

具 L_2 有界不确定性系统 线性二次鲁棒最优控制 ——LQL方法



陈善本 范颖晖 编



科学出版社
www.sciencep.com

(TP-2029_0101)

ISBN 7-03-011758-1

9 787030 117588 >

ISBN 7-03-011758-1

定 价：29.00 元

具 L_2 有界不确定性系统线性二次 鲁棒最优控制——LQL 方法

陈善本 范颖晖 著
张福恩 主审

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书反映了作者对具 L_2 有界不确定性线性系统时域鲁棒最优控制问题的研究工作,简要介绍了线性系统设计理论的 $W-H$, LQC 和 H_∞ 方法,阐述了 L_2 有界不确定性系统的线性二次最优控制——LQL 设计方法及其理论基础,利用“最劣环境下”求取最优控制策略的思想,以及在时域优化极大极小线性二次型指标设计鲁棒最优控制律,其目的是在时域处理 H_∞ 控制问题,并探讨了 LQL 方法用于实际系统设计的相关问题。

本书可供高等院校控制专业研究生、高年级本科生及教师学习参考,也可供从事控制理论研究的工作者,从事飞行器控制系统设计、精密系统控制以及工业过程控制系统设计的科研技术人员阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

具 L_2 有界不确定性系统线性二次鲁棒最优控制:LQL 方法/陈善本,范颖晖著.—北京:科学出版社,2004

ISBN 7-03-011758-1

I. 具… II. ①陈…②范… III. 不确定系统—鲁棒控制;最佳控制
IV. TP273

*中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 059718 号

责任编辑:林 鹏 钟 润/文案编辑:彭 威 姚 晖/责任校对:林青梅
责任印制:安春生/封面设计:王 浩

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004年1月第一版 开本:B5(720×1000)

2004年1月第一次印刷 印张:11 3/4

印数:1—1 000 字数:222 000

定价: 29.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换(新欣))

前　　言

控制系统设计的鲁棒性(robustness)问题是控制理论和实际系统应用中最富有挑战性的问题之一。一个不具有一定鲁棒性的控制系统在现实中几乎无法应用，这是由于环境和条件的变化使系统不可避免地要经受内部结构参数的变化振动和外部干扰的影响。另外，通常还存在系统数学建模中所忽略的因素。因此，对控制系统鲁棒设计的研究就显得十分重要。

几乎在反馈控制系统诞生的同时，人们就已经注意到系统鲁棒性的重要。在经典调节原理中，人们采用稳定裕度的概念来描述并设计系统，但并未升华为理论方法。到了20世纪50年代，出现了以Wiener为代表提出的Wiener-Hopf方法，60年代以Kalman为代表提出的LQG方法以及80年代以加拿大学者Zames为代表提出的 H_∞ 方法。从这些著名的理论方法所针对的不确定性来看，W-H方法和LQG方法是抑制白噪声类不确定性干扰的，而 H_∞ 方法则是抑制 L_2 有界类扰动的。 H_∞ 方法更有利于解决系统结构参数、模型不准等因素引起的不确定性，因而具有更为广泛的鲁棒性意义。然而，由于 H_∞ 方法是通过优化闭环系统传递函数的 H_∞ 范数来求取反馈控制，通常只是一个数值逼近解，所依据的理论及采用的算法都极为复杂，所以难以应用到实际系统设计中。近年来，国内外大量学者都在探索更简捷的途径来解决这一难点。

一般来讲，控制系统设计可在频域和时域并行进行，方法各有所长。通常在时域开环优化二次型指标求取反馈控制律要比在频域优化闭环传递函数简便，如LQG方法与W-H方法的比较。因此我们探索在时域解决 H_∞ 的对应问题时，注意到对具 L_2 有界不确定性系统在时域极大极小化二次型指标求取最优控制的问题与 H_∞ 问题具有一致性，从而提出LQL(linear quadratic L_2 bounded uncertainties)方法，这种方法与前述控制系统设计的W-H、LQG和 H_∞ 方法构成了系统的理论框架。就LQL方法本身的理论完善以及应用来说，尚有一系列相关的问题需要深入研究。本书的写作目的主要在于抛砖引玉，希望借此推动这一方向研究的深入。书中不当或错误之处愿垂听赐教。

本书的第一、二章由陈善本教授与范颖晖博士共同撰写，第二、四、五章由陈善本教授撰写，第六、七章以范颖晖博士为主撰写。陈善本教授负责全书结构与统稿。

哈尔滨工业大学张福恩教授审阅了全书初稿,中国科学院院士、东南大学冯纯伯教授自始至终对课题的研究和本书的写作给予了热情的关怀与指导,作者在此深表谢意,同时对张铨教授、李友善教授和李训经教授深表谢意。借此,作者还希望对国家自然科学基金委员会对作者的研究工作的资助表示衷心的感谢!对上海交通大学和科学出版社对本书出版的资助与支持表示衷心的感谢!对所有帮助和支持过本书所及研究工作的师长、同仁和朋友们表示衷心的感谢!

作 者

2002.12.15

于上海交通大学

目 录

第一章 绪论	1
1.1 控制系统设计理论的历史发展	1
1.2 不确定性系统鲁棒最优控制的发展与现状	4
1.3 本书的主要研究工作意义、写作思想及内容概要	10
第二章 具 L_2 有界不确定性系统线性二次鲁棒最优状态反馈控制问题	13
2.1 问题起源	13
2.2 微分对策思想的启示	15
2.3 受约束的二次泛函极值问题	16
2.4 具 L_2 有界不确定性系统线性二次鲁棒最优控制——maxmin 意义下的状态反馈解	19
2.5 具 L_2 有界不确定性系统线性二次鲁棒最优状态反馈控制——maxmin 意义下的给定轨线跟踪问题	31
2.6 具 L_2 有界不确定性系统线性二次鲁棒最优状态反馈控制——maxmin 意义下的常值跟踪问题	43
2.7 具 L_2 有界不确定性系统线性二次鲁棒最优状态反馈控制——maxmin 意义下的 PI 调节问题	47
2.8 具 L_2 有界不确定性系统线性二次鲁棒最优状态反馈控制的数值求解 ..	49
2.9 本章小结	53
第三章 具 L_2 有界不确定性系统线性二次鲁棒最优控制——LQL 方法	54
3.1 引言	54
3.2 线性二次 maxmin 鲁棒最优状态反馈	55
3.3 具 L_2 有界不确定性系统线性二次鲁棒最优控制——LQL 方法	57
3.4 maxmin 与 minmax 控制指标的等价性讨论	65
3.5 maxmin 状态估计- maxmin 反馈控制闭环系统设计的 LQL 方法 ..	71
3.6 本章小结	80
第四章 一般代数 Riccati 方程与 H_∞ 问题状态反馈的存在性质	82
4.1 一般代数 Riccati 方程解的存在性已有结论及其推论	82
4.2 从微分方程到代数方程解的存在性讨论	86

4.3 一个简化的等价问题	95
4.4 H_∞ 问题状态反馈解的存在性质	96
4.5 本章小结	101
第五章 线性二次型指标下的最优输出反馈问题	102
5.1 问题提出	102
5.2 确定性系统 LQ 指标下的静态最优输出反馈问题	103
5.3 确定性单入单出二阶系统 LQ 最优输出反馈解	110
5.4 不确定性系统 maxmin 鲁棒最优静态输出反馈问题	117
5.5 不确定性系统 maxmin 鲁棒最优动态输出反馈问题	126
5.6 本章小结	130
第六章 LQL 方法与 H_∞ 方法应用设计比较	131
6.1 引言	131
6.2 H_∞ 控制综合	131
6.3 H_∞ 方法与 LQL 方法之间的关系	134
6.4 LQL 方法与 H_∞ 方法应用于 HIT-3T2 型三轴仿真转台上的对比研究 ..	139
6.5 本章小结	154
第七章 控制系统 LQL 方法优化设计软件包	156
7.1 引言	156
7.2 模块结构	157
7.3 功能和特点	157
7.4 设计流程及使用说明	159
7.5 本章小结	164
结束语	165
参考文献	167

第一章 绪 论

1.1 控制系统设计理论的历史发展

迄今,控制理论经历了经典控制理论和现代控制理论两个重要的发展阶段。

经典控制理论是在第二次世界大战前后发展起来的。它利用微分方程描述动态系统的运动规律,应用拉普拉斯变换等工程数学工具求解微分方程。在初始条件为零的情况下建立动态系统的传递函数,采用频率法与根轨迹法等工程方法在频域与时域中分析动态系统的行为与品质。经典控制理论在分析与综合单输入单输出(SISO)、线性、定常、集中参数系统时是行之有效的^[1]。

随着生产与科学技术的发展,特别是航海、航空和航天技术的发展,控制系统日趋复杂,人们对控制系统精度的要求日益提高。经典控制理论逐渐暴露出它的局限性:首先是不适应快速变化的系统,且以往在传递函数特性的分析中所得到的结论,在多输入多输出(MIMO)系统中变得很复杂而难以应用;其次,传递函数只是系统动态行为的外部描述,难以甚至不能充分有效地揭示出系统内部各物理量的运动规律与本质特征;第三,频率法本身是一种近似的工程方法,带有试探的性质,当系统很复杂、精度要求很高时,用来综合系统很难获得令人满意的结果。于是,出现了现代控制理论。

现代控制理论是在 20 世纪 50 年代末和 60 年代初发展起来的,它在状态空间中利用状态方程和输出方程来描述动态系统的运动规律,充分有效地揭示了动态系统内部的运动规律和本质特征。另一方面,利用微分方程和矩阵等数学工具来求解状态方程,分析系统的动态行为,确定系统的控制规律,方法简便、灵活、准确,具有实时性。现代控制理论既适用于 SISO、线性、定常、集中参数控制系统,又适用于 MIMO、非线性、时变、分布参数控制系统,应用范围很广。

现代控制理论的一个突出成就是最优控制理论的形成和发展。Bellman 在 1953~1957 年,依据最优化原理,发展了变分法中的 Hamilton-Jacobi 理论,创立了动态规划。同时,庞特里雅金等学者又于 1956~1958 年逐步创立了最大值原理,解决了闭域上的变分问题,从而奠定了最优控制的理论基础。之后,Kalman 提出了一系列有关状态变量的重要概念,即可控性、可观性、最优线性二次状态反馈(LQSF),进一步将 Wiener 滤波进行了发展,给出了最优状态估计,即 Kalman 滤波;在此基础上,出现了最优控制 Wiener-Hopf-Kalman(WHK)理论^[2]。文献[3]在解决

系统极点配置、反馈镇定的同时,将 Lyapunov 方法与动态规划结合起来研究了二次型最优控制的存在惟一性、最优反馈的线性律及最优指标满足的代数 Riccati 方程的求解问题,其解法也是一种求解 Lyapunov 方程基础上的迭代法。

最优控制设计中具代表性的是以最优调节和 Kalman 滤波为中心的 LQG 反馈控制系统优化设计方法。在外界干扰信号能表示成白噪声模型或白噪声经过滤波后的噪声模型时,LQG 是一种很理想的设计方法,在很多实际控制工程中,特别是在航海、航空和航天技术领域,LQG 设计取得了相当的成功。

然而 LQG 也有其不完善之处。它的设计是基于系统的精确数学模型,而与实际系统总是存在一定的差距,这也就是所谓的系统不确定性。虽然人们已证明 LQG 调节器同时对每一个独立的控制通道输入端的增益和相位摄动都具有无穷大的增益裕度和 $\pm 60^\circ$ 的相位裕度^[4, 5],但开环参数的一个任意小的变动就能引起 LQG 控制系统的不稳定^[6],且当采用状态估计-反馈而不是状态反馈时,这些鲁棒特性将不复存在^[7]。这使得人们再度对经典控制理论进行研究和发掘,试图建立起 MIMO 系统的频域设计方法。先后出现了 Rosenbrock 的逆 Nyquist 阵列法(JNA)^[8]、MacFarlane^[9] 和 Postlethwaite^[10] 的特征轨迹法(CL)、Owens 的并矢展开法^[11] 和 Mayne 的回差序列法^[12],形成了多变量系统的频域法,在实际中获得了大量的应用,但对系统中对象模型的不确定性仍未能很好地解决。

系统设计面临不确定性而出现的种种问题,促使了现代控制理论中另一重要的研究领域——鲁棒控制设计理论的产生。简单地讲,鲁棒控制就是对于给定的存在不确定性的系统,分析和设计能保持系统正常工作的控制器。鲁棒镇定是保证不确定性系统的稳定性,而鲁棒性能设计是进一步要求保有某种指标下的一定的性能。鲁棒控制自其产生便得到了广泛的注目而蓬勃发展。其实人们在系统设计中常常会自觉或不自觉地考虑到鲁棒性问题,最早给出鲁棒控制问题解的可算是 Black 在 1927 年给出的关于真空管放大器的设计,他首次提出采用反馈控制和回路高增益的方法来处理真空管特性的大范围波动。之后, Nyquist 频域稳定性准则和 Black 的回路高增益概念共同构成了 Bode 的经典之著^[13] 中有关鲁棒控制设计的基础。20 世纪 60 年代之前的这段时期可称为经典灵敏度设计时期。此间,问题多集中于 SISO 系统,根据稳定性、灵敏度的降低和噪声抑制等性能准则来进行回路成形设计。

20 世纪六七十年代中鲁棒控制只是将 SISO 系统的灵敏度分析结果向 MIMO 系统进行了初步的推广^[14],仍被普遍视为灵敏度设计问题,包括跟踪灵敏度、性能灵敏度和特征值/特征向量灵敏度等的设计。

20 世纪 80 年代鲁棒控制进入了新的发展时期。此间研究的目的已是寻求适应大范围不确定性分析的理论和方法。主要研究方向有鲁棒性分析的多项式代数方法、基于输入输出描述的 H_∞ 方法、状态空间模式的鲁棒性分析与镇定。

多项式代数方法是判断系统在一定范围内变化的多项式的稳定性和严正实性^[15]。已给出各种不同情况下的充分必要条件,文献[16]、[17]关于多项式凸多面体的棱边定理,形成了一套基于排零定理、值映射和参数化等价族的分析方法^[18, 19]。在复数域,对矩阵稳定摄动界已有较好结果。

Zames 在 1981 年发表的重要文章“*Feedback and Optimal Sensitivity: Model Reference Transformations, Multiplicative Seminorms, and Approximate Inverse*”^[20] 标志了 H_∞ 控制理论的起步。针对 LQG 设计中将不确定性干扰表示成白噪声模型的局限性, Zames 考虑了干扰信号属于某一能量有限的已知信号集的情况下,能使系统内稳定及系统对扰动的输出达到最小的控制器的设计。他找到了鲁棒控制与最优控制的一个契合点,是在理论内部超越 LQG 理论的尝试。此后, H_∞ 控制理论得到了快速发展,成果令人瞩目。非结构摄动的鲁棒镇定、模型匹配问题和跟踪问题均可化为 H_∞ 控制问题。Zames, Francis 及 Kimura 基于 Hardy 空间的算子理论和解析函数的插值理论首先解决了 SISO 系统的灵敏度设计问题^[20~22],其结果又被推广至 MIMO 系统^[23~25],形成了较完整的 H_∞ 控制的频域研究方法。为进一步简化求解过程, H_∞ 设计又转向状态空间分析方法,并形成一般性问题,先后出现了所谓的 1984 方法^[26] 和 DGKF 法^[27]。后者使 H_∞ 问题的求解显著简化,只需求解两个 Riccati 代数方程;控制器的结构也更加明确,并据此揭示了 H_∞ 优化与二次型最优控制之间的内在联系。随着设计沿保守性降低方向的发展,出现了基于结构奇异值的 μ 综合与 μ 分析^[28],基于有理函数空间的 Gap 度量与 Gap 拓扑的建立^[29, 30],以及基于 Lyapunov 函数二次稳定分析^[31]的 Q 理论。能为不确定系统的实现、分析、综合提供统一框架的线性分式变换(LFT)的引入又使 H_∞ 一类问题归结于线性矩阵不等式(LMI)的求解^[32],尤其对奇异扰动系统取得了较好的结果^[33, 34]。利用 H_∞ 在时域上的 minmax 意义,文献[35]等建立了 H_∞ 最优控制与 IQ 对策论之间的联系。涉及对策论与鲁棒控制理论关系的研究工作还有文献[63]~[65]、[94]~[110]、[112]、[122]等。这些成果都极大地丰富了 H_∞ 理论,使其成为鲁棒控制的一大热点。

状态空间模式下的鲁棒性问题范围很广,主要分为对于系统稳定摄动界的估计和鲁棒控制器的设计两个方面。前者借助于相应的 Lyapunov 矩阵方程和矩阵的 Kronecker 积以及各种形式的 Kronecker 和来表示系统摄动界的估计。系统镇定设计中,以 Lyapunov 稳定性原理为基础,适当刻画系统中的不确定性,由 Lyapunov 方程和 Riccati 方程的求解得到反馈控制器^[36]。对不确定性的不同刻画带来了反馈控制器设计的多样性,也使其成果较丰富。

现代鲁棒控制的继续深入研究,对于控制理论和工程实践具有重要的意义。

1.2 不确定性系统鲁棒最优控制的发展与现状

将鲁棒性概念引入最优控制中便形成了现代鲁棒控制中的一个重要研究领域——鲁棒最优控制。鲁棒最优控制中两个基本的方法是鲁棒 LQ 与 H_∞ 设计,也是本书所要探讨的内容。

进入 20 世纪 80 年代,一些学者纷纷提出了改善 LQG 控制系统鲁棒性的种种方法。Safonov 等^[37],Grimble^[38, 39]给出了基于多项式求解的 LQG 鲁棒性设计方法,并成功地推广于多变量系统中^[40]。该法采用双重准则(dual criterion)选取代价函数,其中包含了对灵敏度和补灵敏度的加权,而加权阵为与频率有关的动态加权函数,提高了系统的鲁棒性及参数灵敏度,且可在不同的频段内满足不同的鲁棒性要求^[37]。引入有色噪声和输出扰动模型,实现扰动抑制鲁棒性的提高^[32]。Moore 等^[41]也曾引入虚拟噪声源以改善 LQG 控制器的鲁棒性。

