ( $k = 1; k \leq k_f; k++$ ) {

{以  $Q(k-1)$  作为  $Q_0$ , 按式(6.3.2) 计算从  $k-1$  到  
 $k$  的  $F_q(k)$ }

{按式(6.3.6), 分别由  $R_x^{(0)}(\eta), R_{\lambda}^{(0)}(\eta)$  和  $R_x^{(1)}(0, \eta), R_{\lambda}^{(1)}(0, \eta)$  计算从  $k-1$  到  $k$  的  $R_{xq}^{(0)}(k)$  和  $R_{xq}^{(1)}(k)$ }

{(以上计算可以离线进行)}

**Step 5** { $t = 0$  为初始点, 读取  $\hat{x}_0$ , 量测  $y_0$ }

for ( $k = 1; k \leq k_f; k++$ ) {

{读取  $F_q(k), R_{xq}^{(0)}(k), R_{xq}^{(1)}(k)$ }

{量测  $y_k$ }

{ $\hat{x}_k = F_q(k)\hat{x}_{k-1} + R_{xq}^{(0)}(k)y_{k-1} + R_{xq}^{(1)}(k)(y_k -$

$$y_{i-1})\}$$

$$\}$$

### 6.4.2 算例

#### 算例 1:

第一个算例的系统参数为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0] \quad L = [0 \quad 0.2]$$

$$G_0 = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix} \quad x_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad t_f = 25$$

首先利用精细积分法结合扩展的 Wittrick Williams 算法得到临界参数  $\gamma_{\text{opt}}^{-2} = 18.72329825$ , 然后取  $\gamma^{-2} = 0.3 \times \gamma_{\text{opt}}^{-2}$ , 由精细积分法求 Riccati 微分方程的解。图 6.3 所示为 Riccati 微分方程的解。

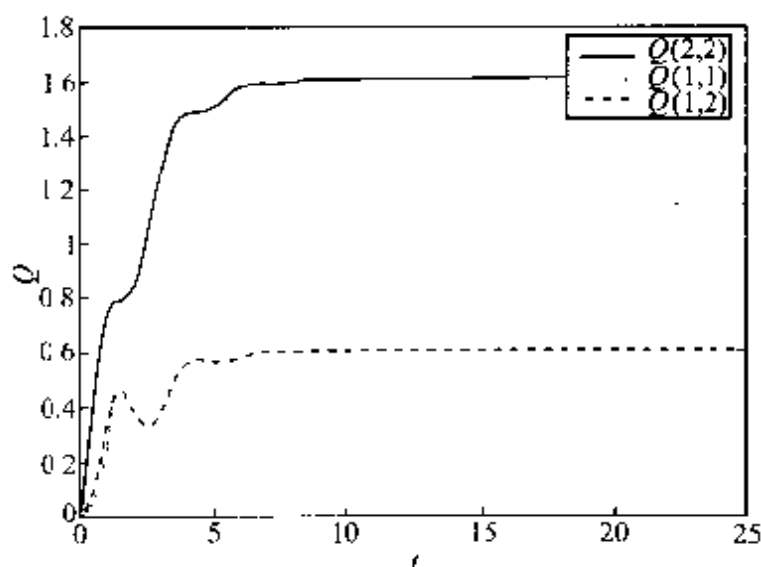


图 6.3 Riccati 微分方程的解 ( $\gamma^{-2} = 0.3 \times \gamma_{\text{opt}}^{-2}$ )

Riccati 微分方程在  $t = 25$  时的解记作  $Q_t$ , 而对应的 Riccati 代数方程的解由 Matlab 软件中的函数 `are` 求解, 记作  $Q$ 。其值分别为

$$Q_t = \begin{bmatrix} 1.138876909 & 0.607124167 \\ 0.607124167 & 1.610630415 \end{bmatrix}$$

$$Q_\infty = \begin{bmatrix} 1.138877020 & 0.607124179 \\ 0.607124179 & 1.610630434 \end{bmatrix}$$

可见两矩阵非常接近。增加  $t_f$  则微分方程的稳态解会逐渐趋近于对应代数方程的解,这也同时验证了算法的正确性。

系统状态和滤波的时间历程见图 6.4,滤波初值取  $\hat{x}_0 = 0$ 。

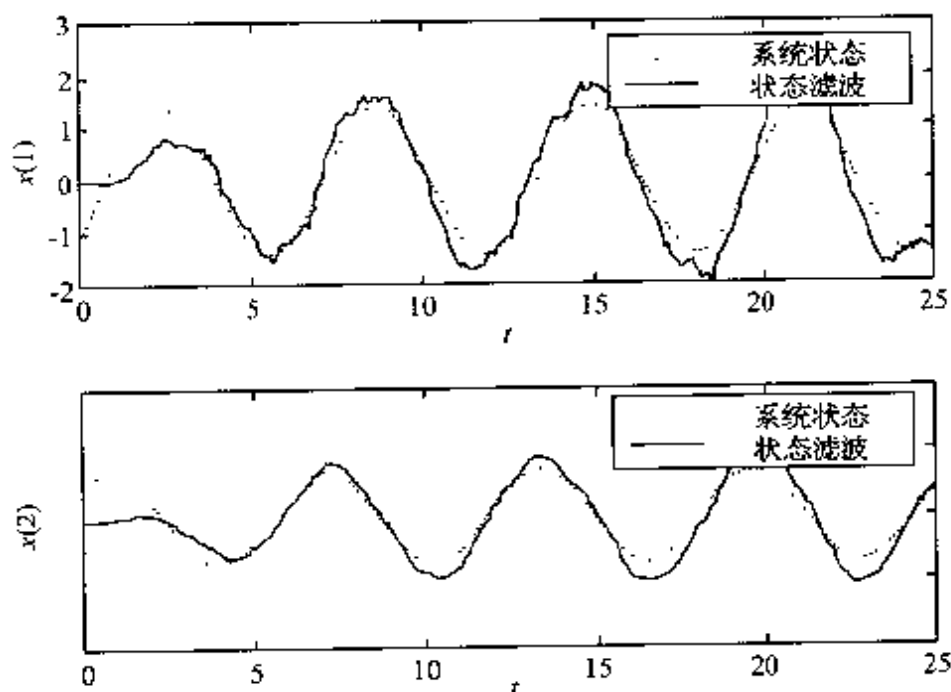


图 6.4 系统状态及其滤波 ( $r^{-2} = 0.3 \times \gamma_{\text{opt}}^{-2}$ )

现在取  $\gamma^{-2} = 0.5 \times \gamma_{\text{opt}}^{-2}$ , 按相同的方法和步骤计算, 此时 Riccati 方程的解、系统的状态及其滤波值分别在图 6.5 和图 6.6 中给出。在  $\gamma^{-2}$  接近最优值时, 滤波估计误差反而增大, 原因之一是  $H_\infty$  滤波的目标是对干扰噪声的抑制, 这里不作更多讨论。

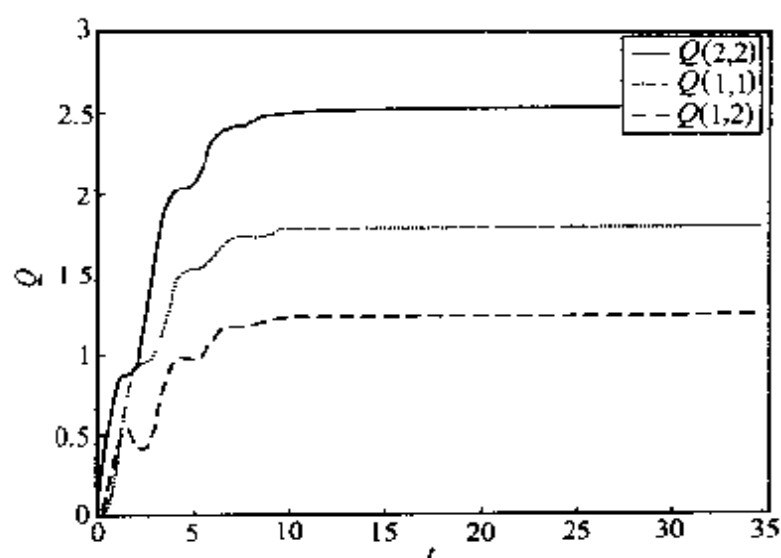


图 6.5 Riccati 微分方程的解 ( $\gamma^{-2} = 0.5 \times \gamma_{\text{opt}}^{-2}$ )

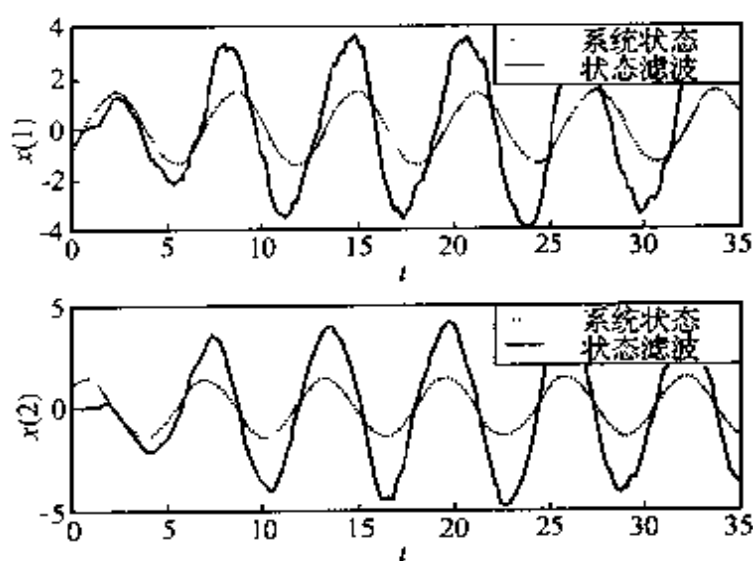


图 6.6 系统状态及其滤波 ( $\gamma^{-2} = 0.5 \times \gamma_{\text{opt}}^{-2}$ )

### 算例 2:

第二个算例的系统参数为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad C = [0 \quad 1] \quad L = [0 \quad 0.2]$$

$$G_0 = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix} \quad x_0 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad t_f = 35$$

首先计算得到临界参数为  $\gamma_{\text{opt}}^{-2} = 26.3668872$ , 然后取  $\gamma^{-2} = 0.2 \times \gamma_{\text{opt}}^{-2}$ , 利用精细积分法求解 Riccati 微分方程及滤波微分方程。图 6.7 给出了 Riccati 微分方程的解, 图 6.8 为系统状态和滤波的时间历程, 滤波初值仍然取  $\hat{x}_0 = 0$ 。

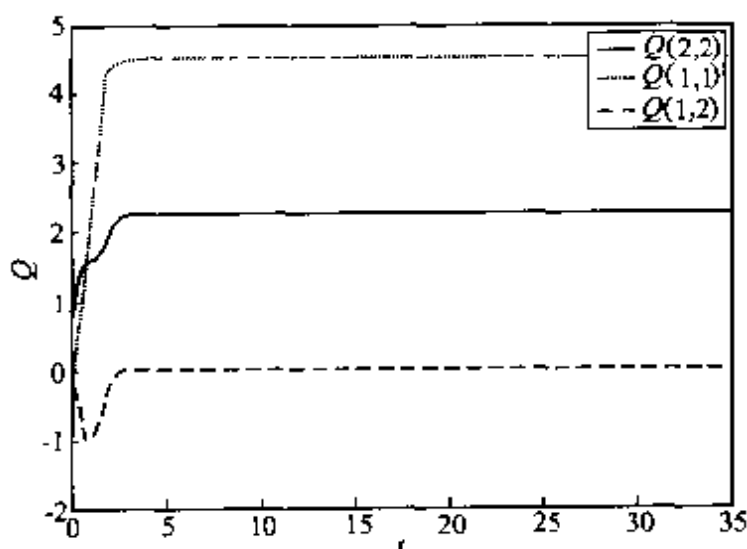


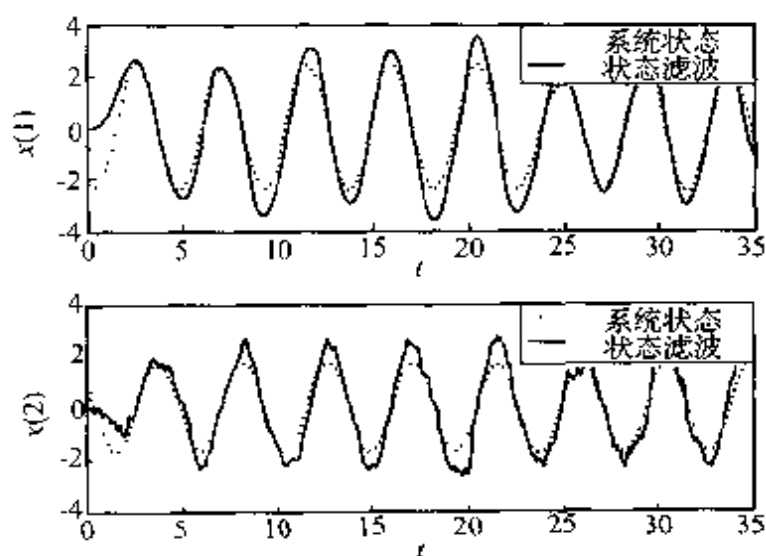
图 6.7 Riccati 微分方程的解 ( $\gamma^{-2} = 0.2 \times \gamma_{\text{opt}}^{-2}$ )

Riccati 微分方程在  $t = 35$  时的解记作  $Q_f$ , 对应 Riccati 代数方程的解记作  $Q_\infty$ , 其值分别为

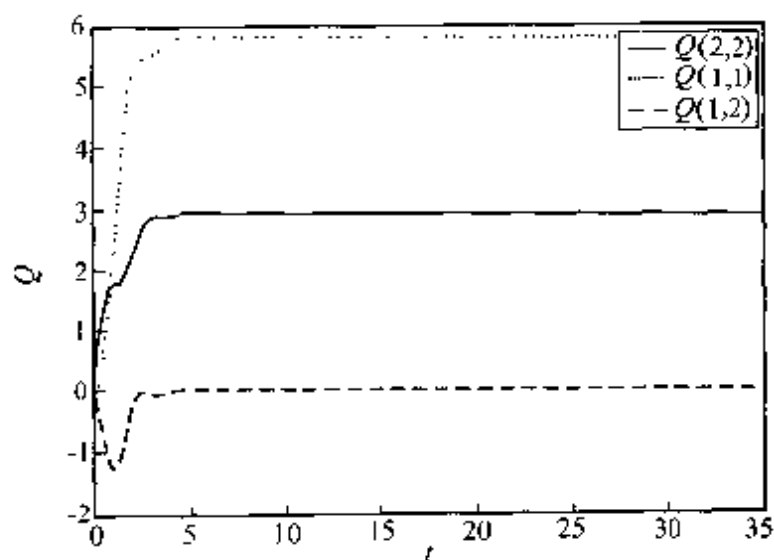
$$Q_f = \begin{bmatrix} 4.50301743010140 & 0.00000000000000 \\ 0.00000000000000 & 2.25150871505070 \end{bmatrix}$$

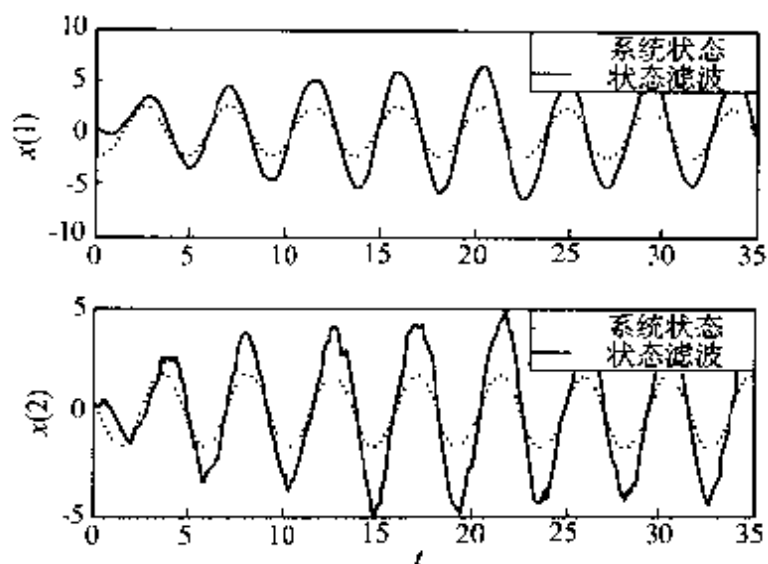
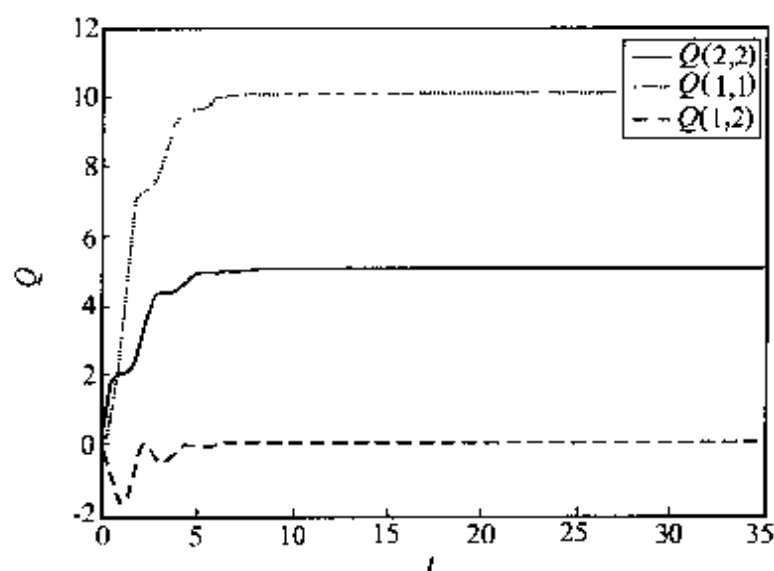
$$Q_\infty = \begin{bmatrix} 4.50301743010141 & 0.00000000000000 \\ 0.00000000000000 & 2.25150871505070 \end{bmatrix}$$

现在取  $\gamma^{-2} = 0.5 \times \gamma_{\text{opt}}^{-2}$ , 按相同的方法和步骤计算, 此时 Riccati 方程的解、系统的状态及其滤波值分别在图 6.9 和图 6.10

图 6.8 系统状态及其滤波 ( $\gamma^{-2} = 0.2 \times \gamma_{\text{opt}}^{-2}$ )

中给出。与算例 1 中结果类似, 在  $\gamma^{-2}$  接近最优值时, 滤波估计误差增大。如果取  $\gamma^{-2} = 0.8 \times \gamma_{\text{opt}}^{-2}$ , 效果更加明显, 见图 6.11 和图 6.12。

图 6.9 Riccati 微分方程的解 ( $\gamma^{-2} = 0.5 \times \gamma_{\text{opt}}^{-2}$ )

图 6.10 系统的状态及其滤波 ( $\gamma^{-2} = 0.2 \times \gamma_{opt}^{-2}$ )图 6.11 Riccati 微分方程的解 ( $\gamma^{-2} = 0.8 \times \gamma_{opt}^{-2}$ )



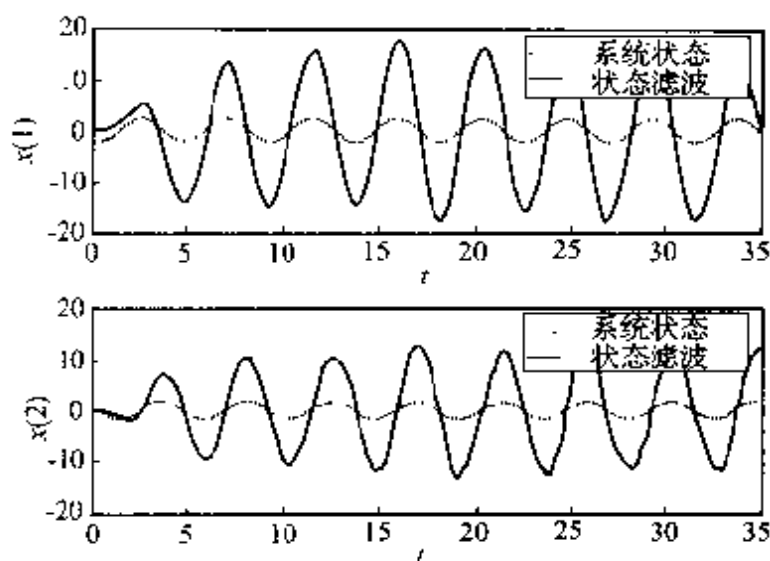


图 6.12 系统状态及其滤波 ( $\gamma^{-2} = 0.8 \times \gamma_{opt}^2$ )

本章介绍了利用精细积分方法求解  $H_\infty$  滤波问题中的 Riccati 微分方程和滤波微分方程的具体过程,类似的方法还可应用于最优跟踪问题<sup>[9]</sup>。

### 参考文献

- 1 Green M, Limbeer D J N. Linear Robust Control. New Jersey: Prentice Hall, 1995
- 2 Kenney C S, Leipnik R B. Numerical integration of the differential matrix Riccati equation. IEEE Trans Automatic Control, 1985, 30: 962~970
- 3 Bolzern P, Colaneri P, Nicolao G D.  $H_\infty$ -differential Riccati equations: convergence properties and finite escape phenomena. IEEE Trans Automatic Control, 1997, 42: 113~118
- 4 Zhong W X, Williams F W.  $H_\infty$  filtering with secure eigenvalue calculation and precise integration. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1999, 46: 1017~1030
- 5 钟万鏖. 卡尔曼-布西滤波的精细积分. 大连理工大学学报, 1999, 39

(2): 191~200

- 6 钟万勰, 欧阳华江, 邓子辰. 计算结构力学与最优控制. 大连: 大连理工大学出版社, 1993
- 7 吴志刚, 钟万勰.  $H_\infty$  滤波问题数值求解的精细积分算法, 自动化学报, 2002, 28(2): 201~208
- 8 Wu ZG, Leung AYT, Zhong WX. Finite Horizon  $H_\infty$  Filter and its  $2^N$  Algorithm, Int. J. Numerical Methods in Engineering, 2002, 53: 1195~1210
- 9 吴志刚, 钟万勰. 跟踪问题最优控制律精细积分, 航空学报, 2001, 22(2): 113~116

## 第七章 连续系统 $H_\infty$ 状态反馈控制

$H_\infty$  状态反馈控制器可以利用系统的全部状态实现控制,如图 7.1 中所示。控制器的设计目标是极小化闭环系统从干扰输入  $w$  到参考输出  $z$  的  $H_\infty$  诱导范数<sup>[1,2]</sup>。本章首先介绍  $H_\infty$  状态反馈控制问题的基本理论,然后介绍定常系统最优  $H_\infty$  诱导范数计算以及 Riccati 微分方程求解的方法,并在此基础上介绍求解闭环系统状态微分方程的精细积分方法。对有限时间  $H_\infty$  控制问题,系统的闭环状态微分方程是变系数线性微分方程,其数值求解也可以利用精细积分方法。

在有关  $H_\infty$  滤波问题的章节中已经介绍了  $\gamma_{\text{opt}}$  与 Hamilton 微分系统一阶特征值之间的联系,并给出了相应的计算方法。本章将从对偶系统的角度介绍  $H_\infty$  控制与  $H_\infty$  滤波之间的关系,阐述两者构成对偶系统时其最优  $H_\infty$  范数的等价性,这样就可以利用前面章节中的方法计算状态反馈控制系统的最优  $H_\infty$  范数。

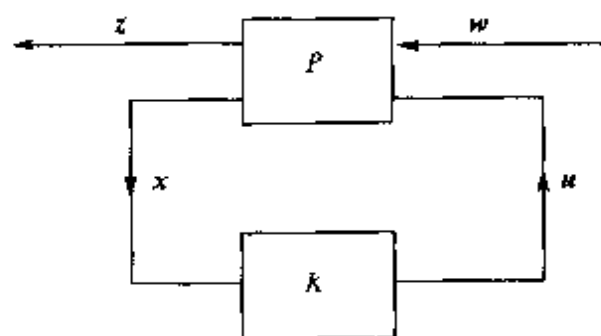


图 7.1 状态反馈控制系统

## 7.1 $H_\infty$ 状态反馈控制

考虑线性时变系统

$$\dot{x} = A(t)x + B_1(t)w + B_2(t)u, x(0) = x_0 \quad (7.1.1a)$$

$$z = C_1(t)x + D_{12}(t)u \quad (7.1.1b)$$

在有限区间  $[0, t_f]$  上的控制系统设计问题。其中  $x$  为  $n$  维状态向量  $w \in L_2[0, t_f]$ ,  $w$  为  $l$  维外扰向量,  $u$  为  $m$  维控制向量,  $z$  为  $p$  维输出向量,  $p \geq m$ , 且  $D_{12}^T D_{12} = I_m$ ,  $I_m$  为  $m$  维单位阵。参考输出式 (7.1.1b) 中包含了状态变量的线性组合及控制变量的线性组合, 通过对控制变量的变换, 可以将式 (7.1.1b) 化为下列形式

$$z = \begin{bmatrix} C(t)x \\ D(t)u \end{bmatrix} \quad (7.1.1c)$$

其中  $D^T(t)D(t) = I_p$ ,  $H_\infty$  控制的目的是寻找线性状态反馈控制

$$u = Kx \quad (7.1.2)$$

该控制器使闭环系统的  $H_\infty$  诱导范数

$$\| \mathcal{G}_{zw} \|_{x_0, 0, t_f}^2 = \sup_{w(t) \in L_2[0, t_f], w \neq 0} \frac{\int_0^{t_f} z^T z dt + x^T(t_f) S_f x(t_f)}{\int_0^{t_f} w^T w dt} < \gamma^2 \quad (7.1.3)$$

其中  $S_f \geq 0$ ,  $\gamma$  是给定的正数。满足上述条件的控制器称为次优  $H_\infty$  控制器,  $\gamma$  值的下界称为系统的最优  $H_\infty$  诱导范数, 记作  $\gamma_{opt}$ 。设  $\varepsilon > 0$ , 上述性能指标还可以表示为

$$\| z \|_2^2 - \gamma^2 \| w \|_2^2 + x^T(t_f) S_f x(t_f) \leq -\varepsilon \| w \|_2^2 \quad (7.1.4)$$

**定理 7.1<sup>[1]</sup>** 当且仅当 Riccati 微分方程

$$\begin{aligned} -\dot{S}(t) &= A^T(t)S(t) + S(t)A(t) + C^T(t)C(t) - \\ &\quad S(t)[B_2(t)B_2^T(t) - \gamma^{-2}B_1(t)B_1^T(t)]S(t), \end{aligned}$$

$$S(t_f) = S_f \quad (7.1.5)$$

在区间 $[0, t_f]$ 上存在半正定解时, 系统(7.1.1)存在满足性能指标的控制器。线性状态反馈控制

$$u = -B_2^T(t)S(t)x \quad (7.1.6a)$$

是满足条件的一个解, 并称之为中心控制器(Central controller)。而外扰向量为

$$w = \gamma^{-2}B_1(t)S(t)x \quad (7.1.6b)$$

以此为基础, 通过线性分式变换(linear fractional transformation)就可以构造出所有满足性能指标条件的控制器。□

当系统参数为定常值, 且 $t_f \rightarrow \infty$ 时, 则成为定常系统的无限时间稳态控制问题。此时系统可表示为

$$\dot{x} = Ax + B_1w + B_2u, x(0) = x_0 \quad (7.1.7a)$$

$$z = \begin{bmatrix} Cx \\ Du \end{bmatrix} \quad (7.1.7b)$$

并且 $(A, B_2)$ 可控,  $(A, C)$ 可观。

**定理 7.2<sup>[1]</sup>** 当且仅当 Riccati 代数方程

$$A^T S + SA - C^T C - S(B_2 B_2^T - \gamma^{-2} B_1 B_1^T)S = 0 \quad (7.1.8)$$

存在半正定解, 且矩阵 $A - (B_2 B_2^T - \gamma^{-2} B_1 B_1^T)S$ 的特征值实部为负时, 系统(7.1.7)存在满足条件的控制器。线性状态反馈控制

$$u = -B_2^T Sx \quad (7.1.9a)$$

是满足条件的一个解。此时外扰向量为

$$w = \gamma^{-2} B_1^T Sx \quad (7.1.9b)$$

同样, 对于 $\gamma > \gamma_{opt}$ , 可以用参数化方法给出所有满足性能指标的控制器。□

上述关于 $H_\infty$ 状态反馈控制器的定理给出的实际上是次优 $H_\infty$ 控制器, 通过不断减小 $\gamma$ 可以逐渐逼近最优 $H_\infty$ 控制器, 直至次优 $H_\infty$ 控制器不存在为止,  $\gamma$ 值的下界则记作 $\gamma_{opt}^{[2]}$ 。因此确定最

优  $H_\infty$  诱导范数  $\gamma_{\text{opt}}$  是控制系统设计中的一个关键环节。在关于  $H_\infty$  滤波问题的章节中已经介绍了  $H_2$  滤波器最优诱导范数的计算方法。这些方法同样可以用于这里的  $\gamma_{\text{opt}}$  计算,其理论依据在文献 3 中已有阐述。本章则从对偶系统的角度建立  $\gamma_{\text{opt}}$  与 Hamilton 微分系统特征值的关系,进而介绍有关的计算问题。

## 7.2 对偶系统

考虑下列线性时变因果系统

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (7.2.1a)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \quad (7.2.1b)$$

其对偶系统定义为

$$\dot{\tilde{x}}(\tau) = A^T(t_f - \tau)\tilde{x}(\tau) + C^T(t_f - \tau)\tilde{y}(\tau) \quad (7.2.2a)$$

$$\tilde{u}(\tau) = B^T(t_f - \tau)\tilde{x}(\tau) + D^T(t_f - \tau)\tilde{y}(\tau) \quad (7.2.2b)$$

对偶系统(7.2.2)与原系统(7.2.1)的状态转移矩阵,脉冲响应函数,2-范数及  $\infty$ -范数之间分别存在下列等价关系<sup>[2]</sup>:

$$\tilde{\Phi}(t, \tau) = \Phi^T(t_f - \tau, t_f - t) \quad (7.2.3a)$$

$$\tilde{g}(t, \tau) = g^T(t_f - \tau, t_f - t) \quad (7.2.3b)$$

$$\|g\|_{2,[0,t_f]} = \|\tilde{g}\|_{2,[0,t_f]} \quad (7.2.3c)$$

$$\|g\|_{\infty,[0,t_f]} = \|\tilde{g}\|_{\infty,[0,t_f]} \quad (7.2.3d)$$

对于定常系统,当  $t_f \rightarrow \infty$  时式(7.2.3c)和(7.2.3d)仍然成立<sup>[2]</sup>。这里简单解释一下定常对偶系统  $\infty$ -范数之间的关系,系统(7.2.1)的传递函数为

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (7.2.4)$$

将上式转置可得其对偶系统的传递函数

$$G^1(s) = B^1(sI - A^1)^{-1}C^1 + D^1 = \hat{G}(s) \quad (7.2.5)$$

对偶系统的  $\infty$ -范数为

$$\begin{aligned} \|\hat{G}(s)\|_{\infty} &= \sup_{\omega} \{\sigma[\hat{G}(j\omega)]\} = \sup_{\omega} \{\sigma[G^1(j\omega)]\} = \\ &= \sup_{\omega} \{\sigma[G(j\omega)]\} = \|G(s)\|_{\infty} \end{aligned} \quad (7.2.6)$$

所以互为对偶系统的  $\infty$ -范数相等。

现在考虑下列线性系统的滤波问题

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)w(t) \quad (7.2.7a)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)w(t) \quad (7.2.7b)$$

$$e(t) = L(t)x(t) - \hat{z}(t) \quad (7.2.7c)$$

$$\hat{z}(t) = \mathcal{Z}\{y(t)\} \quad (7.2.7d)$$

式(7.2.7d)中的  $\mathcal{Z}\{\cdot\}$  表示线性滤波器, 且  $D(t)B^T(t) = 0$ ,  $D(t)D^T(t) = I$ , 上述系统的对偶系统定义为

$$\dot{\tilde{x}}(\tau) = A^T(\tau)\tilde{x}(\tau) + C^T(\tau)\tilde{y}(\tau) + L^T(\tau)\tilde{e}(\tau) \quad (7.2.8a)$$

$$\tilde{w}(\tau) = B^T(\tau)\tilde{x}(\tau) + D^T\tilde{y}(\tau) \quad (7.2.8b)$$

$$\tilde{\tilde{z}}(\tau) = -\tilde{e}(\tau) \quad (7.2.8c)$$

$$\tilde{y}(\tau) = \tilde{\mathcal{Z}}\{\tilde{\tilde{z}}(\tau)\} \quad (7.2.8d)$$

若将  $\tilde{y}(\tau)$  看作控制输入, 则系统(7.2.8)可以认为是一个控制系统, 通过设计  $H_2$  控制器  $\tilde{\mathcal{Z}}\{\cdot\}$ , 使得

$$J = \|G_{\tilde{w}\tilde{e}}\|_{2, [0, t_f]} = \sup_{\tilde{e} \in L_2[0, t_f], \tilde{e} \neq 0} \frac{\|\tilde{w}\|_{2, [0, t_f]}}{\|\tilde{e}\|_{2, [0, t_f]}} < \gamma \quad (7.2.9)$$

显然此控制问题与问题(7.1.1)非常相似, 还应注意到  $(D^T)^T B^T = 0$ ,  $(D^T)^T D^T = I$ 。另外, 对偶系统的初始条件亦假设为 0。更多关于对偶系统的介绍见文献 2。

回顾关于  $H_2$  滤波系统的最优  $H_2$  范数与相应的 Hamilton 微分系统特征值之间的联系, 如果采取与通常的程序相反的步骤, 将  $H_2$  反馈控制系统变换为其对偶系统, 即  $H_2$  滤波系统, 则两个

Riccati 方程也是对偶的。这样第五章中的有关结论和方法也同样适用于  $H_2$  状态反馈控制系统, 这里不再重复。

## 7.3 最优 $H_\infty$ 范数计算及闭环系统微分方程求解

### 7.3.1 最优 $H_\infty$ 范数与广义 Rayleigh 商特征值

无限时间  $H_\infty$  控制系统设计问题已经有相当多的求解方法<sup>[4~5]</sup>, 有限时间  $H_\infty$  控制系统设计则相对要困难一些, 因为系统设计中需要判断 Riccati 微分方程解的存在性, 并确定最优  $H_\infty$  范数  $\gamma_{\text{opt}}$ 。第五章中针对  $H_\infty$  滤波问题详细介绍了最优  $H_\infty$  范数与相关的 Hamilton 微分系统特征值之间的关系, 其特征值还可以表示成广义 Rayleigh 商的驻值。