这种多项式 LQG 方法通过对系统描述和代价函数的推广,使 LQG 设计更具一般性,从而提供了由 LQG 问题描述 H_∞ 鲁棒最优控制问题的可能。Grimble^[42]在 LQG 框架下构造假想的 LQG 问题,利用其多项式解给出了 H_∞ 频域优化问题的期望解,所得的 H_∞ 控制系统与 LQG 控制系统在特征多项式、动态代价加权函数上存在极其相似之处,从而初步建立了 LQG 与 H_∞ 设计之间的联系。之后,Grimble^[43]进一步将此结果推广到多变量系统。与此相并行的工作有 Kwakernaak^[44-46]对 H_∞ 和 L_2 优化问题之间联系的研究。对 minmax 频域优化问题,Kwakernaak 直接最小化关于灵敏度和补灵敏度加权准则的 ∞ -范数,从而使扰动抑制系统获得较好的鲁棒性、一定的带宽和补偿器信号的衰减。Grimble^[47]分析了 Kwakernaak 的直接法得到的二次型方程与多项式 LQG 方法所得的线性 dipolantine 谱分解方程之间的关系,指明了二者的等价性。另一方面,通过对 1988 年^[48]所给的 H_∞ 控制器进行 Youla 参数化^[49]处理,进一步阐明了 H_∞ 与 LQG 设计之间的内在联系,即当稳定的 Youla 增益趋于零时,控制器就还原为相应的 LQG 最优控制器,而增益的幅值表明了鲁棒 LQG 与鲁棒 H_∞ 设计之间的差别。

同时,Grimble 又研究了多变量系统中最优 LQG 输出调节器问题的多项式矩阵解^[49],给出两自由度的控制器结构。而当采用反馈控制器优化 H_∞ 鲁棒性能、参考输入控制器实现最小方差意义下的良好跟踪性能时,则提出了能够同时体现对 H_∞ 灵敏度、扰动、跟踪误差方差及控制信号进行加权的代价函数^[50]。为对 LQG 设计进行鲁棒性分析,Grimble 等^[51]将传统 LQG 控制器结构重组成内模控制(IMC)结构,此结构便于分析各种最优回差传函、控制增益和 Kalman 滤波增益对系统鲁棒性的影响,并证明了运用动态加权函数确实有助于系统鲁棒性的提高。实际中也

已验证了多项式 LQG 方法的有效性, Chol 等^[52]通过引入另外两个 dipolantine 方程对多项式 LQG 方法实施一定的改进, 成功地将其应用于冷轧钢厂单架上车道轨距的控制, 克服了由非圆支撑轧辊引起的偏心轨距波动的不良影响。

鲁棒 LQ 设计的另一分支是基于参数化的 Riccati 方程解的 Riccati 方程法。Grimble^[53], Mosca 等^[54]和 Casarolad 等^[55]分析了连续系统和离散系统中 Riccati 方程法与多项式法的关系, 得到稳态 LQ 调节中二者概念上完全等价的结论。

鲁棒设计的 Riccati 方程方法^[31]及由 Barmish^[56]提出的系统二次稳定的概念同样也推动了 WHK 设计理论向不确定性系统的鲁棒性设计的发展。Bernstein 和 Haddad^[57, 58], Khargonekar 等^[59]及其他学者^[60]都取得了一定的结果。Douglas 和 Athans^[61]对 Petersen 的 Riccati 方程法重新给予解释, 指明其确实是一种不确定性系统的鲁棒 LQR 设计方法, 并基于此方法, 给出实参不确定性下的鲁棒 LQR 控制器的设计。Mehdi^[62]讨论了值有界的参数不确定性系统的鲁棒 LQ 控制器, 由最优化调节器逆问题熟知的结论证得控制器具 LQ 意义下的最优化。

基于 Riccati 方程的 WHK 设计理论在自身不断发展的同时, 因其固有的特点而自然地与 H_∞ 控制理论保持着紧密的联系。Petersen^[63]在全状态反馈参数鲁棒性设计中所利用的变形代数 Riccati 方程, 为控制器同时满足 H_∞ 扰动抑制约束提供了了解释, 建立了 WHK 设计与 H_∞ 理论之间的连接。Khargonekar 等^[64]对这种连接的进一步探讨, 证明了 H_∞ 最优静态全状态反馈控制器与动态全状态反馈可使闭环传函取得同样的 H_∞ 范数下界。这样, Petersen 等^[63~65]首次运用 LQ 对策论理论由单- Riccati 方程的解给出了 H_∞ 标准问题的状态反馈控制解。Petersen 和 Hollot^[66, 67]又采用高增益观测器对带有结构不确定性的线性系统给出可稳的状态观测——反馈控制的分离性设计过程, 并使系统满足 H_∞ 扰动抑制约束。在二次鲁棒稳定的框架内, Petersen^[68]也讨论了动态输出反馈问题, 需求解一对解耦的变形 Riccati 方程和一个附加的不等式。在此基础上, Khargonekar, Petersen 和 Zhou^[69, 70]建立了二次鲁棒稳定与 H_∞ 控制问题之间的联系。

此外, Bernstein 和 Haddad^[58, 59]采用不同的方法得到了较 Petersen^[68]更为完整的动态输出反馈解, 又进一步给出了满足 H_∞ 性能指标的 LQG 控制设计^[70]。其中首次引入了对干扰的双重解释, 在 L_2 最优意义上, 将干扰解释为白噪声信号, 而同时, 为达到 H_∞ 衰减的目的, 同一干扰又可解释为确定性的 L_2 函数。而在文献 [63] ~ [65] 中所考虑的扰动并不具统计模型。文献[70]中在全阶动态补偿设计中, 由两个与纯粹的 H_∞ 问题 DGKF 解法^[27]中的方程完全一致的 Riccati 方程来确定 H_∞ 干扰衰减增益, 与 H_∞ 设计也建立了直接的联系。近期, Savkin 和 Petersen^[71]又证明了系统的绝对可稳与 H_∞ 输出反馈之间的等价性, Moheimani^[72]等给出了相应结论的离散形式。

在系统鲁棒性设计中 Lyapunov 函数也占据着相当重要的地位。Haddad 和 Bernstein^[73]通过构造不同的 Lyapunov 函数分别对鲁棒性设计中的小增益定理、正性定理(positivity theorem)、圆形准则(circle criterion)、Popov 准则给予了解释,指出小增益定理和传统的 Lyapunov 函数在处理定常参数摄动上的保守性。而后 Haddad 和 Bernstein^[74]又定义了类似于 Barmish^[75]和 Leed^[76]曾给出过的与参数相关的 Lyapunov 函数,分析其相对于传统 Lyapunov 函数的潜在优势,得到具 H_2 鲁棒性能界的一般性的多变量 Popov 准则。之后,此理论框架又得到进一步的扩展以同时保证定常实参结构不确定性下的 H_2 和 H_∞ 性能^[77]。Haddad 和 Kapila^[78]还将与参数相关的 Lyapunov 函数应用于鲁棒模型降阶。

Lyapunov 函数法与 Riccati 方程法的结合还产生了鲁棒最优控制中的保证代价性能(guaranteed cost)控制方法^[59, 79~86]。该法利用固定的 Lyapunov 二次函数建立二次代价函数闭环值的上界,从而保证系统的一定鲁棒性性能。Steorvogel^[82]又证明了具有保证代价性能要求的鲁棒控制问题等价于一类混合 H_2/H_∞ 控制问题。在二次保证性能意义下,Petersen 和 Macfarlane^[83]给出的状态反馈和状态估计为最优,而 Chang 和 Peng^[79], Bernstein 和 Haddad^[59]给出的状态反馈及 Bernstein 和 Haddad^[84]得到的状态估计器为次最优。Savkin 和 Petersen^[85]给出满足二次可积约束^[87]的结构不确定性的系统保证代价的反馈控制问题解,指出所得的控制器也是 minmax 最优控制器。为研究时变系统的相应问题,Savkin 和 Petersen^[86]又引入关于结构不确定性的“平均二次可积约束”概念,由参数化的对策类型微分 Riccati 方程的解得到保证代价的最优状态反馈解。

在二次稳定框架内,一些学者还探讨了鲁棒控制中非线性控制相对于线性控制的优势是否存在的问题。当采用全阶动态输出反馈或全状态反馈时,对于一部分鲁棒镇定问题,这种优势确实存在^[88, 89],但在某些特殊情况下却并不存在^[71, 90, 91]。当采用定阶动态输出反馈或静态输出反馈时,Savkin 和 Petersen^[82]通过对二次储备函数意义下的鲁棒可镇定的定义,表明了非线性时变控制与线性时不变控制之间的等价性。

随着 H_∞ 控制时域综合方法的发展^[27, 93],人们注意到其中起着重要作用的 Riccati 方程与线性二次对策问题^[94, 95]和线性指数 Gaussian(LEG)问题^[96]中出现的 Riccati 方程是一致的,又加之 H_∞ 问题时域上所具有的 minmax 意义,引发了基于线性二次对策方法的 H_∞ 控制问题描述^[97],即具二次性能指标的双人零和微分对策^[98]。对策的双方分别代表系统中的控制和扰动输入,它们将同时分别最小化和最大化二次指标,依据各自可得信息,由相应的 Riccati 微分方程组的解综合最小化方和最大化方的最优策略。

应用对策论方法,Limebeer 等^[99]讨论了零初值条件下的时变系统的有限时间

上的 H_∞ 控制问题, Rhee 和 Speyer^[100] 则讨论了非零初值条件下有限时间和无限时间上的时变系统部分信息的 H_∞ 控制问题。Basar^[101] 所讨论的是全信息离散 H_∞ 控制问题, Toivonen^[102] 求得时变系统有限时间上的数据采样 H_∞ 控制问题的完全解。Shaked^[103] 将时变系统的有限时间上的 H_∞ 最优跟踪问题也描述为一个控制中的对策问题, 采用微分对策的解法有效地克服了将跟踪问题化为标准 H_∞ 问题来处理时常会出现的因过分强调系统的跟踪性能而造成的系统鲁棒性及 H_∞ 扰动抑制性能的降低^[104]。所给之法同时还能解决标准 H_∞ 综合中的另一难题——部分可测扰动的处理。对此难题, Gusev^[105] 运用 minmax 优化方法也同样给予了较好的求解, 这种 minmax 优化既是 H_∞ 优化的一般性问题, 也是 LQ 优化的近似 minmax 问题, 是介于 H_∞ 和 H_2 优化控制之间的一种控制问题。文献[106] 鉴于对策论的思想, 在 LQG 方法的基础上又提出 maxmin 优化准则来处理 H_∞ 优化设计问题, 得到所谓的 LQL(linear quadratic L_2 bounded uncertainties) 方法。

此外, 对策论方法在 H_∞ 最优滤波中也得到了广泛的应用^[107~112]。对策论中的许多观点, 特别是零和动态对策为非线性系统的 H_∞ 控制理论的发展也提供了有力工具。Basar 和 Bernhard^[97] 采用 Hamilton-Jacobi-Isaacs 不等式表征由闭环增益上界 γ 参数化的零和微分对策的值函数, 为未来非线性 H_∞ 控制的研究提供了方向。

基于线性二次对策方法的 H_∞ 控制问题描述不仅简化了问题的求解, 也使具有一定干扰衰减性能的 H_∞ 控制器的复杂结构更易于理解。值得指出的是, 它还为双人零和动态过程中的信息形式、最优化概念、策略表示的研究建立了对策论、 H_∞ 控制理论和风险灵敏度最优控制^[93]之间的联系, 使鲁棒最优控制中的几种重要的设计方法得到了有机连接。

在 H_∞ 控制的发展过程中, 解的非惟一性使其最优解具有了一定的自由度^[113]。一种消除非惟一性的方法是利用超最优的概念, 求取超最优控制器^[114, 115]; 另一种方法是求取最小熵解^[116]。最小熵提供了输入输出算子 H_2 范数的上界, Sideris^[117] 从回路成形的角度证明了 H_∞ 优化控制问题的最小熵解等价于加权 H_2 优化问题, Mustafa^[118] 证明了熵最小化与 Bernstein 和 Haddad^[70] 对附加代价的最小化之间的等价性, 这些为最小熵解赋予了 H_2/H_∞ 意义上的解释, 从而引发了对混合 H_2/H_∞ 控制问题的研究兴趣^[119, 125]。Doyle 等^[119, 120] 对 Bernstein 和 Haddad 的工作进行了扩展, Yeh 等^[121] 证明了此工作在对偶意义上与文献[70] 是等价的。Limebeer 等^[122] 利用双人非零和 Nash 对策给出混合 H_2/H_∞ 控制问题的状态反馈解。对策中的两个性能指标分别代表 H_∞ 约束和 H_2 最优指标。相对来说, 由 Nash 对策所得的一对耦合 Riccati 方程较文献[119]、[120] 中的更易于采用标准数值积分求解。其他关于混合 H_2/H_∞ 控制问题求解的工作还有许多, 如 Rotea 和 Khargoneka^[123] 利用非线性规

划法通过凸优化来求解, Scherer^[124]则根据微分线性矩阵不等式的可解性和秩条件求解时变系统中混合 H_2/H_∞ 控制问题的降阶控制器, Whorton 等人^[125]对定阶混合 H_2/H_∞ 设计问题给出了同伦(homotopy)算法。

LQ 问题在与对策论和 H_∞ 控制理论结合发展的同时, 其自身也在不断地完善。初期, LQG/LTR 方法^[126, 127]的出现解决了因估计器的引入而造成的最优状态反馈中理想回路差特性的丧失, 虽对低频段(性能段)实现了有效的补偿, 但在高频段只能保留 LQR 设计中的一阶衰减率。为此出现了在控制律中加入高频滤波器^[128]、或在输入端加入动态权函数以增广系统的分阶段设计^[129]等种种修正方法。Zhang 和 Fu^[130]又对 LQR 静态状态反馈所具有的稳定裕度重新给予了解释, 指出它们只对某些特定的状态变量集才成立, 所以对实际应用中状态变量的选取应慎重对待。而采用较 LTR 方法更为一般的动态状态(或部分状态)反馈以保证一定的鲁棒稳定性设计问题还有待进一步的探索。Shtessel^[131]对互联系统提出多准则 LQR 设计, 利用各子系统之间的互联关系来改善各子系统的性能, 在折衷极小化解求取过程中给出比例损失原则以控制损失相应于每个准则的比例。Jacobus 等^[132]和 Halevi^[133]等研究了 LQG 设计中稳定控制器的设计问题, 前者是事先修正法, 后者是事后修正法。Wang 等^[134]运用这两种方法给出了 H_2 次最优稳定控制器。另外, Ji 和 Chizeck^[135, 136]还研究了跃变线性系统(jump linear system)的跃变线性二次型问题(JLQ)。

LQ 方法因其二次型目标泛函中加权参数有许多选取自由度, 所以可被用来实现各种设计目标^[137]。Harvey 和 Stein^[138]利用低控制费用趋于极限时控制加权与渐近极点位置的关系, 适当选择控制加权以获得某种极点配置。Wittenmark 等^[139]利用复 s 平面与复 w 平面之间的 Möbius 变换实现满足区域极点配置约束的 LQ 设计。Haddad 和 Bernstein^[140]则利用变形 Lyapunov 方程表征各种极点约束区域, 给出了满足闭环极点于指定区域, 同时最小化代价泛函的静态输出反馈和定阶动态输出反馈。这些方法是对标称系统的区域极点配置, 而对不确定性系统并不适用。Wu 和 Lee^[141]讨论了满足区域极点约束的 LQ 最优控制在结构不确定性的鲁棒性, 基于 Gershgorin 定理给出结构不确定性的允许界。Garcia 等^[142]及 Moheimani 等^[143]利用 LMI, 给出带有范数有界不确定性的系统圆域极点约束下的保证代价的 H_2 (LQ) 最优状态反馈控制器。Garcia 等^[144]在二次稳定意义下, 又考察了带有正实型不确定性的连续和离散系统满足圆域极点约束的状态反馈和输出反馈设计问题。Saberi 等^[145]研究了带有定阶观测器结构的 H_2 最优控制器对于闭环极点配置所能提供的自由度及对它的约束, 以达到同时极点配置的设计目的。另外, Nicolao 等^[146]和 Connolly 等^[147]对基于 LQG 方法的窄带宽扰动抑制问题的频域加权(FS)法和扰动模型增广(DM)法进行了深入的研究, 指出对于 DM 法, 需在指标中引入交

叉项,而对 LQ 法,需考虑有色过程噪声和量测噪声。

鲁棒 LQ 最优控制设计不仅在理论上取得了丰厚的成果,在实际中也得到了广泛的应用和发展。设计实例有 Vincent 等^[148]对飞机自动控制系统的设计,Fan 等^[149]对 B-1 飞行器的纵向运动的控制,Wise 等^[150]对飞机中新一代弹出式座椅的控制设计,Lin 等^[151]将 Wiener-Hopf LQ 最优控制与定量反馈理论相结合对 F-4E 飞行控制系统的短周期纵向模态的控制,Visse^[152]对飞行器遇瞬时风流场的水平逃逸轨迹策略的优化控制等。

在国内,许多学者也开展了鲁棒最优控制方面的研究工作,成果颇丰。文献[153]、[154]在频域研究了最优控制的问题;文献[155]从参数灵敏度的角度对二次型最优控制器进行了研究;文献[156]、[157]继续深入研究了多变量频域鲁棒设计方法;文献[158]~[160]等在 H_∞ 控制理论及应用方面也做了许多有益的工作;文献[161]~[163]对 LQ 设计中的各方面问题也给予了一定的研究;还有其他一些学者的许多工作^{[164]~[166]}同样促进了鲁棒最优控制理论及其应用在我国的深入发展。

值得欣慰的是,对策论方法通过与其他方法的结合在非线性系统鲁棒控制研究中近期又获得了新的结果。如针对由于 Hamilton-Jacobi-Isaacs(HJI)偏微分方程的不易求解而导致非线性 H_∞ 控制理论未在实际中得到深入推广的问题,Krstic^[128]从微分对策逆问题的角度出发,借助输入到状态可稳定性(input-to-state stability)的理论结果^[289],采用 Legendre-Fenchel 变换和 Young 不等式的广义形式对 HJI 方程的求解进行了分析,证明了输入到状态的可稳定性是 HJI 方程有解的充分必要条件,对非线性 H_∞ 问题或更广泛意义上的微分对策问题的求解具有重要意义。Baras^[290]则将参数不确定性系统、参数变化范围已知的参变系统和具有界扰动的系统视为一类非线性系统,对此类系统的鲁棒控制给出统一的描述框架,并转化成动态对策问题。特别是对于输出反馈问题,采用信息状态(information state)概念使估计与控制两个过程得以分离,并进一步应用 Whittle 提出的确定性等价(certainty equivalence)准则^[291],给出状态估计的反馈策略。确定性等价准则是指对于线性动态系统采用线性观测,则二次代价函数下的最优策略可用 minmax 滤波动态对策和全信息 minmax 动态对策的两个独立解求得。Charalambous^[292]也采用信息状态方法证明了该准则对于输出反馈 minmax 动态对策问题在采用二次代价或非二次代价函数时仍成立,从而得到了有限维的最优策略,解决了一般的输出反馈 minmax 动态对策问题只能得到无限维最优策略的难题。

可见鲁棒控制虽已发展到了相当成熟的阶段,但还有些问题尚待研究。首先,针对各种不同的不确定性描述方法,在鲁棒稳定性的提高与设计保守性的降低之间的不同程度的折衷处理还需做许多艰苦而细致的工作;其次,鲁棒最优控制及鲁棒镇定中所得到的控制器解在很大程度上依赖于相应的一般性 Riccati 方程解的

存在与求取,而这多年来一直是困扰学者们的难题,如何给出更易于处理的算法将是进一步的理论工作;最后,理论和算法的工程实用化以及实际工程应用方面的研究仍需不断地深入。Ackermann 对鲁棒控制设计问题给出了新的提法:给定由模型结构和参数的范围所定义的对象族,寻找能使闭环稳定的具固定增益的,或只是增益调节的控制器存在的充要条件^[167]。这也是为未来的研究指明了一个方向。

1.3 本书的主要研究工作意义、写作思想及内容概要

鲁棒最优控制中, H_∞ 方法尽管其问题提法的理论意义很有吸引力,但其早期的求解过程太复杂,它所借助的算子理论和解析函数的插值理论难于被广大设计工程师所接受,所以 H_∞ 方法未能得到及时有效的推广。考虑到从事实际工作的控制工程师总是希望使用结构简单,尤其是他们所熟悉的 LQG 控制器结构,文献 [168] 提出了一个设想:类比 LQG 方法采用时域优化方法来处理 H_∞ 方法所解决的同样问题。根据 H_∞ 方法对于干扰问题的描述及其指标的提法,文献 [168] 提出如下时域指标问题:

考虑线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + B_1 u + B_2 v, \quad x(0) = x_0 \quad (1.3.1)$$

$$y = C_1 x + D_1 v \quad (1.3.2)$$

式中,状态 $x \in \mathbb{R}^n$; 控制 $u \in \mathbb{R}^m$; 干扰 $v \in \mathbb{R}^l$; 输出 $y \in \mathbb{R}^r$ 。

干扰约束为

$$\|v\|_2^2 := \int_0^\infty v' v dt \leq \delta^2 < \infty \quad (1.3.3)$$

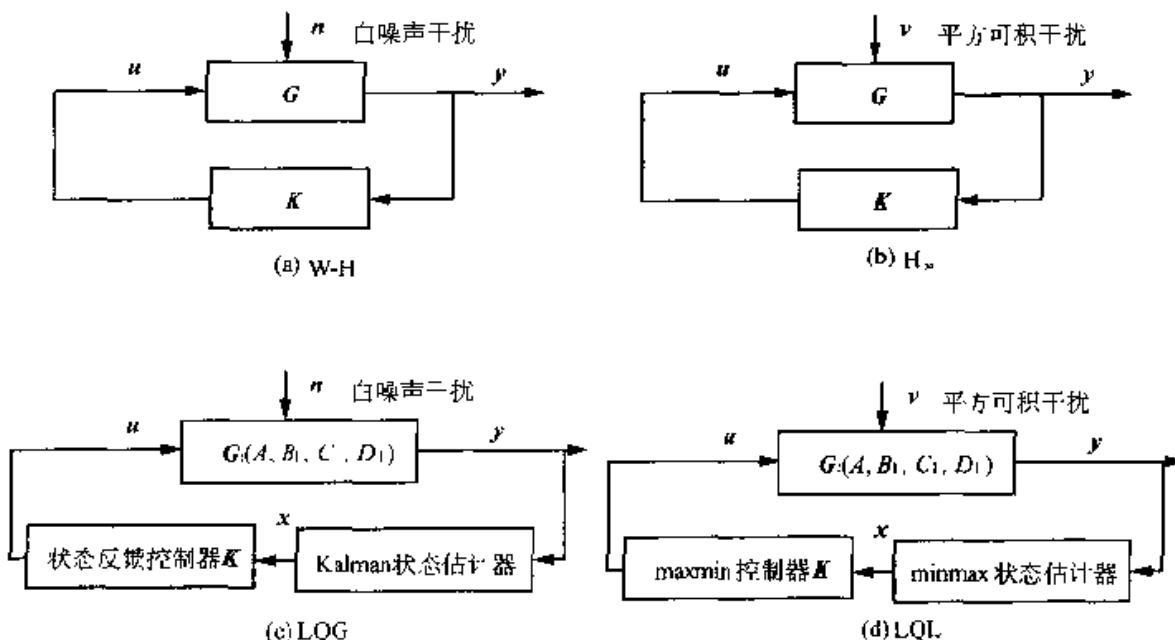
性能指标

$$J := \max_{\|v\|_2^2 \leq \delta^2} \min_u \int_0^\infty (x' Q x + u' u) dt \quad (1.3.4)$$

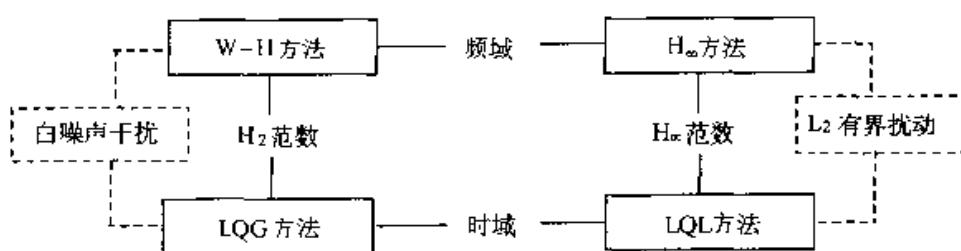
通常 $Q = Q' \geq 0$, 式(1.3.1)~(1.3.4)可解释为在“最坏干扰下”的最优控制问题。指标(1.3.4)的意义一方面可类比 LQG 方法对 W-H 方法的指标形式的改进,即加入控制约束项可使最优化问题易于求解;另一方面,指标(1.3.4)也可与 H_∞ 问题指标相比,可找到其优化等价代换关系,即对应所得的最优化性能至少不比采用 H_∞ 指标最优化系统性能差^[168]。于是,针对 H_∞ 方法中描述的不确定性干扰类问题,采用时域指标(1.3.4)表示后,如同 W-H 方法到 LQG 方法的类比过程一样,可建立一种时域求解 H_∞ 问题的方法,即 LQL 方法^[168]。与 LQG 方法的 G 表示 Gauss 噪声对

应,这里 LQL 中的 L 表示干扰为 L_2 可积,这一构想,文献[168]称之为旨在下列框图控制方案中寻找一种对称性:

- (1) W-H 方法:如图 1.1(a), 频域设计 K ;
- (2) H_∞ 方法:如图 1.1(b), 频域设计 K ;
- (3) LQG 方法:如图 1.1(c), 时域设计控制 u ;
- (4) LQL 方法:如图 1.1(d), 时域设计控制 u 。

图 1.1 W-H, LQG 和 H_∞ 与 LQL 方法的比较(a) W-H 方法; (b) H_∞ 方法; (c) LQG 方法; (d) LQL 方法

这样 LQL 方法与 W-H, LQG 和 H_∞ 方法形成了一个比较完整的理论研究框架,如图 1.2 所示。

图 1.2 LQL 方法与 W-H, LQG 和 H_∞ 方法之间的关系图

由图可得如下关系:

频域优化方法: $W-H, H_\infty$, 称为 Wiener 方法类;

时域优化方法: LQG, LQL, 称为 Kalman 方法类;

白噪声干扰抑制: $W-H, LQG$, 优化 H_2 范数指标;

L_2 有界扰动抑制: H_∞, LQL , 优化 H_∞ 范数指标。

由此可见 LQL 方法在控制理论界的意义。

本书在文献[168] 所提出的理论基础上, 进一步研究 LQL 方法在设计中的一些具体问题, 推动其理论向实际工程应用的过渡, 并探讨 LQL 方法作为标准 H_∞ 问题的一种求解方法及其与 H_∞ 问题之间的联系。

在本书的研究范围内, 将系统中的摄动与外干扰统一归范为 L_2 有界的不确定性。这是因为在实际系统中, 当系统的稳定性仍能保持时, 系统性能的变坏可能一部分来自系统的摄动, 一部分来自外干扰, 这种情况下我们可通过 LQL 设计方法, 求得适当的反馈控制器以同时抑制内摄动和外干扰。虽在某些场合, 如内摄动结构比较明确时, 这种设计较为保守, 但不失为一种处理 L_2 有界不确定性的有效手段。

本书还涉及的主要工作有以下几个方面:

(1) 不确定线性系统的 LQL 设计方法理论的进一步探讨。

1) 基于线性系统的对偶原理, 分析了线性二次型最优状态反馈控制的对偶问题, 提出了一种 minmax 鲁棒估计器的设计方法, 对全阶和降阶的情况分别进行了讨论。

2) 通过另一种 maxmin 估计器的设计, 给出 maxmin 状态估计-反馈控制的闭环, 它与确定性系统的状态观测器-反馈控制器闭环和随机系统的 LQG 方法设计所得的闭环形成了另一对应关系。

(2) 探讨了 LQL 方法与 H_∞ 方法应用中的有关问题。

1) 在微分对策意义下, 说明 LQL 优化指标与 H_∞ 优化指标的等价性。同时对 H_∞ 输出反馈控制器和 LQL 的 minmax 估计-反馈闭环控制器各自结构上的特点进行了简要说明。

2) 以 HTT-3T2 型三轴仿真转台为应用背景, 分别采用 LQL 方法和混合灵敏度 H_∞ 方法对中框控制系统进行了设计。在应用 LQL 方法设计中, 着重给出了对不确定性 L_2 范数界的等价性估计原则。在混合灵敏度 H_∞ 方法设计中, 给出了提高弱阻尼系统结构不确定性鲁棒性的两点改进。通过对两种方法设计所得仿真结果的比较, 阐明了 LQL 方法作为一种解决时域鲁棒最优控制问题方法的有效性。

(3) 建立了控制系统 LQL 优化设计软件包。该软件包具有模块化结构, 具有使用方便的特点。

第二章 具 L_2 有界不确定性系统线性二次鲁棒 最优状态反馈控制问题

2.1 问题起源

由于实际控制系统中存在大量的不确定性因素,使得基于对系统理想化数学模型描述的确定性控制理论在应用中受到许多限制和质疑,从而促使人们研究这种基于理想模型设计的控制系统在实际应用中的有效性问题,也即近年来控制理论发展的最活跃的领域之一——控制系统的鲁棒性问题。

众所周知,系统的不确定性主要来源于系统简化模型与实际对象的误差以及外界干扰的不确定性。这些不确定性因素是实际存在的,不可避免的。迄今为止,应用中常用的控制系统设计仍大量的是基于对实际系统的线性定常微分方程的模型描述。而事实上,实际系统都带有一定程度的时变、非线性和分布参数特性。至于干扰,由于其随机性,它的不确定性是显而易见的。因此,对不确定性系统控制的研究就有了更重要的意义。

在控制理论发展初期,人们总是希望用确定性的方法来解决这些不确定性问题。通常是将所有的不确定性因素归一为一个“干扰”输入项,并对此“干扰”给一个模型描述。如确定性控制理论中常把干扰描述成阶跃、斜坡、脉冲或一般地是满足某一类齐次微分方程的信号,然后对这种描述下的干扰设计一个能抑制这类干扰信号的控制器,本质上是嵌入一个含这类信号模型的所谓“内模”控制器,从而实现系统对这类不确定性干扰的不敏感性或鲁棒性^[213~218,225]。然而,这种干扰抑制法只是针对那有限的几种确定描述的干扰模型类,而使大量不确定性因素被排除在外,其本质上属于是对确定性干扰的抑制。

另一类克服不确定性干扰途径是随机控制的方法,即借助随机过程理论将系统的不确定性因素描述成某一类易于处理的理想化过程,如白噪声过程。由此产生了随机控制理论的著名结果——LQG 方法^[197,198]。虽然 LQG 方法是对白噪声不敏感的,但注意到白噪声过程本身也是一种理想化的随机过程模型。而目前随机控制的其他结果也都是基于随机过程的统计特性可知做出的。这一前提要求对实际系统中存在的大量不确定因素来说往往是不可能做到的。因此,对于近似理想化过程模型描述的不确定性干扰,随机控制理论显然也有理论和应用上的不充分之处。

因此,上述两种处理系统不确定性的理论和方法虽然各自都有着丰富的成果,但就解决实际系统中广泛存在的不确定性而言,仍有很大的局限。显而易见的原因是:一个实际系统的不确定性很难把它描述成两类理想的干扰模型,统计特性常常也是很难了解的。

本书考虑系统的不确定性基于这样一种看法:干扰一般是能量有限的,而且,不确定性因素的某一种和或积分的上界或范围一般总是可以估计的,这种上界或范围通常比较容易得到,在一定界限值下的不确定性也是比较符合实际情况的。因此,用一个界限约束来描述系统的不确定性似乎更易于被接受。另外,从系统鲁棒性的观点来看,针对这种限定能量干扰类描述所设计的系统将能使系统“容忍”更多类型的复杂不确定性因素,这似乎更接近 robustness 的含义。

在有界限的所有不确定因素中,我们习惯称之为“干扰”,我们感兴趣的是对系统性能产生“最坏”影响的那些干扰类。因此,一个保守的最优化设计思想是在考虑“最坏干扰”的情况下,设计出具有最大限度“容忍”不确定性因素的最佳系统性能。这种“最坏”干扰下的“最佳”性能设计在数学上可以抽象化为所谓的 maxmin 指标最优化问题。叙述如下:

设系统的状态空间模型为

$$\dot{x} = F(x, u, v, t) \quad (2.1.1)$$

$$y = G(x, u, v, t) \quad (2.1.2)$$

式中,状态 $x \in \mathbb{R}^n$; 控制 $u \in \mathbb{R}^m$; 干扰 $v \in \mathbb{R}^r$; 输出 $y \in \mathbb{R}^l$; 时间变量 $t \in [0, \infty)$ 。状态初值亦可设为具有不确定性。如初态满足的约束为

$$H_0[x(0)] \leq \delta_0^2 < \infty \quad (2.1.3)$$

干扰 v 满足约束

$$\int_0^\infty H(v, t) dt \leq \delta^2 < \infty \quad (2.1.4)$$

性能指标提为

$$J = \max_v \min_x \int_0^\infty L(x, u, v, t) dt \quad (2.1.5)$$

在式(2.1.1) ~ (2.1.5) 中,

$$F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$G: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^l$$

$$H_0: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$H: \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$L: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

特别地,上述问题一种简单形式是线性定常系统的二次型指标最优化问题。

2.2 微分对策思想的启示

从问题(2.1.1)~(2.1.5)可以自然地联想到微分对策问题。下面简要叙述微分对策的思想,从中可以得到一些有益的启示。设有如下动态系统

$$\dot{x} = F(x, u, v, t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.2.1)$$

时间终端约束

$$J = \Phi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(x, u, v, t) dt \quad (2.2.2)$$

寻求最优策略 u^*, v^* 满足

$$J(u^*, v) \leq J(u^*, v^*) \leq J(u, v^*) \quad (2.2.3)$$

式中, u, v 是控制变量。双人对策问题是控制策略 u^* 使 J 极小化而 v^* 使 J 极大化,也即 $\min_{\mathbf{u}} \max_{\mathbf{v}} J(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ 或 $\max_{\mathbf{v}} \min_{\mathbf{u}} J(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ 的含义。上述问题的一阶必要条件仅取决于驻值性质,与极小极大或极大极小次序无关。假定系统及指标中 F, L 具有充分的可微性,则可如下求解一阶必要条件:令

$$H(u, v) = \lambda'(t)F(x, u, v, t) + L(x, u, v, t)$$

则驻点可由 $\partial H / \partial u = 0, \partial H / \partial v = 0$ 求出。或

$$H(u^*, v^*) = \max_{\mathbf{v}} \min_{\mathbf{u}} H(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad (\text{或} \min_{\mathbf{u}} \max_{\mathbf{v}} H(\mathbf{u}, \mathbf{v})) \quad (2.2.4)$$

对策论指出,在控制对策的鞍点 (u^*, v^*) 处有

$$\max_{\mathbf{v}} \min_{\mathbf{u}} J(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = J(u^*, v^*) = \min_{\mathbf{u}} \max_{\mathbf{v}} J(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad (2.2.5)$$

如果鞍点存在,则可由上述求驻点的方法解出 u^*, v^* 。然而,一般情况下,不一定存在这样的对策鞍点,即极大极小与极小极大化策略是不同的,这在对策论中有专门的讨论^[204]。然而,在控制问题中,即便是鞍点条件不满足,也不妨碍这种指标优化的有用性。因为在许多场合,系统的外激励可分为控制作用和环境影响,若把两者作为对策双方,则总可以认为自然条件为先开局的对策一方,如在“最劣状况下”的系统设计问题。这样对未知或不可知的不确定性干扰因素较多的情况下,便可假定为自然条件充分“坏”,依此确定“最坏”情况下的对策 $v^*(t)$,从而求取“最劣

状况”下的“最优”控制对策 $u^*(t)$ 是很有意义的。这样的优化结果, 虽然极大极小与极小极大的对策值及控制策略可能不同, 但一般极大极小化, 即 $\max_v \min_u J(u, v)$ 指标仍有实际意义。