由于第五章中已经详细介绍了相关的理论, 所以本章将重点讨论线性定常系统(7.1.7)的  $H_\infty$  控制器设计问题。定理 7.1 给出了有限时间  $H_\infty$  控制器存在的条件和具体的形式。对于系统(7.1.7), 通过引入拉格朗日乘子  $\lambda$ , 利用变分法也可得到

$$u = -B_2^T \lambda \quad (7.3.1a)$$

$$w = \gamma^{-2} B_1^T \lambda \quad (7.3.1b)$$

及对偶方程组

$$\dot{x} = Ax - (B_2 B_2^T - \gamma^{-2} B_1 B_1^T) \lambda \quad (7.3.2a)$$

$$\dot{\lambda} = -C^T C x - A^T \lambda \quad (7.3.2b)$$

其边界条件为

$$x(0) = x_0 \quad (7.3.3a)$$

$$\lambda_{t_f} = S_f x(t_f) = S_f x_{t_f} \quad (7.3.3b)$$

这是一个 Hamilton 微分方程边值问题。若其中  $\gamma^{-2}$  的取值使得方程(7.3.2a)、(7.3.2b)存在满足边界条件(7.3.3)的非平凡解, 则



$\gamma^{-2}$  称为该边值问题的特征值。

$H_1$  控制器作用下闭环系统的状态方程为

$$\dot{x} = [A + (B_2 B_2^T - \gamma^{-2} B_1 B_1^T) S] x \quad (7.3.4)$$

求解这一具有时变项  $S$  的线性微分方程, 即可得到闭环系统状态的变化规律。

Hamilton 微分方程边值问题(7.3.2)、(7.3.3) 与变分驻值问题

$$\delta \left\{ \int_0^{t_f} [\lambda^T \dot{x} - H(x, \lambda)] dt - \frac{1}{2} x_{t_f}^T S_{t_f} x_{t_f} \right\} = 0 \quad (7.3.5)$$

等价。上式中  $H(x, \lambda)$  的定义为

$$H(x, \lambda) = \lambda^T A x + \frac{1}{2} x^T C^T C x - \frac{1}{2} \lambda^T (B_2 B_2^T - \gamma^{-2} B_1 B_1^T) \lambda \quad (7.3.6)$$

由式(7.3.5) 也可以导出对偶方程(7.3.2) 及边界条件(7.3.3)。将变分式(7.3.5) 中的参数  $\gamma^{-2}$  分离出来可表示为如下形式

$$\gamma^{-2} = \delta \frac{\Pi_1}{\Pi_2} \quad (7.3.7)$$

其中

$$\Pi_1 = \int_0^{t_f} \left[ \lambda^T \dot{x} - \lambda^T A x - \frac{1}{2} x^T C^T C x + \lambda^T B_2 B_2^T \lambda \right] dt - \frac{1}{2} x_{t_f}^T S_{t_f} x_{t_f} \quad (7.3.8a)$$

$$\Pi_2 = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \lambda^T B_1 B_1^T \lambda dt \quad (7.3.8b)$$

式(7.3.7) 是广义 Rayleigh 商驻值的形式, 与第五章中  $H_1$  滤波系统的结果是类似的。广义 Rayleigh 商(7.3.7) 的最小特征值是使 Riccati 微分方程正定解存在的临界参数  $\gamma_{\text{opt}}^{-2}$ , 而  $\gamma_{\text{opt}}$  是闭环系统的最优  $H_\infty$  诱导范数。由于微分方程(7.3.4) 的积分也可纳入精细积分求解体系, 所以可在完成  $H_1$  控制系统设计的同时计算闭环系统的初值响应。

下面将首先定义相应的区段混合能,然后介绍求解 Riccati 微分方程及计算最优  $H_\infty$  范数的方法,最后给出闭环系统微分方程积分的具体步骤。

### 7.3.2 区段混合能及区段合并

求解微分方程需要将其定义区间离散化,本文中所说的区段就是离散化后的区间。根据式(7.3.5)及(7.3.6),可以对图 7.2 中的区段  $(t_a, t_b)$  定义下列形式的区段混合能<sup>[3]</sup>

$$V(x_a, \lambda_b) = \lambda_b^T x_b - \int_{t_a}^{t_b} [\lambda^T \dot{x} - H(x, \lambda)] dt \quad (7.3.9)$$

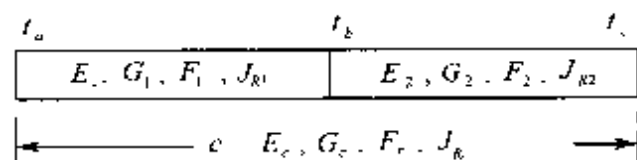


图 7.2 区段合并

其中  $0 \leq t_a \leq t_b \leq t_f$ ,  $x, \lambda$  满足微分方程(7.3.2), 给定两端条件  $x(t_f) = x_a, \lambda(t_b) = \lambda_b$ , 则可由微分方程确定区段内的  $x, \lambda$ 。

由混合能的定义可知,  $V(x_a, \lambda_b)$  可以表达成  $x_a$  与  $\lambda_b$  的二次式

$$V(x_a, \lambda_b) = \lambda_b^T F x_a + \frac{1}{2} x_a^T E x_a - \frac{1}{2} \lambda_b^T G \lambda_b \quad (7.3.10)$$

其中  $E, G, F$  为  $n \times n$  阶的区段混合能矩阵, 而且  $E^T = E, G^T = G$ 。这三个只和系统矩阵有关的矩阵决定了此二次式, 并且矩阵  $E, G, F$  与系统矩阵  $A, B_1, B_2, C$  和  $D$  之间的关系可以用下面的微分方程表达<sup>[3]</sup>

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= C^T C + A^T E + E A - E(B_2 B_2^T - \gamma^{-2} B_1 B_1^T) E = \\ &F^T C^T C F \end{aligned} \quad (7.3.11a)$$

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= F(B_2 B_2^T - \gamma^{-2} B_1 B_1^T) F^T = \\ &(B_2 B_2^T - \gamma^{-2} B_1 B_1^T) + A G + G A^T - G C^T C G \end{aligned} \quad (7.3.11b)$$

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} = F[A - (B_2 B_2^T - \gamma^{-2} B_1 B_1^T) E^{-1}] = \\ (A - GC^T C)F \end{aligned} \quad (7.3.11c)$$

当  $t_b \rightarrow t_a$  时

$$E \rightarrow 0, G \rightarrow 0, F \rightarrow I \quad (7.3.12)$$

这是微分方程组(7.3.11)的初值条件,其中  $I$  是单位矩阵。

用常规差分方法求解区段混合能矩阵所满足的微分方程(7.3.11)一般来讲比较困难,由于方程中有参数  $\gamma^{-2}$  的影响,还需判断正定解的存在性。但是按照精细积分方法,相邻区段合并后的新区段混合能矩阵可以通过区段合并消元得到,递推进行,可以计算整个区间内不同长度区段的混合能矩阵,这些矩阵就是微分方程在相应时刻的数值解。

图 7.2 所示相邻的两个区段  $(t_a, t_b)$  及  $(t_b, t_c)$  可以通过对  $x_b, \lambda_b$  的消元合并成区段  $(t_a, t_c)$ ,其相应的混合能矩阵  $E, G, F$  可以由原来区段的混合能矩阵按下列合并消元公式计算

$$E_c = E_1 + F_1^T (E_2^{-1} + G_2)^{-1} F_1 \quad (7.3.13a)$$

$$G_c = G_2 + F_2 (G_1^{-1} + E_2)^{-1} F_2^T \quad (7.3.13b)$$

$$F_c = F_2 (I + G_1 E_2)^{-1} F_1 \quad (7.3.13c)$$

上述公式在文献 6 中有详细的介绍,并广泛用于解决 LQ 控制<sup>[8~9]</sup>、Kalman 滤波<sup>[10]</sup>等问题。与 LQ 控制问题不同, $H_\infty$  控制问题需要确定最优  $H_\infty$  范数  $\gamma_{\text{opt}}, \gamma_{\text{opt}}^{-2}$  是广义 Rayleigh 商的一阶特征值。一个区段除了用矩阵  $E, G, F$  表示其两端特性外(即在  $t_a, t_b, t_c$  等时刻的值),还应当用特征值表达其内部特性。此区段的 Rayleigh 商特征值也按照式(7.3.7)定义,所不同的是那里的区段是整个区间。如何确定区段合并后新区段的特征值当然是关键问题,这里仍然用区段特征值计数的方法来解决,即根据扩展 Wittrick-Williams 算法确定区段合并后的特征值计数,通过区段的逐步合并得到整个区间的特征值计数,而这个计数结合二分法

迭代搜索就可以计算最小特征值。所谓特征值计数是指:对于给定值  $\gamma_{\pi}^{-2}$ , 一个区段在其两端分别给定  $x_a = 0, \lambda_b = 0$  的条件下, 区段特征值小于  $\gamma_{\pi}^{-2}$  的数目, 并用  $J_R(\gamma_{\pi}^{-2})$  来表示这一计数。显然  $J_R$  是  $t_a, t_b$  的函数, 所以应当记作  $J_R(\gamma_{\pi}^{-2}, t_a, t_b)$ , 这里省略了后两项。本章中区段 1, 2 及  $c$  小于  $\gamma_{\pi}^{-2}$  的特征值个数分别用  $J_{R1}(\gamma_{\pi}^{-2}), J_{R2}(\gamma_{\pi}^{-2}), J_{Rc}(\gamma_{\pi}^{-2})$  表示。区段合并后的特征值计数公式为

$$J_{Rc}(\gamma_{\pi}^{-2}) = J_{R1}(\gamma_{\pi}^{-2}) + J_{R2}(\gamma_{\pi}^{-2}) - s\{E_2\} + s\{E_2^{-1} + G_1\} \quad (7.3.14)$$

式中的  $s\{M\}$  表示将矩阵  $M$  三角分解为  $M = LDL^T$  后,  $D$  阵中对角线元素小于 0 的个数。当  $t_b \rightarrow t_a$  时, 对于给定的有限值  $\gamma_{\pi}^{-2}$ , 显然有  $J_R(\gamma_{\pi}^{-2}) = 0$ 。上述公式的证明可参考文献 7 及本书的第二、三章。

### 7.3.3 最优 $H_{\infty}$ 范数计算及 Riccati 方程精细积分

很明显, 将方程 (7.3.11a) 时间逆向就是 Riccati 方程, 仅在边界条件上有差别。求此方程的数值解并计算  $\gamma_{\text{opt}}^{-2}$  需利用区段合并公式 (7.3.13) 和特征值计数公式 (7.3.14) 来进行。首先选择一个参数  $\gamma_{\pi}^{-2}$ , 并设定步长  $\eta$  及需进行计算的时间点

$$t_0 = 0, t_1 = \eta, t_2 = 2\eta, \dots, t_k = k\eta, \dots, t_l = k_l\eta \quad (7.3.15)$$

求 Riccati 方程在这些时刻的数值解, 就是求长度分别为  $\eta, 2\eta, \dots, k\eta, \dots$  的区段混合能矩阵。同时还要计算各区段的特征值计数, 因为需要根据特征值计数来确定最优  $H_{\infty}$  范数。

进行上述计算首先需要有长度为  $\eta$  的区段的混合能矩阵  $E, G, F$ , 这当然可以通过对微分方程 (7.3.11) 进行积分得到。按照精细积分法, 需进一步将  $\eta$  划分为  $2^N$  段, 一般选用  $N = 20$ , 则  $2^N = 1048576$ , 于是步长成为

$$\tau = \eta/2^N \approx \eta \cdot 10^{-6} \quad (7.3.16)$$

此时再对区段混合能矩阵作 Taylor 级数展开, 计算时一般保留到  $\tau^4$ , 即

$$E(\tau) \approx e_1\tau + e_2\tau^2 + e_3\tau^3 + e_4\tau^4 \quad (7.3.17a)$$

$$G(\tau) \approx g_1\tau + g_2\tau^2 + g_3\tau^3 + g_4\tau^4 \quad (7.3.17b)$$

$$F(\tau) \approx I + f_1\tau + f_2\tau^2 + f_3\tau^3 + f_4\tau^4 = I + F'(\tau) \quad (7.3.17c)$$

显然这些级数展开式与微分方程(7.3.11)的初始条件(7.3.12)是相容的。为求上述公式中的系数,将式(7.3.17)代入微分方程(7.3.11),对比同幂次项可得

$$\begin{aligned} e_1 &= C^T C \\ e_2 &= (f_1^T e_1 + e_1 f_1)/2 \\ e_3 &= (f_2^T e_1 + e_1 f_2 + f_1^T e_1 f_1)/3 \\ e_4 &= (f_3^T e_1 + e_1 f_3 + f_1^T e_1 f_1 + f_1^T e_1 f_2)/4 \end{aligned} \quad (7.3.18a)$$

$$\begin{aligned} f_1 &= A \\ f_2 &= (Af_1 - g_1 e_1)/2 \\ f_3 &= (Af_2 - g_2 e_1 - g_1 e_1 f_1)/3 \\ f_4 &= (Af_3 - g_3 e_1 - g_2 e_1 f_1 - g_1 e_1 f_2)/4 \end{aligned} \quad (7.3.18b)$$

$$\begin{aligned} g_1 &= B_2 B_2^T - \gamma_n^{-2} B_1 B_1^T \\ g_2 &= (Ag_1 + g_1 A^T)/2 \\ g_3 &= (Ag_2 + g_2 A^T - g_1 e_1 g_1)/3 \\ g_4 &= (Ag_3 + g_3 A^T - g_2 e_1 g_1 - g_1 e_1 g_2)/4 \end{aligned} \quad (7.3.18c)$$

由于式(7.3.17)中 $\tau$ 所代表的区段非常短,所以对于计算中指定的有限正数 $\gamma_n^{-2}$ ,必然有该区段的特征值计数 $J_R(\gamma_n^{-2}) = 0$ ,这样就得到了长度为 $\tau$ 的区段混合能矩阵表达式和特征值计数,进而可以按照2<sup>4</sup>算法计算长为 $\eta$ 的区段混合能矩阵。为保持计算精度,在这一计算阶段区段合并公式要用下列形式

$$E_c = E + (I + F')^1 (E^{-1} + G)^{-1} (I + F') \quad (7.3.19a)$$

$$G_c = G + (I + F')^T (G^{-1} + E)^{-1} (I + F') \quad (7.3.19b)$$

$$F'_c = (F' - GE/2)(I + GE)^{-1} + (I + GE)^{-1} (F' - GE/2) +$$

$$F'(I + GE)^{-1}F' \quad (7.3.19c)$$

事实上这是精细积分法中的关键步骤之一<sup>[6]</sup>。

得到  $E(\eta), G(\eta), F(\eta)$  后,就可递推计算长度为  $2\eta, 3\eta, \dots, k\eta$  区段的混合能矩阵。设已计算了  $k\eta$  长的区段,以它为区段 2,而  $\eta$  长的区段为区段 1,由(7.3.13)就可以算出长度为  $(k+1)\eta$  的区段的混合能矩阵,并可逐步递推直至  $k\eta$ 。由(7.3.12)可知此时的  $E$  阵并不满足 Riccati 方程的边界条件。仍然按区段合并的思想,设在  $t_i$  处有一集中区段,该区段的混合能矩阵分别为  $E_2 = S_i, F_2 = I, G_2 = 0$ ,以前面计算的任一区段作为区段 1 与之进行合并消元。计算 Riccati 方程(7.1.5)在  $k\eta$  时刻的解时,取区段 1 的长度为  $(k_i - k)\eta$ ,按公式

$$S = E + F'(S_i^{-1} + G)^{-1}F = E + F^T(I + S_i G)^{-1}S_i F \quad (7.3.20)$$

$$F_p = (I + GS_i)^{-1}F \quad (7.3.21)$$

$$G_p = (G^{-1} + S_i)^{-1} \quad (7.3.22)$$

进行合并,即可得到  $k\eta$  时刻 Riccati 方程的解以及另外两个微分方程(7.3.11b), (7.3.11c) 在初始条件变化后的解。而特征值计数自然也要按下面的公式再执行一遍

$$J_{RS} = J_{R\infty} - s\{S_i\} + s\{S_i^{-1} + G\} \quad (7.3.23)$$

上述公式的证明在第二章中已经给出。

令  $d/d\tau = -d/dt$ ,对(7.3.20)两边求导,并利用恒等式

$$\frac{d}{dt}(X^{-1}) = -X^{-1}\dot{X}X^{-1} \quad (7.3.24)$$

及  $E, G, F$  所满足的微分方程(7.3.13a) ~ (7.3.13c),可以证明

$$\frac{dS}{dt} = -A^T S - SA - C^T C + S(B_2 B_2^T - \gamma^{-2} B_1 B_1^T)S \quad (7.3.25)$$

显然这与 Riccati 微分方程(7.1.5)一致,注意到当  $t = t_i$  时,  $E = G$

$= \mathbf{0}, F = I$ , 按照式(7.3.20) 计算还可满足 Riccati 微分方程的末端条件  $S(t_f) = S_f$ , 所以根据式(7.3.20) 得到的  $S(t)$  就是 Riccati 方程的解。

基于上述讨论, 可以按照下面的步骤求解 Riccati 微分方程: 首先按初始条件(7.3.12) 求解式(7.3.11a) ~ (7.3.11c), 然后用式(7.3.20) 计算末端条件为  $S_f$  时 Riccati 微分方程的解。因为末端条件  $S_f$  最后才考虑, 当需要修改  $S_f$  进行重新计算时, 前半部分不用重算, 可以减少许多计算工作量。

控制系统设计时, 一般要求 Riccati 方程的解矩阵正定。对于所考虑的时间区间, 要求在最后执行完区段合并及特征值计数后  $J_{KSc} = 0$ 。这表示所给定的  $\gamma_{\pi}^{-2}$  是次优参数, 即  $\gamma_{\pi}^{-2}$  小于一阶特征值  $\gamma_{opt}^{-2}$ , 可以增大。如果此时  $J_{KSc} > 0$ , 则表示  $\gamma_{\pi}^{-2}$  应当减小。通过多次二分法迭代, 可以得到满足精度要求的临界参数  $\gamma_{\pi}^{-2}$ 。

#### 7.3.4 闭环系统微分方程精细积分

将 Riccati 微分方程的解代入式(7.3.4) 即构成闭环系统, 求解这一变系数微分方程组就可以得到闭环系统的初值响应。一般的变系数微分方程组无法用精细积分法求解, 而方程(7.3.4) 有其特殊性, 可以用精细积分法求解。

考察式(7.3.20) 中  $F_p$  所满足的微分方程。令  $d/d\tau = -d/dt$ , 并利用恒等式(7.3.24), 可以证明,

$$\frac{dF_p}{dt} = -F_p[A - (B_2 B_2^T - \gamma^{-2} B_1 B_1^T)S] \quad (7.3.26)$$

进而还可以导出

$$\frac{d}{dt}(F_p^{-1}) = [A - (B_2 B_2^T - \gamma^{-2} B_1 B_1^T)S]F_p^{-1} \quad (7.3.27)$$

这个微分方程就是式(7.3.4) 的矩阵形式。通过引入向量

$$\xi_0 = F_p(0)x_0 \quad (7.3.28)$$

可以将  $x(t)$  表示为

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}_p^{-1}(t)\xi_0 \quad (7.3.29)$$

这样就不需再通过对方程(7.3.4)积分得到 $\mathbf{x}(t)$ ,只需由矩阵计算便可完成。因为 $\mathbf{F}_p(t)$ 是状态转移矩阵,可按照合并公式计算,所以按式(7.3.29)计算的 $\mathbf{x}(t)$ 也是精细积分解。

## 7.4 算法与算例

### 7.4.1 算法描述

A: 计算区段 $\eta$ 的混合能矩阵 $\mathbf{E}(\eta), \mathbf{G}(\eta), \mathbf{F}(\eta)$

**Step 0** 选定 $\gamma_n^{-2}$

**Step 1** 由式(7.3.17a) ~ (7.3.17c) 计算 $\mathbf{E}(\tau), \mathbf{G}(\tau), \mathbf{F}'(\tau)$ , 并令其分别等于 $\mathbf{E}_c, \mathbf{G}_c, \mathbf{F}'_c$ , 且 $J_{Rc} = 0$

**Step 2** for ( $k = 0; k < k_f; k++$ ) {  
 $\{\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_c; \mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_2 = \mathbf{G}_c; \mathbf{F}'_1 = \mathbf{F}'_2 = \mathbf{F}'_c\}$   
 $\{\text{三角分解 } \mathbf{E}_2 \text{ 及 } \mathbf{E}_2^{-1} + \mathbf{G}_1, \text{按式(7.3.14) 计算 } J_{Rc},$   
 若 $J_{Rc} > 0$ , 应减小 $\gamma_n^{-2}$ 并重新由 Step 1 开始}  
 $\{\text{由式(7.3.19a) ~ (7.3.19c) 计算 } \mathbf{E}_c, \mathbf{G}_c, \mathbf{F}'_c\}$   
 }

**Step 3**  $\mathbf{F}_c = \mathbf{I} + \mathbf{F}'_c, \mathbf{E}(\eta) = \mathbf{E}_c, \mathbf{G}(\eta) = \mathbf{G}_c, \mathbf{F}(\eta) = \mathbf{F}_c$

B: 计算 $\gamma_{\text{opt}}$

**Step 0** 选定 $\gamma_n^{-2}$

**Step 1**  $\{\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_c; \mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_c; \mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_c; J_{R1} = 0; \mathbf{E}_2 = \mathbf{S}_1; \mathbf{G}_2 = \mathbf{0};$   
 $\mathbf{F}_2 = \mathbf{I}; J_{R2} = 0\}$

**Step 2** for ( $k = k_f - 1; k \geq 0; k--$ ) {  
 $\{\text{由式(7.3.13a) ~ (7.3.13c) 及(7.3.14) 计算}$   
 $\mathbf{E}_c, \mathbf{G}_c, \mathbf{F}_c \text{ 和 } J_{Rc}\}$   
 $\{\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_c; \mathbf{G}_2 = \mathbf{G}_c; \mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_c; J_{R2} = J_{Rc}\} (\mathbf{E}_1, \mathbf{G}_1, \mathbf{F}_1,$   
 $J_{R1} \text{ 不变})$



```

        if ( $J_{R_i} > 0$ ) {跳出循环以较小的  $\gamma_{\#}^{-2}$  重新从 Step
1 开始}
    }
Step 3  if ( $J_{R_i} > 0$ )
        { $\gamma_{\#}^{-2}$  是  $\gamma_{opt}^{-2}$  的上界(upperbound), 重新计算前应
        减小}
    else
        { $\gamma_{\#}^{-2}$  是次优参数即  $\gamma_{opt}^{-2}$  的下界(lowerbound)}
    if (upperbound-lowerbound)  $> \epsilon$ 
        {加大  $\gamma_{\#}^{-2}$  重新计算} ( $\epsilon > 0$  是预先指定的计算
        精度)
    else
        {break}

```

当计算结果满足预定要求时, 停止迭代, 下界(lowerbound) 作为  $\gamma_{opt}^{-2}$ 。

C: 求解闭环系统方程及 Riccati 微分方程

**Step 0** 选择  $\gamma_{\#}^{-2} < \gamma_{opt}^{-2}$ , 即  $\gamma_{\#} > \gamma_{opt}$

**Step 1** {计算  $E(\eta), G(\eta), F(\eta)$ ;  $E_1 = E_c = E(\eta), G_1 = G_c = G(\eta), F_1 = F_c = F(\eta)$  }

**Step 2** for ( $k = k_t - 1; k \geq 0; k--$ ) {  
     {存储  $E_c, G_c, F_c$  在第  $k$  站}  
     { $E_2 = E_c; G_2 = G_c; F_2 = F_c$ } ( $E_1, G_1, F_1$  不变)  
     {按照式(7.3.13a) ~ (7.3.13c), 计算新的  $E_c, G_c, F_c$ }  
 }  
 {读入边界条件  $E_2 = S_t, G_2 = 0, F_2 = I$ }

**Step 3** for ( $k = 0; k < k_t; k++$ ) {

{读入存储的  $E, G, F$  作为  $E, G, F$  }  
 {按照(7.3.20)(7.3.21) 计算  $S, F_p$  }  
 {由(7.3.29) 计算闭环系统初值响应}  
 }

#### 7.4.2 算例

当  $\gamma^{-2}$  趋近于  $\gamma_{\text{opt}}^{-2}$  时, Riccati 微分方程的解矩阵在  $t = 0$  时刻趋于无穷大奇异对称阵, 这是 Riccati 微分方程的一种有限逃逸现象。实际上无法根据这种数值上无限增长的病态阵来导出增益阵及控制律, 所以连续系统“最优”意义上的  $H_\infty$  控制是无法按照这里的方法实现的。应用中一般取小于  $\gamma_{\text{opt}}^{-2}$  的参数 (即大于最优  $H_\infty$  范数  $\gamma_{\text{opt}}$  的  $\gamma$ ), 然后求解 Riccati 方程, 进而构造反馈控制律。因此, 本章中的算例在计算临界参数后, 取小于  $\gamma_{\text{opt}}^{-2}$  的值进行闭环系统响应的计算。

##### 算例 1:

第一个算例的系统参数为

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 \\ 39.4 & 3.8 \end{bmatrix} & B_1 &= \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} & B_2 &= \begin{bmatrix} 0.0 \\ 1.0 \end{bmatrix} \\
 C &= \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} & S_f &= \begin{bmatrix} 10.0 & 0.0 \\ 0.0 & 10.0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

有限时间区段长  $T = 3$ , 计算结果为  $\gamma_{\text{opt}}^{-2} = 0.12349039$ 。设系统初值干扰为  $x_0 = (1.5, 1)^T$ , 当  $\gamma^{-2} = 0.95 \times \gamma_{\text{opt}}^{-2}$  时的系统状态及 Riccati 方程解矩阵的对角线元素分别在图 7.3 和图 7.4 中用虚线表示, 而  $\gamma^{-2} = 0.90 \times \gamma_{\text{opt}}^{-2}$  时的系统状态及 Riccati 方程解矩阵的对角线元素在图 7.3 和图 7.4 中分别用实线表示。从图中可以发现  $\gamma$  的变化对系统动态响应特性的影响, 接近最优  $H_\infty$  范数的  $\gamma$  值将导致更大的反馈增益和更大幅度的瞬态响应。

如果区间长度  $t_f$  和边界条件  $S_f$  发生变化, 则相应的最优  $H_\infty$  范数也会产生变化, 表 7-1、表 7-2 和表 7-3 分别给出了相应的结

果。

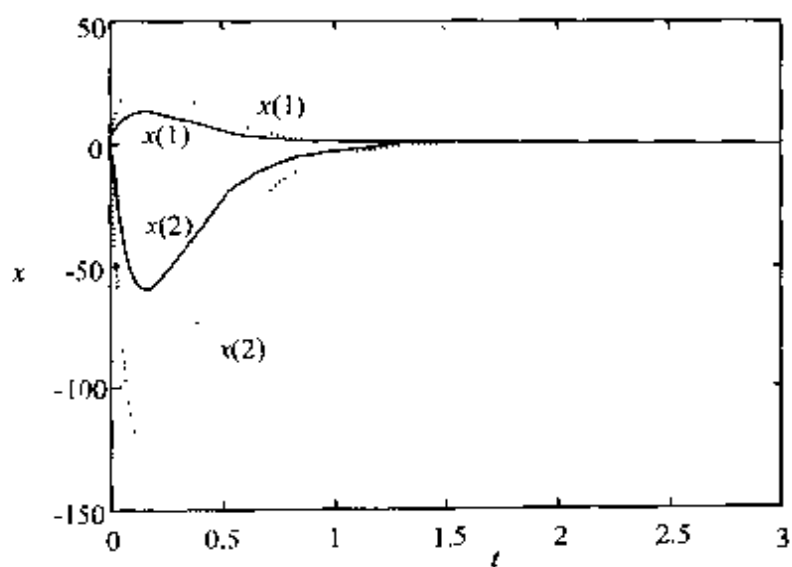


图 7.3 系统响应的时间历程

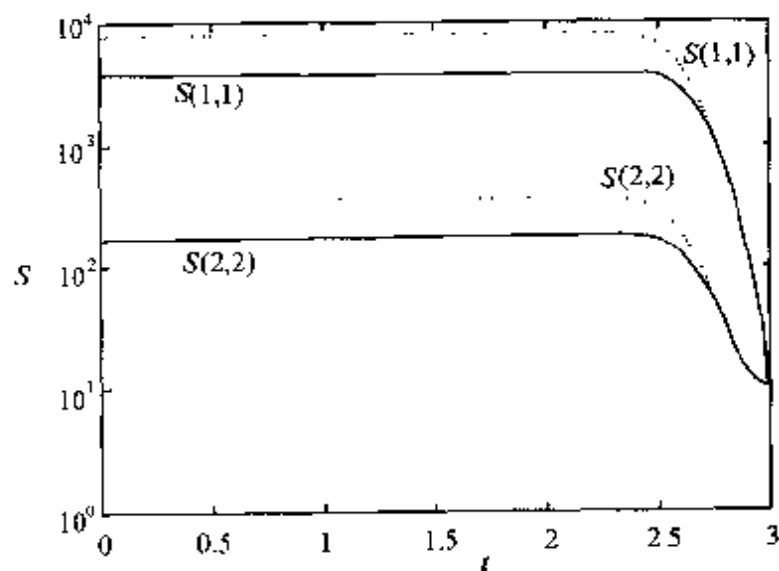


图 7.4 Riccati 微分方程的解

表 7-1 算例 1 的  $\gamma_{\text{opt}}^{-2}(S_f = 0.1 \times I_2)$ 

$t_f$	0.2	0.5	1.00
$\gamma_{\text{opt}}^{-2}$	1.78902	0.13332	0.12351
$t_i$	2.00	3.00	4.00
$\gamma_{\text{opt}}^{-2}$	0.12349	0.12349	0.1349

表 7-2 算例 1 的  $\gamma_{\text{opt}}^{-2}(S_f = I_2)$ 

$t_f$	0.2	0.5	1.00
$\gamma_{\text{opt}}^{-2}$	0.40915	0.12652	0.12350
$t_i$	2.00	3.00	4.00
$\gamma_{\text{opt}}^{-2}$	0.12349	0.12349	0.12349

表 7-3 算例 1 的  $\gamma_{\text{opt}}^{-2}(S_f = 10 \times I_2)$ 

$t$	0.2	0.5	1.00
$\gamma_{\text{opt}}^{-2}$	0.20568	0.12478	0.12349
$t_i$	2.00	3.00	4.00
$\gamma_{\text{opt}}^{-2}$	0.12349	0.12349	0.12349

系统参数中的  $C$  矩阵为指标加权阵, 如果将  $C$  中的元素  $C(2, 2)$  改为 7.0, 其它参数不变, 计算结果为  $\gamma_{\text{opt}}^{-2} = 0.068133771$ 。与图 7.3 和图 7.4 类似,  $\gamma^{-2} = 0.95 \times \gamma_{\text{opt}}^{-2}$  时的系统状态及 Riccati 方程解矩阵的对角线元素分别在图 7.5 和图 7.6 中用虚线表示, 而  $\gamma^{-2} = 0.90 \times \gamma_{\text{opt}}^{-2}$  时系统状态及 Riccati 方程解矩阵的对角线元素在图 7.5 和图 7.6 中分别用实线表示。加权阵的变化对闭环系统的  $H_\infty$  范数和 Riccati 方程解的影响可以通过对比图 7.3 和图 7.5 发现。

$C$  矩阵变化后, 相应的最优  $H_\infty$  范数也会产生变化, 表 7-4、表 7-5 和表 7-6 分别给出了相应区间长度  $t_i$  和边界条件  $S_f$  时的

$\gamma_{\text{opt}}^{-2}$ 表 7-4 矩阵  $C$  变化后算例 1 的  $\gamma_{\text{opt}}^{-2}(S_f = 0.5 \times I_2)$ 

$t_f$	0.2	0.5	1.00
$\gamma_{\text{opt}}^{-2}$	0.31422	0.093112	0.071689
$t_f$	2.00	3.00	4.00
$\gamma_{\text{opt}}^{-2}$	0.068308	0.068136	0.068125

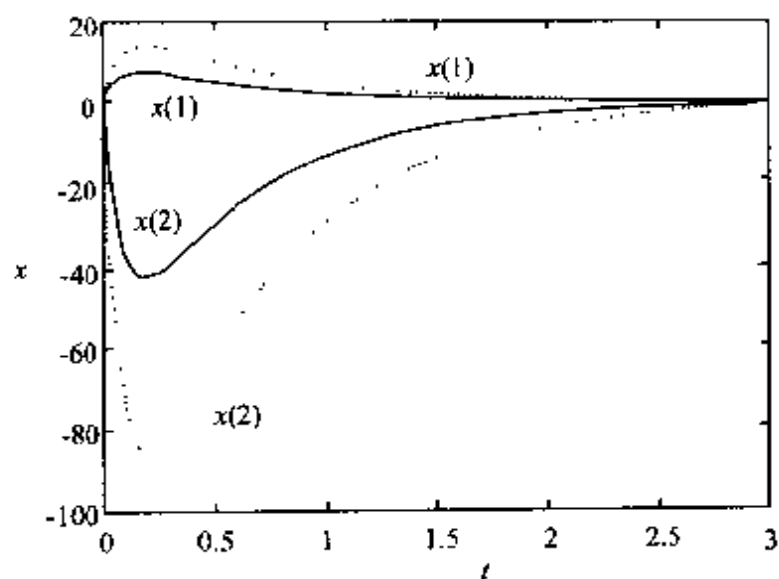
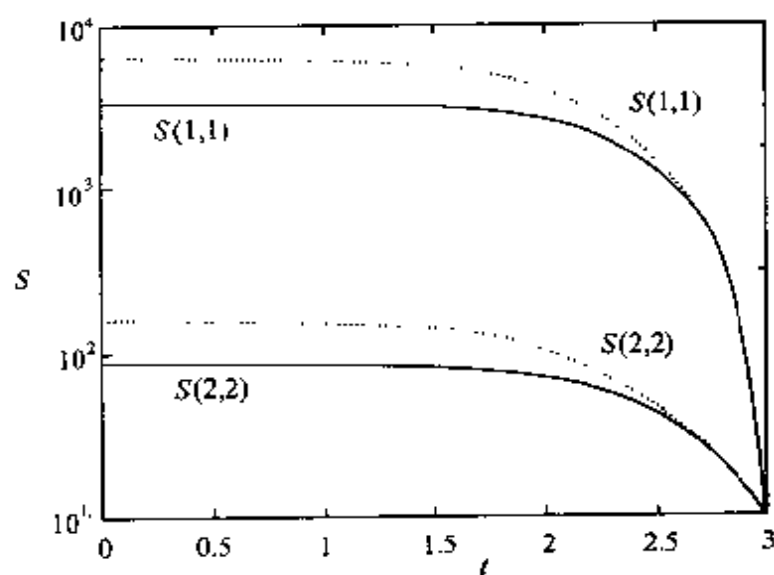
表 7-5 矩阵  $C$  变化后算例 1 的  $\gamma_{\text{opt}}^{-2}(S_f = I_2)$ 

$t_f$	0.2	0.5	1.00
$\gamma_{\text{opt}}^{-2}$	0.29065	0.092217	0.071602
$t_f$	2.00	3.00	4.00
$\gamma_{\text{opt}}^{-2}$	0.068304	0.068135	0.068125