另一方面, (u^*, v^*) 是开环对策还是闭环对策也是很有启发意义的。一个 $\max \min$ 或 $\min \max$ 指标可分两个单边控制问题, 即一个对 u 求 \min 另一个对 v 求 \max , 例如, 对开环最优的 v_o^* :

$$\min_u J(u, v_o^*) = J(u_o^*, v_o^*) \quad (2.2.6)$$

对闭环最优的 v_c^* :

$$\min_u J(u, v_c^*) = J(u_c^*, v_c^*) \quad (2.2.7)$$

从控制的 u 对策看, 式(2.2.6)和(2.2.7)构成了两个不同的单边控制问题。方程(2.2.7)是一种严格得多的最优控制策略。它意味着, 面对一个其控制策略是由反馈形式产生的“对手”, 控制对策必须为“最优”。因为, 若控制 u 有任何一步的“失误”或“错着”, 则对策 v 立即能加以利用使得指标有利于极大化, 从而失去应有的最优对策值, 这样就对控制提出了更严格的要求。

受上述对策思想的启发, 在具有不确定性因素系统的最优控制问题中, 若不确定性因素的知识太少以至于无法给出较理想的干扰模型或统计推断时, 可以假定系统处在“最劣可能”情况下的干扰来进行优化设计。从微分对策的思想方法看, 可以假定不确定干扰是由一位精明的对手所操纵的控制对策, 凡是我们试图极小化目标的策略, “他”总是力图采用“最有效”的相对对策使之极大化, 这相当于闭环微分对策问题, 即不允许我们的控制策略有任何的“失误”, 每一步必须是最优策略, 否则, 任何的“失误”都会被这位精明的“对手”以反馈对策加以利用来使目标极大化。

本书将利用这种思想处理所考虑的不确定性问题。基于这种思想给出的控制系统优化设计虽然能具有较好的鲁棒性, 但是比较保守的设计, 这也是由于不确定性问题本身的要求使得我们只能做到如此。

另外, 从技术处理上看, 本书采用的是确定性的优化理论和方法来解决无法理想模型化的不可测随机不确定性问题, 这使得所用的数学工具大大简化。

2.3 受约束的二次泛函极值问题

2.3.1 极小值问题

考虑二次泛函

$$J_a(f) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + a \langle f, f \rangle := \int_0^T \mathbf{x}' \mathbf{x} dt + a \int_0^T f' f dt \quad (2.3.1)$$

\mathbf{x} 服从方程

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + f(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.3.2)$$

的极小化 $\min_{\mathbf{x}} J_a(f)$ 问题, 式中, $a > 0$ 为标量常数。

若将式(2.3.2)的解表示成

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} f(s) ds \quad (2.3.3)$$

记为算子形式

$$\mathbf{x} = g + \mathbf{A}f$$

则式(2.3.1)可表为

$$J_a(f) = \langle g + \mathbf{A}f, g + \mathbf{A}f \rangle + a \langle f, f \rangle \quad (2.3.4)$$

式中, g 为给定函数, $g \in L_2[0, T]$; \mathbf{A} 是 $L_2[0, T]$ 上线性有界算子。

再记

$$\|f\|_2^2 = \langle f, f \rangle = \int_0^T f' f dt$$

引入 \mathbf{A} 的共轭算子 \mathbf{A}^* 定义如下: 对 $f, g \in L_2[0, T]$

$$\langle \mathbf{A}f, g \rangle = \langle f, \mathbf{A}^*g \rangle \quad (2.3.5)$$

依文献[199](第四章)有结论如下:

结论 2.3.1 存在惟一的 $f_a \in L_2[0, T]$ 使式(2.3.4)的 $J_a(f)$ 达到极小值 $J_a(f_a)$, 极小化函数

$$f_a = -(\mathbf{a} + \mathbf{A}^* \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^* g \quad (2.3.6)$$

与此问题相应的应用是确定如下受约束的极小化问题:

泛函

$$J(f) = \langle g + \mathbf{A}f, g + \mathbf{A}f \rangle \quad (2.3.7)$$

服从约束

$$\langle f, f \rangle \leq c \quad (2.3.8)$$

的极小化 $\min_f J(f)$ 问题。这里 $c > 0$ 为常数。

此问题可化为无约束的(2.3.4)型极小值问题来讨论。依文献[199](第四章)有结论如下：

结论 2.3.2 若 $A^* g \neq 0$, 则使式(2.3.4) $J_a(f)$ 实现极小化的 f_a 对某个 $a > 0$ 满足 $\|f_a\|_2^2 = c$, 这样的 f_a 是使式(2.3.7)的 $J(f)$ 在约束(2.3.8)下达到极小值的唯一函数, 记为 $J(f_a)$ 。或者, 对所有 $a > 0$ 均有 $\|f_a\|_2^2 < c$, 则 $f_0 = \lim_{a \rightarrow 0} f_a$ 实现对 $J(f)$ 的极小化, 即 $J(f_0)$ 。

2.3.2 极大值问题

考虑二次泛函的极大值问题

$$J_b(f) = \langle g + Af, g + Af \rangle - b \langle f, f \rangle \quad (2.3.9)$$

这里给定函数 $g \in L_2[0, T]$, $f \in L_2[0, T]$, A 为 L_2 上有界算子, $b > 0$ 为常数, 则有结论如下：

引理 2.3.1 若 $A^* g \neq 0$, 算子 $b - A^* A > 0$, 则无约束的极大值问题(2.3.9)存在唯一的 $f_b \in L_2[0, T]$ 使 $J_b(f)$ 实现极大化, 并且

$$f_b = (b - A^* A)^{-1} A^* g \quad (2.3.10)$$

证 由式(2.3.9)

$$\begin{aligned} J_b(f) &= \langle g + Af, g + Af \rangle - b \langle f, f \rangle \\ &= \langle g, g \rangle + 2\langle g, Af \rangle + \langle Af, Af \rangle - b \langle f, f \rangle \\ &= \langle g, g \rangle + 2\langle A^* g, f \rangle + \langle (A^* A - b)f, f \rangle \end{aligned}$$

配平方得

$$\begin{aligned} &= \langle (A^* A - b)(f + (A^* A - b)^{-1} A^* g), f + (A^* A - b)^{-1} A^* g \rangle \\ &\quad - \langle (A^* A - b)^{-1} A^* g, A^* g \rangle + \langle g, g \rangle \end{aligned}$$

由 $b - A^* A > 0$, 因此要上式对 f 有极大值的充要条件是

$$f = f_b = - (A^* A - b)^{-1} A^* g = (b - A^* A)^{-1} A^* g \quad (2.3.11)$$

式中, f_b 即为极大化 $J_b(f)$ 的唯一函数, 亦即

$$\max_f J_b(f) = J_b(f_b) = \langle f_b, A^* g \rangle + \langle g, g \rangle \quad (2.3.12)$$

引理证毕。

下面考虑 f 受约束的极大化问题。对 $f \in L_2[0, T]$, 求

$$J(f) = \langle g + \mathbf{A}f, g + \mathbf{A}f \rangle \quad (2.3.13)$$

在约束

$$\langle f, f \rangle \leq c \quad (2.3.14)$$

下的极大值 $\max_{\|f\|_2^2 \leq c} J(f)$ 问题, 有结论如下:

定理 2.3.1 若 $\mathbf{A}^*g \neq 0$, 对任正实数 b , 记 $N = \{b; b - \mathbf{A}^*\mathbf{A} > 0\}$. 当

$$\max_{b \in N} \|f_b\|_2^2 = c_1 \geq c \quad (2.3.15)$$

时, 则约束极大值问题(2.3.13)和(2.3.14)存在惟一的 $b > 0$ 且 $b - \mathbf{A}^*\mathbf{A} > 0$, 使 $\|f_b\|_2^2 = c$, 此 $f_b = (b - \mathbf{A}^*\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^*g$ 是极大化 $J(f)$ 的惟一函数。当 $\max_{b \in N} \|f_b\|_2^2 < c$ 时, 则约束极大值问题无解, 即极大值不存在。

证 由引理 2.3.1 知, 无约束问题(2.3.9)存在惟一的 f_b 使 $J_b(f)$ 达到极大值 $J_b(f_b)$, 由于 $b \rightarrow \infty$ 时有 $\|f_b\| \rightarrow 0$ 。易证 $\|f_b\|_2^2 = c$ 对 b 是单调非增的。因此, 对任 $c \in [0, c_1]$, 总可以找到一个 b^* 使 $\|f_b\|_2^2 = c$, 且此 b^* 是惟一的。又因存在惟一 $f_{b^*} \in L_2$, 使 $J_b(f) = J(f) - b\langle f, f \rangle$ 的极大化为

$$J_b(f_{b^*}) = J(f_{b^*}) - b\langle f_{b^*}, f_{b^*} \rangle, \quad \|f_{b^*}\|_2^2 = c$$

故 $J(f_{b^*})$ 亦为 f_{b^*} 极大化的惟一极大值:

$$J(f_{b^*}) = \langle g + \mathbf{A}f_{b^*}, g + \mathbf{A}f_{b^*} \rangle, \quad \|f_{b^*}\|_2^2 = c$$

而当 $\max_{b \in N} \|f_b\|_2^2 = c_2 < c$ 时, 约束极大值不存在的证明类似结论 2.3.2 的证明, 注意到此时不能取 $b \rightarrow 0$, 此处从略。

在本书的其余部分, 如不特别提及, 总是假定条件(2.3.15)成立, 即在极大化问题有解下讨论问题。

若 \mathbf{F} 渐近稳定, 可将定理 2.3.1 中积分限 \int_0^T 写为 \int_0^∞ , 可以证明此时算子 \mathbf{A} 在 $L_2[0, \infty)$ 仍是线性有界的, 定理结论亦成立。

2.4 具 L_2 有界不确定性系统线性二次鲁棒最优控制 ——maxmin 意义下的状态反馈解

相对于 2.1 节问题的一般提法, 下面考虑线性二次指标下的 maxmin 最优控制问题:

系统设为

$$\dot{x} = Ax + B_1u + B_2v \quad (2.4.1)$$

$$\dot{x} = C_1 x + D_1 v$$

初态约束

$$x(0)'x(0) = x_0'x_0 \leq \delta_0^2 < \infty \quad (2.4.2)$$

干扰约束

$$\int_0^\infty v'v dt \leq \delta^2 < \infty \quad (2.4.3)$$

式中, 系统状态 $x \in \mathbb{R}^n$; 控制 $u \in \mathbb{R}^m$; 干扰 $v \in \mathbb{R}^l$; 输出 $y \in \mathbb{R}^l$; A, B_1, B_2, C_1, D_1 为相应的定常数阵。

性能指标

$$J = \max_{\|v\|^2 \leq \delta^2} \min_u \int_0^\infty (x'Qx + u'u) dt \quad (2.4.4)$$

通常可取 $Q = Q' \geq 0$ 为常数加权阵。问题(2.4.1)~(2.4.4)是在 maxmin 指标下求取所谓“最坏干扰”下的最优控制问题, 其解法如下:

首先将干扰约束化入指标 J 中使之变成无约束的控制问题。从 H_∞ 指标分析及 min 运算考虑, 第一步是一个 LQ 极小化问题, 这样的最优化熟知的结论是 u 为状态反馈 $K_1 x$, 而且这个反馈使闭环系统稳定, 这一结论在本节中也会看到。因此, 对干扰约束的极大化问题便可依 2.3 中定理 2.3.1 化为如下等价无约束优化问题:

$$\dot{x} = Ax + B_1 u + B_2 v, \quad x_0'x_0 \leq \delta_0^2 < \infty \quad (2.4.5)$$

$$y = C_1 x + D_1 v$$

等价指标

$$\bar{J} = \max_v \min_u \left\{ \int_0^\infty (x'Qx + u'u) dt - \eta \int_0^\infty v'v dt \right\} \quad (2.4.6)$$

(注意到上式 η 应满足定理 2.3.1 条件以使对 v 有极大值存在) 式中待定常数 $\eta > 0$, 满足

$$\int_0^\infty v'v dt \leq \delta^2 \quad (2.4.7)$$

下面对式(2.4.5)~(2.4.7)做如下几步处理:

(1) 对 u 取 min 运算。

记

$$\bar{J}_v = \min_u \int_0^\infty (x'Qx + u'u) dt \quad (2.4.8)$$

对 \bar{J}_v 做配平方运算, 即设有实数阵 $P_1 = P_1'$ 和时间函数向量 $I(t)$, 做

$$\bar{J}_v + \int_0^\infty d(x'P_1x) + \int_0^\infty d(I'x + x'I)$$

可得

$$\begin{aligned} \bar{J}_v &= \min_u \{ x_0'P_1x_0 + 2I_0'x_0 + \int_0^\infty [x'(\bar{P}_1A + A'\bar{P}_1 + Q - \bar{P}_1B_1B_1'\bar{P}_1)x \\ &\quad + [u + B_1'(\bar{P}_1x + I)]' [u + B_1'(\bar{P}_1x + I)] \\ &\quad + 2[I + I'(\bar{A} - B_1B_1'\bar{P}_1) + v'B_2'\bar{P}_1]x + 2I'B_2v - I'B_1B_1'I] dt \} \end{aligned}$$

若 P_1 满足

$$\bar{P}_1\bar{A} + \bar{A}'\bar{P}_1 + Q - \bar{P}_1B_1B_1'\bar{P}_1 = 0 \quad (2.4.9)$$

$I(t)$ 满足

$$\dot{I} + (\bar{A}' - \bar{P}_1B_1B_1')I + \bar{P}_1B_2v = 0, \quad I(\infty) = 0 \quad (2.4.10)$$

则最优控制

$$u^* = -B_1'(\bar{P}_1x + I) \quad (2.4.11)$$

最优指标值

$$\bar{J}^* = x_0'P_1x_0 + 2I_0'x_0 + \int_0^\infty (2I'B_2v - I'B_1B_1'I)dt \quad (2.4.12)$$

(2) 对 v 取 max 运算。

将式(2.4.12)代入式(2.4.6)得

$$\bar{J} = \max_v \{ x_0'P_1x_0 + 2I_0'x_0 + \int_0^\infty (2I'B_2v - I'B_1B_1'I - \eta v'v)dt \} \quad (2.4.13)$$

在式(2.4.10)中记

$$\tilde{A} = -(\bar{A}' - \bar{P}_1B_1B_1'), \quad \tilde{B}_2 = -\bar{P}_1B_2$$

则式(2.4.10)可写成

$$\dot{I} = \tilde{A}I + \tilde{B}_2v = f(I, v), \quad I(\infty) = 0 \quad (2.4.14)$$

因此, 现在的最优化问题是求 v 极大化指标(2.4.13), 并服从约束方程(2.4.14)。

注意到由于式(2.4.9)有解 \mathbf{P}_t 使 $\text{Re}(\tilde{\mathbf{A}}) > 0$, 在式(2.4.13)中 I_0 是由式(2.4.14)惟一确定的, 即

$$I(0) = I_0 = \int_0^\infty e^{-\tilde{\mathbf{A}}s} \mathbf{B}_2 v(s) ds$$

可见 I_0 由 $v(t)$ 决定, 因此, 对 \tilde{J} 取 \max_b 时应考虑 I_0 。这与通常的终值指标下的最优控制问题略有不同。为解问题(2.4.13)和(2.4.14), 简记

$$\phi(I_0, x_0) = x_0' \mathbf{P}_t x_0 + 2I_0' x_0$$

$$L(I, v) = I' \mathbf{B}_2 v + v' \mathbf{B}_2' I - I' \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1' I - \eta v' v$$

讨论一般形式的初值控制问题

$$\tilde{J}(v) = \phi(I_0, x_0) + \int_0^\infty L(I, v) dt \quad (2.4.15)$$

服从

$$\dot{I} = f(I, v), \quad I(\infty) = 0 \quad (2.4.16)$$

有结论如下:

引理 2.4.1(初值控制的极大值原理) 假定 $v^*(t)$, $I^*(t)$ 表示最优控制和最优轨线, 则存在一组伴随向量 $\lambda(t)$ 使得 v^* , I^* , λ , 满足下方程:

$$\dot{I}^* = f(I^*, v^*), \quad I(\infty) = 0 \quad (2.4.17)$$

$$\dot{\lambda} = -\partial H / \partial I \quad (2.4.18)$$

$$\lambda(0) = -\partial \phi(I_0, x_0) / \partial I_0 = -2x_0 \quad (2.4.19)$$

对所有的 $t \in [0, \infty)$ 和 $v \in V(v$ 的容许集) 满足

$$\begin{aligned} H(\lambda(t), I^*(t), v(t)) &\leq H(\lambda(t), I^*(t), v^*(t)) \\ &= \max_v H(\lambda(t), I^*(t), v) \end{aligned} \quad (2.4.20)$$

式中, H 为哈密顿函数

$$H(\lambda, I, v) = \lambda' f(I, v) + L(I, v) \quad (2.4.21)$$

证 改写 $\tilde{J}(v)$ 为如下等价指标:

$$\bar{J}(v) = \tilde{J}(v) - \int_0^\infty \lambda'(I - f(I, v)) dt \quad (2.4.22)$$

从式(2.4.22)可见向量 λ' 是可以任取的(注意到式(2.4.16))。

引入式(2.4.21)中的哈密顿函数 H 及 $J(v)$ 表达式, 则有

$$\bar{J}(v) = \psi(\bar{I}_0, \bar{x}_0) + \int_0^{\infty} [H(\lambda, t, v) - \lambda' \dot{t}] dt \quad (2.4.23)$$

考虑控制 v 和轨线 I 的变分

$$\bar{v} = v + \delta v, \quad \bar{I} = I + \delta I$$

则 $\bar{J}(v)$ 变分记为 $\delta J(v)$, 可有

$$\delta \bar{J}(v) = \psi(\bar{I}_0, \bar{x}_0) - \psi(I_0, x_0) + \int_0^{\infty} [H(\lambda, \bar{t}, \bar{v}) - H(\lambda, t, v) - \lambda' \delta \dot{t}] dt$$

分部积分之:

$$\int_0^{\infty} \lambda' \delta \dot{t} dt = \lambda'(\infty) \delta I(\infty) - \lambda'(0) \delta I(0) - \int_0^{\infty} \dot{\lambda}' \delta I dt$$

因 v 不影响 $I(\infty) = 0$, 上式 $= -\lambda'(0) \delta I(0) - \int_0^{\infty} \dot{\lambda}' \delta I dt$, 而

$$\begin{aligned} \delta \bar{J}(v) &= \psi(\bar{I}_0, \bar{x}_0) - \psi(I_0, x_0) + \lambda'(0) \delta I_0 \\ &\quad + \int_0^{\infty} [H(\lambda, \bar{t}, \bar{v}) - H(\lambda, t, v) - \dot{\lambda}' \delta I] dt \end{aligned} \quad (2.4.24)$$

而

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} [H(\lambda, \bar{t}, \bar{v}) - H(\lambda, t, v)] dt \\ &= \int_0^{\infty} [H(\lambda, \bar{t}, \bar{v}) - H(\lambda, t, \bar{v}) + H(\lambda, t, \bar{v}) - H(\lambda, t, v)] dt \\ &= \int_0^{\infty} [H_t(\lambda, t, v) \delta I + H(\lambda, t, \bar{v}) - H(\lambda, t, v)] dt \end{aligned}$$

此式还可写成

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} [H_t(\lambda, t, v) \delta I + [H_t(\lambda, t, \bar{v}) - H_t(\lambda, t, v)] \delta I + H(\lambda, t, \bar{v}) - H(\lambda, t, v)] dt \\ &\approx \int_0^{\infty} [H_t(\lambda, t, v) \delta I + H(\lambda, t, \bar{v}) - H(\lambda, t, v)] dt \end{aligned} \quad (2.4.25)$$

再将式(2.4.25)代入式(2.4.24)并展开 $\psi(I_0 + \delta I_0, x_0)$, 经整理得

$$\begin{aligned}\delta J(\nu) = & [\psi_{t_0}(I_0, x_0) + \lambda'(0)]\delta I_0 + \int_0^{\infty} [H_t(\lambda, I, \nu) + \dot{\lambda}']\delta I dt \\ & - \int_0^{\infty} [H(\lambda, I, \tilde{\nu}) - H(\lambda, I, \nu)]dt + \beta(\epsilon)\end{aligned}\quad (2.4.26)$$

式中, $\beta(\epsilon)$ 表示高阶无穷小量。上述表示由于 $\nu(t)$ 改变 $\tilde{\nu}$ 后产生的指标变化部分。

只要 $I(t), \nu(t)$ 满足式(2.4.16), 则伴随向量 $\lambda(t)$ 可任选而不影响指标的等价性, 因此, 若选

$$\dot{\lambda}' = -H_t(\lambda, I, \nu) = -\lambda' f_1(I, \nu) - L(I, \nu) \quad (2.4.27)$$

再给定初值条件

$$\lambda'(0) = -\psi_{t_0}(I_0, x_0) = -2x_0 \quad (2.4.28)$$

则式(2.4.26)忽略高价无穷小量 $\beta(\epsilon)$ 为

$$\delta \bar{J}(\nu) = \int_0^{\infty} [H(\lambda, I, \tilde{\nu}) - H(\lambda, I, \nu)]dt \quad (2.4.29)$$

既然 λ, I, ν 皆为已知且不依赖于 $\tilde{\nu}$, 所以式(2.4.29)给出了由 $\tilde{\nu}$ 产生的指标变化量的近似表达式, 利用此式可导出控制函数为最优的必要条件: 若控制 $\nu = \nu^*$ 为最佳, 则对任意 $\nu \in V$ 应满足

$$H(\lambda(t), I^*(t), \nu(t)) \leq H(\lambda(t), I^*(t), \nu^*(t)) \quad (2.4.30)$$

式中, I^* 为 ν^* 对应的最优轨线。

对式(2.4.30)可用反证法证明其成立, 其证法与终值型最大值原理相同。引理证毕。

依据引理 2.4.1, 下面对初值控制问题(2.4.15)和(2.4.16)求解如下:

做哈密顿函数

$$H = \lambda'(\tilde{A}I + \tilde{B}_2\nu) + 2I'B_2\nu - I'B_1B_1'I - \eta\nu'\nu$$

伴随方程

$$\dot{\lambda} = -\tilde{A}'\lambda - 2B_2\nu + 2B_1B_1'I \quad (2.4.31)$$

$$\lambda(0) = -2x_0 \quad (2.4.32)$$

驻值条件

$$\frac{\partial H}{\partial \nu} = \tilde{B}_2'\lambda + 2B_2'I - 2\eta\nu = 0$$

$$v^* = \eta^{-1}(\tilde{B}_2' \lambda + 2B_2'l)/2 \quad (2.4.33)$$

下面对 v^* 的表达式进行整理: 将式(2.4.11)代入式(2.4.1)得

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax - B_1 B_1' (P_1 x + l) + B_2 v \\ &= (A - B_1 B_1' P_1) x - B_1 B_1' l + B_2 v \\ &= -\tilde{A}'x - B_1 B_1' l + B_2 v, \quad x(0) = x_0 \end{aligned} \quad (2.4.34)$$

比较式(2.4.31), (2.4.32)和(2.4.34), 若在式(2.4.31), (2.4.32)中, 令 $-\lambda/2 = z$, 则式(2.4.31)可写成

$$-\dot{z}/2 = -\tilde{A}'(-\lambda/2) + B_2 v - B_1 B_1' l$$

即

$$\dot{z} = -\tilde{A}'z + B_2 v - B_1 B_1' l, \quad z(0) = x \quad (2.4.35)$$

可见, 式(2.4.35)和(2.4.34)是完全一致的同解方程, 即有 $z = x$, 亦即 $\lambda = -2z = -2x$, 代入式(2.4.33), 并考虑到 $\tilde{B}_2 = -P_1 B_2$, 则有

$$v^* = \eta^{-1}[-B_2'P_1(-2x) + 2B_2'l]/2 = \eta^{-1}B_2'(P_1 x + l) \quad (2.4.36)$$

至此可见式(2.4.11)的 u^* 与式(2.4.36)的 v^* 有相同的反馈控制量, 下面再推导它们的状态反馈形式。

(3) u^*, v^* 的完全状态反馈形式推导。

将 u^*, v^* 代入式(2.4.1)和(2.4.10)得

$$\dot{x} = \bar{A}x - \hat{R}^{-1}B'l, \quad x(0) = x_0 \quad (2.4.37)$$

$$\dot{l} = -\bar{A}'l - \hat{Q}x, \quad l(\infty) = 0 \quad (2.4.38)$$

式中记号意义:

$$B = [B_1, B_2], \quad \hat{Q} = P_1 B_2 \eta^{-1} B_2' P_1$$

$$\hat{R}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\eta^{-1} \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = A - B_1 B_1' P_1 + B_2 \eta^{-1} B_2' P_1$$

而式(2.4.37)和(2.4.38)可视为下列线性二次最优控制问题:

$$\dot{x} = \bar{A}x + Bu, \quad x(0) = x_0$$

指标

$$\hat{J} = \min_u \frac{1}{2} \int_0^\infty (x' \hat{Q} x + u' \hat{R} u) dt$$

应用最大值原理(设伴随向量为 \bar{l})可导出与此问题对应的伴随方程组。又由 LQ 问题众所周知的结论可知, x, l 有线性解关系, 可设为

$$l = \bar{P}_2 x, \quad \bar{P}_2 = \bar{P}_2' \text{(待定)} \quad (2.4.39)$$

再由上式求导 $\dot{l} = \bar{P}_2 \dot{x}$, 结合式(2.4.37)和(2.4.38), 代入整理, 有恒等式

$$\begin{aligned} & [\bar{P}_2 A + A' \bar{P}_2 - \bar{P}_1 B_1 B_1' \bar{P}_2 - \bar{P}_2 B_1 B_1' \bar{P}_1 - \bar{P}_2 B_1 B_1' \bar{P}_2 \\ & + \bar{P}_1 B_2 \eta^{-1} B_2' (\bar{P}_2 + \bar{P}_1) + \bar{P}_2 B_2 \eta^{-1} B_2' (\bar{P}_2 + \bar{P}_1)] x = 0 \end{aligned}$$

得

$$\begin{aligned} & [(\bar{P}_1 + \bar{P}_2)A - \bar{P}_1 A + A'(\bar{P}_1 + \bar{P}_2) - A' \bar{P}_1 + \bar{P}_1 B_1 B_1' \bar{P}_1 \\ & - (\bar{P}_1 + \bar{P}_2)(B_1 B_1' - B_2 \eta^{-1} B_2')(\bar{P}_1 + \bar{P}_2)] x = 0 \end{aligned}$$

结合式(2.4.9)可得: 若 \bar{P}_2 满足

$$(\bar{P}_1 + \bar{P}_2)A + A'(\bar{P}_1 + \bar{P}_2) + Q - (\bar{P}_1 + \bar{P}_2)(B_1 B_1' - B_2 \eta^{-1} B_2')(\bar{P}_1 + \bar{P}_2) = 0 \quad (2.4.40)$$

记 $P = \bar{P}_1 + \bar{P}_2$, 则上式即要求 P 满足方程

$$PA + A'P + Q - P(B_1 B_1' - B_2 \eta^{-1} B_2')P = 0 \quad (2.4.41)$$

而最优控制(2.4.11)和“最坏干扰”(2.4.36)变为

$$u^* = -B_1'(\bar{P}_1 x + l) = -B_1'(\bar{P}_1 x + \bar{P}_2 x) = -B_1'Px := K_1 x \quad (2.4.42)$$

$$v^* = \eta^{-1} B_2'(\bar{P}_1 x + l) = \eta^{-1} B_2'(\bar{P}_1 + \bar{P}_2)x = \eta^{-1} B_2'Px := K_2 x \quad (2.4.43)$$

(4) 确定待定常数 η .

将式(2.4.42)的 u^* 和式(2.4.43)的 v^* 代入式(2.4.1)有

$$\dot{x} = [A - (B_1 B_1' - B_2 \eta^{-1} B_2')P]x = \bar{A}x \quad (2.4.44)$$

若 $\text{Re}\lambda(\bar{A}) < 0$, 即 \bar{A} 渐近稳定, 则上式有解 $x(t) = e^{\bar{A}t}x_0$, 从而有

$$v^* = \eta^{-1} B_2' P e^{\bar{A}t} x_0 = K_2 e^{\bar{A}t} x_0$$

代入干扰约束(2.4.3), 得

$$\int_0^\infty v^* v^* dt = x_0' \left[\int_0^\infty e^{\bar{A}t} K_2' K_2 e^{\bar{A}t} dt \right] x_0 := x_0' U(\eta) x_0 \leq \delta^2 \quad (2.4.45)$$

式中,

$$U(\eta) = \int_0^\infty e^{\bar{A}t} K_2' K_2 e^{\bar{A}t} dt \quad (2.4.46)$$

众所周知, 上式定义的 $U(\eta)$ 还可表为如下矩阵方程惟一解的形式:

$$\bar{A}'U(\eta) + U(\eta)\bar{A} + K_2'K_2 = 0 \quad (2.4.47)$$

待定常数 η 的确定方法如下:

1) 若 x_0 已知给定, 则由式(2.4.7)得确定 η 的方程为

$$x_0'U(\eta)x_0 = \delta^2 \quad (2.4.48)$$

式中, $U(\eta)$ 由式(2.4.47)给出, 它是 η 的函数。这样控制问题已获解。

然而, 注意到此时 η 由具体的 x_0 有关。可想而知, 对于一个实际系统, 初态常常是不固定的, 因此要系统最优运行, 控制律应随系统初态而改变, 这种设计显然有致命的缺欠。为解决这个问题, 我们提出: 假定初态也是不确定的, 但有一个范围限制, 如式(2.4.2)所示, 通常, 这种情况亦是合理的。

下面考虑初态不确定约束(2.4.2)下的常数 η 的确定问题。

2) 当 x_0 不确定, 但具有式(2.4.2)的约束时, 考虑干扰约束(2.4.3)和确定 η 常数的方程(2.4.7), 可得

$$\max_{\|x_0\|^2 \leq \delta_0^2} x_0'U(\eta)x_0 = \delta^2 \quad (2.4.49)$$

下面给出由式(2.4.49)简化求解 η 的结论。

引理 2.4.2 对由式(2.4.47)确定的实对称非负定矩阵 $U(\eta)$, 式(2.4.49)可等价为

$$\max \lambda(U(\eta)) = \delta^2/\delta_0^2 \quad (2.4.50)$$

式中, $\max \lambda(U(\eta))$ 为 $U(\eta)$ 的最大特征值。

证 由 2.3 小有关结论知 η 为正实数(待定), 不妨先视为固定, 对 $U(\eta)$ 对角化。因 $U'(\eta) = U(\eta) \geq 0$, 故存在正交阵 T , 使

$$T'U(\eta)T = \Lambda(\eta) = \text{diag}[\lambda_1(\eta), \dots, \lambda_n(\eta)]$$

不妨设对 $\eta > 0$ (或对 η 的不同可能取值区域)有排列

$$\lambda_1(\eta) \geq \lambda_2(\eta) \geq \dots \geq \lambda_n(\eta)$$

并记 $(Tx_0)' = \tilde{x}_0' = [\tilde{x}_{01}, \dots, \tilde{x}_{0n}]$, 若仅考虑式(2.4.49)左边, 则可证其极大值应在边界 $\|x_0\|^2 = \delta_0^2$ 上达到, 因此有

$$\begin{aligned} \max_{\|x_0\|^2 \leq \delta_0^2} x_0'U(\eta)x_0 &= \max_{\|x_0\|^2 \leq \delta_0^2} x_0'T'U(\eta)Tx_0 = \max_{\|\tilde{x}_0\|^2 \leq \delta_0^2} \tilde{x}_0'\Lambda(\eta)\tilde{x}_0 \\ &= \max_{\|\tilde{x}_0\|^2 \leq \delta_0^2} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i(\eta) \tilde{x}_{0i}^2 \right) \leq \max_{\|\tilde{x}_0\|^2 \leq \delta_0^2} (\lambda_1(\eta) \sum_{i=1}^n \tilde{x}_{0i}^2) \end{aligned}$$

$$= \lambda_1(\eta) \delta_0^2 \quad (2.4.51)$$

又因 $\max_{\|\tilde{x}_0\|^2 = \delta_0^2} \tilde{x}_0' A(\eta) \tilde{x}_0 \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i(\eta) \tilde{x}_{0i}^2$ 对任满足 $\|\tilde{x}_0\|^2 = \delta_0^2$ 的 \tilde{x}_0 均成立, 故可取 $\tilde{x}_0 = [\delta_0, 0, \dots, 0]$, 则有

$$\max_{\|\tilde{x}_0\|^2 = \delta_0^2} \tilde{x}_0' A(\eta) \tilde{x}_0 \geq \lambda_1(\eta) \delta_0^2 \quad (2.4.52)$$

比较式(2.4.51)和(2.4.52)可得

$$\max_{\|\tilde{x}_0\|^2 = \delta_0^2} \tilde{x}_0' U(\eta) \tilde{x}_0 = \lambda_1(\eta) \delta_0^2 = \max \lambda(U(\eta)) \delta_0^2 \quad (2.4.53)$$

再考虑干扰约束对极大值的限制, 即式(2.4.49)的左边, 可得

$$\max \lambda(U(\eta)) = \delta^2 / \delta_0^2 \quad (2.4.54)$$

(5) 最优指标值。

先考察等价指标(2.4.6), 可以证明 $J^* = x_0' P x_0$, 证明如下:

将 v^* , I^* 代入式(2.4.13), 并整理如下:

$$\begin{aligned} J^* &= x_0' P_1 x_0 + 2 I_0^* x_0 + \int_0^\infty (I^* B_2 v^* + v^* B_2' I^* - \eta v^* B_2' v^* - I^* B_1 B_1' I^*) dt \\ &= x_0' P_1 x_0 + 2 x_0' P_2 x_0 \\ &\quad + \int_0^\infty x^* (P_2 B_2 \eta^{-1} B_2' P + P B_2 \eta^{-1} B_2' P_2 - P B_2 \eta^{-1} B_2' P_2 - P_2 B_1 B_1' P_2) x^* dt \\ &= x_0' (P_1 + 2P_2) x_0 \\ &\quad + \int_0^\infty x^* (P_2 [A - (B_1 B_1' - B_2 \eta^{-1} B_2') P] - P_2 (A - B_1 B_1' P) - P B_2 \eta^{-1} B_2' P \\ &\quad + [A - (B_1 B_1' - B_2 \eta^{-1} B_2') P]' P_2 - (A - B_1 B_1' P)' P_2 - P_2 B_1 B_1' P_2) x^* dt \\ &= x_0' (P_1 + 2P_2) x_0 + \int_0^\infty d(x^* P_2 x^*) \\ &\quad - \int_0^\infty x^* (P_2 (A - B_1 B_1' P) + (A - B_1 B_1' P)' P_2 + P B_2 \eta^{-1} B_2' P + P_2 B_1 B_1' P_2) x^* dt \\ &= x_0' (P_1 + 2P_2) x_0 - x_0' P_2 x_0 \\ &\quad - \int_0^\infty x^* (P (A - B_1 B_1' P) - P_1 (A - B_1 B_1' P) + (A - B_1 B_1' P)' P \\ &\quad - (A - B_1 B_1' P)' P_1 + P B_2 \eta^{-1} B_2' P + P_2 B_1 B_1' P_2) x^* dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{x}_0' P \mathbf{x}_0 \\
&- \int_0^\infty \mathbf{x}^T [-P_t A - A' P_1 + P_1 B_1 B_1' P_1 + P_1 B_1 B_1' P_2 + P B_1 B_1' P_1 \\
&\quad + P(A - B_1 B_1' P) + (A - B_1 B_1' P)' P + P B_2 \eta^{-1} B_2' P + P_2 B_1 B_1' P_2] \mathbf{x}^T dt
\end{aligned}$$

由式(2.4.9), 得

$$\tilde{J}^* = \mathbf{x}_0' P \mathbf{x}_0 - \int_0^\infty \mathbf{x}^T [Q + P A + A' P - P(B_1 B_1' - B_2 \eta^{-1} B_2') P] \mathbf{x}^T dt$$

又由式(2.4.41), 得

$$\tilde{J}^* = \mathbf{x}_0' P \mathbf{x}_0 - \int_0^\infty \mathbf{x}^T (Q - Q) \mathbf{x}^T dt = \mathbf{x}_0' P \mathbf{x}_0 \quad (2.4.55)$$

比较式(2.4.4)中的指标 J 和式(2.4.6) 中的 \tilde{J} , 可得最优指标值

$$J^* = \tilde{J}^* + \eta \int_0^\infty \mathbf{y}^T \mathbf{y}^T dt = \tilde{J}^* + \eta \delta^2 = \mathbf{x}_0' P \mathbf{x}_0 + \eta \delta^2 \quad (2.4.56)$$