表 7-6 矩阵  $C$  变化后算例 1 的  $\gamma_{\text{opt}}^{-2}(S_f = 10 \times I_2)$ 

$t_f$	0.2	0.5	1.00
$\gamma_{\text{opt}}^{-2}$	0.19896	0.097626	0.071126
$t_f$	2.00	3.00	4.00
$\gamma_{\text{opt}}^{-2}$	0.068283	0.068134	0.068124

如果取  $\gamma^{-2} = 0$ , 则  $H_\infty$  控制成为 LQ 控制问题, Riccati 方程解矩阵中的各元素相应变小, 此时系统在控制作用下的初值响应幅值也远小于上文图中给出的响应。

图 7.5 矩阵  $C$  变化后系统的响应图 7.6 矩阵  $C$  变化后 Riccati 方程的解**算例 2:**

第二个算例的系统参数为

$$A = \begin{bmatrix} -0.0605 & -32.37 & 0.0 & 32.2 & 0.0 \\ -0.00014 & -1.475 & 10.0 & 0.0 & 2.0 \\ -0.0111 & -34.72 & -2.793 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.2 \\ 0.0005 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0.0 \\ -0.0011 \\ -0.3380 \\ 0.0 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

$$C = \text{diag}[0.5, 0.5, 1.0, 1.0, 1.0]$$

$$S_t = \text{diag}[0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1]$$

取有限区间长度为  $t_f = 10$ , 相应的计算结果为  $\gamma_{\text{opt}}^{-2} = 3.1052429$ 。当系统的初值干扰为  $x_0 = (0, 0.1, 0, 0, 0.1)^T$  时, 令  $\gamma^{-2}$  取小于  $\gamma_{\text{opt}}^{-2}$  的不同的值, 按本章介绍的方法计算系统的状态。图 7.7 至图 7.11 分别给出了状态向量各分量随时间的变化曲线, 其中  $\gamma^{-2} = 0.3 \times \gamma_{\text{opt}}^{-2}$  时的状态变化用实线表示,  $\gamma^{-2} = 0.6 \times \gamma_{\text{opt}}^{-2}$  时的状态变化用虚线表示,  $\gamma^{-2} = 0.9 \times \gamma_{\text{opt}}^{-2}$  时的状态变化用点划线表示。从中可以发现系统  $H_\infty$  范数的变化对系统动态响应的影响, 其变化规律与第一个系统类似。

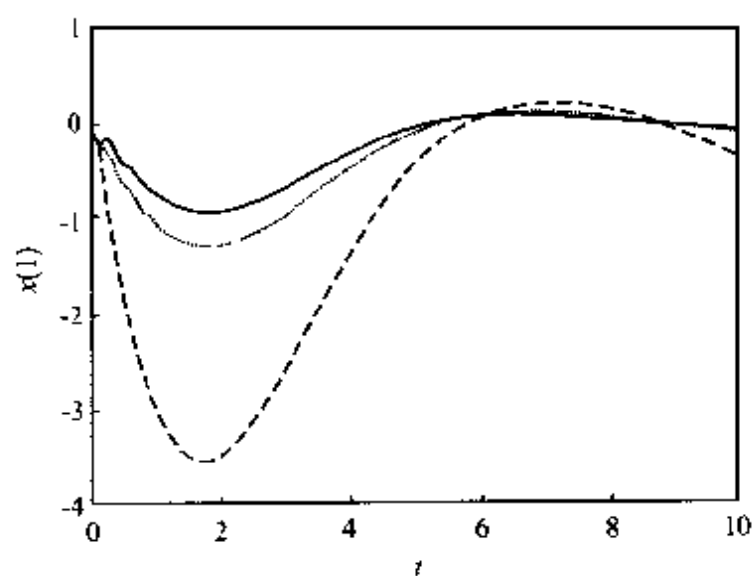


图 7.7 系统响应的时间历程

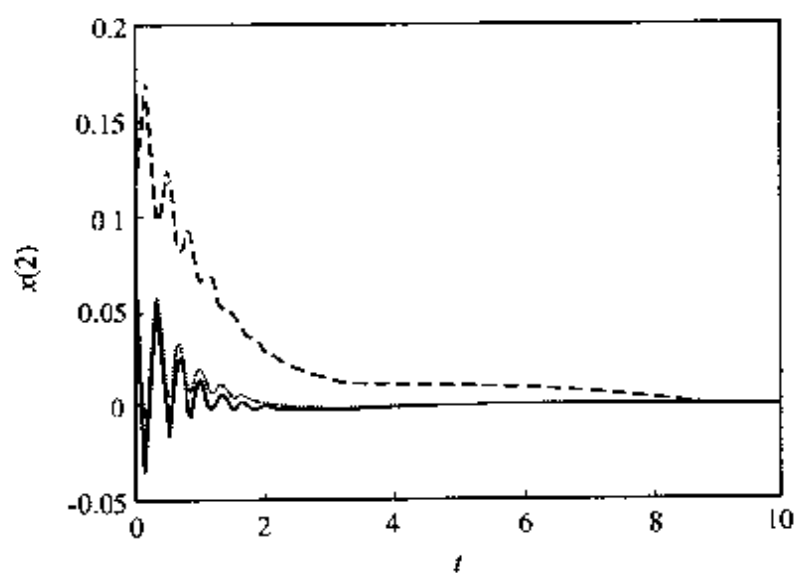


图 7.8 系统响应的时间历程



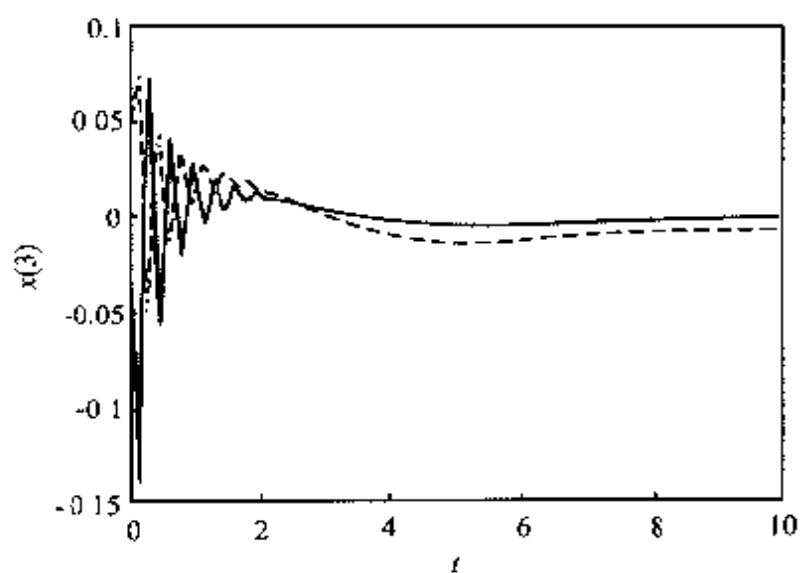


图 7.9 系统响应的时间历程

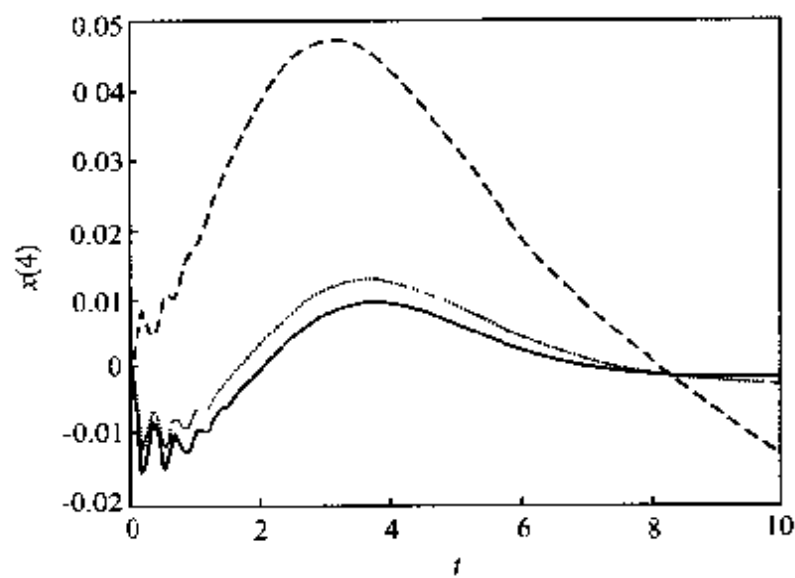


图 7.10 系统响应的时间历程

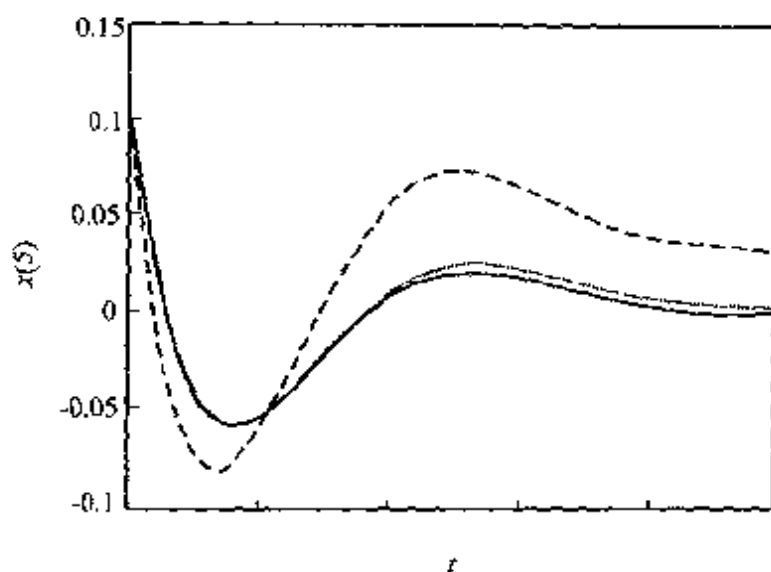


图 7.11 系统响应的时间历程

与算例 1 类似, 表 7-7、表 7-8、表 7-9 分别给出了区间长度  $t_f$  和边界条件  $S_f$  发生变化时系统的  $\gamma_{\text{opt}}^2$ 。

表 7-7 算例 2 的  $\gamma_{\text{opt}}^2(S_f = 10 \times I_2)$ 

$t_f$	0.5	1.0	2.0	3.0	5.0
$\gamma_{\text{opt}}^2$	208.789	49.6929	6.82423	3.52633	3.17398
$t_f$	10	15	20	25	30
$\gamma_{\text{opt}}^2$	3.10524	3.08802	3.08653	3.08532	3.08629

表 7-8 算例 2 的  $\gamma_{\text{opt}}^2(S_f = I_2)$ 

$t_f$	0.5	1.0	2.0	3.0	5.0
$\gamma_{\text{opt}}^2$	32.2102	9.56749	3.11595	3.00591	3.00591
$t_f$	10	15	20	25	30
$\gamma_{\text{opt}}^2$	3.00591	3.00591	3.00591	3.00591	3.00591

表 7-9 算例 2 的  $\gamma_{opt}^2(S_r = 0.1 \times I_2)$ 

$t_1$	0.5	1.0	2.0	3.0	5.0
$\gamma_{opt}^2$	208.789	49.6929	6.82423	3.52633	3.17398
$t_2$	10	15	20	25	30
$\gamma_{opt}^2$	3.10524	3.08802	3.08653	3.08632	3.08629

本章介绍了求解  $H_\infty$  状态反馈控制系统设计问题的精细积分法, 给出了有限时间内闭环系统响应计算的方法。对比文献 9 中所介绍的 LQ 控制系统设计的精细积分法可以发现 LQ 与  $H_\infty$  控制的相似和不同之处, 更多讨论见参考文献 11 ~ 14。

### 参考文献

- 1 Green M, Limbeer D J N. Linear Robust Control. New Jersey: Prentice Hall, 1995
- 2 Burl J B. Linear Optimal Control -  $H_2$  and  $H_\infty$  Methods. California: Addison-Wesley, 1999
- 3 钟万勰.  $H_\infty$  状态反馈与瑞利商精细积分. 计算力学学报, 1998, 15(4): 1~8
- 4 申铁龙.  $H_\infty$  控制理论及应用. 北京: 清华大学出版社, 1996
- 5 薛定宇. 控制系统计算机辅助设计——MATLAB 语言及应用. 北京: 清华大学出版社, 1996
- 6 钟万勰, 欧阳华江, 邓子辰. 计算结构力学与最优控制. 大连: 大连理工大学出版社, 1993
- 7 Zhong W X, Williams F W, Bennett P N. Extension of the Wittrick-Williams algorithm to mixed variable systems. Journal of Vibration and Acoustics, 1997, 119(3): 334~340
- 8 钟万勰, 钟翔翔. LQ 控制区段混合能矩阵的微分方程及其应用. 自动化学报, 1992, 18(3): 325~331
- 9 钟万勰. 线性二次最优控制的精细积分法. 自动化学报, 2001, 27(2): 166~173

- 
- 10 钟万勰. 卡尔曼-布西滤波的精细积分. 大连理工大学学报, 1999, 39(2): 191~200
  - 11 Rhee I, Speyer J L. A game theoretic approach to a finite-time disturbance attenuation problem. IEEE Transactions on Automatic Control, 1991, 36(9): 1021~1032
  - 12 Doyle J C, Glover K, Khargonekar P, Francis B A. State-space solutions to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  control problems. IEEE Transactions on Automatic Control, 1989, 34(8): 831~847
  - 13 Zhou K M, Doyle J C and Glover K. Robust and Optimal Control. New Jersey: Prentice Hall, 1996
  - 14 Basar T, Bernhard P.  $H_\infty$ -optimal Control and Related Minimax Design Problems. Boston: Birkhäuser, 1995

## 第八章 连续系统 $H_\infty$ 输出反馈控制

$H_\infty$  输出反馈控制问题也称为广义调节器问题,  $H_\infty$  输出反馈控制器只能利用系统可测量的状态信号而非全部状态信息, 该控制器可以由一个  $H_\infty$  全信息控制器和一个  $H_\infty$  滤波器构成。  $H_\infty$  输出反馈控制与 LQG 控制有一些相似之处, 但也有本质的差别。根据分离性原理, LQG 控制问题可以分解成一个最优状态反馈控制问题和一个最优状态滤波问题。最优状态反馈控制器通过逆时间方向求解一个给定终端条件的 Riccati 微分方程来构造, 这个最优状态反馈控制器也是最优的全信息控制器; 最优状态滤波器则是一个 Kalman 滤波器, 滤波增益可以通过沿时间方向求解另外一个给定始端条件的 Riccati 微分方程得到。对于定常系统无限时间域的控制问题, 则是求解相应 Riccati 代数方程的稳定化解。LQG 控制系统设计中的控制与滤波问题是完全解耦的, 设计全信息控制器时并不需要了解噪声的方差, 而 Kalman 滤波器的实现也与控制问题的目标函数无关。这是因为  $-Fx$  的最优估计由  $-F\hat{x}$  给出, 而  $\hat{x}$  是与  $F$  无关的最优状态估计。  $H_\infty$  滤波问题则无此特性, 其状态估计与  $F$  有关, 滤波器的设计还需要考虑控制问题的目标函数。  $H_\infty$  全信息控制器与外界信号进入系统的方式有关, 即与  $B_1$  有关。而全信息 LQG 控制问题中的  $B_1$  只对最优目标函数的值有影响, 与最优控制器无关。另外,  $H_\infty$  控制问题还需要研究解的存在性, 因为  $H_\infty$  全信息控制与滤波问题中的 Riccati 方程并不总是有解, 这是  $H_\infty$  控制与 LQG 控制问题的本质区别<sup>[1,2]</sup>。

$H_\infty$  输出反馈控制问题存在解的充要条件为<sup>[1,2]</sup>: 两个 Riccati 方程的解存在并且这两个解的乘积满足谱半径约束条件, 在这两

个 Riccati 方程解的基础上通过线性分式变换可以构造所有满足要求的  $H_\infty$  控制器。前面的章节中已经介绍了求解 Riccati 方程并判定其解的存在性的方法,其解的存在性由相应系统的最优  $H_\infty$  诱导范数决定。对于  $H_\infty$  输出反馈控制问题,只需要将前几章的方法进行综合就可用于计算系统的最优  $H_\infty$  诱导范数,从而给出解的存在性条件。因为利用精细积分方法既可以求解 Riccati 微分方程也可以求解 Riccati 代数方程,所以对于线性定常系统可以用统一的方法求解有限时间和无限时间  $H_\infty$  输出反馈控制中的有关计算问题。本章将首先介绍  $H_\infty$  输出反馈控制的基本理论,然后以文献 3~7 的内容为基础介绍该系统最优  $H_\infty$  诱导范数的计算方法,并从结构力学的角度介绍 Riccati 微分方程的求解。

## 8.1 $H_\infty$ 输出反馈控制

### 8.1.1 输出反馈控制器存在条件

本节介绍  $H_\infty$  输出反馈控制问题的基本理论。从一般的问题出发,考虑图 8.1 中所示线性时变系统  $P$ ,系统的状态方程为

$$\dot{x} = A(t)x + B_1(t)w + B_2(t)u \quad (8.1.1a)$$

$$z = C_1(t)x + D_{12}(t)u \quad (8.1.1b)$$

$$y = C_2(t)x + D_{21}(t)w \quad (8.1.1c)$$

其中  $x$  为  $n$  维状态向量,  $w$  为  $l$  维外扰向量,  $u$  为  $m$  维控制向量,  $y$  为  $q$  维量测向量,  $z$  为  $p$  维输出向量,  $p \geq m, l \geq q$ 。系统矩阵  $A, B_1, B_2, C_1, C_2, D_{12}$  和  $D_{21}$  分别具有恰当的维数,并且

$$D_{12}^T D_{12} = I_m \quad (8.1.2a)$$

$$D_{21} D_{21}^T = I_q \quad (8.1.2b)$$

$I_m$  和  $I_q$  分别是  $m$  和  $q$  阶单位矩阵。矩阵对  $(A, B_2)$  和  $(A, C_2)$  分别是可稳定和可检测的。另外对于所有的实数  $\omega$ ,还应当满足下列矩阵秩条件(8.1.3)

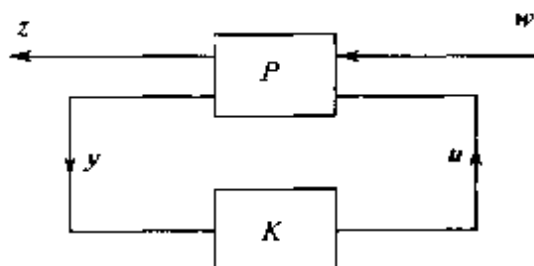


图 8.1 输出反馈控制

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix} = n + m \quad (8.1.3a)$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix} = n + q \quad (8.1.3b)$$

有限时间  $H$ 。输出反馈控制问题是指寻找系统  $P$  的线性控制器

$$u = \mathcal{K}y \quad (8.1.4)$$

对于给定的正数  $\gamma$ , 该控制器使闭环系统从外扰  $w$  到输出  $z$  的  $H$  诱导范数满足

$$\|\mathcal{K}_{zw}\|_{[0, t_f]} = \sup_{\|w(t)\|_{2,[0, t_f]} \neq 0} \frac{\|z(t)\|_{2,[0, t_f]}}{\|w(t)\|_{2,[0, t_f]}} < \gamma \quad (8.1.5)$$

当  $P$  为定常系统时, 其无限长时间控制器应当在使系统  $P$  内稳定的同时满足

$$\|\mathcal{K}_{zw}\|_{\infty} < \gamma \quad (8.1.6)$$

条件(8.1.5)可以转化为

$$J_{\gamma} = \|z(t)\|_{2,[0, t_f]}^2 - \gamma^2 \|w(t)\|_{2,[0, t_f]}^2 \leq -\epsilon^2 \|w(t)\|_{2,[0, t_f]}^2 \quad (8.1.7)$$

其中  $\epsilon$  为一正数。文献 1、2 介绍了  $H$  输出反馈控制器存在的充要条件, 文献 3 从结构力学与最优控制模拟理论的角度对此给出了新的阐述。下面直接引述这些结论。

**定理 8.1<sup>[1,2]</sup>** 在有限时间情况下, 系统  $P$  存在满足式(8.1.5)的线性输出反馈控制器的充要条件是

1. Riccati 微分方程(8.1.8) 在区间 $[0, t_f]$  有解  $X_\infty$

$$\dot{X}_\infty = -\tilde{C}\tilde{C} - \tilde{A}^T X_\infty - X_\infty \tilde{A} + X_\infty (B_2 B_2^T - \gamma^{-2} B_1 B_1^T) X_\infty$$

$$X_\infty(t_f) = S_f \quad (8.1.8)$$

其中  $\tilde{A} = A - B_2 D_{12}^T C_1$ ,  $\tilde{C}^T \tilde{C} = C_1^T (I - D_{12} D_{12}^T) C_1$ ,

2. Riccati 微分方程(8.1.9) 在区间 $[0, t_f]$  有解  $Y_\infty$

$$\dot{Y}_\infty = \bar{B}\bar{B}^T + A Y_\infty + Y_\infty \bar{A}^T - Y_\infty (C_2^T C_2 - \gamma^{-2} C_1^T C_1) Y_\infty$$

$$Y(0) = P_0 \quad (8.1.9)$$

其中  $\bar{A} = A - B_1 D_{21}^T C_2$ ,  $\bar{B}\bar{B}^T = B_1 (I - D_{21}^T D_{21}) B_1^T$ .

3. 对于所有的  $t \in [0, t_f]$ ,  $\rho(X_\infty(t) Y_\infty(t)) < \gamma^2$ , 其中  $\rho(\cdot)$  表示矩阵的谱半径, 这就是所谓谱半径条件。

在上述条件同时成立的条件下, 控制器  $\mathcal{K}$  由下列线性分式变换给定

$$\mathcal{K} = \mathcal{F}_l(K_u, U) \quad (8.1.10)$$

线性因果系统  $U$  应满足

$$\|U\|_{[0, t_f]} < \gamma \quad (8.1.11)$$

而  $K_u$  是由下式描述的系统

$$K_u = \begin{bmatrix} A_k & B_{k1} & B_{k2} \\ C_{k1} & 0 & I \\ C_{k2} & I & 0 \end{bmatrix} \quad (8.1.12)$$

其中

$$A_k = A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_\infty - B_2 F_\infty - B_{k1} C_{2z} \quad (8.1.13a)$$

$$[B_{k1} \quad B_{k2}] = [B_1 D_{21}^T + Z_\infty C_{2z}^T \quad B_2 + \gamma^{-2} Z_\infty F_\infty^T]$$

$$(8.1.13b)$$

$$\begin{bmatrix} C_{k1} \\ C_{k2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_\infty \\ -C_{2z} \end{bmatrix} \quad (8.1.13c)$$

$$F_\infty = D_{12}^T C_1 + B_2^T X_\infty \quad (8.1.13d)$$

$$Z_\infty = Y_\infty (I - \gamma^{-2} X_\infty Y_\infty)^{-1} = (I - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty)^{-1} Y_\infty$$

$$(8.1.13e)$$



$$C_{2c} = C_2 + \gamma^{-2} D_{21} B_1^T X_{\infty} \quad (8.1.13f)$$

令  $U = 0$ , 则可得到中心控制器

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B_1\dot{w}^* + B_2 u + B_{21}[y - (C_2\hat{x} + D_{21}\dot{w}^*)] \quad (8.1.14)$$

$$u = -F_{\infty}\hat{x} \quad (8.1.15)$$

$$\dot{w}^* = \gamma^{-2} B_1^T X_{\infty} \hat{x} \quad (8.1.16)$$

□

**定理 8.2<sup>[1,2]</sup>** 对于定常系统  $P$  无限时间情况下的控制问题, 系统存在满足式(8.1.6)的线性输出反馈控制器的充要条件是

1. Riccati 代数方程(8.1.17)有解

$$\bar{C}^T \bar{C} - \bar{A}^T X_{\infty} - X_{\infty} \bar{A} + X_{\infty} (B_2 B_2^T - \gamma^{-2} B_1 B_1^T) X_{\infty} = 0 \quad (8.1.17)$$

并且  $X_{\infty} \geq 0, \bar{A} = (B_2 B_2^T - \gamma^{-2} B_1 B_1^T) X_{\infty}$  渐进稳定。

2. Riccati 代数方程(8.1.18)有解

$$\bar{B} \bar{B}^T + A Y_{\infty} + Y_{\infty} \bar{A}^T - Y_{\infty} (C_2^T C_2 - \gamma^{-2} C_1^T C_1) Y_{\infty} = 0 \quad (8.1.18)$$

其中  $Y_{\infty} \geq 0, \bar{A} = Y_{\infty} (C_2^T C_2 - \gamma^{-2} C_1^T C_1)$  渐进稳定。

3.  $\rho(X_{\infty} Y_{\infty}) < \gamma^2$

若上述条件同时成立, 则控制器  $\mathcal{K}_{\infty}$  可由下列线性分式变换

$$\mathcal{K}_{\infty} = \mathcal{F}_l(K_{\infty}, U)$$

给定, 式中  $\|U\|_{\infty} < \gamma, K_{\infty}$  的定义与定理 8.1 中的定义相同, 而中心控制器也由式(8.1.14) ~ (8.1.16) 定义。 □

图 8.2 给出了  $H_{\infty}$  中心控制器的示意图<sup>[1]</sup>。从图中可以看到, 控制向量  $u$  由反馈增益  $F_{\infty}$  与状态估计  $\hat{x}$  的乘积构成, 而  $\hat{x}$  由一个观测器生成。此观测器由量测  $y$  与量测估计  $\hat{y}^* = C_2 \hat{x} + D_{21} \dot{w}^*$  之间的差驱动, 而这个差值是由最坏情况(worst-case)外界干扰  $w^*$  引起的。因此  $H_{\infty}$  控制是在最坏外界干扰下的控制。



对系统状态  $x$  的估计和外界干扰  $w$  的估计都可以利用量测数据  $y$ 。这样全信息控制器中所需的状态  $x$  就可以由  $\hat{x}$  代替。而且此输出反馈控制问题存在的条件为当且仅当下列 Riccati 方程在区间  $[0, t_f]$  上有解。

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -\tilde{C}^T \tilde{C} - \tilde{A}^T X, \quad X, \tilde{A} + X_*(B_2 B_2^T - \gamma^{-2} B_1 B_1^T) X \\ X_*(t_f) &= S_f \end{aligned} \quad (8.1.22)$$

其中  $\tilde{A} = A - B_2 D_{12}^T C_1$ ,  $\tilde{C}^T \tilde{C} = C_1^T (I - D_{12} D_{12}^T) C_1$ 。显然这就是方程 (8.1.8)。

现在考虑当式 (8.1.1b) 简化为

$$z = C_1 x + u \quad (8.1.23)$$

时的控制问题。此时输出反馈控制器存在的充要条件为下列 Riccati 方程在区间  $[0, t_f]$  上有解。

$$\begin{aligned} \dot{Y} &= BB^T + \bar{A}Y + Y\bar{A}^T - Y(C_2^T C_2 - \gamma^{-2} C_1^T C_1)Y, \\ Y(0) &= P, \end{aligned} \quad (8.1.24)$$

其中  $\bar{A} = A - B_1 D_{21}^T C$ ,  $\bar{B}B^T = B_1(I - D_{21} D_{21}^T)B_1^T$ 。

## 8.2 Riccati 微分方程解的力学意义

下面以 Riccati 微分方程 (8.1.8) 的求解为例简要介绍结构力学与最优控制模拟理论的基本内容, 方程 (8.1.9) 的求解与之相类似。首先介绍一个最基本的模拟关系: 控制系统的状态变量和协态变量分别与子结构链内的位移和内力对应。另外, 如图 8.3 中所示,  $[0, t_f]$  时间段表示 Riccati 微分方程的求解区间, 数值计算时这一时间段可以分为  $n$  个等长区段, 图中区段  $i$  的长度为  $\eta = t_i - t_{i-1}$ , 然后再计算方程在各时刻的值。与之相对应, 图 8.3 中还给出了由  $n$  个等长子结构所组成的子结构链, 其长度为  $Z$ 。Riccati 微分方程的末端条件  $S$  对应于子结构链在  $Z$  端的边界支撑刚度阵; Riccati 微分方程的解在  $t_i$  时刻的值  $X(t_i)$  对应于子结构链在  $z_i$  处的刚度

阵  $Q(z_j)^{[1]}$ 。按照结构力学理论,子结构链在  $z_j (j = 0, 1, 2, \dots, n-1)$  处的刚度阵可以通过区段混合能合并公式来计算,所以 Riccati 方程的解也可以通过定义相应的混合能,然后进行区段合并得到。模拟理论还指出:确保 Riccati 方程(8.1.8)在区间  $[0, t_f]$  上有解的临界参数  $\gamma_{\text{opt}}^{-2}$  对应于子结构链弹性稳定或结构振动的最小特征值,而子结构链的一阶特征值可以利用精细积分法结合扩展 Wittrick-Williams 算法计算到任意指定的精度<sup>[1]</sup>, Riccati 方程(8.1.8)的临界参数  $\gamma_{\text{up}}^{-2}$  当然亦可同样计算。本书第五章还介绍过  $\gamma_{\text{opt}}^{-2}$  是 Riccati 微分方程在区间  $[0, t_f]$  上出现有限逃逸现象的临界值。

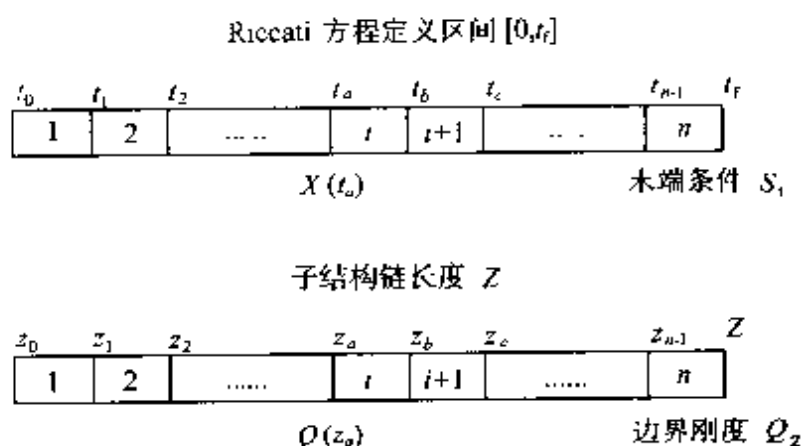


图 8.3 Riccati 微分方程的解与子结构链刚度

一般求解 Riccati 微分方程的方法都属于差分类方法,而 Riccati 代数方程的解则可以通过求解相关矩阵的广义特征值问题等许多方法得到。精细积分方法对于这两类方程采用的是一致的方法,并可保证数值计算的精确性和稳定性, Riccati 微分方程的解在经过一定的步数后趋向于稳态解,即 Riccati 代数方程的解。精细积分法不同于求解微分方程的差分类方法,在方程的末端(或初始)条件改变时,不需要全部重新计算。

精细积分方法的核心是相邻区段混合能的合并,通过合并得

到新区段的混合能矩阵,逐步递推得到整个区间上的解.考虑图 8.3 中所示子结构链中的第  $i$  段.设  $Q_1$  阵是当  $b$  端完全自由时,在  $a$  端的刚度阵; $G_1$  阵是当子结构的  $a$  端位移为 0 时, $b$  端的柔度阵; $F_1$  阵是  $b$  端完全自由,在  $a$  端给出单位位移时  $b$  端发生的位移,即位移的传递阵. $x_a, x_b$  为  $a, b$  端的位移向量,  $\lambda_a, \lambda_b$  为  $a, b$  端的内力向量.利用混合能矩阵  $Q_1, G_1, F_1$  和位移,内力向量,可将区段  $i$  的混合能表示为

$$V(x_a, \lambda_b) = \lambda_b^T F_1 x_a + x_a^T Q_1 x_a / 2 - \lambda_b^T G_1 \lambda_b / 2 \quad (8.2.1)$$

与其相邻的子结构  $i+1$  也有相应的混合能矩阵  $Q_2, G_2, F_2$ . 两个子结构合并在一起构成的结构段  $(z_a, z_b)$  的  $Q, G, F$  矩阵可以通过下面的公式计算

$$Q = Q_1 + F_1^T (Q_2^{-1} + G_1)^{-1} F_1 \quad (8.2.2a)$$

$$G = G_2 + F_2 (G_2^{-1} - Q_1)^{-1} F_1^T \quad (8.2.2b)$$

$$F = F_2 (I_n + Q_1 G_1)^{-1} F_1 \quad (8.2.2c)$$

其中  $I_n$  为  $n$  阶单位阵。

这些区段合并公式可以递推运用,也就是子结构递推合并,逐步得到子结构链中各端口的  $Q, G, F$  矩阵.参考图 8.3 中的模拟关系可知,区段合并公式也是求 Riccati 微分方程数值解的公式,由此得到 Riccati 微分方程在  $t_j$  时刻的值  $X(t_j)$ . 定义用于求解 Riccati 微分方程的区段混合能矩阵为  $Q = Q(\Delta t), G = G(\Delta t), F = F(\Delta t) (\Delta = t_b - t_a)$ , 它们与子结构的混合能矩阵参数一一对应.矩阵  $Q, G, F$  满足下列微分方程

$$\frac{dQ}{dt} = F^T \tilde{C}^T \tilde{C} F =$$

$$\tilde{C}^T \tilde{C} + \tilde{A}^T Q + Q \tilde{A} - Q (B_2 B_2^T - \gamma_a^{-2} B_1 B_1^T) Q \quad (8.2.3a)$$

$$\frac{dG}{dt} = F (B_2 B_2^T - \gamma_a^{-2} B_1 B_1^T) F^T =$$

$$(B_2 B_2^T - \gamma_a^{-2} B_1 B_1^T) + \tilde{A} G + G \tilde{A}^T - G \tilde{C}^T \tilde{C} G \quad (8.2.3b)$$

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} = F[\tilde{A} - (B_1 B_1^T - \gamma_{\pi}^{-2} B_1 B_1^T)Q] = \\ (\tilde{A} - G\tilde{C}^T\tilde{C})F \end{aligned} \quad (8.2.3c)$$

在  $t = t_f$  处的末端条件为

$$Q = 0, G = 0, F = I_n \quad (8.2.4)$$

式中的求导对于 Riccati 微分方程是时间, 对于子结构链则是长度。对于子结构链来说, 式中的系数矩阵当然是由子结构的物理参数决定的。方程 (8.2.3a) 与 Riccati 微分方程 (8.1.8) 的差别在于对时间求导的方向和边界条件。