若再考虑初态的不确定性, 依引理 2.4.2, 则有

$$J^* = \mathbf{x}_0' P \mathbf{x}_0 + \eta \delta^2 \leq \max \lambda(P) \delta_0^2 + \eta \delta^2 \quad (2.4.57)$$

综合上述结果, 对式(2.4.1) ~ (2.4.4) 描述的线性二次 maxmin 最优控制问题的状态反馈解有如下结论:

定理 2.4.1 对系统(2.4.1)假定:

① (A, B_1) 可控(或可镇定), (A, C) 可观, (A, Q) 可观;

② 存在一个实对称矩阵 P 和常数 $\eta > 0$ 满足下方程组:

$$PA + A'P + Q - P(B_1 B_1' - B_2 \eta^{-1} B_2')P = 0$$

$$\operatorname{Re} \lambda(A - (B_1 B_1' - B_2 \eta^{-1} B_2')P) < 0$$

$$U(\eta) \bar{A} + \bar{A}' U(\eta) + K_2' K_2 = 0$$

当 \mathbf{x}_0 已知时

$$\mathbf{x}_0' U(\eta) \mathbf{x}_0 = \delta^2 \quad (2.4.58)$$

当 $\|\mathbf{x}_0\|^2 \leq \delta_0^2$ 时

$$\max \lambda(U(\eta)) = \delta^2 / \delta_0^2$$

则问题(2.4.1) ~ (2.4.4) 的最优控制策略解为:

最优反馈控制

$$u^* = -B_1'Px = K_1x$$

“最坏”干扰乱

$$v^* = \eta^{-1}B_2'Px = K_2x$$

最优指标值当 x_0 已知时

$$J^* = x_0'Px_0 + \eta\delta^2$$

当 $\|x_0\|^2 \leq \delta_0^2$ 时

$$J^* \leq \max \lambda(P)\delta_0^2 + \eta\delta^2$$

式中,

$$\bar{A} = A - (B_1B_1' - B_2\eta^{-1}B_2')P$$

注释 1 定理 2.4.1 的结论表明问题(2.4.1)~(2.4.4)的解依赖于方程组(2.4.58)解的存在性,其判定是个非常复杂的问题,把它放在第四章专门讨论。本章则总是假定(2.4.58)有解 P, η ,并使 $\text{Re}(A) < 0$ 成立来处理问题。

注释 2 条件①中 $(A, C_1), (A, Q)$ 可观与后面状态观测和 Riccati 方程解的存在性有关,这里不必细究。

下面对标量系统举例,可得到一个简洁的解析解形式。

设系统为

$$\dot{x} = ax + b_1u + b_2v, \quad x_0^2 \leq \delta_0^2 \quad (2.4.59)$$

$$\int_0^\infty v^2 dt \leq \delta^2 \quad (2.4.60)$$

指标

$$J = \max_{\|v\|^2 \leq \delta^2} \min_u \int_0^\infty (qx^2 + u^2) dt \quad (2.4.61)$$

利用前述解法可得最优解

$$u^* = -b_1px \quad (2.4.62)$$

$$v^* = \eta^{-1}b_2px \quad (2.4.63)$$

p 满足

$$2ap + q - (b_1^2 - b_2^2/q)p^2 = 0 \quad (2.4.64)$$

将 u^*, v^* 代入式(2.4.59)

$$\dot{x} = [a - (b_1^2 - b_2^2/q)p]x := \alpha x$$

当 $\alpha < 0$ 有

$$x(t) = e^{\alpha t}x_0, \quad v^* = \eta^{-1}b_2px_0e^{\alpha t}$$

代入式(2.4.60), 并应用引理 2.4.2, 可得确定常数 η 的方程

$$\int_0^\infty (\eta^{-1}b_2p)^2 e^{2\alpha t} dt = \delta^2/\delta_0^2$$

即

$$-(\eta^{-1}b_2p)^2/2\alpha = \delta^2/\delta_0^2 \quad (2.4.65)$$

令 $z = \eta^{-1}$ 代入上式, 将 α 表达式代入得

$$z^2 + 2\delta^2(p\delta_0^2)z + 2\delta^2(b_2p\delta_0^2)^{-2}(a - b_1^2p) = 0$$

记为 $z^2 + 2\beta_1z + \beta_2 = 0$, 取其最大解满足 $\alpha < 0$, 得

$$z = -\beta_1 + (\beta_1^2 - \beta_2)^{1/2} = \eta^{-1}$$

由方程组

$$\begin{cases} \eta = [-\beta_1 + (\beta_1^2 - \beta_2)^{1/2}]^{-1} \\ 2ap + q - p^2(b_1^2 - b_2^2/\eta) = 0 \end{cases} \quad (2.4.66)$$

解出 p , 将 β_1, β_2 代入得关于 p 的方程为

$$2ap + q - b_1^2p^2 + b_2^2p[2\delta/\delta_0 + [\delta^2/\delta_0^2 - 2(a - b_1^2p)/b_2^2]^{1/2}] = 0 \quad (2.4.67)$$

最优指标值

$$\begin{aligned} J^* &= -[(b_1p)^2 + q]x_0^2/2\alpha \\ &= -(b_1p)^2 + q][(b_1^2 - b_2^2/\eta)p - a]^{-1}x_0^2/2 \\ &\leq [(b_1p)^2 + q][(b_1^2 - b_2^2/\eta)p - a]^{-1}\delta_0^2/2 \end{aligned} \quad (2.4.68)$$

2.5 具 L_2 有界不确定性系统线性二次鲁棒最优状态反馈控制 ——maxmin 意义下的给定轨线跟踪问题

对应确定性系统的跟踪控制问题, 在不确定性系统控制中也可有类似的问题提法, 本节研究对给定轨线的 maxmin 意义下的跟踪问题。

考虑系统

$$\dot{x} = Ax + B_1u + B_2v, \quad x(0)'x(0) = x_0'x_0 \leq \delta_0^2 < \infty \quad (2.5.1)$$

$$y = C_1x \quad (2.5.2)$$

为推导简便此处略去 D_1v , 若考虑 $y = C_1x + D_1v$ 结论类似, 稍繁。

干扰约束

$$\int_0^\infty v'v dt \leq \delta^2 < \infty \quad (2.5.3)$$

被跟踪轨线 \bar{y} 满足

$$\dot{z} = Fz, \quad z(0)'z(0) = z_0'z_0 \leq \delta_1^2 \quad (2.5.4)$$

$$\bar{y} = Hz \quad (2.5.5)$$

式中, F 漂近稳定, 也即有 $\int_0^\infty \bar{y}'\bar{y} dt < \infty$ 。

(1) 当 F, H 为已知时, 增广系统(2.5.1)和(2.5.4):

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} B_2 \\ 0 \end{bmatrix} v \quad (2.5.6)$$

记 $\hat{x} = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$, $\hat{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix}$, $\hat{B}_1 = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\hat{B}_2 = \begin{bmatrix} B_2 \\ 0 \end{bmatrix}$, 则上式可表为

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}_1u + \hat{B}_2v \quad (2.5.7)$$

$$\hat{x}(0)' \hat{x}(0) = \hat{x}_0' \hat{x}_0 = x_0'x_0 + z_0'z_0 \leq \delta_0^2 + \delta_1^2 = \hat{\delta}_0^2$$

指标

$$J = \max_{\|v\|_2^2 \leq \delta^2} \min_u \int_0^\infty [(y - \bar{y})'Q(y - \bar{y}) + u'u] dt \quad (2.5.8)$$

考虑增广系统(2.5.7), 则

$$J = \max_{\|v\|_2^2 \leq \delta^2} \min_u \int_0^\infty (\hat{x}' \hat{Q} \hat{x} + u'u) dt \quad (2.5.9)$$

式中

$$\hat{Q} = \begin{bmatrix} C_1QC_1 & -C_1QH \\ -H'QC_1 & H'QH \end{bmatrix}$$

由定理 2.4.1, 扩展系统(2.5.7)在指标(2.5.9)下的 $\max\min$ 最优状态反馈解

为

$$\hat{u}^* = -\hat{B}_1' \hat{P} \hat{x} \triangleq \hat{K}_1 \hat{x}$$

$$\hat{v}^* = \hat{\eta}^{-1} \hat{B}_2' \hat{P} \hat{x} \triangleq \hat{K}_2 \hat{x}$$

式中, \hat{P} 满足

$$\hat{P} \hat{A} + \hat{A}' \hat{P} + \hat{Q} - \hat{P} (\hat{B}_1 \hat{B}_1' - \hat{B}_2 \hat{\eta}^{-1} \hat{B}_2') \hat{P} = 0$$

$\hat{\eta} > 0$, 满足

$$\max \lambda(\hat{U}(\hat{\eta})) = \delta^2 / \hat{\delta}_0^2$$

$\hat{U}(\hat{\eta})$ 是下列矩阵方程的惟一解:

$$\hat{A}' \hat{U}(\hat{\eta}) + \hat{U}(\hat{\eta}) \hat{A} + \hat{K}_2' \hat{K}_2 = 0$$

式中, $\hat{A} = [\hat{A} - (\hat{B}_1 \hat{B}_1' - \hat{B}_2 \hat{\eta}^{-1} \hat{B}_2') \hat{P}]$ 。

(2) 当 F, H 未知, 但 \bar{y} 是已知给定轨线时, 由式(2.5.1)和式(2.5.8), 对给定轨线 \bar{y} 的 maxmin 跟踪问题求解如下:

由 2.3 节中的定理 2.3.4 知可优化如下等价指标:

$$\bar{J} = \max_{\|v\|^2_2 \leq \delta^2} \left\{ \min_u \int_0^\infty [(y - \bar{y})' Q (y - \bar{y}) + u' u] dt - \eta \int_0^\infty v' v dt \right\} \quad (2.5.10)$$

式中, $\eta > 0$, 满足 $\int_0^\infty v' v dt = \delta^2$ 。

1) 对 u 极小化。令

$$\begin{aligned} \bar{J}(v) &= \min_u \int_0^\infty [(y - \bar{y})' Q (y - \bar{y}) + u' u] dt \\ &= \min_u \int_0^\infty (x' C_1 Q C_1 x - x' C_1' Q \bar{y} - \bar{y}' Q C_1 x + \bar{y}' Q \bar{y} + u' u) dt \end{aligned}$$

对上式配平方, 即两边加上 $\int_0^\infty d(x' P_1 x) + \int_0^\infty d(l' x + x' l)$, $P_1 = P_1'$ 为实数阵(待定), $l(t)$ 为时间函数向量, 经计算得

$$\begin{aligned} \bar{J}(v) &= \min_u \{ x_0' P_1 x_0 + 2l_0' x_0 + \int_0^\infty [x' (C_1' Q C_1 + P_1 A + A' P_1 - P_1 B_1 B_1' P_1) x \\ &\quad + 2l' B_2 v - l' B_1 B_1' l + [u + B_1' (P_1 x + l)]' [u + B_1' (P_1 x + l)] \\ &\quad + 2x' [l + (A' - P_1 B_1 B_1' l) x + P_1 B_2 v - C_1' Q \bar{y}] + \bar{y}' Q \bar{y}] dt \} \end{aligned} \quad (2.5.11)$$

若 P_1 满足

$$P_1 A + A' P_1 + C_1' Q C_1 - P_1 B_1 B_1' P_1 = 0 \quad (2.5.12)$$

且 $\text{Re}\lambda(A - B_1 B_1' P_1) < 0$ 。

$I(t)$ 满足

$$\dot{I} + (A' - P_1 B_1 B_1') I + P_1 B_2 v - C_1' Q \tilde{y} = 0, \quad I(\infty) = 0 \quad (2.5.13)$$

最优控制

$$u^* = -B_1'(P_1 x + I) \quad (2.5.14)$$

最优指标

$$\bar{J}^*(v) = x_0' P_1 x_0 + 2l_0' x_0 + \int_0^\infty (2l' B_2 v + \tilde{y}' Q \tilde{y} - l' B_1 B_1' l) dt \quad (2.5.15)$$

2) 对 v 极大化。记 $\tilde{A} = -(A' - P_1 B_1 B_1')$, $\tilde{B}_2 = -P_1 B_2$, $\tilde{C}_1 = -C_1' Q$, 则式(2.5.13)可写为

$$\dot{l} = \tilde{A}_1 l + \tilde{B}_2 v + \tilde{C}_1 \tilde{y}, \quad I(\infty) = 0 \quad (2.5.16)$$

将 $\bar{J}^*(v)$ 代入式(2.5.10), 得

$$\bar{J} = \max_v \{ x_0' P_1 x_0 + 2l_0' x_0 + \int_0^\infty [2l' B_2 v + \tilde{y}' Q \tilde{y} - Q B_1 B_1' l - \eta v' v] dt \} \quad (2.5.17)$$

注意式(2.5.17)中的 l_0 , 由式(2.5.16)惟一确定为

$$l_0 = \int_0^\infty e^{-\tilde{A}s} [\tilde{B}_2 v(s) + \tilde{C}_1 \tilde{y}(s)] ds$$

可见 l_0 是与 $v(t)$ 有关的, 因此, 式(2.5.16)和式(2.5.17)是初值控制问题, 依引理 2.4.1 可求解如下:

令哈密顿函数为

$$H = 2l' B_2 v - l' B_1 B_1' l + \tilde{y}' Q \tilde{y} - \eta v' v + \lambda' (\tilde{A}l + \tilde{B}_2 v + \tilde{C}_1 \tilde{y})$$

伴随方程为

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= -\partial H / \partial t = -2B_2 v + 2B_1 B_1' l - \tilde{A}' \lambda \\ \lambda(0) &= -2x_0 \end{aligned} \quad (2.5.18)$$

驻值条件

$$\partial H / \partial v = 2B_2 l - 2\eta v + \tilde{B}_2' \lambda = 0$$

可得

$$v^* = \eta^{-1} (2B_2'l + \tilde{B}_2'\lambda) / 2 \quad (2.5.19)$$

将式(2.5.14)中的 u^* 代入式(2.5.1)：

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 B_1' (P_1 x + l) + B_2 v \\ &= -\tilde{A}'x - B_1 B_1'l + B_2 v, \quad x(0) = x_0 \end{aligned} \quad (2.5.20)$$

由式(2.5.18)

$$\begin{aligned} -\lambda/2 &= -\tilde{A}'(-\lambda/2) - B_1 B_1'l + B_2 v \\ &= -\lambda(0)/2 = x_0 \end{aligned} \quad (2.5.21)$$

比较式(2.5.20)与(2.5.21)得 $\lambda = -2x$, 代入式(2.5.19)得

$$v^* = \eta^{-1} B_2' (P_1 x + l) \quad (2.5.22)$$

3) 下面进一步推导 u^*, v^* 的反馈变量形式。将 u^*, v^* 代入式(2.5.1)：

$$\begin{aligned} \dot{x} &= [A - (B_1 B_1' - B_2 \eta^{-1} B_2') P_1] x - (B_1 B_1' - B_2 \eta^{-1} B_2') l \\ &\triangleq \hat{A}x - \hat{B}\hat{R}^{-1}\hat{B}'l, \quad x(0) = x_0 \end{aligned} \quad (2.5.23)$$

将 v^* 代入式(2.5.13)得

$$\begin{aligned} \dot{l} &= -\hat{A}'l - P_1 B_2 \eta^{-1} B_2' P_1 x + \tilde{C}_1 \bar{y} \\ &= -\hat{A}'l - \hat{Q}x + \tilde{C}_1 \bar{y}, \quad l(\infty) = 0 \end{aligned} \quad (2.5.24)$$

式中,

$$\hat{B} = [B_1 \quad B_2], \quad \hat{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\eta^{-1} \end{bmatrix}, \quad \hat{Q} = P_1 B_2 \eta^{-1} B_2' P_1$$

$$\hat{A} = A - (B_1 B_1' - B_2 \eta^{-1} B_2') P_1$$

观察式(2.5.23)和(2.5.24), 它们可视为由系统

$$\dot{x} = \hat{A}x + \hat{B}\hat{u} \quad (2.5.25)$$

在指标

$$\bar{J} = \min_{\tilde{\mathbf{x}}_1} \int_0^{\infty} (\mathbf{x}' \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{x} - 2\mathbf{x}' \tilde{\mathbf{C}}_1 \tilde{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{u}}' \hat{\mathbf{R}} \hat{\mathbf{u}}) dt / 2 \quad (2.5.26)$$

下应用最大值原理, 并设 $\tilde{\mathbf{l}}$ 为伴随向量而导出的伴随方程组。可验证如下:

对式(2.5.25)和式(2.5.26)运用极大值原理, 可令哈密顿函数

$$\hat{H} = (\mathbf{x}' \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{x} - 2\mathbf{x}' \tilde{\mathbf{C}}_1 \tilde{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{u}}' \hat{\mathbf{R}} \hat{\mathbf{u}}) / 2 + \tilde{\mathbf{l}}' (\hat{\mathbf{A}} \mathbf{x} + \hat{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{u}})$$

得

$$\dot{\tilde{\mathbf{l}}} = -\partial H / \partial \mathbf{x} = -\hat{\mathbf{A}}' \tilde{\mathbf{l}} - \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{C}}_1 \tilde{\mathbf{y}}, \quad \tilde{\mathbf{l}}(\infty) = 0$$

而由 $\partial H / \partial \hat{\mathbf{u}} = 0$ 导出 $\hat{\mathbf{u}} = -\hat{\mathbf{R}}^{-1} \hat{\mathbf{B}}' \tilde{\mathbf{l}}$, 代入式(2.5.25)即得式(2.5.23)。

因此, 由 LQ 跟踪问题的熟知结论, 可设 $\tilde{\mathbf{l}}$ 与 \mathbf{x} 有如下线性关系式:

$$\tilde{\mathbf{l}} = \mathbf{P}_2 \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{l}} \quad (2.5.27)$$

式中, $\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2'$ 待定。

下面推导 \mathbf{P}_2 和 $\tilde{\mathbf{l}}$ 应满足的方程式。

对式(2.5.27)求导: $\dot{\tilde{\mathbf{l}}} = \mathbf{P}_2 \dot{\mathbf{x}} + \dot{\tilde{\mathbf{l}}}$ 并结合式(2.5.23)和式(2.5.24)得

$$-\hat{\mathbf{A}}' \tilde{\mathbf{l}} - \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{C}}_1 \tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{P}_2 (\hat{\mathbf{A}} \mathbf{x} + \hat{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{R}}^{-1} \hat{\mathbf{B}}' \tilde{\mathbf{l}}) + \dot{\tilde{\mathbf{l}}}$$

再由式(2.5.27)得

$$-\hat{\mathbf{A}}' (\mathbf{P}_2 \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{l}}) - \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{C}}_1 \tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{P}_2 [\hat{\mathbf{A}} \mathbf{x} + \hat{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{R}}^{-1} \hat{\mathbf{B}}' (\mathbf{P}_2 \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{l}})] + \dot{\tilde{\mathbf{l}}}$$

整理上式得

$$[\hat{\mathbf{A}}' \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_2 \hat{\mathbf{A}} - \mathbf{P}_2 \hat{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{R}}^{-1} \hat{\mathbf{B}}' \mathbf{P}_2 + \hat{\mathbf{Q}}] \mathbf{x} - \mathbf{P}_2 \hat{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{R}}^{-1} \hat{\mathbf{B}}' \tilde{\mathbf{l}} + \hat{\mathbf{A}}' \tilde{\mathbf{l}} + \tilde{\mathbf{l}} - \tilde{\mathbf{C}}_1 \tilde{\mathbf{y}} = 0$$

若 $\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2'$, 满足

$$\hat{\mathbf{A}}' \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_2 \hat{\mathbf{A}} - \mathbf{P}_2 \hat{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{R}}^{-1} \hat{\mathbf{B}}' \mathbf{P}_2 + \hat{\mathbf{Q}} = 0 \quad (2.5.28)$$

则 $\tilde{\mathbf{l}}$ 满足

$$\dot{\tilde{\mathbf{l}}} + (\hat{\mathbf{A}}' - \mathbf{P}_2 \hat{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{R}}^{-1} \hat{\mathbf{B}}') \tilde{\mathbf{l}} - \tilde{\mathbf{C}}_1 \tilde{\mathbf{y}} = 0, \quad \tilde{\mathbf{l}}(\infty) = 0 \quad (2.5.29)$$

若 $\text{Re} \lambda(\hat{\mathbf{A}}' - \mathbf{P}_2 \hat{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{R}}^{-1} \hat{\mathbf{B}}') < 0$, 则 $\tilde{\mathbf{l}}(0) = \tilde{\mathbf{l}}_0$, 可依上式由 $\tilde{\mathbf{y}}$ 唯一确定。

将 $\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{R}}, \hat{\mathbf{Q}}$ 参数代入式(2.5.28)和式(2.5.29)得

$$\begin{aligned} \mathbf{A}'(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2) - \mathbf{A}'\mathbf{P}_1 + (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)\mathbf{A} - \mathbf{P}_1\mathbf{A} \\ + (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)(\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1' - \mathbf{B}_2\eta^{-1}\mathbf{B}_2')(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2) + \mathbf{P}_1\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1'\mathbf{P}_1 = 0 \end{aligned}$$

考虑式(2.5.12), 并记 $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2$, 则 \mathbf{P} 应满足

$$\mathbf{A}'\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{C}_1'\mathbf{Q}\mathbf{C}_1 - \mathbf{P}(\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1' - \mathbf{B}_2\eta^{-1}\mathbf{B}_2')\mathbf{P} = 0 \quad (2.5.30)$$

而式(2.5.29)可写为

$$\dot{\tilde{l}} + [\mathbf{A}' - \mathbf{P}(\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1' - \mathbf{B}_2\eta^{-1}\mathbf{B}_2')] \tilde{l} - \tilde{\mathbf{C}}_1 \tilde{\mathbf{y}} = 0, \quad \tilde{l}(\infty) = 0 \quad (2.5.31)$$

最优控制

$$\mathbf{u}^* = -\mathbf{B}_1'(\mathbf{P}_1\mathbf{x} + \mathbf{l}) = -\mathbf{B}_1'(\mathbf{P}\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{l}}) \quad (2.5.32)$$

“最坏”干扰

$$\mathbf{v}^* = \eta^{-1}\mathbf{B}_2'(\mathbf{P}_1\mathbf{x} + \mathbf{l}) = \eta^{-1}\mathbf{B}_2'(\mathbf{P}\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{l}}) \quad (2.5.33)$$

4) 最优指标值

由(2.5.17)可得最优等价指标值为

$$\bar{J}^* = \mathbf{x}_0'\mathbf{P}\mathbf{x}_0 + 2\tilde{l}_0'\mathbf{x}_0 + \int_0^\infty [\tilde{\mathbf{y}}'\mathbf{Q}\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{l}'(\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1' - \mathbf{B}_2\eta^{-1}\mathbf{B}_2')\tilde{l}]dt \quad (2.5.34)$$

式中, \tilde{l}_0 由式(2.5.31)惟一确定为

$$\tilde{l}_0 = \int_0^\infty e^{\tilde{\mathbf{A}}s} \tilde{\mathbf{C}}_1 \tilde{\mathbf{y}}(s) ds, \quad \tilde{\mathbf{A}}' = \mathbf{A}' - \mathbf{P}(\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1' - \mathbf{B}_2\eta^{-1}\mathbf{B}_2')$$

对式(2.5.34)可证明如下:

将式(2.5.32)和式(2.5.33)的 \mathbf{u}^* , \mathbf{v}^* 代入式(2.5.17), 并记相应的 $\mathbf{l}(t)$ 为 $\mathbf{l}^*(t)$ 则

$$\begin{aligned} \bar{J}^* &= \mathbf{x}_0'\mathbf{P}_1\mathbf{x}_0 + 2\tilde{l}_0'\mathbf{x}_0 + \int_0^\infty [\mathbf{l}^{*'}\mathbf{B}_2\mathbf{v}^* + \mathbf{v}^{*'}\mathbf{B}_2'\mathbf{l}^* + \tilde{\mathbf{y}}'\mathbf{Q}\tilde{\mathbf{y}} \\ &\quad - \mathbf{l}^{*'}\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1'\mathbf{l}^* - \eta^{-1}\mathbf{v}^{*'}\mathbf{v}^*]dt \end{aligned}$$

考虑式(2.5.27), 则为

$$\begin{aligned} \bar{J}^* &= \mathbf{x}_0'\mathbf{P}_1\mathbf{x}_0 + 2(\mathbf{P}_2\mathbf{x}_0 + \tilde{l}_0)'\mathbf{x}_0 \\ &\quad + \int_0^\infty [(\tilde{\mathbf{l}} + \mathbf{x}^{*'}\mathbf{P}_2)\mathbf{B}_2\eta^{-1}\mathbf{B}_2'(\mathbf{P}_2\mathbf{x}^* + \tilde{\mathbf{l}}) + (\tilde{\mathbf{l}} + \mathbf{x}^{*'}\mathbf{P}_2)\mathbf{B}_2\eta^{-1}\mathbf{B}_2'(\mathbf{P}_2\mathbf{x}^* + \tilde{\mathbf{l}}) + \tilde{\mathbf{y}}'\mathbf{Q}\tilde{\mathbf{y}}]dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - (\tilde{l}' + \mathbf{x}^* \mathbf{P}_2) \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1' (\mathbf{P}_2 \mathbf{x}^* + \tilde{l}) - (\mathbf{P}_2 \mathbf{x}^* + \tilde{l})' \mathbf{B}_2 \eta^{-1} \mathbf{B}_2' (\mathbf{P}_2 \mathbf{x}^* + \tilde{l})^\top dt \\
 & = \mathbf{x}_0' \mathbf{P}_1 \mathbf{x}_0 + 2(\mathbf{P}_2 \mathbf{x}_0 + \tilde{l}_0)' \mathbf{x}_0 \\
 & + \int_0^\infty [\mathbf{x}^{**} (\mathbf{P}_2 \mathbf{B}_2 \eta^{-1} \mathbf{B}_2' \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{B}_2 \eta^{-1} \mathbf{B}_2' \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_2 \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1' \mathbf{P}_2 - \mathbf{P} \mathbf{B}_2 \eta^{-1} \mathbf{B}_2' \mathbf{P}) \mathbf{x}^* \\
 & + \tilde{l}' \mathbf{B}_2 \eta^{-1} \mathbf{B}_2' \tilde{l} - \tilde{l}' \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1' \tilde{l} + \mathbf{x}^* \mathbf{P}_2 \mathbf{B}_2 \eta^{-1} \mathbf{B}_2' \tilde{l} + \tilde{l}' \mathbf{B}_2 \eta^{-1} \mathbf{B}_2' \mathbf{P}_2 \tilde{l} \\
 & - \tilde{l}' \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1' \mathbf{P}_2 \mathbf{x}^* + \mathbf{x}^* \mathbf{P}_2 \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1' \tilde{l} + \tilde{y}' \mathbf{Q} \tilde{y}] dt \\
 & = \mathbf{x}_0' \mathbf{P}_1 \mathbf{x}_0 + 2(\mathbf{P}_2 \mathbf{x}_0 + \tilde{l}_0)' \mathbf{x}_0 \\
 & + \int_0^\infty [\mathbf{x}^{**} [\mathbf{P}_2 (\mathbf{A} - (\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1' - \mathbf{B}_2 \eta^{-1} \mathbf{B}_2') \mathbf{P}) - \mathbf{P}_2 (\mathbf{A} - \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1' \mathbf{P}) \\
 & + (\mathbf{A}' - \mathbf{P}(\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1' - \mathbf{B}_2 \eta^{-1} \mathbf{B}_2')) \mathbf{P}_2 \\
 & - (\mathbf{A}' - \mathbf{P} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1') \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_2 \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1' \mathbf{P}_2 - \mathbf{P} \mathbf{B}_2 \eta^{-1} \mathbf{B}_2' \mathbf{P}] \mathbf{x}^* - \tilde{l}' (\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1' - \mathbf{B}_2 \eta^{-1} \mathbf{B}_2') \tilde{l} \\
 & + \mathbf{x}^* \mathbf{P}_2 (-\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1' + \mathbf{B}_2 \eta^{-1} \mathbf{B}_2') \tilde{l} + \tilde{l}' (-\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1' + \mathbf{B}_2 \eta^{-1} \mathbf{B}_2') \mathbf{P}_2 \mathbf{x}^* + \tilde{y}' \mathbf{Q} \tilde{y}] dt
 \end{aligned}$$

又由

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{x}}^* &= \mathbf{A} \mathbf{x}^* + \mathbf{B}_1 \mathbf{u}^* + \mathbf{B}_2 \mathbf{v}^* \\
 &= [\mathbf{A} - (\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1' - \mathbf{B}_2 \eta^{-1} \mathbf{B}_2') \mathbf{P}] \mathbf{x}^* - (\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1' - \mathbf{B}_2 \eta^{-1} \mathbf{B}_2') \tilde{l}
 \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}
 \dot{j}^* &= \mathbf{x}_0' \mathbf{P}_1 \mathbf{x}_0 + 2(\mathbf{P}_2 \mathbf{x}_0 + \tilde{l}_0)' \mathbf{x}_0 + \int_0^\infty d(\mathbf{x}^* \mathbf{P}_2 \mathbf{x}^*) \\
 & - \int_0^\infty \mathbf{x}^{**} [\mathbf{P}_2 (\mathbf{A} - \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1' \mathbf{P}) + (\mathbf{A}' - \mathbf{P} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1') \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_2 \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1' \mathbf{P}_2 \\
 & + \mathbf{P} \mathbf{B}_2 \eta^{-1} \mathbf{B}_2' \mathbf{P}] \mathbf{x}^* \\
 & + \int_0^\infty [\tilde{y}' \mathbf{Q} \tilde{y} - \tilde{l}' (\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1' - \mathbf{B}_2 \eta^{-1} \mathbf{B}_2') \tilde{l}] dt \\
 & = \mathbf{x}_0' (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2) \mathbf{x}_0 + 2\tilde{l}_0' \mathbf{x}_0 \\
 & - \int_0^\infty \mathbf{x}^{**} [\mathbf{P} (\mathbf{A} - \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1' \mathbf{P}) - \mathbf{P}_1 (\mathbf{A} - \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1' \mathbf{P}) + (\mathbf{A}' - \mathbf{P} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1') \mathbf{P} \\
 & - (\mathbf{A}' - \mathbf{P} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1') \mathbf{P}_1 \\
 & + \mathbf{P}_2 \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1' \mathbf{P}_2 + \mathbf{P} \mathbf{B}_2 \eta^{-1} \mathbf{B}_2' \mathbf{P}] \mathbf{x}^* dt + \int_0^\infty [\tilde{y}' \mathbf{Q} \tilde{y} - \tilde{l}' (\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1' - \mathbf{B}_2 \eta^{-1} \mathbf{B}_2') \tilde{l}] dt
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{x}_0' \mathbf{P} \mathbf{x}_0 + 2\bar{l}_0' \mathbf{x}_0 \\
&- \int_0^\infty \mathbf{x}^* \left[-\mathbf{P}_1 \mathbf{A} - \mathbf{A}' \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_1 \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1' \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_1 \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1' \mathbf{P}_2 + \mathbf{P} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1' \mathbf{P}_1 \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{P} (\mathbf{A} - \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1' \mathbf{P}) + (\mathbf{A}' - \mathbf{P} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1') \mathbf{P} + \mathbf{P}_2 \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1' \mathbf{P}_2 + \mathbf{P} \mathbf{B}_2 \eta^{-1} \mathbf{B}_2' \mathbf{P} \right] \mathbf{x}^* dt \\
&+ \int_0^\infty [\bar{\mathbf{y}}' \mathbf{Q} \bar{\mathbf{y}} - \bar{l}' (\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1' - \mathbf{B}_2 \eta^{-1} \mathbf{B}_2') \bar{l}] dt
\end{aligned}$$

由式(2.5.12)并合并其余各项, 考虑 $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2$ 则

$$\begin{aligned}
\bar{J}^* &= \mathbf{x}_0' \mathbf{P} \mathbf{x}_0 + 2\bar{l}_0' \mathbf{x}_0 \\
&- \int_0^\infty \mathbf{x}^* \left[\mathbf{C}_1' \mathbf{Q} \mathbf{C}_1 + \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}' \mathbf{P} - \mathbf{P} (\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1' - \mathbf{B}_2 \eta^{-1} \mathbf{B}_2') \mathbf{P} \right] \mathbf{x}^* dt \\
&+ \int_0^\infty [\bar{\mathbf{y}}' \mathbf{Q} \bar{\mathbf{y}} - \bar{l}' (\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1' - \mathbf{B}_2 \eta^{-1} \mathbf{B}_2') \bar{l}] dt
\end{aligned}$$

再考虑式(2.5.30)

$$\begin{aligned}
\bar{J}^* &= \mathbf{x}_0' \mathbf{P} \mathbf{x}_0 + 2\bar{l}_0' \mathbf{x}_0 \\
&- \int_0^\infty \mathbf{x}^* (\mathbf{C}_1' \mathbf{Q} \mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_1' \mathbf{Q} \mathbf{C}_1) \mathbf{x}^* dt \\
&+ \int_0^\infty [\bar{\mathbf{y}}' \mathbf{Q} \bar{\mathbf{y}} - \bar{l}' (\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1' - \mathbf{B}_2 \eta^{-1} \mathbf{B}_2') \bar{l}] dt \\
&= \mathbf{x}_0' \mathbf{P} \mathbf{x}_0 + 2\bar{l}_0' \mathbf{x}_0 + \int_0^\infty [\bar{\mathbf{y}}' \mathbf{Q} \bar{\mathbf{y}} - \bar{l}' (\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1' - \mathbf{B}_2 \eta^{-1} \mathbf{B}_2') \bar{l}] dt
\end{aligned}$$

即式(2.5.34)得证。

而最优指标值

$$\begin{aligned}
J^* &= \bar{J}^* + \eta \int_0^\infty \mathbf{v}^* \mathbf{v}^* dt \\
&= \mathbf{x}_0' \mathbf{P} \mathbf{x}_0 + 2\bar{l}_0' \mathbf{x}_0 + \eta \delta^2 + \int_0^\infty [\bar{\mathbf{y}}' \mathbf{Q} \bar{\mathbf{y}} - \bar{l}' (\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1' - \mathbf{B}_2 \eta^{-1} \mathbf{B}_2') \bar{l}] dt
\end{aligned} \tag{2.5.35}$$

5) 下面确定乘子常数 η 。

$\eta > 0$ 应由干扰约束 $\int_0^\infty \mathbf{v}' \mathbf{v} dt \leq \delta^2$ 确定。

由等价优化指标的结论, η 可由 $\int_0^\infty \mathbf{v}^* \mathbf{v}^* dt = \delta^2$ 确定。将 \mathbf{u}^* , \mathbf{v}^* 代入式

(2.5.1) :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= [\mathbf{A} - (\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1' - \mathbf{B}_2 \eta^{-1} \mathbf{B}_2') \mathbf{P}] \mathbf{x} - (\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1' - \mathbf{B}_2 \eta^{-1} \mathbf{B}_2') \bar{l} \\ &\triangleq \bar{\mathbf{A}} \mathbf{x} + \bar{\mathbf{B}} \bar{l}\end{aligned}\quad (2.5.36)$$

其解为

$$\mathbf{x}(t) = e^{\bar{\mathbf{A}}t} \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\bar{\mathbf{A}}(t-z)} \bar{\mathbf{B}} \bar{l}(z) dz$$

代入

$$\begin{aligned}\mathbf{v}^* &= \eta^{-1} \mathbf{B}_2' (\mathbf{P} \mathbf{x} + \bar{l}) \\ &= \eta^{-1} \mathbf{B}_2' [\mathbf{P} e^{\bar{\mathbf{A}}t} \mathbf{x}_0 + \mathbf{P} \int_0^t e^{\bar{\mathbf{A}}(t-z)} \bar{\mathbf{B}} \bar{l}(z) dz + \bar{l}(t)] \\ &\triangleq \eta^{-1} \mathbf{B}_2' [\mathbf{P} e^{\bar{\mathbf{A}}t} \mathbf{x}_0 + \bar{l}(t)]\end{aligned}\quad (2.5.37)$$

式中,

$$\bar{l} = \mathbf{P} \int_0^t e^{\bar{\mathbf{A}}(t-z)} \bar{\mathbf{B}} \bar{l}(z) dz + \bar{l}(t)$$