Riccati 微分方程在区间  $[0, t_f]$  有解的临界参数  $\gamma_{\text{opt}}^{-2}$  对应于整个子结构链的  $n$ -阶固有特征值。按扩展的 Wittrick-Williams 算法, 计算整个子结构链的特征值需要引入特征值计数的概念, 即对于给定的值  $\omega_{\pi}^2$  ( $\omega_{\pi}^2 = \gamma_{\pi}^{-2}$ ), 用  $J_R(\omega_{\pi})$  表示区段  $(z_a, z_b)$  在  $a$  端位移和  $b$  端内力分别为 0 的条件下, 其特征值  $\omega^2 < \omega_{\pi}^2$  的个数, 对于 Riccati 方程来讲就是  $\gamma^{-2} < \gamma_{\pi}^{-2}$  的计数。如果已知区段  $(z_a, z_b)$  和  $(z_b, z_c)$  的特征值计数为  $J_{R1}(\omega_{\pi})$  和  $J_{R2}(\omega_{\pi})$ , 那么合并后区段  $(z_a, z_c)$  的特征值计数  $J_R(\omega_{\pi})$  可以用下式计算

$$J_R(\omega_{\pi}) = J_{R1}(\omega_{\pi}) + J_{R2}(\omega_{\pi}) - s\{Q_2\} + s\{Q_2^{-1} + G_1\} \quad (8.2.5)$$

其中  $s\{M\}$  表示将矩阵  $M$  三角分解为  $M = LDL^T$  时,  $D$  中负对角元素的个数。

方程 (8.2.3a) 与 Riccati 方程 (8.1.8) 的末端条件不同, 因此仅按合并公式 (8.2.2) 得到的  $Q$  只是末端条件  $S_f = 0$  时 Riccati 微分方程的解。要得到任意末端条件  $S_f$  时的解, 还需要在求出整个区间内的  $Q, G, F, J_R$  后再按下式计算

$$X = Q + F^T(S_f^{-1} + G)^{-1}F \quad (8.2.6)$$

$$J_{RSc} = J_R - s\{S_f\} + s\{S_f^{-1} + G\} \quad (8.2.7)$$

此时的  $X$  和  $J_{RSc}$  就分别是 Riccati 微分方程在末端条件为  $S_f$  时的

解和特征值计数。末端条件变化时,只需利用前面存储的数据,按照式(8.2.6)(8.2.7)重新计算一遍即可,这是精细积分方法的特点之一。

按照式(8.2.5)、(8.2.7)计算后,如果  $J_R = 0$ ,则表示此时的  $\gamma_{\pm}^2$  小于临界参数  $\gamma_{\text{opt}}^2$ ,只是次优参数。从子结构链的角度来解释就是子结构链的一阶特征值大于  $\omega_{\pm}^2$ 。如果  $J_R \neq 0$ ,则结论正好相反。 $II$  状态反馈控制或  $II$  滤波问题只需求解一个 Riccati 方程,可以在此时根据计数结果增大或减小  $\gamma_{\pm}^2(\omega_{\pm}^2)$ ,并不断重复直到找到满足精度要求的临界参数。 $H$  输出反馈控制问题则应同时考虑两个 Riccati 方程及谱半径约束条件。

精细积分方法求解 Riccati 微分方程是通过区段合并实现的,因此首先需要确定长为  $\eta$  的区段(基本区段)的混合能矩阵  $Q, G, F$ 。由微分方程(8.2.3)用差分法计算是一个很自然的思路,但精细积分法则是将图 8.3 中的一个区段再等分成  $2^N$  小段,每一小段的  $Q, G, F$  矩阵用 Taylor 级数展开,由于每一小段长度非常小,对于给定的有限数值  $\gamma_{\pm}^2$ ,必然有该小段的计数  $J_R = 0$ ,这可以从非常短结构的一阶特征值非常大的角度来理解。以此为出发点,重复执行合并公式(8.2.2)  $N$  次就可以得到此区段的  $Q, G, F$  矩阵及其特征值计数  $J_R$ ,然后以  $\eta$  长区段的混合能矩阵  $Q, G, F$  为起点再执行合并公式(8.2.2),就得到了整个区间的解。

这里介绍一种利用矩阵指数函数  $2^N$  精细算法<sup>[9]</sup> 计算基本区段矩阵  $Q, G, F$  的方法,当然也属于精细积分体系。首先考察可以导出 Riccati 微分方程(8.1.8)的两端边值问题

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tilde{A} & -(B_1 B_2^T + \gamma^2 B_1 B_1^T) \\ -\tilde{C}^T \tilde{C} & -\tilde{A}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} \quad (8.2.8)$$

其状态转移矩阵为

$$\Phi(0, t) = e^{At} \quad (8.2.9)$$

其中

$$H = \begin{bmatrix} \tilde{A} & -(B_2 B_2^T - \gamma^{-2} B_1 B_1^T) \\ -\tilde{C}^T \tilde{C} & -\tilde{A}^T \end{bmatrix} \quad (8.2.10)$$

从而有

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} = e^{Ht} \begin{bmatrix} x(0) \\ \lambda(0) \end{bmatrix} \quad (8.2.11)$$

按照结构力学与最优控制的模拟关系,状态向量  $x$  对应于位移,协态向量  $\lambda$  对应于内力。因此上式也可以认为是子结构链中位移与内力的传递矩阵。

图 8.2 中的基本区段长度  $\eta = t_b - t_c$ , 其状态向量和协态向量如图 8.1 中所示,并有如下关系式

$$\begin{bmatrix} x(\eta) \\ \lambda(\eta) \end{bmatrix} = e^{H\eta} \begin{bmatrix} x(0) \\ \lambda(0) \end{bmatrix} \quad (8.2.12)$$

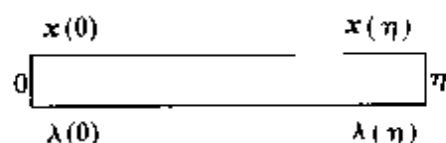


图 8.4 区段示意图

按文献 9 附录 B 中介绍的方法计算  $e^{H\eta}$ , 计算结果可以表示为

$$e^{H\eta} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 \\ e_3 & e_4 \end{bmatrix} \quad (8.2.13)$$

其中  $e_1, e_2, e_3, e_4$  均为  $n$  维方阵。现在根据这些条件计算图 8.3 中区段的混合能矩阵, 根据前面给出的这些矩阵的力学意义, 按下述步骤来确定。

为表述方便, 下面将式 (8.2.12) 写成等价的矩阵形式。令区段左端为单位位移, 右端无外力作用, 即

$$\begin{bmatrix} X(\eta) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 \\ e_3 & e_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ \Lambda(0) \end{bmatrix} \quad (8.2.14)$$

而此时  $Q$  等于左端的力,  $F$  等于右端的位移, 因此



$$Q = \Lambda(0) = -\mathbf{e}_1^{-1}\mathbf{e}_3 \quad (8.2.15a)$$

$$F = X(\eta) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\Lambda(0) = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_4^{-1}\mathbf{e}_3 \quad (8.2.15b)$$

再令左端位移为 0, 右端作用有单位力, 则有

$$\begin{bmatrix} X(\eta) \\ -I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_4 & \mathbf{e}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \Lambda(0) \end{bmatrix} \quad (8.2.16)$$

此时,  $F^T$  等于左端的力,  $G$  等于右端的位移, 因而

$$F^T = \Lambda(0) = -\mathbf{e}_1^{-1} \quad (8.2.17a)$$

$$G = X(\eta) = \mathbf{e}_2\Lambda(0) = -\mathbf{e}_2\mathbf{e}_4^{-1} \quad (8.2.17b)$$

这样就可以求出基本区段的混合能矩阵  $Q, G, F$  和  $F^T, F$  和  $F^T$  还可以分别计算以互相校验。需要注意的是计算中基本区段长度的选取应保证特征值计数  $J_K = 0$ 。

### 8.3 算法与算例

(1) 选定初始参数  $\gamma$ 。

(2) 通过精细积分方法结合扩展 Wittrick-Williams 算法在检验两个 Riccati 方程解的存在性的同时求解该方程。只要有一个方程的解不存在, 则减小参数  $\gamma$ , 再重复这一步。

(3) 检验计算出的各个时刻  $X(t), Y(t)$  值是否符合谱半径条件。如果满足,  $\gamma$  是次优参数, 可以减小。然后回到步骤 2 以寻求更接近最优值的参数。如果不满足条件, 增大  $\gamma$  值, 然后回到步骤 (2), 再依次进行上面的步骤。

上述步骤结合二分法循环执行就可以找到满足给定的精度要求的最优  $H_\infty$  范数  $\gamma_{\text{opt}}$ , 并同时得到两个 Riccati 微分方程在区间  $[0, t_f]$  上的解。对于无限时间问题, 计算的步骤是类似的, 只要将时间段取得足够长即可, 因为这时 Riccati 微分方程的稳态解趋近于代数方程的解。当然对此类问题也可以利用已有的其他方法<sup>[8]</sup>。

## 算例 1:

系统参数为

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} -0.08 & -3.0 & 0 & 2.0 & 0.5 \\ 0.04 & -1.4 & 10.0 & 0 & 0 \\ 0.01 & -4.0 & -2.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0.3 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \\
 B_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0.001 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 B_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ -0.1 \\ 3.3 \\ 0 \\ 1.1 \end{bmatrix} \quad C_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix} \\
 C_2 &= \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 4.0 & 0.0 \end{bmatrix} \\
 D_{21} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D_{12} = [0 \quad 0 \quad 1]^T \\
 S_f &= I_5 \times 10^{-3} \quad P_0 = I_5 \times 10^{-3}
 \end{aligned}$$

用本章介绍的方法分别计算不同区间长度时的  $\gamma_{\text{opt}}^2$ , 结果列于表 8-1 中。Riccati 微分方程的解也可以同时得到, 这里不再列出。由表 8-1 中的结果可见, 随着区间长度的增加, 结果趋于一个定值。表 8-2 及表 8-3 则给出了不同区间长度时  $X$  矩阵在区间起点和  $Y$  矩阵在区间终点的值。

表 8-1 例 1 计算结果

$t_i$	$\gamma_{cpi}^2$
1	15.83928954386
2	2.541853646399
4	0.294541374346
8	0.085103281425
12	0.051969727045
16	0.041925137387
24	0.041409692712
32	0.041401008442
64	0.041400871246
128	0.041400871246

表 8-2 算例 1 计算结果 —X 矩阵

$t_i$	X				
1	9.7295	-2.7145	-6.7603	13.1805	-17.0742
	-2.7145	0.7855	1.8787	-3.6866	4.7608
	-6.7603	1.8787	4.7865	-9.1851	11.8794
	13.1805	-3.6866	-9.1851	17.9655	-23.1987
	-17.0742	4.7608	11.8794	-23.1987	30.0238
2	12.6818	5.5999	7.6220	49.8860	-47.0077
	-5.5999	2.5047	3.3597	22.1304	20.8246
	7.6220	3.3597	4.6673	-30.0165	28.2746
	49.8860	-22.1304	-30.0165	198.3223	-186.5238
	-47.0077	20.8246	28.2746	-186.5238	175.5724
4	0.3044	-0.1191	-0.1695	0.6578	-0.5183
	0.1191	0.0867	0.0562	-0.4563	0.2879
	-0.1695	0.0562	0.1813	-0.3317	0.2726
	0.6578	-0.4563	0.3317	4.5262	-2.9517
	-0.5183	0.2879	0.2726	-2.9517	2.7687

(续表)

$\lambda$	$X$				
8	0.3861	-0.2600	-0.1739	1.9539	-0.2542
	-0.2600	0.3346	0.0623	-2.7608	-0.1363
	-0.1739	0.0623	0.1820	-0.3774	0.2426
	1.9539	-2.7608	-0.3774	25.9364	1.1031
	-0.2542	-0.1363	0.2426	1.1031	3.0780
12	0.3736	-0.2455	-0.1701	1.8107	-0.2314
	-0.2455	0.3203	0.0568	-2.6151	-0.1845
	-0.1701	0.0568	0.1813	-0.3256	0.2450
	1.8107	-2.6151	-0.3256	24.4587	1.5415
	-0.2314	-0.1845	0.2450	1.5415	3.2128
16	0.3665	-0.2339	-0.1694	1.7015	-0.2431
	-0.2339	0.3108	0.0559	-2.4305	-0.1612
	-0.1694	0.0559	0.1811	-0.3174	0.2444
	1.7015	-2.4305	-0.3174	22.7142	1.3228
	-0.2431	-0.1612	0.2444	1.3228	3.1632
24	0.3662	-0.2334	-0.1694	1.6963	-0.2436
	0.2334	0.2999	0.0559	-2.4217	-0.1601
	-0.1694	0.0559	0.1811	-0.3170	0.2444
	1.6963	-2.4217	-0.3170	22.6311	1.3123
	-0.2436	-0.1601	0.2444	1.3123	3.1660
32	0.3661	-0.2334	-0.1694	1.6962	-0.2437
	-0.2334	0.2998	0.0559	-2.4215	-0.1601
	-0.1694	0.0559	0.1811	-0.3170	0.2444
	1.6962	-2.4215	-0.3170	22.6297	1.3121
	-0.2437	-0.1601	0.2444	1.3121	3.1660
64	0.3661	-0.2334	-0.1694	1.6962	-0.2437
	-0.2334	0.2998	0.0559	-2.4215	-0.1601
	-0.1694	0.0559	0.1811	-0.3170	0.2444
	1.6962	-2.4215	-0.3170	22.6297	1.3121
	-0.2437	-0.1601	0.2444	1.3121	3.1660

表 8-3 算例 1 计算结果  $Y$  矩阵

$t_f$	$Y$				
1	0.1857	0.0312	-0.0117	0.0985	0.7315
	-0.0312	0.0133	0.0035	-0.0133	0.0871
	-0.0117	0.0035	0.0065	-0.0086	-0.0591
	0.0985	-0.0133	-0.0086	0.0566	0.4271
	0.7315	-0.0871	-0.0591	0.4271	3.2708
2	1.3186	0.0697	-0.0194	0.2723	2.4584
	-0.0697	0.0150	0.0028	-0.0145	-0.1133
	-0.0194	0.0028	0.0057	-0.0059	-0.0434
	0.2723	-0.0145	-0.0059	0.0675	0.5714
	2.4584	-0.1133	-0.0434	0.5714	5.0282
4	1.8776	0.0529	-0.0188	0.2173	3.3478
	-0.0529	0.0139	0.0024	-0.0100	-0.0752
	-0.0188	0.0024	0.0055	-0.0043	-0.0401
	0.2173	-0.0100	-0.0043	0.0465	0.4415
	3.3478	-0.0752	-0.0401	0.4415	6.4996
8	1.9107	0.0559	-0.0199	0.2311	3.4970
	0.0559	0.0142	0.0025	-0.0113	-0.0854
	-0.0199	0.0025	0.0056	-0.0047	-0.0445
	0.2311	-0.0113	-0.0047	0.0542	0.4894
	3.4970	-0.0854	-0.0445	0.4894	7.0724
12	1.9011	-0.0556	-0.0197	0.2296	3.4769
	0.0556	0.0142	0.0025	-0.0113	-0.0847
	-0.0197	0.0025	0.0056	-0.0047	-0.0442
	0.2296	-0.0113	-0.0047	0.0542	0.4863
	3.4769	-0.0847	-0.0442	0.4863	7.0324
16	1.8981	-0.0555	-0.0197	0.2290	3.4705
	0.0555	0.0142	0.0025	-0.0113	-0.0845
	-0.0197	0.0025	0.0056	0.0047	-0.0441
	0.2290	-0.0113	-0.0047	0.0541	0.4851
	3.4705	0.0845	-0.0441	0.4851	7.0186
24	1.8980	-0.0555	-0.0197	0.2290	3.4702
	-0.0555	0.0142	0.0025	-0.0113	-0.0845
	0.0197	0.0025	0.0056	-0.0047	-0.0441

(续表)

$t_f$	$Y$				
32	0.2290	-0.0113	-0.0047	0.0541	0.4851
	3.4702	-0.0845	0.0441	0.4851	7.0179
	1.8980	-0.0555	-0.0197	0.2290	3.4702
	-0.0555	0.0142	0.0025	0.0113	-0.0845
	0.0197	0.0025	0.0056	-0.0047	-0.0441
	0.2290	-0.0113	-0.0047	0.0541	0.4851
64	3.4702	0.0845	-0.0441	0.4851	7.0179
	1.8980	-0.0555	0.0197	0.2290	3.4702
	-0.0555	0.0142	0.0025	-0.0113	-0.0845
	0.0197	0.0025	0.0056	0.0047	-0.0441
	0.2290	0.0113	-0.0047	0.0541	0.4851
	3.4702	-0.0845	-0.0441	0.4851	7.0179

**算例 2:**

系统参数为

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad C_2 = [1 \quad 1] \quad D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad D_{21} = [0 \quad 1]$$

在  $t_f \rightarrow \infty$  时, Riccati 微分方程的稳态解趋近于对应的 Riccati 代数方程的解, 对于这个例题来说  $t_f \geq 40$  已经足够。为了与别的计算方法比较, 本例将区间取足够长, 使有限时间的解趋近于无限长时间问题的解。表 8-4 中的计算结果与上面的结论是相符的, 其中无限时间  $H_\infty$  输出反馈控制问题的结果利用 MATLAB 软件  $\mu$  分析与综合工具箱中的函数求解。用精细积分方法可以得到两个 Riccati 微分方程的解, 同时得到临界参数为  $\gamma_{\text{opt}}^{-*} = 0.02559492983$ , 即该调节器问题的最优  $H_\infty$  范数为  $\gamma_{\text{opt}} = 6.250619009$ 。

表 8-4

例 2 计算结果

	利用 $\mu$ 工具箱中的函数 (无限时间,代数方程的解)	利用精细积分方法 (有限时间 $T = 45$ ,微分方程的解)
$\gamma_{opt}$	6.250619004	6.250619009
$X$	0.3951657784    - 1.522487800 - 1.522487800    6.329366877	0.3951657783 ~ 1.522487800 - 1.522487800    6.329366877
$Y$	0.1750729335    - 0.7389003828 - 0.7389003828    5.789347922	0.4750729335    - 0.7389003828 0.7389003828    5.789347921
$\rho(XY)$	39.07023791	39.07023794

表 8-5 算例 2 计算结果  $-\gamma_{opt}$ 

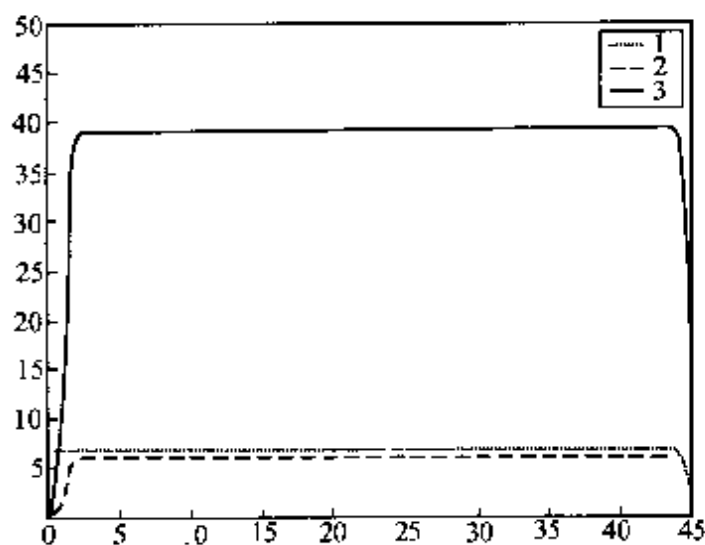
$t$	$\gamma_{opt}$
1	1.79609779566
2	5.32718220178
3	6.18561223073
5	6.24919444255
10	6.25061895912
15	6.25061900915
20	6.25061900945
30	6.25061900945
40	6.25061900945
45	6.25061900945

图 8.5 则给出了在  $\gamma_{opt} = 6.250619009$  时,两个 Riccati 方程解矩阵的谱半径及其乘积矩阵的谱半径随时间变化的曲线。图中曲线 1 为  $\rho(X)$  与时间的关系,曲线 2 为  $\rho(Y)$  与时间的关系,曲线 3 为  $\rho(XY)$  与时间的关系。

为了更清楚地看出各设计参数随区间长度变化的规律,表 8-5 和表 8-6 分别给出了参数  $\gamma_{opt}$ ,  $X$  矩阵在区间起点和  $Y$  矩阵在区间终点的值。

表 8-6 算例 2 计算结果 —  $X$  矩阵及  $Y$  矩阵

$t_f$	$X$		$Y$	
1	0.5042	-2.0011	0.4837	-0.7651
	-2.0011	8.4812	-0.7651	4.8538
2	0.3990	-1.5380	0.4714	-0.7454
	-1.5380	6.3942	-0.7454	5.8435
3	0.3954	-1.5234	0.4750	-0.7389
	-1.5234	6.3330	-0.7389	5.7917
5	0.3952	-1.5225	1.5225	6.3294
	0.4751	-0.7389	-0.7389	5.7894
10	0.3952	1.5225	0.4751	-0.7389
	-1.5225	6.3294	-0.7389	5.7893
15	0.3952	-1.5225	0.4751	0.7389
	-1.5225	6.3294	-0.7389	5.7893
20	0.3952	-1.5225	0.4751	-0.7389
	-1.5225	6.3294	-0.7389	5.7893
30	0.3952	1.5225	0.4751	-0.7389
	-1.5225	6.3294	-0.7389	5.7893
40	0.3952	-1.5225	0.4751	-0.7389
	-1.5225	6.3294	-0.7389	5.7893

图 8.5  $\rho(X), \rho(Y), \rho(XY)$  在区间  $[0, t_f]$  上的变化



目前  $H_\infty$  控制系统设计的软件包主要解决与 Riccati 代数方程有关的问题,对需要求解 Riccati 微分方程的问题则难以处理。结构力学与最优控制的模拟理论为研究解决这个问题提供了一条新的途径。

本章介绍了精细积分方法求解有限时间  $H_\infty$  输出反馈控制问题的过程,并将区间足够长时 Riccati 微分方程稳态解的计算结果与目前比较成熟算法的结果进行了比较,两者是一致的。对  $H_\infty$  控制理论更详细的介绍可参考这方面的专著和相关文献 1~2,10~13。

### 参考文献

- 1 Green M, Limbeer D J N. Linear Robust Control. New Jersey: Prentice Hall, 1995
- 2 Burl J B. Linear Optimal Control -  $H_2$  and  $H_\infty$  Methods. California: Addison-Wesley Longman, 1998
- 3 Zhong W X. Variational method and computation for  $H_\infty$  control. Applied Mathematics and Mechanics, 2000, 21(12): 1407~1416
- 4 钟万勰.  $H_\infty$  状态反馈与瑞利商精细积分. 计算力学学报, 1998, 15(4): 1~8
- 5 Zhong W X, Williams F W.  $H_\infty$  filtering with secure eigenvalue calculation and precise integration. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1999, 46: 1017~1030
- 6 钟万勰.  $H_\infty$  滤波器与特征值问题精细积分. 自然科学进展, 2000, 10(2): 116~121
- 7 Zhong W X, Williams F W, Bennett P N. Extension of the Wittrick-Williams algorithm to mixed variable systems. Journal of Vibration and Acoustics, 1997, 119(3): 334~340
- 8 薛定宇. 控制系统计算机辅助设计——MATLAB 语言及应用. 北京: 清华大学出版社, 1996
- 9 钟万勰, 欧阳华江, 邓子辰. 计算结构力学与最优控制. 大连: 大连理工大学出版社, 1996

大学出版社,1993

- 10 Doyle J C, Glover K, Khargonekar P, Francis B A. State space solutions to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  control problems. IEEE Transactions on Automatic Control, 1989,34(8): 831~847
- 11 Zhou K M, Doyle J C and Glover K. Robust and Optimal Control. New Jersey: Prentice Hall,1996
- 12 Mills R A, Bryson A E. Calculus of variations derivation of the minimax Linear-Quadratic ( $H_\infty$ ) controller. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 1994,17(1): 153~160
- 13 Basar T, Bernhard P.  $H_\infty$ -optimal Control and Related Minimax Design Problems. Boston: Birkhäuser,1995

---

## 第九章 分散 $H_\infty$ 控制与滤波

分散控制是大系统理论中的一个重要分支,是解决大规模复杂系统控制的一种有效的方法。大系统广泛存在于工程技术和经济社会的诸多领域:例如对国家安全具有重要意义的空间站、航天飞机等大型航天器、大型预警雷达网及快速反击武器系统;对经济发展至关重要的大型电力网、大型通讯网络系统、工业机器人等。由于构成大系统的基本单元数量众多、结构层次复杂、信息采集处理量巨大,使得大系统的建模、分析及控制都非常复杂,对大系统采用集中式的控制模式通常非常困难,甚至无法实现,因此需要采用分散控制或递阶控制等方案以确保系统的稳定运行及性能指标的优化。在此基础上,还要求控制系统具备鲁棒性、自适应性、故障诊断及容错能力等一系列智能控制特性,这是复杂大系统控制的发展趋势<sup>[1~2]</sup>。

本书前面的章节已经介绍了离散及连续  $H_2$  控制和  $H_2$  滤波系统设计的理论与计算方法。本章则进一步基于结构力学中的模态综合法研究分散  $H_\infty$  控制系统的范数计算问题,并将这一方法用于研究其对偶问题——分散  $H_\infty$  滤波问题。

### 9.1 大系统分散 $H_\infty$ 控制

$H_\infty$  鲁棒控制理论与分散控制技术相结合在解决大系统的干扰抑制、可靠控制等问题方面有其特定的优势<sup>[3~7]</sup>。从实际控制系统设计的角度讲,闭环控制系统最优参数  $\gamma_{opt}^2$  的确定(即系统最优范数  $\gamma_{opt}$  的确定)是应当首先考虑的问题。本书前面已经介绍过,

线性二次(LQ)控制以及 Kalman-Bucy 滤波与结构静力学互相模拟<sup>[6]</sup>;  $H_\infty$  控制及  $H_\infty$  滤波的临界参数  $\gamma_{opt}^z$  与结构力学中振动问题的一阶特征值互相对应<sup>[7~9]</sup>; 本章的内容则进一步表明结构力学中的动力学结构分析对应于分散  $H_\infty$  控制和滤波问题。

首先考虑状态反馈  $H_\infty$  控制问题。设大系统的状态方程为

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \quad (9.1.1)$$

$$z = Cx + Du \quad (9.1.2)$$

其中  $x$  是  $n$  维状态向量,  $u$  是  $m_2$  维控制向量,  $w$  是  $m_1$  维过程干扰噪声向量, 矩阵  $A, B_1, B_2, C, D$  具有恰当的维数。设  $(A, B_1), (A, B_2)$  可控, 且

$$D^T D = I_{m_2} \quad (9.1.3a)$$

$$C^T D = 0 \quad (9.1.3b)$$

有限时间段  $[0, t_f]$  上的  $H_\infty$  控制问题可以归结为下列变分问题:

$$\| \mathcal{G} \|^2 = \max_w \min_u \frac{\int_0^{t_f} z^T z dt + x^T(t_f) S_f x(t_f)}{\int_0^{t_f} w^T w dt} \quad (9.1.4)$$

其中  $\| \mathcal{G} \|^2$  是闭环系统的  $H_\infty$  范数,  $S_f$  是半正定矩阵, 下标  $f$  表示在  $t = t_f$  处取值。利用条件(9.1.3), 可将其中的二次指标进一步表示为

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (x^T C^T C x + u^T u) dt + \frac{1}{2} x^T(t_f) S_f x(t_f) \quad (9.1.5)$$

以上是对整个大系统集中控制问题的描述。分散控制技术则是将大系统的状态向量  $x$  分解为  $p$  个状态子向量  $x_i, i = 1, 2, \dots, p$  之直和, 它们互不相交。通过分别对  $p$  个子系统进行控制来实现大系统的控制目标<sup>[1~5]</sup>。此时任一子系统的状态方程可表示为

$$\dot{x}_i = A_{ii} x_i + B_{1,ii} w_i + B_{2,ii} u_i + \sum_{j \neq i}^p A_{ij} x_j \quad (9.1.6)$$

$$z_i = C_{ii}x_i + D_{ii}u_i \quad (9.1.7)$$

其中矩阵  $A_{ij}$  表示子系统之间的联系, 还可以表示为  $A_{ij} = M_i L_{ij} H_j (i \neq j)$ , 而  $L_{ij}^T L_{ij} < I$ 。另外要求  $(A_{ii}, B_{2,ii}), (A_{ii}, B_{1,ii})$  可控,  $D_{ii}^T D_{ii} = I$  且  $C_{ii}^T D_{ii} = 0$ 。

对于无限时间域的分散  $H_\infty$  控制问题, 文献3给出了下列控制方案: 对预先给定的常数  $\gamma > 0$ , 如果存在常数  $\eta_i > 0$  使得“局部”Riccati 方程

$$\begin{aligned} A_{ii}^T P_i + P_i A_{ii} - P_i (B_{2,ii} B_{2,ii}^T - \gamma^{-2} B_{1,ii} B_{1,ii}^T) P_i + C_{ii}^T C_{ii} + \\ \eta_i P_i M_i M_i^T P_i - \left( \sum_{j=1}^p \frac{1}{\eta_j} \right) H_i^T H_i + Q_i = 0 \end{aligned} \quad (9.1.8)$$

存在对称正定解  $P_i (i = 1, 2, \dots, p)$ , 其中  $Q_i$  是给定的正定矩阵, 则由式(9.1.6)、(9.1.7) 构成的大系统是分散可镇定的, 且闭环大系统的  $H_\infty$  范数小于  $\gamma$ 。各子系统的局部状态反馈增益矩阵为

$$K_i = -B_{2,ii}^T P_i \quad (9.1.9)$$

大系统的  $H_\infty$  范数则定义为

$$\|\mathcal{H}(s)\|_\infty = \|(C + DK)(sI - \bar{A})^{-1}B_1\|_\infty$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{A} &= A + B_2 K \\ A &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1p} \\ A_{21} & A_{22} & \vdots & A_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p1} & \cdots & \cdots & A_{pp} \end{bmatrix} \\ B_2 &= \text{diag}[B_{2,11}, B_{2,22}, \dots, B_{2,pp}] \\ B_1 &= \text{diag}[B_{1,11}, B_{1,22}, \dots, B_{1,pp}] \\ C &= \text{diag}[C_{11}, C_{22}, \dots, C_{pp}] \\ D &= \text{diag}[D_{11}, D_{22}, \dots, D_{pp}] \\ K &= \text{diag}[K_1, K_2, \dots, K_p] \end{aligned}$$

目前分散  $H_\infty$  控制问题的解法大都基于上述类型的代数 Riccati 方程<sup>[3,4,5]</sup>, 虽然  $Q$  并不影响此问题的可解性条件<sup>[4]</sup>, 但对于复杂大规模系统, 确定这一系列方程的可解性条件以及系统在分散控制器作用下的最优  $H_\infty$  范数比较困难。本章从有限时间控制问题出发, 基于结构力学与最优控制的模拟关系, 利用 Hamilton 系统的模态综合法计算  $H_\infty$  分散控制系统的临界参数  $\gamma_{opt}^{-2}$ 。

为简单起见, 设  $p = 2$ , 则系统矩阵及向量也相应地成为分块形式:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (9.1.10a)$$

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (9.1.10b)$$

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (9.1.10c)$$

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \quad (9.1.10d)$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \epsilon A_{12} \\ \epsilon A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad (9.1.11a)$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} B_{2,11} & 0 \\ 0 & B_{2,22} \end{bmatrix} \quad (9.1.11b)$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} B_{1,11} & 0 \\ 0 & B_{1,22} \end{bmatrix} \quad (9.1.11c)$$

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 \\ 0 & C_{22} \end{bmatrix} \quad (9.1.11d)$$

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & 0 \\ 0 & D_{22} \end{bmatrix} \quad (9.1.11e)$$

从上述公式可以看出,除了  $A$  阵的分块中有带参数的子块外,其他的项对于两个状态子向量  $x_1, x_2$  的方程都是分立的,将式 (9.1.6) 及 (9.1.7) 代入方程 (9.1.1) ~ (9.1.4) 可得

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + \epsilon A_{12}x_2 + B_{11}w_1 + B_{11}u_1 \quad (9.1.12a)$$

$$z_1 = C_{11}x_1 + D_{11}u_1 \quad (9.1.12b)$$

$$\dot{x}_2 = A_{22}x_2 + \epsilon A_{21}x_1 + B_{22}w_2 + B_{22}u_2 \quad (9.1.13a)$$

$$z_2 = C_{22}x_2 + D_{22}u_2 \quad (9.1.13b)$$

如果取  $\epsilon = 0$ , 则所得的方程组表明这是两个完全独立的系统, 这里所采用的子系统之间的联系形式与式 (9.1.6)、(9.1.7) 中略有不同。含  $\epsilon$  项将两个子系统联系在一起, 在分析时可以先将它们独立分析, 然后再把它们通过含  $\epsilon$  的项联系在一起, 而且  $\epsilon$  不必一定是小参数。

文献 7 采用精细积分法求解  $H_2$  控制的临界最优参数值  $\gamma_{\text{opt}}^{-2}$ , 即一阶特征值, 利用精细积分还可以进一步求解  $H_\infty$  控制的全部特征解  $[\gamma_j^{-2}, \varphi_j(t)]$  ( $j = 1, 2, 3, \dots$ ), 其中  $\varphi_j(t)$  是无穷多个特征函数,  $\varphi_j(t)$  是定义于区间  $[0, t_f]$  上的向量函数, 组成此向量的向量  $x_{\varphi_j}$  和  $\lambda_{\varphi_j}$  则分别构成状态向量  $x$  及其对偶向量  $\lambda$  的正交基, 这相当于结构振动的振型。

精细积分首先用于初值问题的积分<sup>[10~12]</sup>, 随后又推广到两点边值问题<sup>[14~15]</sup>, 而与两点边值问题密切相关的 Riccati 微分方程也可由此法求解。本章中特征解的计算也采用这种方法。求解了子系统的特征解后, 对全系统的分析可采用子系统特征解的综合方法<sup>[16, 17]</sup>, 因此分散  $H_\infty$  控制系统最优参数的计算与结构动力分析的模态综合法是一致的。

## 9.2 $H_\infty$ 控制子系统的特征解

将大系统分解为各个子系统, 并取  $\epsilon = 0$ , 则各个子系统之间

的耦合解除。对其中的任一个子系统,省略其编号下标,则可用式(9.1.1)、(9.1.2)描述,而问题的变分形式为

$$\|\mathcal{S}\|^2 = \max_u \min_w \frac{\int_0^{t_f} z^T z dt + x^T(t_f) S_f x(t_f)}{\int_0^{t_f} w^T w dt} \quad (9.2.1)$$

其中  $S_f$  是给定的半正定矩阵。问题成为方程(9.1.1)和(9.1.2)约束下的极小-极大问题。第七章中已经介绍过这一问题。

对约束方程(9.1.1)引入 Lagrange 向量乘子函数  $\lambda(t)$ ,并将式(9.1.2)代入。对向量  $u$  和  $w$  取极值并考虑到式(9.1.3)得

$$u = -B_2^T \lambda \quad (9.2.2)$$

$$w = \gamma^{-2} B_1^T \lambda \quad (9.2.3)$$

其中  $\gamma = \|\mathcal{S}\|$ 。对于任一个参数  $\gamma^{-2}$ ,消去  $u$  和  $w$  给出

$$J = \int_0^{t_f} \left[ -\lambda^T \dot{x} + \lambda^T A x + \frac{1}{2} \gamma^{-2} \lambda^T B_1 B_1^T \lambda - \frac{1}{2} \lambda^T B_2 B_2^T \lambda + \frac{1}{2} x^T C^T C x \right] dt + \frac{1}{2} x^T(t_f) S_f x(t_f) \quad (9.2.4)$$

$$\delta J = 0$$

完成变分运算得到对偶微分方程

$$\dot{x} = Ax + (B_2 B_2^T - \gamma^{-2} B_1 B_1^T) \lambda \quad (9.2.5a)$$

$$\dot{\lambda} = -C^T C x - A^T \lambda \quad (9.2.5b)$$

对应的边界条件为

$$x(0) = x_0 \quad (9.2.6a)$$

$$\lambda(t_f) = S_f x(t_f) \quad (9.2.6b)$$

其中  $x_0$  是给定向量,即初始状态。定义系统(9.2.5)和(9.2.6)的全状态向量为

$$v(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} \quad (9.2.7)$$

由边界条件(9.2.6b)可知线性对偶微分方程(9.2.5)的解有



下列关系:

$$\lambda(t) = S(t)x(t) \quad (9.2.8)$$

其中  $S(t)$  是一个  $n \times n$  对称矩阵, 将其代入对偶微分方程(9.2.5)给出

$$\dot{S} = -C^T C - A^T S - SA - S(B_2 B_2^T - \gamma^{-2} B_1 B_1^T)S, S(t_f) = S_f \quad (9.2.9)$$

$$\dot{x} = [A - (B_2 B_2^T - \gamma^{-2} B_1 B_1^T)S]x, x(0) = x_0 \quad (9.2.10)$$

方程(9.2.9)就是 Riccati 微分方程, 求解  $n \times n$  矩阵  $S(t)$  后, 状态向量  $x(t)$  可以通过向前逐步积分时变微分方程(9.2.10)而获得。

上述问题中 Riccati 微分方程(9.2.9)的求解是关键一步。标准  $H_\infty$  控制问题要求参数  $\gamma^{-2}$  一定是次优的, 即  $\gamma^{-2} > \gamma_{opt}^{-2}$ , 其中  $\gamma_{opt}^{-2} = \gamma_1^{-2}$  为一阶特征值, 此时解矩阵  $S(t)$  在区间  $[0, t_f]$  内可以保证不出现无穷大。但当前的问题需要全部特征值  $\gamma_j^{-2} (j = 1, 2, \dots)$  及相应的特征函数向量  $\varphi_j(t)$ , 至少要有前  $n_r$  阶特征解。此时  $S_j(t)$  在整个时间段  $[0, t_f]$  内会出现无穷大, 这里  $S_j(t)$  是对应于  $\gamma_j^{-2} (j = 1, 2, \dots)$  的 Riccati 微分方程的解矩阵,  $S_j(t)$  在力学上的解释是刚度阵, 当参数  $\gamma^{-2}$  超过基本特征值  $\gamma_{opt}^{-2} = \gamma_1^{-2}$  时, 在  $[0, t_f]$  内必然出现无穷大, 但特征函数向量  $\varphi_j(t)$  不会出现无穷大问题。

变分原理(9.2.4)可以改写为

$$\delta(\Pi_1 - \gamma^{-2} \Pi_2) = 0 \quad (9.2.11)$$

其中

$$\begin{aligned} \Pi_1 = & \int_0^{t_f} [\lambda^T \dot{x} - \lambda^T A x + \frac{1}{2} \lambda^T B_2 B_2^T \lambda - \frac{1}{2} x^T C^T C x] dt - \\ & \frac{1}{2} x^T(t_f) S_f x(t_f) \end{aligned} \quad (9.2.12)$$

$$\Pi_2 = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [\lambda^T B_1 B_1^T \lambda] dt \quad (9.2.13)$$

变分方程(9.2.11)可以写为

$$\gamma^{-2} = \min_{\lambda} \max_x \frac{\Pi_1}{\Pi_2} \quad (9.2.14)$$

这是广义 Rayleigh 商, 其中有两类变量  $x$  与  $\lambda$  参与变分。当矩阵  $C$  是满秩时, 广义 Rayleigh 商可以退化为常见的 Rayleigh 商。但在最优控制问题中, 矩阵  $C$  常常不是满秩的, 此时系统的可控性与可观性保证了广义 Rayleigh 商的存在。

运用精细积分法再结合扩展的 Wittrick Williams 算法<sup>[118]</sup>, 可以将任意  $n_r$  个特征值计算到选择的精度。文献 7 给出的算法只计算最低阶特征值, 且未给出相应的特征函数向量  $\varphi_1(t)$ , 不能适合当前问题的需要。分散控制需要对各个子系统作出分析, 即令  $\varepsilon = 0$ , 求解各子系统前  $n_r$  阶特征解  $[\gamma_j^{-2}, \varphi_j(t)] (j = 1, 2, \dots, n_r)$ , 在此基础上考虑子系统间的耦合条件 (此时  $\varepsilon > 0$ ), 并按照模态组合法计算整个系统的最优范数。综合全部分散子系统的特征解以获得整体大系统的特征值, 这在结构力学的动力分析中有相似的情况, 称为子结构模态组合法<sup>[119, 120]</sup>。

当前所考虑的状态反馈控制问题解的形式是  $\lambda(t) = S(t)x(t)$ , 两端齐次边界条件为

$$x(0) = 0 \quad (9.2.15a)$$

$$\lambda(t_f) = S_f x(t_f) \quad (9.2.15b)$$

如果  $\gamma^{-2}$  不是特征值, 则 Riccati 矩阵  $S(0)$  (即刚度矩阵) 并不是无穷大, 对偶微分方程满足齐次边界条件 (9.2.15) 的解只有平凡解。然而当  $\gamma^{-2}$  的取值是特征值  $\gamma_j^{-2}$  时,  $S(0)$  将是数值非常大的奇异矩阵。据此可以找到非零向量  $\lambda(0)$  对应于边界条件 (9.2.15)。然后由  $x(0), \lambda(0)$  开始, 利用  $2^N$  算法可将全状态的特征函数向量计算出来。即

$$\gamma_j^{-2}, \varphi_j(t) = \begin{bmatrix} x_{\varphi_j}(t) \\ \lambda_{\varphi_j}(t) \end{bmatrix}, (j = 1, 2, 3, \dots) \quad (9.2.16)$$

其中下标  $\varphi$  表示  $x_{\varphi_j}(t), \lambda_{\varphi_j}(t)$  是向量  $\varphi_j(t)$  的组成部分,  $j$  表示阶

次。

通过精细积分与扩展 Wittrick-Williams 算法的结合使用,可以将给定范围  $0 < \gamma_{\gamma}^{-1} < \gamma_{\gamma}^{-2}$  内的特征解全部找出,这里  $\gamma_{\gamma}^{-2}$  是预先给定的一个值。得到全部特征解后,任意初值条件与任意参数  $\gamma^{-2} < \gamma_{\text{opt}}^{-2}$  的全状态向量就可以用全状态的特征向量函数 (9.2.16) 展开来表示。

### 9.3 特征解的正交归一性、完备性及展开定理

结构振动问题中特征向量展开是一种基本的求解方法,其前提是特征向量的正交性和完备性。结构振动问题是 Rayleigh 商特征值问题,属于 Lagrange 体系,但  $H_{\infty}$  控制是广义 Rayleigh 商特征值问题,属于 Hamilton 体系,其正交性应当重新考察。这里所讨论的特征值问题的特征函数显然满足下列特性。

$$\int_0^T \phi^T(t) \left[ J \left[ \frac{d}{dt} + H \right] \right] \phi(t) dt = 0 \quad (9.3.1)$$

其中

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \quad (9.3.2a)$$

$$H = \begin{bmatrix} A & B_2 B_2^T - \gamma^{-2} B_1 B_1^T \\ C^T C & A^T \end{bmatrix} \quad (9.3.2b)$$

下面基于上述关系给出更具体的结果,设有两个特征解  $\phi_i(t)$  与  $\phi_j(t)$ ,它们分别满足方程

$$\dot{\phi}_i(t) + H \phi_i(t) = 0 \quad (9.3.3a)$$

$$\dot{\phi}_j(t) + H \phi_j(t) = 0 \quad (9.3.3b)$$

即

$$\dot{x}_{\phi_i} = A x_{\phi_i} - (B_2 B_2^T - \gamma_i^{-2} B_1 B_1^T) \lambda_{\phi_i} \quad (9.3.4a)$$

$$\dot{\lambda}_{\varphi_i} = -C^T C x_{\varphi_i} - A^T \lambda_{\varphi_i} \quad (9.3.4b)$$

$$\dot{x}_{\varphi_j} = A x_{\varphi_j} - (B_2 B_2^T - \gamma_j^{-2} B_1 B_1^T) \lambda_{\varphi_j} \quad (9.3.5a)$$

$$\dot{\lambda}_{\varphi_j} = -C^T C x_{\varphi_j} - A^T \lambda_{\varphi_j} \quad (9.3.5b)$$

和(9.2.6)中给定的齐次边界条件。将  $\lambda_{\varphi_i}^T$  左乘式(9.3.4a),  $x_{\varphi_j}$  左乘式(9.3.4b), 按照(9.3.1)式, 将两者相减后对  $[0, t_f]$  全区段积分, 运用分部积分法, 并注意到  $\lambda_{\varphi_i}(t_f) = S_i x_{\varphi_i}(t_f)$ , 可导出

$$\begin{aligned} \int_0^{t_f} [\lambda_{\varphi_i}^T \dot{x}_{\varphi_i} + \lambda_{\varphi_i}^T \dot{x}_{\varphi_j} - \lambda_{\varphi_i}^T A x_{\varphi_i} - \lambda_{\varphi_i}^T A x_{\varphi_j} + \lambda_{\varphi_i}^T (B_2 B_2^T \\ - \gamma_i^{-2} B_1 B_1^T) \lambda_{\varphi_i} - x_{\varphi_j}^T C^T C x_{\varphi_j}] dt - x_{\varphi_j}^T(t_f) S_i x_{\varphi_i}(t_f) = 0 \end{aligned} \quad (9.3.6)$$

上式就是(9.3.1)式所表述的特征函数正交性的具体形式。将  $\lambda_{\varphi_i}^T$  左乘式(9.3.5a),  $x_{\varphi_i}^T$  左乘式(9.3.5b), 相减后再对  $[0, t_f]$  全区段积分, 运用分部积分法, 并注意到  $\lambda_{\varphi_j}(t_f) = S_j x_{\varphi_j}(t_f)$ , 又可导出

$$\begin{aligned} \int_0^{t_f} [\lambda_{\varphi_i}^T \dot{x}_{\varphi_i} + \lambda_{\varphi_i}^T \dot{x}_{\varphi_j} - \lambda_{\varphi_i}^T A x_{\varphi_i} - \lambda_{\varphi_i}^T A x_{\varphi_j} + \lambda_{\varphi_i}^T (B_2 B_2^T - \\ \gamma_j^{-2} B_1 B_1^T) \lambda_{\varphi_i} - x_{\varphi_i}^T C^T C x_{\varphi_j}] dt - x_{\varphi_i}^T(t_f) S_j x_{\varphi_j}(t_f) = 0 \end{aligned} \quad (9.3.7)$$

两者相减得到

$$(\gamma_i^{-2} - \gamma_j^{-2}) \int_0^{t_f} \lambda_{\varphi_i}^T B_1 B_1^T \lambda_{\varphi_i} dt = 0 \quad (9.3.8)$$

上式就是特征函数对于非负对称矩阵  $B_1 B_1^T$  的正交性定理: 对于不同的特征值  $\gamma_i^{-2}$  与  $\gamma_j^{-2}$ , 相应的全状态特征函数  $\varphi_i(t)$  和  $\varphi_j(t)$  对于非负对称矩阵  $B_1 B_1^T$  是正交的。这与结构振动中特征向量对于质量阵的正交类似。而归一化条件则可以表示为

$$\frac{1}{2} \int_0^{t_f} [\lambda_{\varphi_i}^T B_1 B_1^T \lambda_{\varphi_i}] dt = 1 \quad (9.3.9)$$

运用该正交性结果, 由(9.3.6)得到

$$\begin{aligned} \int_0^{t_f} [\lambda_{\varphi_i}^T \dot{x}_{\varphi_i} + \lambda_{\varphi_i}^T \dot{x}_{\varphi_j} - \lambda_{\varphi_i}^T A x_{\varphi_i} - \lambda_{\varphi_i}^T A x_{\varphi_j} + \lambda_{\varphi_i}^T B_2 B_2^T \lambda_{\varphi_i} - \\ x_{\varphi_j}^T C^T C x_{\varphi_j}] dt - x_{\varphi_j}^T(t_f) S_i x_{\varphi_i}(t_f) = 0 \end{aligned} \quad (9.3.10)$$

这与结构振动时特征向量对于刚度阵的正交类似。由归一化条件 (9.3.9), 又有

$$\int_0^{t_f} \left[ \lambda_{\varphi_i}^T \dot{x}_{\varphi_i} - \lambda_{\varphi_i}^T A x_{\varphi_i} + \frac{1}{2} \lambda_{\varphi_i}^T B_2 B_2^T \lambda_{\varphi_i} - \frac{1}{2} x_{\varphi_i}^T C^T C x_{\varphi_i} \right] dt - \frac{1}{2} x_{\varphi_i}^T(t_f) S_f x_{\varphi_i}(t_f) = \gamma_i^{-2} \quad (9.3.11)$$

特征函数的完备性参照文献 20 中的证明步骤在这里给出。由方程 (9.2.5) 的矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ -\dot{\lambda} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A & -B_2 B_2^T + \gamma^{-2} B_1 B_1^T \\ -C^T C & -A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (9.3.12)$$

可以定义下列算子

$$\mathcal{L} = -I \frac{d}{dt} + \begin{bmatrix} A & -B_2 B_2^T \\ -C^T C & -A^T \end{bmatrix} \quad (9.3.13a)$$

$$\mathcal{U} = \begin{bmatrix} 0 & -B_1 B_1^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.3.13b)$$

再根据式 (9.2.12) 及 (9.2.13), 对任意全状态向量函数  $v(t) = [x_v^T, \lambda_v^T]^T$  及  $\theta(t) = [x_\theta^T, \lambda_\theta^T]^T$  定义下列二次型泛函

$$\begin{aligned} \Pi_1(v, \theta) &= \frac{1}{2} \int_0^{t_f} v^T (J \mathcal{L}) \theta dt = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \begin{bmatrix} x_v \\ \lambda_v \end{bmatrix}^T (J \mathcal{L}) \begin{bmatrix} x_\theta \\ \lambda_\theta \end{bmatrix} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [\lambda_v^T \dot{x}_\theta + \lambda_\theta^T \dot{x}_v - \lambda_v^T A x_\theta - \lambda_\theta^T A x_v + \lambda_v^T B_2 B_2^T \lambda_\theta - \\ & \quad x_v^T C^T C x_v] dt - \frac{1}{2} x_v^T(t_f) S_f x_\theta(t_f) \end{aligned} \quad (9.3.14a)$$

及

$$\begin{aligned} \Pi_2(v, \theta) &= \frac{1}{2} \int_0^{t_f} v^T (J \mathcal{U}) \theta dt = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \begin{bmatrix} x_v \\ \lambda_v \end{bmatrix}^T (J \mathcal{U}) \begin{bmatrix} x_\theta \\ \lambda_\theta \end{bmatrix} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [\lambda_v^T B_1 B_1^T \lambda_\theta] dt \end{aligned} \quad (9.3.14b)$$

对于这里所讨论的问题, 其特征函数的完备性是指任意满足边界条件 (9.2.6) 的连续函数  $v(t)$  都可以表示为

$$\Pi_2(v, v) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 \quad (9.3.15)$$

其中

$$a_j = \frac{1}{2} \int_0^t [\lambda_{v,j}^1(t) B_1 B_1^T \lambda_v(t)] dt \quad (9.3.16)$$

这是由正交性定理和归一化条件得到的。

为证明(9.3.15), 首先考虑用前  $n$  阶特征函数逼近  $v(t)$ , 并令两者之差为

$$\rho_n(t) = v(t) - \sum_{j=1}^n a_j \varphi_j(t) \quad (9.3.17)$$

则显然有

$$\Pi_2[\varphi_j(t), \rho_n(t)] = 0, (j = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (9.3.18)$$

从而下列不等式成立

$$\begin{aligned} 0 &\leq \Pi_2[\rho_n(t), \rho_n(t)] = \\ &\Pi_2\left[v(t) - \sum_{j=1}^n a_j \varphi_j(t), v(t) - \sum_{j=1}^n a_j \varphi_j(t)\right] = \\ &\Pi_2[v(t), v(t)] - \sum_{j=1}^n a_j^2 = \\ &\Pi_2[\lambda_v(t), \lambda_v(t)] - \sum_{j=1}^n a_j^2 \end{aligned} \quad (9.3.19)$$

利用前面的正交性条件(9.3.11) 还可得到

$$\Pi_1[\varphi_j(t), \rho_n(t)] = 0 \quad (9.3.20)$$

基于上述关系及(9.3.14a) 可得

$$\begin{aligned} &\Pi_1[v(t), v(t)] = \\ &\Pi_1\left[\sum_{j=1}^n a_j \varphi_j(t), \sum_{j=1}^n a_j \varphi_j(t)\right] + \\ &2\Pi_1\left[\sum_{j=1}^n a_j \varphi_j(t) \rho_n(t)\right] + \Pi_1[\rho_n(t), \rho_n(t)] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Pi_1 \left[ \sum_{j=1}^n a_j \varphi_j(t), \sum_{j=1}^n a_j \varphi_j(t) \right] + \Pi_1[\rho_n(t), \rho_n(t)] = \\ & \sum_{j=1}^n \gamma_j^{-2} a_j^2 + \Pi_1[\rho_n(t), \rho_n(t)] \end{aligned} \quad (9.3.21)$$

因为  $\Pi_1[v(t), v(t)]$  是有界的<sup>[21]</sup>, 而且  $\sum_{j=1}^n \gamma_j^{-2} a_j^2$  为一正数, 所以  $\Pi_1[\rho_n(t), \rho_n(t)]$  必有上界, 再考虑到  $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n^{-2} = \infty$  以及特征值  $\gamma_{n+1}^{-2}$  满足的不等式

$$\gamma_{n+1}^{-2} \Pi_2[\rho_n, \rho_n] \leq \Pi_1[\rho_n, \rho_n] \quad (9.3.22)$$

必然有  $n \rightarrow \infty$  时

$$\Pi_2[v(t), v(t)] - \sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 = \Pi_2[\rho(t), \rho(t)] \rightarrow 0 \quad (9.3.23)$$

这就证明了(9.3.15)式, 即特征函数的完备性。

由于这些特征函数是完备的, 故任意全状态向量函数  $v(t)$  可以用特征解来展开

$$v(t) = \begin{Bmatrix} x_c(t) \\ \lambda_c(t) \end{Bmatrix} = \sum_j a_j \varphi_j(t) = \sum_j a_j \begin{Bmatrix} x_{\varphi_j}(t) \\ \lambda_{\varphi_j}(t) \end{Bmatrix} \quad (9.3.24)$$

其中  $a_j$  由(9.3.13)式定义。

需要说明的是, 特征解一定保证  $\Pi_2 = \int_0^t \lambda_{\varphi_j}^\top(t) B_1 B_1^\top \lambda_{\varphi_j}(t) dt > 0$ , 所以归一化条件可以成立。事实上, 特征解是从广义 Rayleigh 商(9.2.12) ~ (9.2.14) 导出的, 对于有限值  $j$ , 特征值  $\gamma_j^{-2}$  不会是无穷大, 表明  $\Pi_2$  不可能是零。

## 9.4 分散控制系统最优 $H_\infty$ 范数计算

现在基于模态综合的思想研究分散  $H_\infty$  控制系统最优范数的计算问题, 即基本特征值  $\gamma_{opt}^{-2}$  的计算。前文为表述简单起见, 各子

系统的基本特征值也用  $\gamma_{\text{opt}}^z$  表示。本节的  $\gamma_{\text{opt}}^z$  指的则是全系统的特征值。子系统的划分规则是将全系统的状态向量  $\mathbf{x}$  表示为子系统状态向量  $\mathbf{x}^{(i)}$  的直和,相应地对偶向量  $\lambda$  也是  $\lambda^{(i)}$  的直和,下面采用变分问题的直接法来求解。

因为变分原理(9.2.14)中有两类变量  $\mathbf{x}$  与  $\lambda$  独立地变分,并且对于泛函是取最小-最大(min-max),所以仅利用全部子系统的特征解来展开是不够的。通常所说的按特征解展开是基于一类变量自共轭算子的展开定理<sup>[20]</sup>,该定理表明第 1 个子系统的状态向量  $\mathbf{x}^{(1)}$  可以用其特征向量的状态向量部分  $\mathbf{x}_j^{(1)}$  来展开,同样第 1 个子系统的对偶向量  $\lambda^{(1)}$  可以用其特征向量的对偶向量部分  $\lambda_j^{(1)}$  来展开。但这个问题中两个展开式的系数是互相无关的,也就是说,状态向量与其对偶向量应分别展开,即

$$\mathbf{x}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}^{(1)} \\ \mathbf{x}^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_j b_j^{(1)} \mathbf{x}_j^{(1)} \\ \sum_k b_k^{(2)} \mathbf{x}_k^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (9.4.1a)$$

$$\lambda(t) = \begin{Bmatrix} \lambda^{(1)} \\ \lambda^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_j a_j^{(1)} \lambda_j^{(1)} \\ \sum_k a_k^{(2)} \lambda_k^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (9.4.1b)$$

根据线性组合原理,也可以将系数  $a^{(i)}$  的形函数取为了系统的全特征向量函数,于是

$$\mathbf{x}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}^{(1)} \\ \mathbf{x}^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_j (a_j^{(1)} + b_j^{(1)}) \mathbf{x}_j^{(1)} \\ \sum_k (a_k^{(2)} + b_k^{(2)}) \mathbf{x}_k^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (9.4.2a)$$

$$\lambda(t) = \begin{Bmatrix} \lambda^{(1)} \\ \lambda^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_j a_j^{(1)} \lambda_j^{(1)} \\ \sum_k a_k^{(2)} \lambda_k^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (9.4.2b)$$

相当于



$$\mathbf{v}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{v}^{(1)} \\ \mathbf{v}^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_j (a_j^{(1)} \boldsymbol{\varphi}_j + b_j^{(1)} \boldsymbol{\beta}_j^{(1)}) \\ \sum_k (a_k^{(2)} \boldsymbol{\varphi}_k + b_k^{(2)} \boldsymbol{\beta}_k^{(2)}) \end{Bmatrix} \quad (9.4.3)$$

其中  $a_j^{(1)}, a_k^{(2)}, b_j^{(1)}, b_k^{(2)}$  为待定参数, 这些参数由变分原理(9.2.14)来确定,  $\boldsymbol{\beta}_j^{(i)}$  表示对应于向量函数  $\boldsymbol{\beta}^{(i)} = \{\mathbf{x}^{(i)\top}, \mathbf{0}^\top\}^\top$  的第  $j$  阶特征函数 ( $i = 1, 2$ ).

公式(9.2.12)与(9.2.13)中的各项除  $A$  阵外, 都是各子系统独立的。因此大系统的  $\Pi_1$  与  $\Pi_2$  分别是各子系统的变分泛函  $\Pi_1^{(i)}$  与  $\Pi_2^{(i)}$  之和, 再加上  $A$  阵中含有  $\varepsilon$  的非对角子矩阵。这里先将  $\Pi_1^{(i)}$  与  $\Pi_2^{(i)}$  计算出来。理论上讲特征函数展开需要取无穷多项, 但实际上, 只需要取有限多项就可以了<sup>[16, 17]</sup>。设子系统 1 和 2 分别取  $n_{c1}$  和  $n_{c2}$  项展开, 相应的泛函为

$$\Pi_1^{(i)} = \int_0^t \left[ \lambda^{(i)\top} \dot{\mathbf{x}}^{(i)} - \lambda^{(i)\top} A_{ii} \mathbf{x}^{(i)} + \frac{1}{2} \lambda^{(i)\top} B_{2,ii} B_{2,ii}^\top \lambda^{(i)} - \frac{1}{2} \mathbf{x}^{(i)\top} C_n^\top C_n \mathbf{x}^{(i)} \right] dt - \frac{1}{2} \mathbf{x}^{(i)\top}(t_f) S_{fi} \mathbf{x}^{(i)}(t_f) \quad (9.2.12')$$

$$\Pi_2^{(i)} = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [\lambda^{(i)\top} B_{1,ii} B_{1,ii}^\top \lambda^{(i)}] dt \quad (9.2.13')$$

将  $\mathbf{x}^{(i)}, \lambda^{(i)}$  代入, 根据正交归一条件以及(9.3.4b)(9.3.5b), 可以导出

$$\begin{aligned} \Pi_1^{(i)} &= \sum_{j=1}^{n_{c1}} \left[ \gamma_j^{(i)} - a_j^{(i)^2} - \int_0^t \sum_{k=1}^{n_{c1}} \left[ (\mathbf{x}_j^{(i)\top} C_n^\top C_n \mathbf{x}_k^{(i)} / 2) \cdot (b_j^{(i)} b_k^{(i)}) \right] dt - \right. \\ &\quad \left. \sum_{k=1}^{n_{c1}} \left[ (\mathbf{x}_j^{(i)\top} S_{fi} \mathbf{x}_k^{(i)} / 2) \cdot (b_j^{(i)} b_k^{(i)}) \right] \right] = \\ &\quad \sum_j \gamma_j^{(i)} - a_j^{(i)^2} - \mathbf{b}^{(i)\top} C_c^{(i)} \mathbf{b}^{(i)} / 2 \end{aligned} \quad (9.4.4a)$$

其中

$$C_c^{(i)} = \int_0^{t_f} \mathbf{X}^{(i)\top} C_n^\top C_n \mathbf{X}^{(i)} dt = \mathbf{X}_f^{(i)\top} S_{fi} \mathbf{X}_f^{(i)}$$

而  $\mathbf{X}^{(i)} = [\mathbf{x}_1^{(i)}, \mathbf{x}_2^{(i)}, \dots, \mathbf{x}_{n_{ei}}^{(i)}]$  是  $i$  号子系统特征向量函数组成的子矩阵,  $\mathbf{X}_t^{(i)}$  是矩阵  $\mathbf{X}^{(i)}$  在  $t = t_i$  时的值,  $\mathbf{b}^{(i)} = \{b_1^{(i)}, b_2^{(i)}, \dots, b_{n_{ei}}^{(i)}\}^T$  是参数组成的待定向量。由于  $i$  号子系统的可控可观性,  $\mathbf{C}_t^{(i)}$  是对称正定矩阵<sup>[18]</sup>。又因为

$$\Pi_{2j}^{(i)} = \int_0^{t_i} [\lambda_j^{(i)T} \mathbf{B}_{1,m} \mathbf{B}_{1,m}^T \lambda_j^{(i)} / 2] dt = 1$$

所以有

$$\Pi_2^{(i)} = \sum_{j=1}^{n_{ei}} \Pi_{2j}^{(i)} \cdot a_j^{(i)^2} = \sum_j a_j^{(i)^2} \quad (9.4.4b)$$

其中上标  $(i)$  代表子系统号 ( $i = 1, 2$ ), 下标  $j$  代表特征解的阶次。

泛函中的子系统交互项为

$$\begin{aligned} \Pi_{1m} = & - \int_0^{t_i} [\lambda^{(1)T} \mathbf{A}_{12} \mathbf{x}^{(2)} + \lambda^{(2)T} \mathbf{A}_{21} \mathbf{x}^{(1)}] dt = \\ & - \epsilon \sum_{j=1}^{n_{e1}} \sum_{k=1}^{n_{e2}} [c_{jk}^{(12)} a_j^{(1)} (a_k^{(2)} + b_k^{(2)}) + c_{kj}^{(21)} a_k^{(2)} (a_j^{(1)} + b_j^{(1)})] \end{aligned} \quad (9.4.5)$$

其中

$$c_{jk}^{(12)} = \int_0^{t_i} [\lambda_j^{(1)T} \mathbf{A}_{12} \mathbf{x}_k^{(2)}] dt \quad (9.4.6a)$$

$$c_{kj}^{(21)} = \int_0^{t_i} [\lambda_k^{(2)T} \mathbf{A}_{21} \mathbf{x}_j^{(1)}] dt \quad (9.4.6b)$$

由此可组成矩阵  $\mathbf{C}^{(12)}$  与  $\mathbf{C}^{(21)}$ , 于是

$$\Pi_{1m} = - \epsilon [\mathbf{a}^{(1)T} \mathbf{C}^{(12)} (\mathbf{a}^{(2)} + \mathbf{b}^{(2)}) + \mathbf{a}^{(2)T} \mathbf{C}^{(21)} (\mathbf{a}^{(1)} + \mathbf{b}^{(1)})] \quad (9.4.5')$$

综合方程 (9.4.4) 与 (9.4.5) 给出整个系统的泛函

$$\Pi_1 = \Pi_1^{(1)} + \Pi_1^{(2)} + \Pi_{1m} \quad (9.4.7a)$$

$$\Pi_2 = \Pi_2^{(1)} + \Pi_2^{(2)} \quad (9.4.7b)$$

将两个子系统的待定参数组成未知向量

$$\mathbf{a} = \{\mathbf{a}^{(1)T}, \mathbf{a}^{(2)T}\}^T = \{a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \dots, a_{n_{e1}}^{(1)}; a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, \dots, a_{n_{e2}}^{(2)}\}^T \quad (9.4.8a)$$

$$\mathbf{b} = \{\mathbf{b}^{(1)^T}; \mathbf{b}^{(2)^T}\}^T = \{b_1^{(1)}, b_2^{(1)}, \dots, b_{n_{r1}}^{(1)}; b_1^{(2)}, b_2^{(2)}, \dots, b_{n_{r2}}^{(2)}\}^T \quad (9.4.8b)$$

有

$$\begin{aligned} \Pi_1 = & \sum_{j=1}^{n_{r1}} \gamma_j^{(1)-2} a_j^{(1)2} + \sum_{j=1}^{n_{r2}} \gamma_j^{(2)-2} a_j^{(2)2} - \frac{1}{2} \mathbf{b}^T \text{diag}[\mathbf{C}_c^{(1)}, \mathbf{C}_c^{(2)}] \mathbf{b} - \\ & \varepsilon \mathbf{a}^T \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{C}^{(12)} \\ \mathbf{C}^{(21)} & \mathbf{0} \end{bmatrix} (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \end{aligned} \quad (9.4.9a)$$

$$\Pi_2 = \sum_{j=1}^{n_{r1}} a_j^{(1)2} + \sum_{j=1}^{n_{r2}} a_j^{(2)2} \quad (9.4.9b)$$

由于全部子系统可控可观, 对于参数向量  $\mathbf{b}$  取最大可以先在  $\Pi_1$  中完成, 得到对  $\mathbf{a}$  的二次齐次型

$$\Pi_1(\mathbf{a}) = \mathbf{a}^T \mathbf{K} \mathbf{a} \quad (9.4.10a)$$

$$\Pi_2(\mathbf{a}) = \mathbf{a}^T \mathbf{a} \quad (9.4.10b)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K} = & \text{diag}[(\gamma_1^{(1)})^{-2}, \dots, (\gamma_{n_{r1}}^{(1)})^{-2}, (\gamma_1^{(2)})^{-2}, \dots, (\gamma_{n_{r2}}^{(2)})^{-2}] - \\ & \varepsilon \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{C}^{(12)} \\ \mathbf{C}^{(21)} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{C}^{(12)} \\ \mathbf{C}^{(21)} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_c^{(1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_c^{(2)} \end{bmatrix}^{-1} \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{C}^{(12)} \\ \mathbf{C}^{(21)} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (9.4.11)$$

然后只剩下对参数向量  $\mathbf{a}$  取最小。这样, 确定全系统分散  $H_\infty$  控制的最优参数  $\gamma_{\text{opt}}^{-2}$  成为下列特征值问题

$$\gamma_{\text{opt}}^{-2} = \min_{\mathbf{a}} \frac{\Pi_1(\mathbf{a})}{\Pi_2(\mathbf{a})} \quad (9.4.12)$$

由于  $\Pi_2(\mathbf{a})$  的特点, 这个问题可以直接用矩阵特征值算法求解。

## 9.5 分散控制系统算例

**例 1** 设两个子系统均为二维。系统参数如下:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.934 \\ 1.0 & 0.036 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.934 \\ 1.0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 1.0 & 2.0 \\ 3.0 & 4.0 \end{bmatrix}, \quad A_{21} = \begin{bmatrix} 2.0 & 1.0 \\ 3.0 & 2.0 \end{bmatrix}$$

$$C_{11} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.3 \end{bmatrix}, \quad C_{22} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.3 \end{bmatrix}$$

$$B_{1,11} = I_2, B_{1,22} = I_2, B_{2,11} = I_2, B_{2,22} = I_2$$

$$S_f = \mathbf{0}_4, \quad t_f = 1.6, \epsilon = 0.5$$

对每个子系统,分别计算前 11 阶特征函数,然后用模态组合法计算整体系统的特征值,前三阶特征值分别为

$$\gamma_1^{-2} = 1.00120; \quad \gamma_2^{-2} = 3.14202; \quad \gamma_3^{-2} = 7.43173$$

另外,按整体大系统计算得到的前三阶特征值分别为

$$\gamma_1^{-2} = 1.00348; \quad \gamma_2^{-2} = 3.29876; \quad \gamma_3^{-2} = 7.64488$$

可以发现两种方法计算的结果是相符的。当然  $H_\infty$  控制问题只需要最低阶特征值,即  $\gamma_{\text{opt}}^{-2} = \gamma_1^{-2}$ 。因此  $\gamma_{\text{opt}} = 0.999$ 。

**例 2** 本例中矩阵  $A$  和  $B_2$  参数取自文献 2 第 226 页的例题。

$$A_{11} = \begin{bmatrix} -1.0 & 0.5 \\ 0.1 & -2.0 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 & 0 \\ -0.5 & 0.2 & -0.1 \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0.1 & -0.2 \\ 0.4 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} -5.0 & 0.5 & -1.0 \\ 0 & -2.0 & 0 \\ -0.5 & 0 & -4.0 \end{bmatrix}$$

$$C_{11} = I_2, \quad C_{22} = I_3$$

$$B_{2,11} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}, B_{2,22} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}, B_{1,11} = I_2, B_{1,22} = I_3$$

$$S_{f11} = \mathbf{0}_2, S_{f22} = \mathbf{0}_3, t_f = 1.0, \epsilon = 1.0$$

对每个子系统,分别计算前 12 阶特征函数,然后用模态组合法计算整体系统的特征值,前三阶特征值分别为

$$\gamma_1^{-*} = 5.52606; \gamma_2^{-*} = 9.28535; \gamma_3^{-*} = 10.63458$$

当然也可以按整体大系统计算前三阶特征值

$$\gamma_1^{-*} = 5.52566; \gamma_2^{-*} = 9.29521; \gamma_3^{-*} = 10.63446$$

两种方法的结果是相符的。而  $\gamma_{\text{opt}} = 0.425$ 。

**例 3** 系统为 9 阶, 系统的构成如下所示

$$A = \begin{bmatrix} -A_{11} & \varepsilon A_{12} \\ \varepsilon A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.515 & 0 & 0 & 0 & -0.545 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -0.05 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3.33 & 3.33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5.21 & 0 & -12.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.425 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.05 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3.33 & 3.33 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5.21 & 0 & -12.5 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.425 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} -B_{2,11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_{2,22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 12.5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 12.5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = I_9, C = I_9, I_f = 0.5$$

首先取  $S_f = \mathbf{0}_9$  计算, 然后再取  $S_f = 0.1 \times I_9$  计算。对每个子系统分别计算前 15 阶特征函数, 再利用模态组合法计算整体系统的特

征值,对第一种末端条件,前三阶特征值分别为

$$\gamma_1^2 = 2.61857; \gamma_2^2 = 7.28467; \gamma_3^2 = 9.34617$$

而对人系统直接计算得到的结果是

$$\gamma_1^2 = 2.61857; \gamma_2^2 = 7.28467; \gamma_3^2 = 9.34617$$

因此  $\gamma_{\text{opt}} = 0.618$ 。对第二种末端条件,利用模态综合法得到的前三阶特征值分别为

$$\gamma_1^2 = 1.79135; \gamma_2^2 = 5.60858; \gamma_3^2 = 6.53211$$

直接计算大系统前三阶特征值的结果为

$$\gamma_1^2 = 1.79108; \gamma_2^2 = 5.59807; \gamma_3^2 = 6.53056$$

所以  $\gamma_{\text{opt}} = 0.747$ 。对两种不同的末端条件,两种方法的计算结果都是相符的。

**例 4** 现在考虑下列 6 阶系统

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \varepsilon A_{12} \\ \varepsilon A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1.0 & 0.5 & 1.0 & 0.6 & 0 \\ -2.0 & -3.0 & 1.0 & 0 & 0 & 1.0 \\ 0.5 & 1.0 & 0 & 2.0 & 1.0 & 0.5 \\ 0 & -0.5 & 1.0 & 3.0 & 0 & -0.5 \\ 1.0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 1.0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & -3.0 & -4.0 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} B_{2,11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_{2,22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.0 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = I_6, C = I_6, S_t = 0.1 \times I_6, t_f = 1.6$$

对每个子系统分别计算前 15 阶特征函数,再利用模态综合法计算

整体系统的前三阶特征值

$$\gamma_1^2 = 1.745\ 90; \gamma_2^2 = 4.174\ 16; \gamma_3^2 = 7.473\ 65$$

作为比较,直接计算大系统的前三阶特征值为

$$\gamma_1^2 = 1.745\ 63; \gamma_2^2 = 4.161\ 83; \gamma_3^2 = 7.478\ 45$$

因此系统的  $\gamma_{opt} = 0.757$ 。由上述几个算例可以发现,两种方法计算的结果是相符的,当然其间也有一些误差,因为模态综合法对每一个子系统只取了前十几阶特征模态,总会有一些误差。

## 9.6 分散 $H_\infty$ 滤波

$H_\infty$  滤波是  $H_2$  控制的对偶问题,可以将分散  $H_2$  控制问题中的一些方法用于解决分散  $H_\infty$  滤波问题。分散滤波在提高系统容错性、可靠性及鲁棒性等方面的诸多优势,使得分散滤波成为大系统分散控制中一个重要的研究方向<sup>[22]</sup>,而且分散滤波本身也是先进飞行器导航系统设计和大型空间结构状态估计中的核心问题<sup>[22,23]</sup>。目前,基于 Kalman 滤波理论的分散式滤波系统是解决分散滤波问题的主要方法<sup>[24~26]</sup>,但这类滤波方法对系统模型精度的要求比较高,而且要求外界干扰噪声信号的统计特性已知,否则难以达到预定的性能指标,甚至会产生较大的误差。由于  $H_\infty$  滤波器可以将外界干扰信号对估计误差的影响尽可能减小,且在一定的模型误差范围内仍能保持预定的性能指标<sup>[26]</sup>,人们开始考虑基于  $H_\infty$  理论的分散滤波系统设计方案<sup>[27,28]</sup>。文献 27,28 中所设计的分散  $H_\infty$  滤波器在  $\gamma$  趋向于无穷大时成为相应的分散 Kalman 滤波器,这一点与集中式  $H_\infty$  滤波器是类似的。文献 29,30 中的方法提供了各子系统独立设计,量测数据在各子系统并行处理的机制,可以在获得各子系统状态估计的基础上综合得到大系统的状态估计。这种方法可以保证系统的稳定性,但是不能保证整个滤波系统性能指标的最优性。

本节将首先介绍分散  $H_\infty$  滤波器的设计方法<sup>[29]</sup>, 然后利用本章前几节中的方法研究分散  $H_\infty$  滤波中的计算问题, 考虑下列线性定常系统的滤波问题

$$\dot{x} = Ax + w \quad (9.6.1)$$

其中  $x$  是  $n$  维状态向量,  $w$  是干扰向量, 对系统的第  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ) 组量测为

$$y_i = C_i x + v_i \quad (9.6.2)$$

其中  $y_i$  和  $v_i$  分别为  $m$  维量测向量和干扰向量。要求所设计的滤波器满足下列性能指标

$$\frac{\int_0^{t_f} (\hat{x} - x)^T Q (\hat{x} - x) dt}{(\hat{x}_0 - x_0)^T P_0^{-1} (\hat{x}_0 - x_0) + \int_0^{t_f} (w^T W^{-1} w + \sum_{i=1}^p v_i^T V_i^{-1} v_i) dt} < \gamma^2 \quad (9.6.3)$$

其中  $\hat{x}$  是对状态的估计, 加权矩阵  $W$  和  $V_i$  为正定阵,  $Q$  为半正定矩阵, 初始状态协方差阵  $P_0$  正定。满足性能指标式 (9.6.3) 的全局滤波器对系统全部状态的估计为

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + P \sum_{i=1}^p C_i^T V_i^{-1} (y_i - C_i \hat{x}), \hat{x}(0) = 0 \quad (9.6.4)$$

其中  $P$  由下列方程计算

$$\dot{P} = AP + PA^T + W + \gamma^{-2} P Q P - P \sum_{i=1}^p C_i^T V_i^{-1} C_i P, P(0) = P_0 \quad (9.6.5)$$

各局部滤波器对系统全部状态的估计为

$$\dot{\hat{x}}_i = A\hat{x}_i + P_i C_i^T V_i^{-1} (y_i - C_i \hat{x}_i), \hat{x}_i(0) = 0 \quad (9.6.6)$$

其中  $P_i$  由下列方程决定

$$\dot{P}_i = AP_i + P_i A^T + W + \gamma^{-2} P_i Q P_i - P_i C_i^T V_i^{-1} C_i P_i, P_i(0) = P_{i0} \quad (9.6.7)$$



各局部滤波器的滤波值与全局滤波器滤波值之间的关系为

$$\hat{x} = \sum_{i=1}^p (PP_i^{-1}\hat{x}_i + h_i) \quad (9.6.8)$$

其中  $h_i$  是由第  $i$  个局部滤波器决定的向量, 并满足下列方程

$$\begin{aligned} \dot{h}_i &= (A - P \sum_{i=1}^p C_i^T V_i^{-1} C_i) h_i + (PP_i^{-1} - I) WP_i^{-1} \hat{x}_i + \\ &\quad \gamma^{-2} PQ(I - PP_i^{-1}) \hat{x}_i, h_i(0) = 0 \end{aligned} \quad (9.6.9)$$

方程(9.6.8)表明全局滤波可以分解为局部滤波  $\hat{x}_i$  与  $h_i$  的线性组合。上述形式的分散滤波器中各局部滤波器虽然只利用了局部测量数据, 但仍然是基于整个系统模型的滤波, 给出的是全部状态的估计。下面介绍仅利用了系统模型的局部滤波器, 这种滤波器只给出对部分状态的估计, 其形式与上面介绍的分散  $H_\infty$  滤波器有所不同<sup>[28]</sup>。

将系统划分成  $p$  个子系统, 各子系统的状态和量测方程为

$$\dot{x}_i = A_i x_i + w_i \quad (9.6.10)$$

$$y_i = H_i x_i + v_i \quad (9.6.11)$$

其中  $w_i$  和  $v_i$  分别为  $m$  维过程噪声和  $r$  维量测噪声, 矩阵  $A_i$  和  $H_i$  是具有恰当维数的子系统矩阵。这里设局部量测噪声  $v_i$  与全局量测噪声相一致, 而局部过程噪声  $w_i$  与全局过程噪声不同, 这是由于子系统之间存在相互耦合影响。全局滤波器仍然为式(9.6.4)和(9.6.5), 各局部滤波器的形式为

$$\dot{\hat{x}}_i = A_i \hat{x}_i + P_i H_i^T V_i^{-1} (y_i - H_i \hat{x}_i), \hat{x}_i(0) = 0 \quad (9.6.12)$$

$$\begin{aligned} \dot{P}_i &= A_i P_i + P_i A_i^T + W_i + \gamma^{-2} P_i Q_i P_i - P_i H_i^T V_i^{-1} H_i P_i, P_i(0) = P_{i0} \\ &\quad (9.6.13) \end{aligned}$$

上式中的加权矩阵  $W_i$  和  $V_i$  正定,  $Q_i$  半正定。如果存在矩阵  $S_i$  使得

$$C_i = H_i S_i, (i = 1, 2, \dots, p) \quad (9.6.14)$$

则可将系统全部状态的滤波表示为

$$\hat{x} = \sum_{i=1}^p (G_i \hat{x} + h_i) \quad (9.6.15)$$

其中

$$\dot{h}_i = F h_i + (F G_i - \dot{G}_i - G_i F_i) \hat{x}_i, h_i(0) = 0 \quad (9.6.16)$$

$$F = A - P \sum_{i=1}^p C_i^T V_i^{-1} C_i \quad (9.6.17)$$

$$F_i = A_i - P_i H_i^T V_i^{-1} H_i \quad (9.6.18)$$

$$G_i = P S_i^T P_i^{-1} \quad (9.6.19)$$

而  $\dot{G}_i$  可以由式(9.6.13)及式(9.6.19)确定。

现在将系统(9.1.1)(9.1.2)写成更一般的形式,即式(9.6.20)及式(9.6.21),当然状态方程中不包含输入项  $u$  会使滤波问题的表述简单一些

$$\dot{x} = A x + B_1 w + B_2 u \quad (9.6.20)$$

$$z = L x \quad (9.6.21)$$

$$y = C x + D w \quad (9.6.22)$$

其中  $u$  是  $m_2$  维控制向量;  $w$  是  $m_1$  维干扰噪声向量;  $x$  是  $n$  维状态向量;  $y$  是  $q$  维量测向量,  $z$  是  $p$  维输出向量; 矩阵  $A, B_1, B_2, L, C, D$  是具有恰当维数的矩阵。  $(A, B_2), (A, B_1)$  可控,  $(A, C)$  可测。

有限时间  $[0, t_f]$  上的  $H_\infty$  滤波问题为: 在最不利于干扰噪声  $w$  的作用下, 寻找满足因果律的线性算子  $\mathcal{F}$ , 使估计误差  $\hat{z} - Lx$  的范数最小, 其中  $\hat{z}(t) = \mathcal{F}(y, u)$ , 即

$$\|\mathcal{F}\|^2 = \max_w \min_u \frac{\frac{1}{2} \int_0^{t_f} (\hat{z} - Lx)^T (\hat{z} - Lx) dt}{\frac{1}{2} \int_0^{t_f} w^T w dt + \frac{1}{2} (x_0 - \hat{x}_0)^T P_0^{-1} (x_0 - \hat{x}_0)} \quad (9.6.23)$$

分散滤波时将大系统分成  $s$  个子系统, 相应地状态向量  $x$  也分解为  $s$  个状态子向量  $x_i (i = 1, 2, \dots, s)$  的直和。本章中为简单起见, 设  $s = 2$ , 则系统矩阵和向量也相应地写成分块形式

$$x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad (9.6.24a)$$

$$z = \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix} \quad (9.6.24b)$$

$$y = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} \quad (9.6.24c)$$

$$u = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (9.6.24d)$$

$$w = \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} \quad (9.6.24e)$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \varepsilon A_{12} \\ \varepsilon A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad (9.6.25a)$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} B_{2,11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_{2,22} \end{bmatrix} \quad (9.6.25b)$$

$$B = \begin{bmatrix} B_{1,11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_{1,22} \end{bmatrix} \quad (9.6.25c)$$

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & L_{22} \end{bmatrix} \quad (9.6.25d)$$

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C_{22} \end{bmatrix} \quad (9.6.25e)$$

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D_{22} \end{bmatrix} \quad (9.6.25f)$$

出于讨论问题的需要,这里的子系统划分方式比式(9.6.10)具体一些。这样系统(9.6.20)~(9.6.22)可以分解为

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + \varepsilon A_{12}x_2 + B_{1,11}w_1 + B_{2,11}u_1 \quad (9.6.26a)$$

$$z_1 = L_{11}x_1 \quad (9.6.26b)$$

$$y_1 = C_{11}x_1 + D_{11}w_1 \quad (9.6.26c)$$

$$\dot{x}_2 = A_{22}x_2 + \epsilon A_{21}x_1 + B_{1,22}w_2 + B_{2,22}u_2 \quad (9.6.27a)$$

$$z_2 = L_{22}x_2 \quad (9.6.27b)$$

$$y_2 = C_{22}x_2 + D_{22}w_2 \quad (9.6.27c)$$

含  $\epsilon$  的项将两个子系统联系在一起, 如果取  $\epsilon = 0$ , 可得到两个完全独立的系统。因此可以先将它们独立分析, 然后再通过含  $\epsilon$  的项联系在一起。

## 9.7 $H_\infty$ 滤波子系统特征解

为表述简单, 忽略子系统下标, 任一子系统的  $H_\infty$  滤波问题都可导出下列变分问题<sup>[19]</sup>

$J =$

$$\int_0^t \left[ \lambda^T \dot{x} - \lambda^T \bar{A}x + \frac{1}{2}x^T (C^T C - \gamma^{-2} L^T L)x - \frac{1}{2}\lambda^T B B^T \lambda \right] dt + \frac{1}{2}x_0^T P_0^{-1} x_0, \delta J = 0 \quad (9.7.1)$$

其中

$$\bar{A} = A - B_1 D^T C \quad (9.7.2a)$$

$$B B^T = B_1 (I - D^T D) B_1^T \quad (9.7.2b)$$

由变分原理(9.7.1) 可得对偶方程

$$\dot{\lambda} = \bar{A}^T \lambda + B B^T \lambda \quad (9.7.3a)$$

$$\dot{\lambda} = (C^T C - \gamma^{-2} L^T L)x - \bar{A}^T \lambda \quad (9.7.3b)$$

及两端边值条件

$$\lambda_0 = P_0^{-1} x_0 \quad (9.7.4a)$$

$$\lambda_t = 0 \quad (9.7.4b)$$

变分原理(9.7.1) 可以写成

$$\delta(\Pi_1 - \gamma^{-2} \Pi_2) = 0 \quad (9.7.5)$$

其中

$$\Pi_1 = \int_0^{t_f} \left[ \lambda^T \dot{x} - \lambda^T \bar{A}x + \frac{1}{2} x^T C^T C x - \frac{1}{2} \lambda^T B B^T \lambda \right] dt + \frac{1}{2} x_0^T P_0^{-1} x_0 \quad (9.7.6)$$

$$\Pi_2 = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [x^T L^T L x] dt \quad (9.7.7)$$

变分方程式(9.7.5)可以写为

$$\gamma_{\text{opt}}^{-2} = \min_x \max_{\lambda} \frac{\Pi_1}{\Pi_2} \quad (9.7.8)$$

这是广义 Rayleigh 商,有两类变量  $x$  与  $\lambda$  参与变分。此滤波问题的 Riccati 微分方程为

$$\dot{P} = B B^T + \bar{A} P + P \bar{A}^T - P(C^T C - \gamma^{-2} L^T L)P, P(0) = P_0 \quad (9.7.9)$$

方程(9.7.3)的解满足  $x(t) = P(t)\lambda(t)$ , 对于两端齐次边界条件(9.7.4), 如果  $\gamma^{-2}$  不是特征值, 则 Riccati 方程的解  $P(t_f)$  并不奇异, 于是满足齐次边界条件的只有平凡解; 而当  $\gamma^{-2}$  是特征值  $\gamma_j^{-2}$  时,  $P(t_f)$  将是奇异矩阵, 这样可以找到非零向量  $x(t_f)$  对应于边界条件(9.7.4)。然后由  $x(t_f), \lambda(t_f)$  利用  $2^N$  算法将全状态的特征向量计算出来。即

$$\gamma_j^{-2}, \varphi_j(t) = \begin{Bmatrix} x_{\varphi_j}(t) \\ \lambda_{\varphi_j}(t) \end{Bmatrix}, j = 1, 2, 3, \dots \quad (9.7.10)$$

得到全部特征解后, 对任意初值条件及任意参数  $\gamma^{-2} < \gamma_{\text{opt}}^{-2}$ , 全状态向量都可以用全状态的特征向量函数(9.7.10)展开来求解。与  $H_\infty$  控制问题类似, 这里简单介绍特征向量函数的正交性。设有两个特征解  $\varphi_i(t)$  与  $\varphi_j(t)$  ( $i \neq j$ ), 它们分别满足方程

$$\dot{x}_{\varphi_i} = \bar{A}x_{\varphi_i} + B B^T \lambda_{\varphi_i} \quad (9.7.11a)$$

$$\dot{\lambda}_{\varphi_i} = (C^T C - \gamma_i^{-2} L^T L)x_{\varphi_i} - \bar{A}^T \lambda_{\varphi_i} \quad (9.7.11b)$$

$$\dot{x}_{\varphi_j} = \bar{A}x_{\varphi_j} + B B^T \lambda_{\varphi_j} \quad (9.7.12a)$$

$$\dot{\lambda}_{\varphi_j} = (C^T C - \gamma_j^{-2} L^T L)x_{\varphi_j} - \bar{A}^T \lambda_{\varphi_j} \quad (9.7.12b)$$

$\lambda_{\varphi_i}^\top$ , 左乘式(9.7.11a),  $\mathbf{x}_{\varphi_i}^\top$ , 左乘式(9.7.11b), 相减并积分得

$$\int_0^{t_f} [\lambda_{\varphi_i}^\top (\dot{\mathbf{x}}_{\varphi_i} - \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}_{\varphi_i} - \mathbf{B}\mathbf{B}^\top \lambda_{\varphi_i}) - \mathbf{x}_{\varphi_i}^\top \dot{\lambda}_{\varphi_i} + \mathbf{x}_{\varphi_i}^\top (\mathbf{C}^\top \mathbf{C} - \gamma_i^{-2} \mathbf{L}^\top \mathbf{L}) \mathbf{x}_{\varphi_i} - \mathbf{x}_{\varphi_i}^\top \bar{\mathbf{A}}^\top \lambda_{\varphi_i}] dt = 0 \quad (9.7.13)$$

分部积分并利用  $\lambda_0 = \mathbf{P}_0^{-1} \mathbf{x}_0, \lambda_f = 0$  可得

$$\int_0^{t_f} [\lambda_{\varphi_i}^\top \dot{\mathbf{x}}_{\varphi_i} + \lambda_{\varphi_i}^\top \dot{\mathbf{x}}_{\varphi_j} - \lambda_{\varphi_i}^\top \bar{\mathbf{A}} \dot{\mathbf{x}}_{\varphi_i} - \lambda_{\varphi_i}^\top \bar{\mathbf{A}} \dot{\mathbf{x}}_{\varphi_j} - \lambda_{\varphi_i}^\top \mathbf{B} \mathbf{B}^\top \lambda_{\varphi_i} + \mathbf{x}_{\varphi_j}^\top (\mathbf{C}^\top \mathbf{C} - \gamma_i^{-2} \mathbf{L}^\top \mathbf{L}) \mathbf{x}_{\varphi_i}] dt + \mathbf{x}_{\varphi_i}^\top(0) \mathbf{P}_0^{-1} \mathbf{x}_{\varphi_i}(0) = 0 \quad (9.7.14)$$

对式(9.7.13a)和式(9.7.13b)做类似运算得

$$\int_0^{t_f} [\lambda_{\varphi_j}^\top \dot{\mathbf{x}}_{\varphi_i} - \lambda_{\varphi_j}^\top \dot{\mathbf{x}}_{\varphi_j} - \lambda_{\varphi_j}^\top \bar{\mathbf{A}} \dot{\mathbf{x}}_{\varphi_i} - \lambda_{\varphi_j}^\top \bar{\mathbf{A}} \dot{\mathbf{x}}_{\varphi_j} - \lambda_{\varphi_j}^\top \mathbf{B} \mathbf{B}^\top \lambda_{\varphi_i} + \mathbf{x}_{\varphi_j}^\top (\mathbf{C}^\top \mathbf{C} - \gamma_j^{-2} \mathbf{L}^\top \mathbf{L}) \mathbf{x}_{\varphi_i}] dt + \mathbf{x}_{\varphi_i}^\top(0) \mathbf{P}_0^{-1} \mathbf{x}_{\varphi_i}(0) = 0 \quad (9.7.15)$$

式(9.7.14)与式(9.7.15)相减, 有

$$(\gamma_i^{-2} - \gamma_j^{-2}) \int_0^{t_f} \mathbf{x}_{\varphi_j}^\top \mathbf{L}^\top \mathbf{L} \mathbf{x}_{\varphi_i} dt = 0 \quad (9.7.16)$$

由此即导出对于非负对称矩阵  $\mathbf{L}^\top \mathbf{L}$  的正交性定理, 即不同特征值  $\gamma_i^{-2}$  与  $\gamma_j^{-2}$  所对应的全状态特征向量函数  $\boldsymbol{\varphi}_i(t)$  和  $\boldsymbol{\varphi}_j(t)$  对于非负对称矩阵  $\mathbf{L}^\top \mathbf{L}$  是正交的。

$$\int_0^{t_f} \mathbf{x}_{\varphi_j}^\top \mathbf{L}^\top \mathbf{L} \mathbf{x}_{\varphi_i} dt = 0, (i \neq j) \quad (9.7.17)$$

归一化条件则可以表示为

$$\frac{1}{2} \int_0^{t_f} [\mathbf{x}_{\varphi_i}^\top \mathbf{L}^\top \mathbf{L} \mathbf{x}_{\varphi_i}] dt = 1 \quad (9.7.18)$$

利用该正交性结果, 又得到

$$\int_0^{t_f} [\lambda_{\varphi_i}^\top \dot{\mathbf{x}}_{\varphi_i} + \lambda_{\varphi_i}^\top \dot{\mathbf{x}}_{\varphi_j} - \lambda_{\varphi_i}^\top \bar{\mathbf{A}} \dot{\mathbf{x}}_{\varphi_i} - \lambda_{\varphi_i}^\top \bar{\mathbf{A}} \dot{\mathbf{x}}_{\varphi_j} - \lambda_{\varphi_i}^\top \mathbf{B} \mathbf{B}^\top \lambda_{\varphi_i} + \mathbf{x}_{\varphi_j}^\top \mathbf{C}^\top \mathbf{C} \mathbf{x}_{\varphi_i}] dt + \mathbf{x}_{\varphi_i}^\top(0) \mathbf{P}_0^{-1} \mathbf{x}_{\varphi_i}(0) = 0, (i \neq j) \quad (9.7.19)$$

由归一化条件又有

$$\int_0^{t_f} [\lambda_{\varphi_i}^\top \dot{\mathbf{x}}_{\varphi_i} - \lambda_{\varphi_i}^\top \bar{\mathbf{A}} \dot{\mathbf{x}}_{\varphi_i} - \frac{1}{2} \lambda_{\varphi_i}^\top \mathbf{B} \mathbf{B}^\top \lambda_{\varphi_i} + \frac{1}{2} \mathbf{x}_{\varphi_i}^\top \mathbf{C}^\top \mathbf{C} \mathbf{x}_{\varphi_i}] dt +$$

$$\frac{1}{2} \mathbf{x}_{\varphi_i}^T(0) \mathbf{P}_i^{-1} \mathbf{x}_{\varphi_i}(0) = \gamma_i^{-2} \quad (9.7.20)$$

特征向量函数的完备性可按类似于 9.3 节中的步骤得到, 这里不再重复。这样任意全状态向量函数  $\mathbf{v}(t)$  就可以用特征函数展开

$$\mathbf{v}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_v(t) \\ \boldsymbol{\lambda}_v(t) \end{Bmatrix} = \sum_j a_j \boldsymbol{\varphi}_j(t) = \sum_j a_j \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{\varphi_j}(t) \\ \boldsymbol{\lambda}_{\varphi_j}(t) \end{bmatrix} \quad (9.7.21)$$

其中  $a_j$  是待定系数。根据正交性定理及归一化条件, 有

$$a_j = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [\mathbf{x}_{\varphi_j}^T(t) \mathbf{L}^T \mathbf{L} \mathbf{x}(t)] dt \quad (9.7.22)$$

## 9.8 分散滤波系统最优 $H_\infty$ 范数计算

在子系统特征解的基础上, 就可以利用模态组合法来计算分散滤波系统的最优  $H_\infty$  范数。将状态向量及其对偶向量分别展开为

$$\mathbf{x}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}^{(1)} \\ \mathbf{x}^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_j b_j^{(1)} \mathbf{x}_j^{(1)} \\ \sum_k b_k^{(2)} \mathbf{x}_k^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (9.8.1a)$$

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\lambda}^{(1)} \\ \boldsymbol{\lambda}^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_j a_j^{(1)} \boldsymbol{\lambda}_j^{(1)} \\ \sum_k a_k^{(2)} \boldsymbol{\lambda}_k^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (9.8.1b)$$

根据线性组合的原理, 也可以将系数  $a^{(i)}$  的形函数取为子系统的全特征向量, 于是

$$\mathbf{x}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}^{(1)} \\ \mathbf{x}^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_j b_j^{(1)} \mathbf{x}_j^{(1)} \\ \sum_k b_k^{(2)} \mathbf{x}_k^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (9.8.2a)$$

$$\lambda(t) = \begin{Bmatrix} \lambda^{(1)} \\ \lambda^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_j (a_j^{(1)} + b_j^{(1)}) \lambda_j^{(1)} \\ \sum_k (a_k^{(2)} + b_k^{(2)}) \lambda_k^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (9.8.2b)$$

其中,  $a_j^{(1)}, a_k^{(2)}, b_j^{(1)}, b_k^{(2)}$  为待定参数, 应当由变分原理(9.7.8) 来确定。

由式(9.6.26) ~ 式(9.6.27) 可知原系统矩阵的构成特点使得式(9.7.6) 与式(9.7.7) 中的各项除  $A$  阵外, 都是各子系统独立的。因此  $\Pi_1$  与  $\Pi_2$  的组成是各子系统的变分泛函  $\Pi_1^{(i)}$  与  $\Pi_2^{(i)}$  之和。再加上  $A$  的非对角块子矩阵。可以先将  $\Pi_1^{(i)}$  与  $\Pi_2^{(i)}$  计算出来。特征函数展开需要取无穷多项, 但实际计算中只需要取有限多项。设子系统 1 和 2 分别取  $n_{e1}$  和  $n_{e2}$  项展开

$$\begin{aligned} \Pi_1^{(i)} = & \int_0^t \left[ \lambda^{(i)\top} \dot{x}^{(i)} - \lambda^{(i)\top} \bar{A}_n x^{(i)} + \frac{1}{2} x^{(i)\top} C_n^\top C_n x^{(i)} - \right. \\ & \left. \frac{1}{2} \lambda^{(i)\top} B_n B_n^\top \lambda^{(i)} \right] dt + \frac{1}{2} x^{(i)\top}(0) P_0^{-1} x^{(i)}(0) \end{aligned} \quad (9.8.3)$$

$$\Pi_2^{(i)} = \frac{1}{2} \int_0^t x^{(i)\top} L_n^\top L_n x^{(i)} dt \quad (9.8.4)$$

将  $x^{(i)}, \lambda^{(i)}$  代入, 根据正交归一条件以及(9.7.11)(9.7.12) 可以导出

$$\begin{aligned} \Pi_1^{(i)} = & \sum_{j=1}^{n_{e1}} \left[ \gamma_j^{(i)} - b_j^{(i)^2} - \int_0^t \sum_{k=1}^{n_{e1}} \left[ (\lambda_j^{(i)\top} B_n B_n^\top \lambda_k^{(i)} / 2) \cdot (a_j^{(i)} a_k^{(i)}) \right] dt \right] = \\ & \sum_j \gamma_j^{(i)} - b_j^{(i)^2} - a^{(i)\top} C_\beta^{(i)} a^{(i)} / 2 \end{aligned} \quad (9.8.5)$$

其中

$$C_\beta^{(i)} = \int_0^t \Lambda^{(i)\top} B_n B_n^\top \Lambda^{(i)} dt$$

而  $\Lambda^{(i)} = [\lambda_1^{(i)}, \lambda_2^{(i)}, \dots, \lambda_{n_n}^{(i)}]$  是  $(i)$  号子系统特征向量函数组成的子矩阵,  $a^{(i)} = \{a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \dots, a_{n_n}^{(i)}\}^\top$  是参数组成的待定向量。 $(i)$  号子系



统的可控可观性使得  $C_i^{(i)}$  是对称正定矩阵。因为

$$\Pi_{2j}^{(i)} = \int_0^{t_f} [\mathbf{x}_j^{(i)\top} \mathbf{L}_n^T \mathbf{L}_n \mathbf{x}_j^{(i)} / 2] dt = 1$$

所以有

$$\Pi_2^{(i)} = \sum_{j=1}^{n_i} \Pi_{2j}^{(i)} \cdot b_j^{(i)^2} = \sum_j b_j^{(i)^2} \quad (9.8.6)$$

其中上标  $(i)$  代表子系统号, 下标  $j$  代表特征解阶次。

子系统交互项为

$$\begin{aligned} \Pi_{1m} = & - \int_0^{t_f} [\boldsymbol{\lambda}^{(1)\top} \mathbf{A}_{12} \mathbf{x}^{(2)} + \boldsymbol{\lambda}^{(2)\top} \mathbf{A}_{21} \mathbf{x}^{(1)}] dt = \\ & - \varepsilon \sum_{j=1}^{n_{e1}} \sum_{k=1}^{n_{e2}} [c_{jk}^{(12)} (a_j^{(1)} + b_j^{(1)}) b_k^{(2)} + c_{kj}^{(21)} (a_k^{(2)} + b_k^{(2)}) b_j^{(1)}] \end{aligned} \quad (9.8.7)$$

其中

$$c_{jk}^{(12)} = \int_0^{t_f} [\boldsymbol{\lambda}_j^{(1)\top} \bar{\mathbf{A}}_{12} \mathbf{x}_k^{(2)}] dt \quad (9.8.8a)$$

$$c_{kj}^{(21)} = \int_0^{t_f} [\boldsymbol{\lambda}_j^{(2)\top} \bar{\mathbf{A}}_{21} \mathbf{x}_k^{(1)}] dt \quad (9.8.8b)$$

由此可组成矩阵  $\mathbf{C}^{(12)}$  与  $\mathbf{C}^{(21)}$ , 于是

$$\Pi_{1m} = -\varepsilon [(\mathbf{a}^{(1)} + \mathbf{b}^{(1)})^T \mathbf{C}^{(12)} \mathbf{b}^{(2)} + (\mathbf{a}^{(2)} + \mathbf{b}^{(2)})^T \mathbf{C}^{(21)} \mathbf{b}^{(1)}] \quad (9.8.9)$$

综合方程(9.8.5)(9.8.6)与(9.8.9)给出总系统的泛函

$$\Pi = \Pi_1^{(1)} + \Pi_1^{(2)} + \Pi_{1m} \quad (9.8.10)$$

$$\Pi_2 = \Pi_2^{(1)} + \Pi_2^{(2)} \quad (9.8.11)$$

将两个子系统的待定参数组成未知向量

$$\mathbf{a} = \{\mathbf{a}^{(1)\top}; \mathbf{a}^{(2)\top}\}^T = \{a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \dots, a_{n_{e1}}^{(1)}; a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, \dots, a_{n_{e2}}^{(2)}\}^T \quad (9.8.12)$$

$$\mathbf{b} = \{\mathbf{b}^{(1)\top}; \mathbf{b}^{(2)\top}\}^T = \{b_1^{(1)}, b_2^{(1)}, \dots, b_{n_{e1}}^{(1)}; b_1^{(2)}, b_2^{(2)}, \dots, b_{n_{e2}}^{(2)}\}^T \quad (9.8.13)$$

$$\gamma = \text{diag}[(\gamma_1^{(1)})^{-2}, \dots, (\gamma_{n_{c1}}^{(1)})^{-2}, (\gamma_1^{(2)})^{-2}, \dots, (\gamma_{n_{c2}}^{(2)})^{-2}] \quad (9.8.14)$$

有

$$\begin{aligned} \Pi_1 = & b^T \gamma b - \frac{1}{2} a^T \text{diag}[C_{\beta}^{(1)}, C_{\beta}^{(2)}] a - \\ & \epsilon(a+b)^T \begin{bmatrix} 0 & C^{(12)} \\ C^{(21)} & 0 \end{bmatrix} b \end{aligned} \quad (9.8.15)$$

$$\Pi_2 = b^T b \quad (9.8.16)$$

由于全部子系统皆可控可观, 对参数向量  $a$  取最大可以先对  $\Pi_1$  完成, 得到  $b$  的二次齐次型, 有

$$\Pi_1(b) = b^T K b \quad (9.8.17a)$$

$$\Pi_2(b) = b^T b \quad (9.8.17b)$$

$$\begin{aligned} K = & \text{diag}[(\gamma_1^{(1)})^{-2}, \dots, (\gamma_{n_{c1}}^{(1)})^{-2}, (\gamma_1^{(2)})^{-2}, \dots, (\gamma_{n_{c2}}^{(2)})^{-2}] - \\ & \epsilon \begin{bmatrix} 0 & C^{(12)} \\ C^{(21)} & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \epsilon^2 \begin{bmatrix} 0 & C^{(12)} \\ C^{(21)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_c^{(1)} & 0 \\ 0 & C_c^{(2)} \end{bmatrix}^{-1} \\ & \begin{bmatrix} 0 & C^{(12)} \\ C^{(21)} & 0 \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (9.8.18)$$

然后就只有对于参数向量  $b$  取最小了。因此全系统  $H_\infty$  滤波的最优参数  $\gamma_{opt}^{-2}$  的计算又成为下列特征值问题

$$\gamma_{opt}^{-2} = \min_b \frac{\Pi_1(b)}{\Pi_2(b)} \quad (9.8.19)$$

## 9.9 分散滤波系统算例

例 1 两个子系统各为二维。大系统的各矩阵参数为

$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \\ 2.0 & 0.9 & 0.0 & 1.0 \\ 1.0 & 0.0 & 0.8 & 1.0 \\ 0.0 & 1.0 & 2.0 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.8 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$t_f = 0.8$$

首先对每个子系统计算,取前 20 阶特征函数利用模态综合法计算,所得前三阶特征值为

$$\gamma_1^{-2} = 1.02692, \gamma_2^{-2} = 1.41811, \gamma_3^{-2} = 2.20035$$

而作为一个大系统直接计算的前三阶特征值

$$\gamma_1^{-2} = 1.02683, \gamma_2^{-2} = 1.41311, \gamma_3^{-2} = 2.18469$$

因此分散滤波系统的最优  $H_\infty$  范数为  $\gamma_{\text{opt}} = 0.987$ 。计算中不需要  $B_0$ , 所以未列出其数据, 下一个例子与此相同。

**例 2** 两个子系统均为 5 阶系统。大系统矩阵参数为

$A =$

$$A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.545 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 3.0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -0.05 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3.33 & 3.33 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & -5.21 & 0 & -12.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 1 & 0.425 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ \hline 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.8 & 0.2 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & -4 & -0.5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & -5.33 & 0 & -2.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1 & 0.45 & 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 12.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$t_f = 0.5$$

分为两个子系统计算,取前 20 阶特征函数利用模态综合法计算,所得前三阶特征值为

$$\gamma_1^{-2} = 1.21709; \gamma_2^{-2} = 2.33924; \gamma_3^{-2} = 3.02109$$

而作为一个大系统直接计算的前三阶特征值

$$\gamma_1^{-2} = 1.21346; \gamma_2^{-2} = 2.3299; \gamma_3^{-2} = 3.01079$$

则分散滤波系统的最优  $H_\infty$  范数为  $\gamma_{\text{opt}} = 0.908$ 。

结构静力学与最优控制相模拟,也与 Kalman-Bucy 滤波相模

拟<sup>[11]</sup>,  $H_\infty$  控制与  $H_\infty$  滤波则与结构动力学相模拟<sup>[15]</sup>。本章的内容进一步说明, 子结构振动的模态综合法可应用于大系统分散  $H_\infty$  控制和  $H_\infty$  滤波系统的最优范数计算, 因此结构力学以及最优控制的许多方法可以相互借鉴、共同发展。

### 参考文献

- 1 Ho Y C, Mitter S K. Directions in Large-scale Systems: Many-person Optimization and Decentralized Control. New York: Plenum Press, 1976
- 2 Jamshidi M. Large-scale systems - Modeling, Control and Fuzzy Logic. New Jersey: Prentice-Hall, 1997
- 3 Cheng C F. Disturbances attenuation for interconnected systems by decentralized control. Int. J. Control, 1997, 66(2): 213~224
- 4 Date R A, Chow J H. A parametrization approach to optimal  $H_2$  and  $H_\infty$  decentralized control problems. Automatica, 1992, 29(2): 457~463
- 5 Veillette R J, Medanic, J V, Perkins W R. Design of reliable control systems. IEEE Trans. Automatic Control, 1992, 37(3): 290~304
- 6 Zhong W X, Zhong X X. Computational structural mechanics, optimal control and semi-analytical method for PDE. Computers & Structures, 1990, 37(6): 993~1004
- 7 Zhong W X, Howson W P, Williams F W.  $H_\infty$  control state feedback and Rayleigh quotient. Computer Methods in Appl. Mech. Eng., 2001, 191(3-5): 489~501
- 8 Zhong W X, Williams F W.  $H_\infty$  filtering with secure eigenvalue calculation and precise integration. Int. J. Numer. Meth. Eng., 1999, 46(7): 1017~1030
- 9 Zhong W X. Variational method and computation for  $H_\infty$  control. Appl. Math. and Mech., 2000, 21(12): 1407~1416
- 10 Zhong W X, Yang Z S. On the computation of the main eigenpairs of the continuous-time linear quadratic control problems. Appl. Math.

- and Mech. , 1991, 12(1): 45~50
- 11 钟万勰, 欧阳华江, 邓子辰. 计算结构力学与最优控制. 大连: 大连理工大学出版社, 1993
  - 12 Zhong W X, Williams F W. A precise time step integration method. Proc. Inst. Mech. Engrs. , Part C, Journal of Mechanical Engineering Science, 1994, 208(C6): 427~430
  - 13 钟万勰. 矩阵黎卡提方程的精细积分. 计算结构力学及其应用, 1994, 11(2): 113~119
  - 14 Zhong W X. The method of precise integration of finite strip and wave guide problems. In: Proc. of Int. Conf. on Computational Methods in Struct. and Geotech. Eng. , 1994, Hong Kong, Vol 1, 51~59
  - 15 Zhong W X. Precise integration of eigen-waves for layered media . In: Proc. of EPMESC 5 , 1995, Techno Press, Tacjon, Kcrea, Vol 2, 1209~1220
  - 16 Leung A Y T. Dynamic stiffness & sub-structures. London: Springer, 1993.
  - 17 王文亮, 杜作润. 结构振动与动力子结构分析. 上海: 复旦大学出版社, 1985
  - 18 Zhong W X, Williams F W, Bennett P N. Extension of the Wittrick-Williams algorithm to mixed variable systems . J. Vib. Acous. Trans. ASME, 1997, 119(3): 334~340
  - 19 钟万勰. 应用力学对偶体系. 北京: 科学出版社, 2002
  - 20 Courant R, Hilbert D. Methods of Mathematical Physics (Vol. I) . New York: Interscience Publishers Inc, 1953
  - 21 Arthurs A M. Complementary Variational Principles . Oxford: Clarendon Press, 1980
  - 22 胡寿松, 邹志勤. 大系统的分散滤波结构及容错应用. 数据采集与处理, 1991, Vol. 9, No. 1, 1~8
  - 23 Mallory G J W, Miller D W. Decentralized State Estimation for Flexible Space Structures. Journal of Guidance Control and Dynamics, 2000, Vol. 23, No. 4, 665~672

- 
- 24 Hashemipour H R, Roy S, Laub A J. Decentralized Structures for Parallel Kalman Filtering. IEEE Trans. Automatic Control, 1988, Vol. 33, No. 1, 88~94
  - 25 Carlson N A. Federated Square Root Filter for Decentralized Parallel Processes. IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems, 1990, Vol. 26, No. 3, 517~525
  - 26 Nagpal K M, Khargonekar P P. Filtering and Smoothing in an  $H_\infty$  Setting. IEEE Trans. Automatic Control, 1991, Vol. 36, No. 2, 152~166
  - 27 Jin S H, Park J B, Kim K K and Yoon T S. Krein Space Approach to Decentralized  $H_\infty$  State Estimation. IEE Proc. Control Theory and Application, 2001, Vol. 148, No. 6, 502~508
  - 28 Jang J, Speyer J L. Decentralized Game Theoretic Filters, Proceedings of American Control Conference, Baltimore, Maryland, June, 1994, 3379~3383
  - 29 Saff M, Guan Y. Decentralized State Estimation in Large-scale Interconnected Dynamical Systems, Automatica, 1992, Vol. 28, No. 1, 215~219
  - 30 Sundareshan M K, Elbanna R M. Design of Decentralized Observation Schemes for Large-scale Interconnected Systems: Some New Results, Automatica, 1990, Vol. 26, No. 4, 789~796



---

## 附录 线性系统最优跟踪问题

跟踪问题是控制工程中一类重要的问题,控制雷达天线跟踪人造地球卫星或其它飞行目标属于典型的跟踪问题。这类问题要求通过控制器的作用使系统的输出尽量接近所期望的轨线,并极小化给定的性能指标泛函。调节器问题是跟踪问题的一个特例,即零轨线的跟踪问题。线性定常系统二次型性能指标跟踪问题是最基本的问题,其最优控制律的构造需要求解 Riccati 微分方程和外部控制输入向量所满足的微分方程<sup>[1]</sup>。由于前者是非线性矩阵微分方程,后者是变系数线性微分方程,通常的方法求解它们比较复杂,本章将利用精细积分法求解这些微分方程。因为基于 LQG 理论所设计的跟踪系统的鲁棒性比较差,II. 控制理论也被用于研究具有鲁棒性的最优跟踪系统设计问题,本章将简单介绍这一问题,并把本书中所介绍的方法用于求解系统设计中的一些问题。

### A.1 LQ 最优跟踪

设所考虑的线性系统的状态方程和输出方程为

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0 \quad (\text{A.1.1})$$

$$y = Cx \quad (\text{A.1.2})$$

其中  $x$  为  $n$  维状态向量,  $y$  为  $m$  维输出向量,  $u$  为  $p$  维输入向量;  $A, B, C$  为相应维数的定常矩阵。并且  $(A, B)$  可控,  $(A, C)$  可观。最优跟踪问题是寻找最优控制律  $u(t)$ , 使系统的输出  $y(t)$  跟踪预期的轨线  $\tilde{y}(t)$ , 且使下列性能指标最小

$$J = \frac{1}{2}(\mathbf{y}_f - \tilde{\mathbf{y}}_f)^T \mathbf{S}_f(\mathbf{y}_f - \tilde{\mathbf{y}}_f) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{y}})^T \mathbf{Q}(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{y}}) + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}] dt \quad (\text{A. 1. 3})$$

其中  $\mathbf{Q}, \mathbf{S}_f$  为非负定矩阵,  $\mathbf{R}$  为正定矩阵, 这一性能指标要求在跟踪误差尽可能小的同时限制控制输入的幅度。

引入协态变量, 通过变分可得对偶方程

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\boldsymbol{\lambda} \quad (\text{A. 1. 4})$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\mathbf{C}^T\mathbf{Q}\mathbf{C}\mathbf{x} - \mathbf{A}^T\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{C}^T\mathbf{Q}\tilde{\mathbf{y}} \quad (\text{A. 1. 5})$$

边界条件为

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

$$\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \mathbf{C}^T\mathbf{S}_f\mathbf{C}\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{C}^T\mathbf{S}_f\tilde{\mathbf{y}}(t_f)$$

上述对偶方程可以由变分原理

$$J_c = \int_0^{t_f} (-\boldsymbol{\lambda}^T \dot{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{A}\mathbf{x} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\boldsymbol{\lambda} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^T \mathbf{C}^T\mathbf{Q}\mathbf{C}\mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{C}^T\mathbf{Q}\tilde{\mathbf{y}}) dt + \frac{1}{2}(\mathbf{y}_f - \tilde{\mathbf{y}}_f)^T \mathbf{S}_f(\mathbf{y}_f - \tilde{\mathbf{y}}_f) \quad (\text{A. 1. 6})$$

$$\delta J_c = 0$$

导出。后面将据此引入区段混合能。此跟踪问题的最优控制律为

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T[\mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t) - \mathbf{b}(t)] \quad (\text{A. 1. 7})$$

其中  $\mathbf{P}(t)$  是下列 Riccati 微分方程的解

$$\begin{aligned} -\dot{\mathbf{P}}(t) &= \mathbf{P}(t)\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{P}(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}(t) + \mathbf{C}^T\mathbf{Q}\mathbf{C} \\ \mathbf{P}(t_f) &= \mathbf{C}^T\mathbf{S}_f\mathbf{C} \end{aligned} \quad (\text{A. 1. 8})$$

而向量  $\mathbf{b}(t)$  则满足

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{b}}(t) &= -(\mathbf{A}^T - \mathbf{B}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}(t))\mathbf{b}(t) - \mathbf{C}^T\mathbf{Q}\tilde{\mathbf{y}}(t) \\ \mathbf{b}(t_f) &= \mathbf{C}^T\mathbf{S}_f\tilde{\mathbf{y}}(t_f) \end{aligned} \quad (\text{A. 1. 9})$$

最优控制作用下系统的状态方程为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}(t))\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{b}(t) \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \end{aligned} \quad (\text{A. 1. 10})$$

确定跟踪问题的最优控制律需要求解 Riccati 微分方程 (A. 1. 8) 及外部控制输入方程 (A. 1. 9)。虽然这一方程是变系数方程, 精细积分法仍可以在求解 Riccati 方程的同时给出其数值解。下面将首先引入此问题区段混合能的概念, 以此为基础介绍方程的求解。

## A. 2 区段混合能

### A. 2. 1 区段混合能的定义

根据变分原理 (A. 1. 6) 的形式, 定义区段  $(t_a, t_b)$  的混合能为<sup>[2]</sup>

$$V(x_a, \lambda_b) = \lambda_b^T x_b - \int_{t_a}^{t_b} (\lambda^T \dot{x} - \lambda^T A x - \frac{1}{2} x^T C^T Q C x + \frac{1}{2} \lambda^T B R^{-1} B^T \lambda + x^T C^T Q \hat{y}) dt \quad (A. 2. 1)$$

$V(x_a, \lambda_b)$  是  $x_a$  与  $\lambda_b$  的二次式, 可表示为

$$V(x_a, \lambda_b) = \lambda_b^T F x_a + \frac{1}{2} x_a^T E x_a - \frac{1}{2} \lambda_b^T G \lambda_b + \lambda_b^T r_x - x_a^T r_\lambda \quad (A. 2. 2)$$

其中  $E, G, F$  皆为  $n \times n$  矩阵,  $E^T = E, G^T = G$ , 这三个矩阵决定了混合能中的二次项。 $r_x$  和  $r_\lambda$  为  $n$  维向量, 决定混合能中的一次项。 $E, G, F$  只与系统阵  $A, B, C$  及加权阵  $R, Q$  有关, 而  $r_x$  和  $r_\lambda$  还与预期轨线  $\hat{y}(t)$  有关。注意本章中混合能定义式中各项符号与文献 3 中是有区别的, 那里所讨论的是 Kalman 滤波问题。

令  $\tau = t_b - t$ , 经过与文献 3 中类似的推导, 可以得到下面的微分方程

$$\frac{dE}{d\tau} = C^T Q C + A^T E + E A - E B R^{-1} B^T E \quad (A. 2. 3a)$$

$$\frac{dG}{d\tau} = F B R^{-1} B^T F^T \quad (A. 2. 3b)$$

$$\frac{dE}{d\tau} = F(A - BR^{-1}B^TE) \quad (A.2.3c)$$

$$\frac{dr_x}{d\tau} = FBR^{-1}B^Tr_\lambda \quad (A.2.4a)$$

$$\frac{dr_\lambda}{d\tau} = (A^T - EBR^{-1}B^T)r_\lambda + C^TQ\tilde{y} \quad (A.2.4b)$$

当  $t_a \rightarrow t_b$  时, 有初值条件

$$E \rightarrow 0, G \rightarrow 0, F \rightarrow I_n, r_x \rightarrow 0, r_\lambda \rightarrow 0 \quad (A.2.5)$$

其中  $I_n$  为  $n$  阶单位阵。设在  $(t_a, t_b)$  区段内,  $\tilde{y}(t)$  为线性变化, 则  $\tilde{y}(t)$  可以由  $Y_0 = I_q$  及  $Y_1 = \tau I_q$  矩阵的  $2q$  个列向量线性组合而成,  $I_q$  为  $q$  阶单位阵。从而可以将向量微分方程 (A.2.4) 转化为等价的矩阵微分方程。

$$\frac{dR_x}{d\tau} = FBR^{-1}B^TR_\lambda \quad (A.2.6a)$$

$$\frac{dR_\lambda}{d\tau} = (A^T - EBR^{-1}B^T)R_\lambda + C^TQ\tilde{Y} \quad (A.2.6b)$$

其中  $\tilde{Y}$  是  $\tilde{y}(t)$  的基底向量构成的矩阵。

将  $Y_0 = I_q$  代入上述方程中积分所得矩阵记作  $R_x^{(0)}(\tau)$ ,  $R_\lambda^{(0)}(\tau)$ , 即

$$\frac{dR_x^{(0)}}{d\tau} = FBR^{-1}B^TR_\lambda^{(0)} \quad (A.2.7a)$$

$$\frac{dR_\lambda^{(0)}}{d\tau} = (A^T - EBR^{-1}B^T)R_\lambda^{(0)} + C^TQI_q \quad (A.2.7b)$$

将  $Y_1 = \tau I_q$  代入上述方程中积分得到的矩阵记作  $R_x^{(1)}(0, \tau)$ ,  $R_\lambda^{(1)}(0, \tau)$ , 即

$$\frac{dR_x^{(1)}}{d\tau} = FBR^{-1}B^TR_\lambda^{(1)} \quad (A.2.8a)$$

$$\frac{dR_\lambda^{(1)}}{d\tau} = (A^T - EBR^{-1}B^T)R_\lambda^{(1)} + C^TQ\tau I_q \quad (A.2.8b)$$

方程 (A.2.3a)(A.2.4b) 时间逆向后分别对应于方程

(A.1.8) 和(A.1.9),但在初值条件上有差别。这里的微分方程形式与文献3中的方程是一致的,但因为是控制问题,所用的是一组时间逆向的方程,而文献3中的滤波问题用到的是一组时间正向的方程。上述方程都可以通过区段合并公式来求解,这是精细积分法求解的特点之一,下面给出区段合并公式。

### A.2.2 区段合并公式

微分方程(A.2.3)及(A.2.4)的数值求解用常规差分方法一般比较困难,方程(A.2.4)中的时变系数也增加了求解的复杂程度。按照精细积分方法,这些微分方程的解是区段混合能矩阵,相邻区段合并后的新区段混合能矩阵可以通过区段合并消元得到,递推进行可以得到整个区间内不同长度区段的混合能矩阵<sup>[2]</sup>。这些混合能矩阵就是微分方程在相应时刻的数值解。

图A.1所示相邻的两个区段 $(t_a, t_b)$ 及 $(t_b, t_c)$ 可以通过对 $x_b, \lambda_b$ 的消元合并成区段 $(t_a, t_c)$ ,其相应的矩阵 $E_c, G_c, F_c$ 可以由原来两个区段的混合能矩阵来表示。

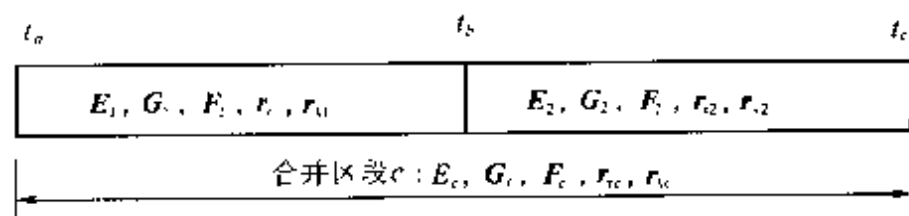


图 A.1 区段合并

从混合能的一般型(A.2.2)可以导出区段合并消元公式

$$E_c = E_1 + F_1^T (E_2^{-1} + G_1)^{-1} F_1 \quad (\text{A.2.9a})$$

$$G_c = G_2 + F_2 (G_1^{-1} + E_2)^{-1} F_2^T \quad (\text{A.2.9b})$$

$$F_c = F_2 (I + G_1 E_2)^{-1} F_1 \quad (\text{A.2.9c})$$

$$r_{\lambda_c} = \lambda_{\lambda_1} + F_1^T (I + E_2 G_1)^{-1} (r_{\lambda_2} - E_2 r_{x1}) \quad (\text{A.2.10a})$$

$$r_{x_c} = r_{x_2} + F_2 (I + G_1 E_2)^{-1} (r_{x1} + G_1 r_{\lambda_2}) \quad (\text{A.2.10b})$$

式(A.2.10)为向量形式,其矩阵形式为

$$R_{\lambda} = R_{\lambda_1} + F_1^T(I + E_2 G_1)^{-1}(R_{\lambda_2} - E_2 R_{x_1}) \quad (\text{A. 2. 11a})$$

$$R_{x_1} = R_{x_2} + F_2(I + G_1 E_2)^{-1}(R_{\lambda_1} - G_1 R_{\lambda_2}) \quad (\text{A. 2. 11b})$$

这些公式与文献 3 中的区段合并公式完全相同,这一点是由混合能矩阵  $V(x_s, \lambda_s)$  的一般型表达式(A. 2. 2) 导致的。

### A. 3 Riccati 方程与最优控制律的精细积分

将方程(A. 2. 3a) 及(A. 2. 4b) 的时间逆向就得到 Riccati 方程(A. 1. 8) 及外部控制输入方程(A. 1. 9), 差别仅在初值条件上。求它们的数值解可通过区段合并公式(A. 2. 9) 和(A. 2. 11) 进行。首先设定步长  $\eta$  及需进行计算的时间点

$$t_0 = 0, t_1 = \eta, t_2 = 2\eta, \dots, t_k = k\eta, \dots, t_f = k_f\eta \quad (\text{A. 3. 1})$$

求方程在这些时间点的数值解, 就是求长度分别为  $k_f\eta, \dots, k\eta, \dots, 2\eta, \eta$  的区段混合能矩阵。

在步长  $\eta$  的基础上, 再进一步将  $\eta$  划分为  $2^N$  段, 一般选用  $N = 20$ , 则  $2^N = 1048576$ , 于是步长成为

$$\tau = \eta/2^N \approx \eta \cdot 10^{-6} \quad (\text{A. 3. 2})$$

#### A. 3. 1 $\eta$ 区段矩阵计算

由于  $R_x^{(1)}(0, \tau)$  和  $R_\lambda^{(1)}(0, \tau)$  的特殊性, 需单独介绍其算法。首先对区段矩阵  $E(\tau), G(\tau), F(\tau), R_x^{(0)}(\tau), R_\lambda^{(0)}(\tau)$  作 Taylor 级数展开

$$E(\tau) \approx e_1\tau + e_2\tau^2 + e_3\tau^3 + e_4\tau^4 \quad (\text{A. 3. 3a})$$

$$G(\tau) \approx g_1\tau + g_2\tau^2 + g_3\tau^3 + g_4\tau^4 \quad (\text{A. 3. 3b})$$

$$F(\tau) \approx I + f_1\tau + f_2\tau^2 + f_3\tau^3 + f_4\tau^4 = I + F'(\tau) \quad (\text{A. 3. 3c})$$

$$R_x^{(1)}(\tau) \approx \rho_{x01}\tau + \rho_{x02}\tau^2 + \rho_{x03}\tau^3 + \rho_{x04}\tau^4 \quad (\text{A. 3. 4a})$$

$$R_\lambda^{(1)}(\tau) \approx \rho_{\lambda01}\tau + \rho_{\lambda02}\tau^2 + \rho_{\lambda03}\tau^3 + \rho_{\lambda04}\tau^4 \quad (\text{A. 3. 4b})$$

这组公式与微分方程的初值条件(A. 2. 5)是相容的。

将式(A. 3. 3)代入微分方程(A. 2. 3),对比各幂次有

$$e_1 = C^T Q C$$

$$e_2 = (f_1^T e_1 + e_1 f_1)/2$$

$$e_3 = (f_2^T e_1 + e_1 f_2 + f_1^T e_1 f_1)/3$$

$$e_4 = (f_3^T e_1 + e_1 f_3 + f_2^T e_1 f_1 + f_1^T e_1 f_2)/4 \quad (\text{A. 3. 5a})$$

$$g_1 = B R^{-1} B^T$$

$$g_2 = (A g_1 + g_1 A^T)/2$$

$$g_3 = (A g_2 + g_2 A^T - g_1 e_1 g_1)/3$$

$$g_4 = (A g_3 + g_3 A^T - g_2 e_1 g_1 - g_1 e_1 g_2)/4 \quad (\text{A. 3. 5b})$$

$$f_1 = A$$

$$f_2 = (A f_1 - g_1 e_1)/2$$

$$f_3 = (A f_2 - g_2 e_1 - g_1 e_1 f_1)/3$$

$$f_4 = (A f_3 - g_3 e_1 - g_2 e_1 f_1 - g_1 e_1 f_2)/4 \quad (\text{A. 3. 5c})$$

将式(A. 3. 4)代入微分方程(A. 2. 4),对比各幂次有

$$\rho_{x01} = 0$$

$$\rho_{x02} = g_1^T C^T Q/2$$

$$\rho_{x03} = (A \rho_{x02} + g_2 C^T Q)/3$$

$$\rho_{x04} = (A \rho_{x03} - g_1 e_1 \rho_{x02} + g_3 C^T Q)/4 \quad (\text{A. 3. 6a})$$

$$\rho_{\lambda01} = C^T Q$$

$$\rho_{\lambda02} = f_1^T C^T Q/2$$

$$\rho_{\lambda03} = (f_2^T C^T Q - e_1 \rho_{x02})/3$$

$$\rho_{\lambda04} = (f_3^T C^T Q - f_1^T e_1 \rho_{x02} - e_1 \rho_{x03})/4 \quad (\text{A. 3. 6b})$$

对于相邻的区段,其 $E(\tau)$ , $G(\tau)$ , $F(\tau)$ , $R_x^{(1)}(\tau)$ , $R_\lambda^{(1)}(\tau)$ 矩阵是相同的,因而由 $\tau$ 时段的矩阵通过执行区段合并公式 $N$ 次来计算 $\eta$ 时

段的相应矩阵并不需要其它的步骤,为避免损失有效数位,在这一计算阶段不能使用合并公式(A. 2. 9c),而要代之以

$$F'_c = F'_1 + F'_2 + F'_2 F'_1 - (I + F'_2)(E_2^{-1} G_1^{-1} + I)^{-1}(I + F'_1) \quad (\text{A. 2. 9c}')$$

因为矩阵  $R_x^{(1)}(0, \tau)$  和  $R_\lambda^{(1)}(0, \tau)$  满足的微分方程是式(A. 2. 8a)(A. 2. 8b),其中含有  $\tau$ , 所以对于相邻的两个区段  $(0, \tau)$  和  $(\tau, 2\tau)$ ,  $R_{x1}^{(1)}, R_{\lambda1}^{(1)}$  和  $R_{x2}^{(1)}, R_{\lambda2}^{(1)}$  是不相同的,但依据叠加性原理及预期轨线  $\tilde{y}(t)$  在  $\eta$  长区段内线性变化的前提,也可以得到适用于  $2^N$  算法的表达式。

对于  $(0, \tau)$  区段

$$R_{x1}^{(1)} = R_x^{(1)}(0, \tau) \quad R_{\lambda1}^{(1)} = R_\lambda^{(1)}(0, \tau) \quad (\text{A. 3. 7a})$$

对于  $(\tau, 2\tau)$  区段

$$R_{x2}^{(1)} = \tau R_x^{(0)}(\tau) + R_x^{(1)}(0, \tau) \quad R_{\lambda2}^{(1)} = \tau R_\lambda^{(0)}(\tau) + R_\lambda^{(1)}(0, \tau) \quad (\text{A. 3. 7b})$$

式(A. 3. 7)中的  $R_x^{(0)}(\tau), R_\lambda^{(0)}(\tau)$  当然由式(A. 3. 4)计算,而  $R_x^{(1)}(0, \tau)$  和  $R_\lambda^{(1)}(0, \tau)$  则由其 Taylor 展开式

$$R_x^{(1)}(0, \tau) \approx \rho_{x11}\tau + \rho_{x12}\tau^2 + \rho_{x13}\tau^3 + \rho_{x14}\tau^4 \quad (\text{A. 3. 8a})$$

$$R_\lambda^{(1)}(0, \tau) \approx \rho_{\lambda11}\tau + \rho_{\lambda12}\tau^2 + \rho_{\lambda13}\tau^3 + \rho_{\lambda14}\tau^4 \quad (\text{A. 3. 8b})$$

来计算。将式(A. 3. 8)代入(A. 2. 8),比较同幂次得到上式中的系数

$$\begin{aligned} \rho_{x11} &= 0 \\ \rho_{x12} &= 0 \\ \rho_{x13} &= g_1 C^T Q / 3 \\ \rho_{x14} &= (A \rho_{x13} + g_2 C^T Q) / 4 \\ \rho_{\lambda11} &= 0 \\ \rho_{\lambda12} &= C^T Q / 2 \\ \rho_{\lambda13} &= f_1^T C^T Q / 3 \end{aligned} \quad (\text{A. 3. 9a})$$



$$\rho_{\lambda+1} = (f_2^T C^T Q - e_1 \rho_{\lambda+1})/4 \quad (\text{A. 3. 9b})$$

计算  $\eta$  区段各矩阵  $E(\eta), G(\eta), F(\eta), R_x^{(0)}(\tau), R_\lambda^{(0)}(\tau), R_x^{(1)}(0, \tau), R_\lambda^{(1)}(0, \tau)$  的步骤为:

**step 1** 由式 (A. 3. 3)(A. 3. 4) 计算  $E(\tau), G(\tau), F'(\tau), R_x^{(0)}(\tau), R_\lambda^{(0)}(\tau)$  作为  $E, G, F', R_x^{(0)}, R_\lambda^{(0)}$ 。

**step 2** 由式 (A. 3. 8) 计算  $R_x^{(1)}(0, \tau)$  及  $R_\lambda^{(1)}(0, \tau)$

**step 3** For ( $iter = 0; iter < N; iter++$ ) {

$$\{E_1 = E_2 = E; G_1 = G_2 = G; F'_1 = F'_2 = F'; R_{x1}^{(0)} = R_{x2}^{(0)} = R_x^{(0)}; R_{\lambda1}^{(0)} = R_{\lambda2}^{(0)} = R_\lambda^{(0)}\}$$

{按式 (A. 3. 7a)(A. 3. 7b) 计算  $R_{x1}^{(1)}, R_{x2}^{(1)}, R_{\lambda1}^{(1)}, R_{\lambda2}^{(1)}$ ; 并执行  $\tau = \tau + \tau$ }

{按式 (A. 2. 9a)(A. 2. 9b)(A. 2. 9c')(A. 2. 11a)(A. 2. 11b) 计算新的  $E, G, F', R_x^{(0)}, R_\lambda^{(0)}$  及  $R_x^{(1)}(0, \tau), R_\lambda^{(1)}(0, \tau)$ }

**Step 4**  $F_c = I + F'$

### A. 3. 2 Riccati 方程的精细积分

计算出  $E(\eta), G(\eta), F(\eta)$  后, 就可以依据区段合并公式递推计算长度为  $2\eta, 3\eta \cdots k\eta$  区段的矩阵。设已计算了  $k\eta$  长的区段, 以它为区段 2, 而  $\eta$  长的区段为区段 1, 运用式 (A. 2. 9a) ~ (A. 2. 9c) 就可以算出  $(k+1)\eta$  的  $E, G, F$  直至  $k_l\eta$ 。但此时的  $E$  阵还不满足微分方程 (A. 1. 8) 的边界条件。为此设在  $t_f$  处有一集中区段, 该区段的混合能矩阵为  $E_2 = S_f, F_2 = I, G_2 = 0$ 。计算  $t_k = k\eta$  处 Riccati 方程 (A. 1. 8) 的解时, 以前面计算的长度为  $(k_l - k)\eta$  的区段作为区段 1 与该集中区段按下式进行合并消元

$$P(t) = E + F^T(S_f^{-1} + G)^{-1}F = E + F^T(I + S_f G)^{-1}S_f F \quad (\text{A. 3. 10})$$

$$F_p(t) = (I + GS_f)^{-1}F \quad (\text{A. 3. 11})$$

$$G_p(t) = (G^{-1} + S_f)^{-1} \quad (\text{A. 3. 12})$$

即可得到  $t_k = k\eta$  处 Riccati 方程 (A. 1. 8) 的解以及另外两个微分方程 (A. 2. 3b), (A. 2. 3c) 在初值条件变化后在  $t_k$  的解。令  $\frac{d}{d\tau} = -\frac{d}{dt}$ , 对式 (A. 3. 10) 两边求导, 并利用恒等式

$$\frac{d}{dt}(X^{-1}) = -X^{-1}\dot{X}X^{-1} \quad (\text{A. 3. 13})$$

及  $E, G, F$  所满足的微分方程 (A. 2. 5a) ~ (A. 2. 5c) 可以得到

$$\frac{dP}{dt} = -A^T P(t) - P(t)A - C^T Q C + P(t) B R^{-1} B^T P(t) \quad (\text{A. 3. 14})$$

这就是式 (A. 1. 8); 注意到当  $t = t_f$  时,  $E = G = 0, F = I$ , 由式 (A. 3. 10) 可知末端条件  $P(t_f) = S_f$  也得到满足, 所以按 (A. 3. 10) 计算的  $P(t)$  就是 Riccati 方程的解。

求解 Riccati 方程 (A. 1. 8) 按照下面的顺序: 首先按初值条件 (A. 2. 5) 求解式 (A. 2. 3a) ~ (A. 2. 3. c), 然后用 (A. 3. 10) 计算终端条件为  $S_f$  时的解。这样计算的好处是末端条件  $S_f$  是最后才进入计算过程, 当需要修改  $S_f$  进行重新设计时, 前半部分不用重算, 从而减少许多计算工作量。Riccati 方程 (A. 1. 8) 的精细积分解可表示为

$$P(t_k) = E((k_f - k)\eta) + F^T((k_f - k)\eta) [S_f^{-1} + G((k_f - k)\eta)]^{-1} F((k_f - k)\eta) \quad (\text{A. 3. 15})$$

### A. 3. 3 向量 $b(t)$ 的精细积分

为利用精细积分法求解外部控制输入的微分方程 (A. 1. 9), 首先考察式 (A. 3. 11) 中  $F_p$  所满足的微分方程。令  $\frac{d}{d\tau} = -\frac{d}{dt}$ , 利用恒等式 (A. 3. 13), 可以证明

$$\frac{dF_p}{dt} = -F_p[A - BR^{-1}B^TP(t)] \quad (\text{A. 3. 16})$$

进而导出

$$\frac{dF_p^T}{dt} = -[A^T - P(t)BR^{-1}B^T]F_p^T \quad (A.3.17)$$

与外部控制输入  $b(t)$  的微分方程比较可知  $F_p^T$  的各列向量满足方程(A.1.9)的齐次方程,并且由于  $F_p^T(t_i) = I$ ,方程(A.1.9)的齐次方程在初值条件为  $b(t_i)$  时的解为  $F_p^T(t)b(t_i)$ 。根据线性微分方程解的叠加性原理,再叠加上零初值条件时非齐次方程(A.1.9)的解就可以构成方程(A.1.9)完整的解。为此仍然设在  $t_i$  处有一集中区段,该区段的混合能矩阵为  $E_2 = S_i, F_2 = I, G_2 = 0, R_{x2} = 0, R_{\lambda 2} = 0$ ,将前面计算的长度为  $(k_i - k)\eta$  的区段作为区段1与之进行合并消元

$$R_{xp}(t) = (I + GS_i)^{-1}R_x \quad (A.3.18a)$$

$$R_{\lambda p}(t) = R_\lambda - F^T(I + S_iG)^{-1}S_iR_x = R_\lambda - F_p^TS_iR_x \quad (A.3.18b)$$

可以得到方程(A.2.6b)零初值条件时在  $t_k$  处的解。注意与文献[3]中相应公式的区别。令  $\frac{d}{d\tau} = -\frac{d}{dt}$ ,可以得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{\lambda p}}{\partial t} &= \frac{\partial R_\lambda}{\partial t} - \frac{\partial F_p^T}{\partial t}S_iR_x - F_p^TS_i\frac{\partial R_x}{\partial t} = \\ &= (A^T - EBR^{-1}B^T)R_\lambda + (A^T - PBR^{-1}B^T)F_p^TS_iR_x + \\ &+ F_p^TS_iFBR^{-1}B^TR_\lambda - C^TQ\tilde{Y} = \\ &= [A^T - (E + F_p^TS_iF)BR^{-1}B^T]R_\lambda + \\ &+ (A^T - PBR^{-1}B^T)F_p^TS_iR_x - C^TQ\tilde{Y} = \\ &= (A^T - PBR^{-1}B^T)(R_\lambda - F_p^TS_iR_x) - C^TQ\tilde{Y} = \\ &= (A^T - PBR^{-1}B^T)R_{\lambda p} - C^TQ\tilde{Y} \end{aligned} \quad (A.3.19)$$

与(A.1.9)比较可知,  $R_{\lambda p}$  的各列向量满足方程(A.1.9),又因为  $\tilde{y}(t)$  是由  $\tilde{Y}$  线性组合而成,所以  $b(t)$  可以由  $R_{\lambda p}$  按同样的方式线性组合构成,这就是零初值条件下非齐次方程的解。因为已知条件是

$b(t)$  在  $t_i$  的值为  $b(t_i)$ , 所以  $b(t)$  是逆向递推计算得到的。这时可以采用时间移轴的方法, 设已经积分到  $t_k$  处, 以  $P(t_k)$  构成区段混合能  $[P(t_k), 0, I]$  与单步长  $\eta$  的混合能矩阵  $[E(\eta), G(\eta), F(\eta)]$  进行合并运算。按式(A. 3. 11) 得到单步长的  $F_p(t_{k-1})$ , 按式(A. 3. 18b) 得到单步长的  $R_{\lambda p}^{(0)}(t_{k-1})$  及  $R_{\lambda p}^{(1)}(t_{k-1})$ 。以  $b(t_k)$  作为已知条件, 再向前积分一步。具体来讲, 外部控制输入向量  $b(t)$  在  $t_{k-1} = (k-1)\eta$  处的值可以表示为

$$b(t_{k-1}) = F_p^T(t_{k-1})b(t_k) + R_{\lambda p}^{(0)}(t_{k-1})\tilde{y}(t_k) - R_{\lambda p}^{(1)}(t_{k-1})[\tilde{y}(t_{k-1}) - \tilde{y}(t_k)] \quad (\text{A. 3. 20})$$

因为最优跟踪问题的预期轨线是完全知道的, 所以  $b(t)$  可以提前离线求出, Riccati 方程的解  $P(t)$  也是离线求出的。由式(A. 1. 7) 可知, 至此最优跟踪控制律所需数据已经完备, 只需将状态进行反馈即可构成闭环最优跟踪控制系统。

## A. 4 最优跟踪系统响应的精细积分

系统在最优控制作用下的状态方程为(A. 1. 10), 系统响应可以表示为

$$x(t) = \Phi(t, 0)x_0 + \int_0^t \Phi(t, t_d)BR^{-1}B^T b(t_d)dt_d \quad (\text{A. 4. 1})$$

上式中的状态转移矩阵  $\Phi(t, 0)$  也可以由前面精细积分的结果给出, 但由于非齐次项的存在, 在这里并不适用, 而应当由精细积分法给出单步长  $\eta$  的状态转移矩阵  $\Phi(t_k + \eta, t_k)$ 。然后采用梯形近似积分公式计算系统响应

$$\begin{aligned} x(t_{k+1}) &= \Phi(t_k + \eta, t_k)x(t_k) + \\ &\quad \int_{t_k}^{t_k+\eta} \Phi(t_k + \eta, t_d)BR^{-1}B^T b(t_d)dt_d \\ &\approx \Phi(t_k + \eta, t_k)x(t_k) + [\Phi(t_k + \eta, t_k)BR^{-1}B^T b(t_k) + \end{aligned}$$

$$BR^{-1}B^Tb(t_{k+1})]\eta/2 \quad (\text{A. 4. 2})$$

而单步长  $\eta$  的状态转移矩阵  $\Phi(t_k + \eta, t_k)$  按下式计算

$$\Phi(t_k + \eta, t_k) = [I + G(\eta)P(t_{k+1})]^{-1}F(\eta) \quad (\text{A. 4. 3})$$

这相当于利用  $t_{k+1} = t_k + \eta$  时刻的 Riccati 方程解  $P(t_{k+1})$  组成区段混合能矩阵  $[P(t_{k+1}), 0, I]$  与单步长  $\eta$  的混合能矩阵  $[E(\eta), G(\eta), F(\eta)]$  合并。有了单步长的状态转移矩阵就可以按照公式 (A. 4. 2) 计算系统的响应, 因为  $b(t)$  已经在前面计算出来了。

## A. 5 LQ 最优跟踪算例

这里给出两个对系统初值响应进行跟踪的数值算例。由于利用了精细积分法的特点, 最优跟踪系统的设计与仿真可同时完成。

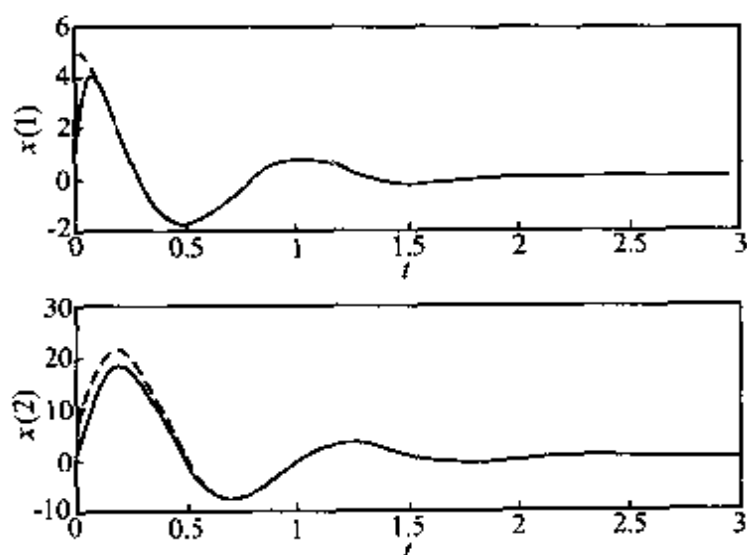
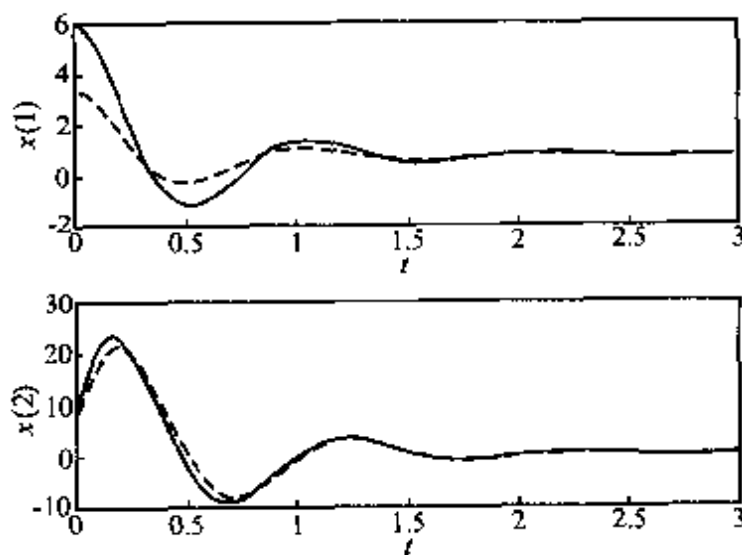
### 算例 1:

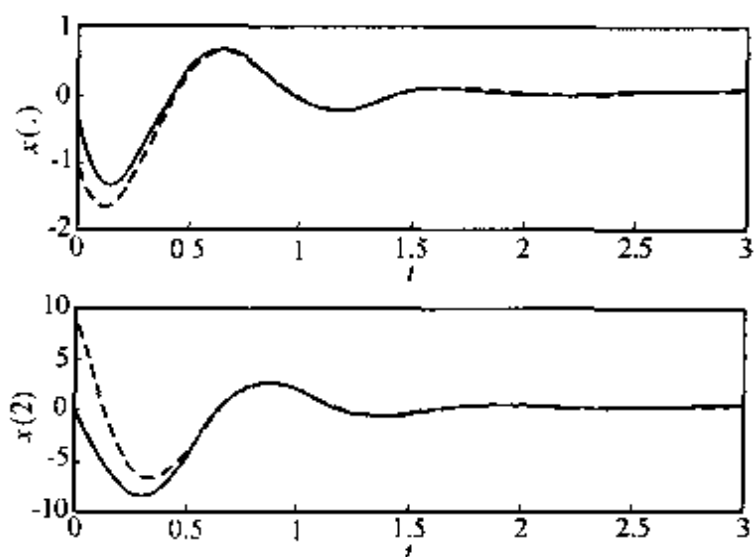
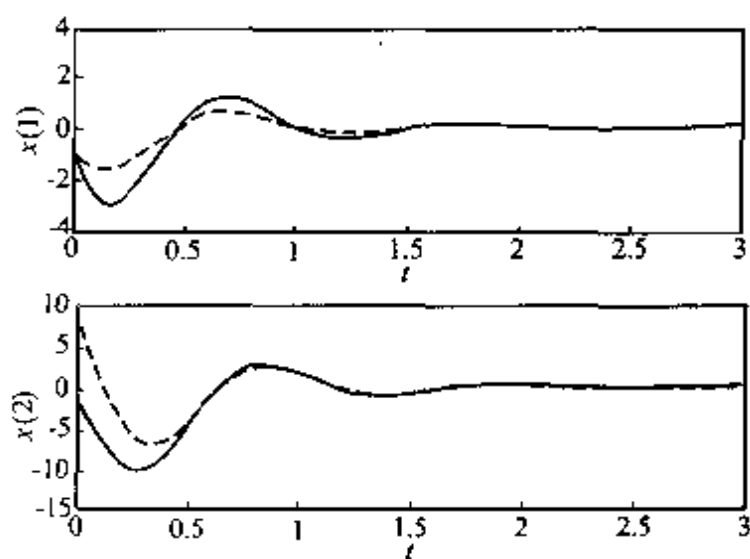
给定二阶系统数据如下

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 39.4 & -3.8 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad S_f = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \quad t_f = 3$$

分别对两种不同初值条件时系统的响应进行跟踪系统的设计与仿真。图 A. 2 中的虚线是初值条件为  $x_0 = (5, 5)^T$  时系统的响应曲线, 实线为零初值条件下系统在最优控制作用下的跟踪曲线。图 A. 4 中的虚线为初值条件为  $x_0 = (-1, 10)^T$  时系统的响应曲线, 实线为零初值条件下在最优控制作用下的跟踪曲线, 由图中可见在 0.5 秒内均可实现误差很小的跟踪。 $R$  是性能指标中的加权矩阵, 体现了对控制输入幅值的要求, 图 A. 3 和图 A. 5 分别给出了  $R$  变化后系统的跟踪曲线。

图 A.2  $x_0 = (5, 5)^T$  时系统的响应和跟踪曲线 ( $R = 10$ )图 A.3  $x_0 = (5, 5)^T$  时系统的响应和跟踪曲线 ( $R = 0.1$ )

图 A.4  $x_0 = (-1, 10)^T$  时系统的响应和跟踪曲线 ( $R = 10$ )图 A.5  $x_0 = (-1, 10)^T$  时系统的响应和跟踪曲线 ( $R = 0.1$ )

**算例 2:**

三阶系统数据如下:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 9 & -3.8 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_f = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \quad t_f = 2.5$$

同样分别对两种不同初值条件下系统的响应进行跟踪。图 A.6 中的虚线为初值条件为  $x_0 = (-5, 5, -5)^T$  时系统的响应曲线, 实

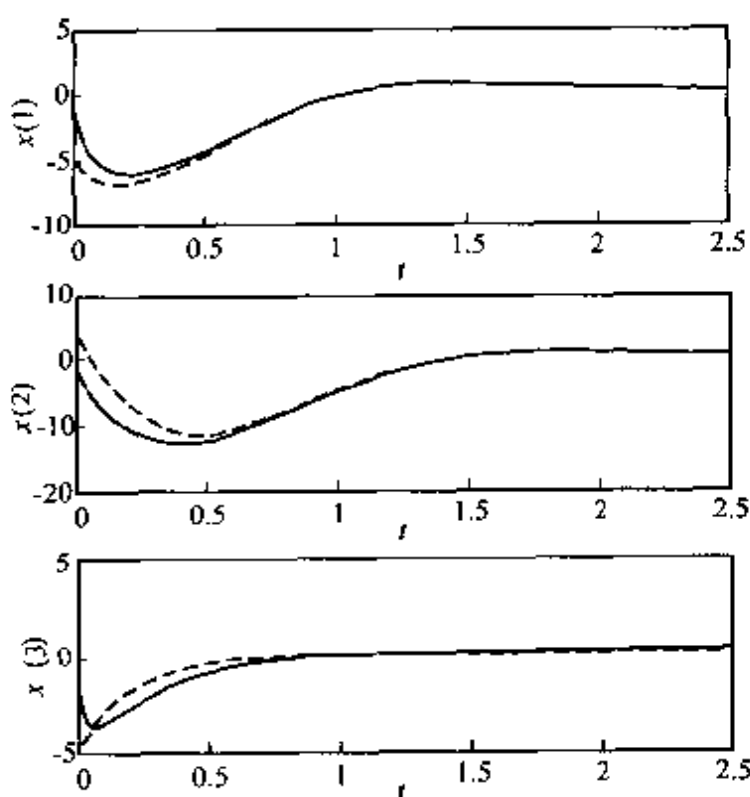


图 A.6  $x_0 = (-5, 5, -5)^T$  时系统的响应和跟踪曲线 ( $R = 10$ )



线为系统在零初值条件及最优控制作用下的跟踪曲线。图 A. 7 为初值条件  $x_0 = (10, 10, 10)^T$  时系统的响应曲线及跟踪曲线。图 A. 8 为初值条件  $x_0 = (-10, -10, -10)^T$  时系统的响应曲线及跟踪曲线。图 A. 9 和图 A. 10 则是加权矩阵  $R$  变化后系统的响应和跟踪曲线。

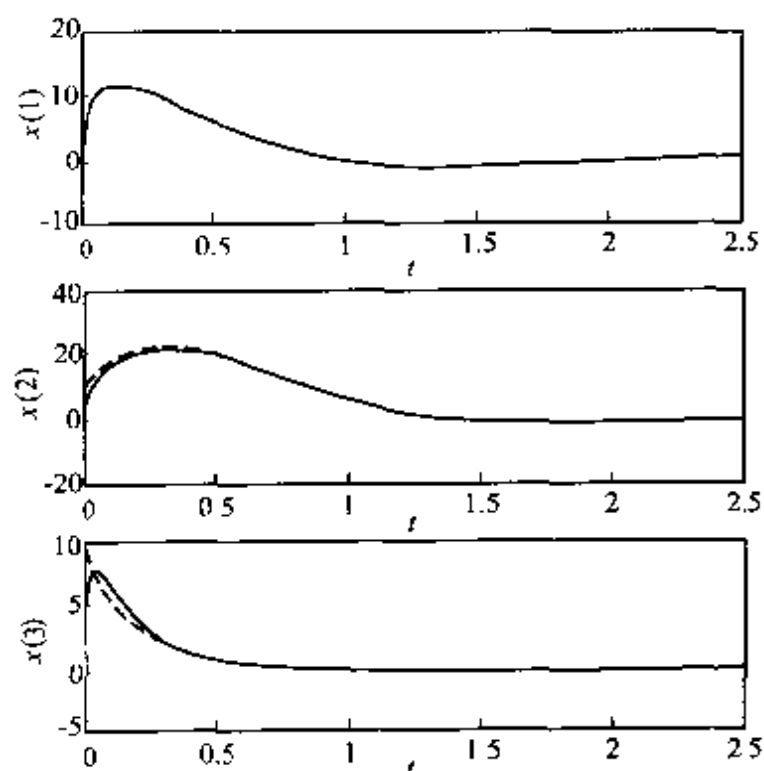
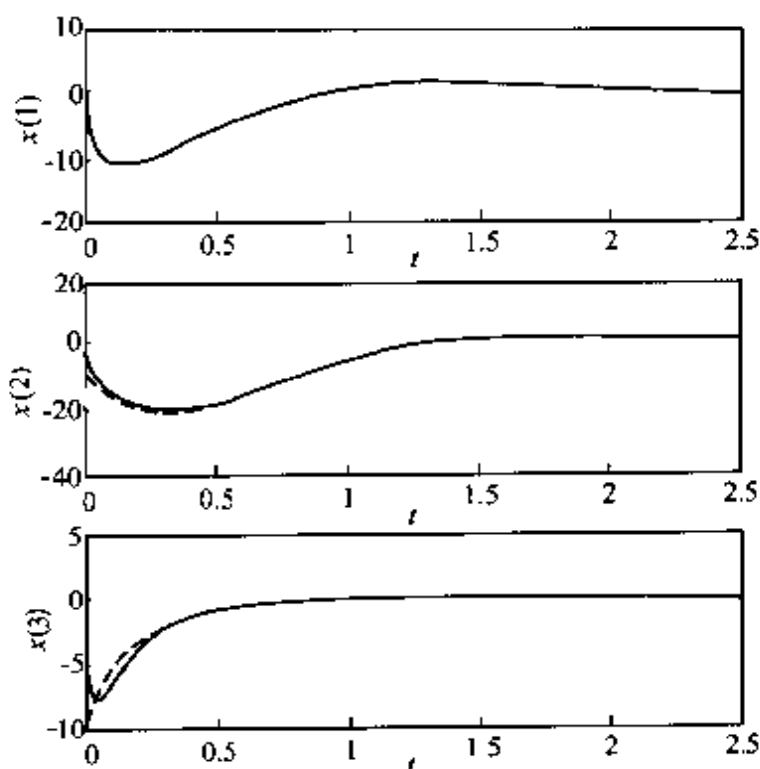
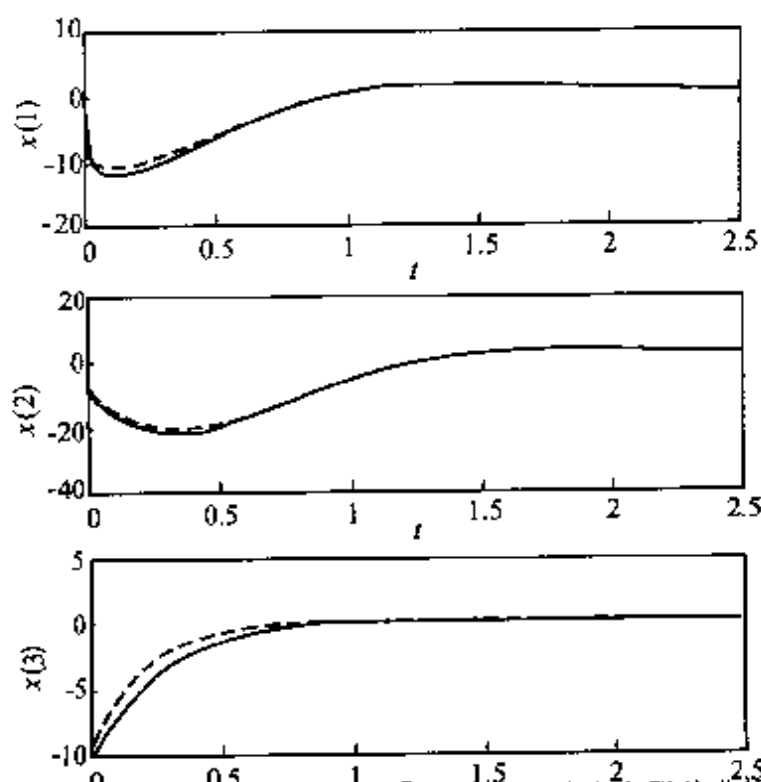


图 A. 7  $x_0 = (10, 10, 10)^T$  时系统的响应和跟踪曲线 ( $R = 10$ )

一个系统跟踪能力的强弱是由其闭环部分的动态特性所决定的,即状态的线性反馈部分所决定<sup>[1]</sup>。本章的算例是跟踪系统本身的初值响应,跟踪效果较好,而对于任意预期轨线及外界干扰影响下的跟踪问题,则不一定会有这样的结果。但这属于系统设计问题,这里不作更多的讨论,因为本章主要是介绍最优跟踪系统设计和仿真问题的算法。

图 A.8  $x_0 = (-10, -10, -10)^T$  时系统的响应和跟踪曲线 ( $R = 10$ )图 A.9  $x_0 = (-10, -10, -10)^T$  时系统的响应和跟踪曲线 ( $R = 1$ )

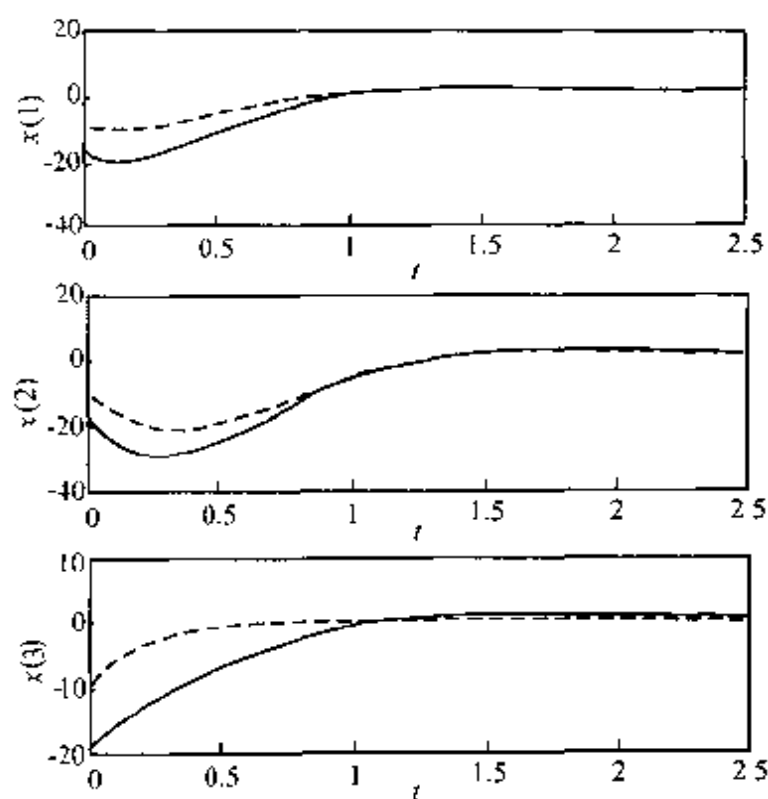


图 A.10  $x_0 = (-10, -10, -10)^T$  时系统的响应和跟踪曲线 ( $R = 0.1$ )

## A.6 $H_\infty$ 跟踪问题

在前文中已经看到,跟踪问题一般要求在极小化性能指标的前提下系统的输出尽量接近所希望的轨线。但由于按照 LQG 方法设计的最优跟踪系统鲁棒性较差,因此  $H_\infty$  优化方法被用来设计具有鲁棒性的跟踪系统<sup>[11]</sup>。通常的办法是把要跟踪的信号作为影响量测信号和目标函数的干扰,从而使跟踪问题转化为标准  $H_\infty$  设计问题进行求解。这一方法的主要缺点在于假设参考信号是任意的,但实际上对其都有一定程度的了解,所以在任意性假设基础上设计的系统往往过分强调了系统的跟踪特性,从而可能削弱系统的抗干扰能力。另一种方法是用博弈论的方法求解  $H_\infty$  跟踪问题,在此框架内可以按照特定的参考信号极小化性能指标泛函,因

而可以克服按照标准  $H_{\infty}$  设计问题求解所遇到的困难<sup>[4]</sup>。博弈论方法所得的  $H_{\infty}$  跟踪问题可解性条件与标准  $H_2$  设计问题的条件类似<sup>[5]</sup>, 都需要判断 Riccati 方程解的存在性, 只有求解该方程后方可构造控制系统。当然对于有限时间问题是 Riccati 微分方程, 而无限时间问题则要求解 Riccati 代数方程。

求解有限时间  $H_{\infty}$  跟踪问题时, 需要求解含参数  $\gamma$  的 Riccati 微分方程, 其中的  $\gamma$  是度量受控系统跟踪性能的一个指标。这里介绍用精细积分方法判断  $H_{\infty}$  跟踪问题可解性的过程, 具体来讲就是判断 Riccati 微分方程解是否存在并求解该方程, 同时计算临界最优参数值  $\gamma_{opt}$ 。

考虑如下线性定常系统的跟踪问题

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) + B_3 r(t), x(0) = x_0 \quad (\text{A. 6. 1})$$

$$z(t) = C_1 x(t) + D_{12} u(t) + D_{13} r(t) \quad (\text{A. 6. 2})$$

$$y(t) = C_2 x(t) + D_{21} w(t) + v(t) \quad (\text{A. 6. 3})$$

其中  $x(t)$  为  $n$  维状态向量,  $x_0$  是系统初始状态向量,  $w(t)$  为  $p$  维外扰向量,  $u(t)$  为  $m$  维控制向量,  $r(t)$  是已知或可测的参考信号,  $y(t)$  为  $k$  维量测向量,  $v(t)$  为  $k$  维量测噪声,  $z(t)$  为  $q$  维被控向量。 $z(t)$  是系统输出  $C_1 x(t) + D_{12} u(t)$  与参考轨迹  $-D_{13} r(t)$  之间的跟踪误差。

所谓  $H_{\infty}$  跟踪问题就是根据量测  $y(\cdot)$  及参考信号  $r(\cdot)$  设计区间  $[0, t_f]$  上的控制律  $u(\cdot)$ , 并尽可能地减小初始状态不确定性、干扰  $w(t)$  及测量噪声  $v(t)$  等因素对被控输出  $z(t)$  的影响。一般通过极小化下列泛函指标来达到要求

$$J(r, u, v, w, x_0) = \|z\|_2^2 - \gamma^2 \|w\|_2^2 + \|v\|_2^2 + \|x_0\|_R^2 \quad (\text{A. 6. 4})$$

其中  $\gamma > 0$  是表征受控系统跟踪性能的指标,  $R = R^T > 0$  是初始状态的加权函数, 可以表征初始状态不确定性与  $w(t)$ ,  $v(t)$  不确定性

之间的相对大小。式中  $\|x_c\|_{k-1} = x_0^T R^{-1} x_c$ , 而  $\|\cdot\|_2$  表示  $L_2[0, t_f]$  范数, 其定义为  $\|w\|_2 = \int_0^{t_f} w^T w d\tau$ 。下面引述文献 4 中给出的  $H_\infty$  跟踪问题可解性的条件, 为简明起见, 仅以参考信号完全已知的情况为例, 其它条件时的结论相同。

状态反馈  $H_\infty$  跟踪问题: 给定  $\gamma > 0$ , 系统 (1) 的所有状态可以完全不受干扰地测量, 则  $H_\infty$  跟踪问题可解的充要条件为 Riccati 微分方程

$$-\dot{X}(t) = (A - B_2 V_1 D_{12}^T C_1)^T X + X(A - B_2 V_1 D_{12}^T C_1) + C_1^T (I - D_{12}^T V_1 D_{12}^T) C_1 - X(B_2 V B_2^T - \gamma^{-2} B_1 B_1^T) X \quad (\text{A. 6. 5})$$

$$X(t_f) = 0$$

在区间  $[0, t_f]$  上的解存在, 且  $X(0) < \gamma^2 R^{-1}$ 。其中  $V_1 = (D_{12}^T D_{12})^{-1}$ 。

输出反馈  $H_\infty$  跟踪问题: 给定  $\gamma > 0$ , 系统 (A. 6. 1) ~ (A. 6. 3)  $H_\infty$  跟踪问题可解的充要条件为:

1. Riccati 微分方程 (A. 6. 5) 在区间  $[0, t_f]$  上的解存在, 且  $X(0) < \gamma^2 R^{-1}$ 。

2. Riccati 微分方程

$$\dot{Y}(t) = (A - B_1 D_{21}^T V_2 C_2) Y + Y(A - B_1 D_{21}^T V_2 C_2)^T + B_1 (I - D_{21}^T V_2 D_{21}^T) B_1^T - Y(C_2^T V_2 C_2 - \gamma^{-2} C_1^T C_1) Y \quad (\text{A. 6. 6})$$

$$Y(0) = R$$

在区间  $[0, t_f]$  上的解存在。其中  $V_2 = (I + D_{21} D_{21}^T)^{-1}$ 。

3.  $I - \gamma^{-2} X(t) Y(t) > 0, t \in [0, t_f]$

根据上述条件按给定参数  $\gamma$  求解两个 Riccati 微分方程, 即可利用解  $X(t), Y(t)$  构造相应的  $H_\infty$  跟踪系统控制器。 $H_\infty$  跟踪问题在参考信号  $r(t)$  为 0 时便退化为标准  $H_\infty$  控制问题, 即第八章中介绍的调节器问题, 两者的 Riccati 方程没有本质的差别。

状态反馈跟踪问题是输出反馈跟踪问题的一个特例, 因此这

里只介绍  $H_\infty$  输出反馈跟踪问题解的存在性判定及临界参数  $\gamma_{\text{opt}}$  的计算:

1. 给定初始参数  $\gamma$ 。

2. 利用精细积分方法结合扩展的 Wittrick-Williams 算法在检验两个 Riccati 方程 (A. 6. 5) (A. 6. 6) 解的存在性的同时求解该方程。只要有一个方程的解不存在, 就可判定跟踪问题不可解。若要计算可行的参数, 则减小  $\gamma$ , 再重复这一步。

3. 检验计算出的各个时刻  $X(t), Y(t)$  值是否符合谱半径条件, 即  $X(0) < \gamma^2 R^{-1}$  是否成立。如果满足这些条件, 可以增大  $\gamma$  后回到步骤 2 以寻求更接近临界值的参数。如果不满足条件, 减小  $\gamma$  值, 然后回到步骤 2, 再依次进行上面的步骤。

上述步骤循环执行就可以找到满足给定精度要求的临界值  $\gamma_{\text{opt}}$ , 并同时得到两个 Riccati 微分方程在区间  $[0, t_f]$  的解。

Riccati 方程的求解只需给定如下数据, 不需要方程 (A. 6. 1 ~ A. 6. 3) 中其余的数据。

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} & B_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & B_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ C_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & C_2 &= [1 \quad 1] \\ D_{12} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & D_{21} &= [0 \quad 1] & R &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

当区间为  $[0, 4]$  时, 临界参数为

$$\gamma_{\text{opt}} = 77.00612338$$

此时 Riccati 方程 (A. 6. 5) (A. 6. 6) 的部分解曲线如图 A. 11 及图 A. 12 所示。

如果区间长度取足够长, 则 Riccati 微分方程的解趋近于对应的代数方程的解, 此时的临界参数为

$$\gamma_{\text{opt}} = 77.27220988$$

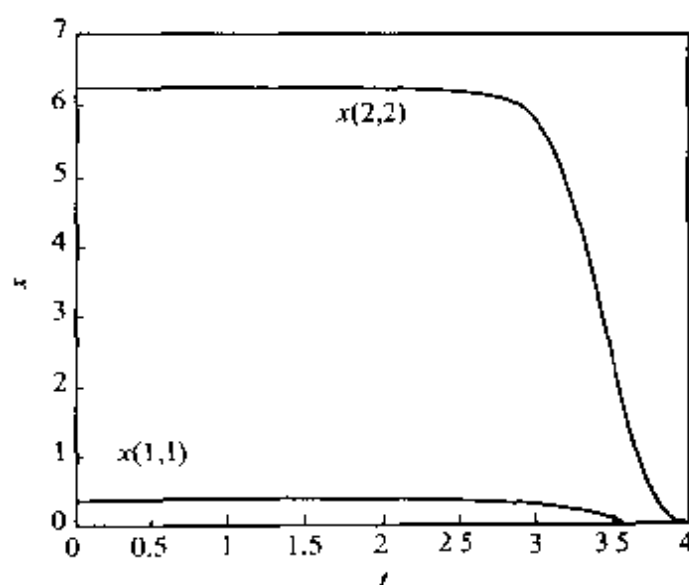


图 A.11 Riccati 方程(A. 6.5) 的解

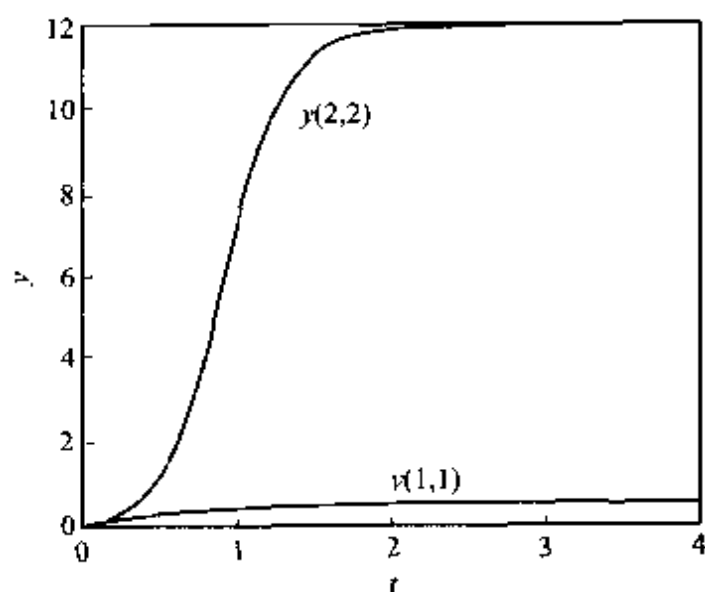


图 A.12 Riccati 方程(A. 6.6) 的解

而两个 Riccati 微分方程稳态时的解为

$$X(\infty) = \begin{bmatrix} 0.38984788 & -1.5014429 \\ -1.5014429 & 6.2456097 \end{bmatrix}$$

$$Y(\infty) = \begin{bmatrix} 0.48745129 & -0.75402262 \\ -0.75402262 & 11.981256 \end{bmatrix}$$

可以验证该解满足对应的 Riccati 代数方程,也可以将临界参数代入 Riccati 代数方程用其它方法求解,结果是一致的,这里不再列出。

求解  $H_\infty$  跟踪问题时需要判定解的存在性,这一点与  $H_2$  标准设计问题是相似的。对于有限时间问题,求解其中的 Riccati 微分方程、计算临界参数是其关键性步骤,精细积分方法可以有效地求解这一问题,这是精细积分方法求解  $H_\infty$  优化问题的又一个例子。

### 参考文献

- 1 解学书. 最优控制理论与应用. 北京:清华大学出版社,1986
- 2 钟万勰,欧阳华江,邓子辰. 计算结构力学与最优控制. 大连:大连理工大学出版社,1993
- 3 钟万勰. 卡尔曼-布西滤波的精细积分. 大连理工大学学报,1999,39(2): 191~200
- 4 Shaked U, de Souza C E. Continuous - Time Tracking Problems in an  $H_\infty$  Setting: A Game Theory Approach, IEEE Trans. Automat. Control, 1995,40(5): 841~852\=5 Green M, Limebeer D J N. Linear Robust Control. New Jersey;Prentice-Hall, 1995