因此

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathbf{v}^* \mathbf{v}' dt &= \int_0^\infty [\mathbf{x}_0 e^{\bar{\mathbf{A}}t} \mathbf{P} \mathbf{B}_2 \eta^{-2} \mathbf{B}_2' \mathbf{P} e^{\bar{\mathbf{A}}t} \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_0' e^{\bar{\mathbf{A}}t} \mathbf{P} \mathbf{B}_2 \eta^{-2} \mathbf{B}_2' \bar{l} \\ &\quad + \bar{l}' \mathbf{B}_2 \eta^{-2} \mathbf{B}_2' \mathbf{P} e^{\bar{\mathbf{A}}t} \mathbf{x} + \bar{l}' \mathbf{B}_2 \eta^{-2} \mathbf{B}_2' \bar{l}] dt \\ &\triangleq \mathbf{x}_0' \mathbf{U}_0 \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_0' \mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_1' \mathbf{x}_0 + \mathbf{U}_2\end{aligned}\quad (2.5.38)$$

式中,

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_0 &= \int_0^\infty e^{\bar{\mathbf{A}}t} \mathbf{P} \mathbf{B}_2 \eta^{-2} \mathbf{B}_2' \mathbf{P} e^{\bar{\mathbf{A}}t} dt \\ \mathbf{U}_1 &= \int_0^\infty e^{\bar{\mathbf{A}}t} \mathbf{P} \mathbf{B}_2 \eta^{-2} \mathbf{B}_2' \bar{l}(t) dt \\ \mathbf{U}_2 &= \int_0^\infty \bar{l}' \mathbf{B}_2 \eta^{-2} \mathbf{B}_2' \bar{l} dt\end{aligned}$$

若 \mathbf{x}_0 已知, 则 $\eta > 0$ 由

$$\mathbf{x}_0' \mathbf{U}_0 \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_0' \mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_1' \mathbf{x}_0 + \mathbf{U}_2 = \delta^2 \quad (2.5.39)$$

确定, \mathbf{U}_0 可表为由矩阵方程

$$\bar{\mathbf{A}}' \mathbf{U}_0 + \mathbf{U}_0 \bar{\mathbf{A}} + \mathbf{P} \mathbf{B}_2 \eta^{-1} \mathbf{B}_2' \mathbf{P} = 0 \quad (2.5.40)$$

确定的惟一解。

若 x_0 不确定, 但具有初值约束 $x_0'x_0 \leq \delta_0^2$, 则 η 可由下式确定:

$$\max_{\|x_0\|^2 \leq \delta_0^2} [x_0'U_0x_0 + x_0'U_1 + U_1'x_0 + U_2] = \delta^2 \quad (2.5.41)$$

再运用 Lagrange 乘子法, 将约束 $\|x_0\|^2 \leq \delta_0^2$ 的极值问题化为无约束极值问题。引入待定乘子常数 $\eta \geq 0$, 则极大化问题式(2.5.41)的左边等价为

$$\max_{x_0} [x_0'U_0x_0 + x_0'U_1 + U_1'x_0 + U_2 - \eta(x_0'x_0 - \delta_0^2)] \quad (2.5.42)$$

$$\bar{\eta} > 0 \text{ 当 } x_0'x_0 = \delta_0^2, \quad \bar{\eta} = 0 \text{ 当 } x_0'x_0 < \delta_0^2 \quad (2.5.43)$$

对式(2.5.42)求驻值条件

$$2U_0x_0 + U_1 + U_1' - 2\bar{\eta}x_0 = 0$$

即

$$(U_0 - \bar{\eta})x_0 = -(U_1 + U_1')/2$$

极大值点为

$$x_0^* = -(U_0 - \bar{\eta})^{-1}(U_1 + U_1')/2 \quad (2.5.44)$$

将式(2.5.44)代入式(2.5.41)和(2.5.43), 得

$$\begin{aligned} & (U_1' + U_1)(U_0 - \bar{\eta})^{-1}U_0(U_0 - \bar{\eta})^{-1}(U_1 + U_1') - 2(U_1' + U_1)(U_0 - \bar{\eta})^{-1}U_1 \\ & - 2U_1'(U_0 - \bar{\eta})^{-1}(U_1 + U_1') = 4(\delta^2 - U_2) \end{aligned} \quad (2.5.45)$$

$$(U_1' + U_1)(U_0 - \bar{\eta})^{-2}(U_1 + U_1') = \delta_0^2 \quad (2.5.46)$$

由式(2.5.45)和(2.5.46)消去 $\bar{\eta}$ 即可解出原问题要求解的乘子常数 η 。

在 $x_0'x_0 \leq \delta_0^2$ 下的最优指标估计式亦可类似上述方法求取为

$$\begin{aligned} J^* &= x_0'Px_0 + 2\bar{l}_0'x_0 + \eta\delta^2 + \int_0^\infty [\hat{y}'Q\hat{y} - \bar{l}'(\bar{B}_1\bar{B}_1' - \bar{B}_2\eta^{-1}\bar{B}_2')\bar{l}]dt \\ &\leq x_0^{**'}Px_0^{**} + 2\bar{l}_0'x_0^{**} + \eta\delta^2 + \int_0^\infty [\hat{y}'Q\hat{y} - \bar{l}'(\bar{B}_1\bar{B}_1' - \bar{B}_2\eta^{-1}\bar{B}_2')\bar{l}]dt \end{aligned} \quad (2.5.47)$$

式中, $x_0^{**} = -(P - \hat{\eta})^{-1}\bar{l}_0$ 。而中间变量 $\hat{\eta}$ 可由 $\bar{l}_0'(\bar{P} - \hat{\eta})^{-2}\bar{l}_0 = \delta_0^2$ 确定(或当 $x_0'x_0 < \delta_0^2$ 时 $\hat{\eta} = 0$)。

综上结果, 对给定轨线 \tilde{y} 的 maxmin 意义下的跟踪问题(2.5.1)~(2.5.3), (2.5.8)的解有如下结论:

定理 2.5.1 对给定轨线 \tilde{y} 的 maxmin 意义下的跟踪问题(2.5.1)~(2.5.3),

(2.5.8) 假定:

1) (A, B_1) 可控, (A, C_1) 可观, (A, Q) 可观;

2) 如下方程有实数解 $P = P'$, $\eta > 0$ 和 $\bar{l}(t)$:

$$PA + A'P + C_1'QC_1 - P(B_1B_1' - B_2\eta^{-1}B_2')P = 0$$

$$\operatorname{Re}\lambda[A - (B_1B_1' - B_2\eta^{-1}B_2')P] < 0$$

$$\dot{\bar{l}} + [A' - P(B_1B_1' - B_2\eta^{-1}B_2')] \bar{l} - C_1'Q\bar{y} = 0, \quad \bar{l}(\infty) = 0$$

(2.5.48)

待定常数 η 的确定分别为:

当 x_0 已知时

$$x_0'U_0x_0 + x_0'U_1 + U_1'x_0 + U_2 = \delta^2$$

当 $\|x_0\|^2 \leq \delta_0^2$ 时

$$x_0^{*'}U_0x_0^{*} + x_0^{*'}U_1 + U_1'x_0^{*} + U_2 = \delta^2$$

$$x_0^{*'}x_0^{*} = \delta_0^2$$

$$x_0^{*} = - (U_0 - \bar{\eta})^{-1}(U_1 + U_1')/2 \quad (\bar{\eta} \text{ 为中间变量})$$

则给定轨线 \bar{y} 的 maxmin 跟踪问题有最优解: 最优控制

$$u^* = - B_1' (Px + \bar{l})$$

“最坏干扰”

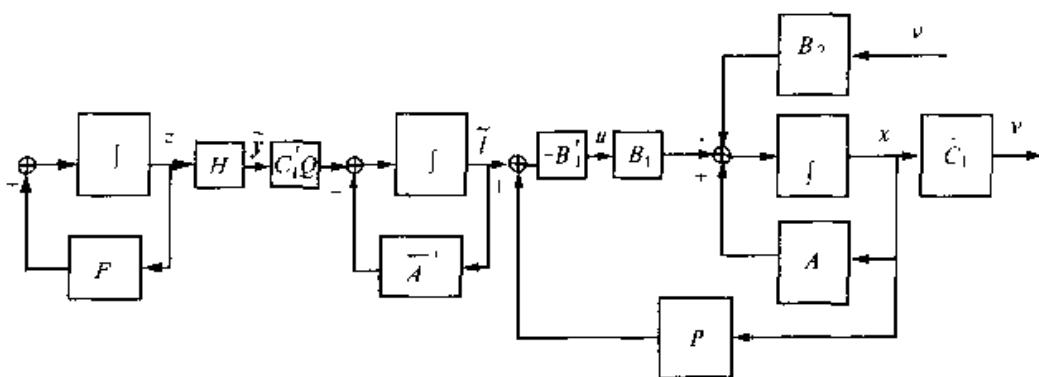
$$v^* = - \eta^{-1} B_2' (Px + \bar{l})$$

最优指标为

$$\begin{aligned} J^* &= x_0'Px_0 + 2\bar{l}_0'x_0 + \eta\delta^2 + \int_0^\infty [\bar{y}'Q\bar{y} + \bar{l}'(B_1B_1' - B_2\eta^{-1}B_2')\bar{l}]dt \\ &\leq \bar{l}_0'(\bar{P} - \hat{\eta})^{-1}\bar{P}(\bar{P} - \hat{\eta})^{-1}\bar{l}_0 + 2\bar{l}_0'(\bar{P} - \hat{\eta})\bar{l}_0 + \eta\delta^2 + \\ &\quad \int_0^\infty [\bar{y}'Q\bar{y} - \bar{l}'(B_1B_1' - B_2\eta^{-1}B_2')\bar{l}]dt \end{aligned}$$

式中, 常数 $\hat{\eta}$ 由 $\bar{l}_0'(\bar{P} - \hat{\eta})^{-1}\bar{l}_0 = \delta_0^2$ 决定(或当 $x_0'x_0 < \delta_0^2$ 时, 取 $\hat{\eta} = 0$)。

给定轨线 \bar{y} 的 maxmin 意义下的跟踪控制如图 2.1 所示。

图 2.1 给定轨线 \hat{y} 的 maxmin 意义下的跟踪控制

2.6 具 L_2 有界不确定性系统线性二次鲁棒最优状态反馈控制 ——maxmin 意义下的常值跟踪问题

在 2.5 节中处理的已知轨线 \hat{y} 且 $\int_0^\infty \hat{y}'\hat{y} dt < \infty$ 的衰减信号的跟踪问题, 而实际中常见的给定常值伺服问题显然在 2.5 节中没有包括进去。因此, 单独考察 maxmin 意义下的常值跟踪问题仍是必要的。

问题描述如下:

$$\dot{x} = Ax + B_1 u + B_2 v, \quad x(0)'x(0) = x_0'x_0 \leq \delta_0^2 < \infty \quad (2.6.1)$$

$$y = C_1 x \quad (2.6.2)$$

此处略去 $D_1 v$ 为推导简便, 若考虑 $y = C_1 x + D_1 v$ 结论类似, 稍繁。

干扰约束

$$\int_0^\infty v'v dt \leq \delta^2 < \infty \quad (2.6.3)$$

设 y_* 为给定跟踪常值向量, 当稳态准确跟踪时应有

$$y_* = C_1 x_* \quad \text{及} \quad 0 = Ax_* + B_1 u_* \quad (2.6.4)$$

此时干扰 $v_* = 0$, 即准确跟踪系统是在无干扰情况下才有意义。

因此, 做 $\tilde{u} = u - u_*$, $\tilde{x} = x - x_*$, $\tilde{y} = y - y_*$, $\tilde{v} = v - v_* = v$, 式(2.6.1)可写成

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B_1\tilde{u} + B_2 v \quad (2.6.5)$$

$$\dot{\bar{y}} = C_1 \bar{x} \quad (2.6.6)$$

而初态方程组为

$$\bar{x}_0' \bar{x}_0 = (\bar{x}_0 - \bar{x}_*)' (\bar{x}_0 - \bar{x}_*) = \bar{x}_0' \bar{x}_0 - \bar{x}_0' \bar{x}_* - \bar{x}_*' \bar{x}_0 + \bar{x}_*' \bar{x}_*, \quad \bar{x}_0' \bar{x}_0 \leq \delta_0^2 \quad (2.6.7)$$

首先处理初态约束极值问题, 即 $\bar{x}_0' \bar{x}_0$ 在 $\bar{x}_0' \bar{x}_0 \leq \delta_0^2$ 约束下的极大值问题。引入乘子 η_0 , 化成无约束极值问题

$$J_{\eta_0} = \bar{x}_0' \bar{x}_0 - \bar{x}_0' \bar{x}_* - \bar{x}_*' \bar{x}_0 + \bar{x}_*' \bar{x}_* - \eta_0 (\bar{x}_0' \bar{x}_0 - \delta_0^2) \quad (2.6.8)$$

$$\eta_0 > 0 \text{ 当 } \bar{x}_0' \bar{x}_0 = \delta_0^2, \quad \eta_0 = 0 \text{ 当 } \bar{x}_0' \bar{x}_0 < \delta_0^2$$

对式(2.6.8)求驻值条件

$$2\bar{x}_0 - 2\bar{x}_* - 2\eta_0 \bar{x}_0 = 0$$

得

$$\bar{x}_0^* = (1 - \eta_0)^{-1} \bar{x}_*, \quad (2.6.9)$$

由 $\bar{x}_0' \bar{x}_0 = \delta_0^2$, 定 η_0 的方程为

$$\bar{x}_*' (1 - \eta_0)^{-2} \bar{x}_* = \delta_0^2 \quad (2.6.10)$$

因此

$$\begin{aligned} \bar{x}_0' \bar{x}_0 &\leq (\bar{x}_0^* - \bar{x}_*)' (\bar{x}_0^* - \bar{x}_*) = \bar{x}_*' [(1 - \eta_0)^{-1} - 1]' [(1 - \eta_0)^{-1} - 1] \bar{x}_* \\ &= \bar{x}_*' (1 - \eta_0)^{-1} \eta_0^2 (1 - \eta_0)^{-1} \bar{x}_* = \tilde{\delta}_0^2 \end{aligned} \quad (2.6.11)$$

式中, \bar{x}_* 为被跟踪常值, 视为已知。因此由式(2.6.10)可求得 η_0 , 故式(2.6.11)中 $\tilde{\delta}_0^2$ 是可算出的。这样, 类似 2.5 节, 可对式(2.6.5)在初值约束(2.6.11)下提出如下跟踪指标:

$$\begin{aligned} J &= \max_{\|\bar{x}\|_2^2 \leq \delta^2} \min_u \int_0^\infty [(\bar{y} - \bar{y}_*)' Q (\bar{y} - \bar{y}_*) + (\bar{u} - \bar{u}_*)' (\bar{u} - \bar{u}_*)] dt \\ &= \max_{\|\bar{x}\|_2^2 \leq \delta^2} \min_u \int_0^\infty (\bar{x}' C_1' Q C_1 \bar{x} + \bar{u}' \bar{u}) dt \end{aligned} \quad (2.6.12)$$

其中约束满足式(2.6.11)和(2.6.3)。

对式(2.6.12)指标下的 $\max \min$ 常值跟踪问题, 可用类似 2.4 节的方法求解, 可得其最优解为

$$\bar{u}^* = -B_1' P \bar{x} = -K_1 \bar{x} \quad (2.6.13)$$

$$v^* = \eta^{-1} \mathbf{B}_2' \mathbf{P} \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{K}_2 \tilde{\mathbf{x}} \quad (2.6.14)$$

\mathbf{P} 满足

$$\mathbf{PA} + \mathbf{A}'\mathbf{P} + \mathbf{C}_1'\mathbf{QC}_1 - \mathbf{P}(\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1' - \mathbf{B}_2\eta^{-1}\mathbf{B}_2')\mathbf{P} = 0 \quad (2.6.15)$$

由式(2.6.13)

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}_* - \mathbf{B}_1' \mathbf{P} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) = \mathbf{u}_* - \mathbf{K}_1 \mathbf{x} + \mathbf{K}_1 \mathbf{x}_* \triangleq \mathbf{u}_*^* - \mathbf{K}_1 \mathbf{x} \quad (2.6.16)$$

式中,

$$\mathbf{u}_*^* = \mathbf{u}_* + \mathbf{K}_1 \mathbf{x}_*, \quad (2.6.17)$$

当实现闭环稳态准确跟踪时, 应有

$$0 = (\mathbf{A} - \mathbf{B}_1 \mathbf{K}_1) \mathbf{x}_* + \mathbf{B}_1 \mathbf{u}_*.$$

由于 $\mathbf{A} - \mathbf{B}_1 \mathbf{K}_1$ 渐近稳定, 知 $\mathbf{A} - \mathbf{B}_1 \mathbf{K}_1$ 可逆, 从而有

$$\mathbf{x}_* = -(\mathbf{A} - \mathbf{B}_1 \mathbf{K}_1)^{-1} \mathbf{B}_1 \mathbf{u}_*. \quad (2.6.18)$$

而

$$\mathbf{y}_* = -\mathbf{C}_1(\mathbf{A} - \mathbf{B}_1 \mathbf{K}_1)^{-1} \mathbf{B}_1 \mathbf{u}_* \triangleq \mathbf{K}_c \mathbf{u}_*. \quad (2.6.19)$$

当 \mathbf{y}, \mathbf{u} 同维数且 $\mathbf{C}_1, \mathbf{B}_1$ 行、列满秩时

$$\mathbf{u}_* = \mathbf{K}_c^{-1} \mathbf{y}. \quad (2.6.20)$$

若 \mathbf{y}, \mathbf{u} 不同维数, 在方程(2.6.19)有解的情况下, 可求其所有解的最小二乘解。若无解, 则可求广义逆而得近似解。因此

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_*^* &= \mathbf{u}_* + \mathbf{K}_1 \mathbf{x}_* = [1 - \mathbf{K}_1(\mathbf{A} - \mathbf{B}_1 \mathbf{K}_1)^{-1} \mathbf{B}_1] \mathbf{u}_* \\ &= [1 - \mathbf{K}_1(\mathbf{A} - \mathbf{B}_1 \mathbf{K}_1)^{-1} \mathbf{B}_1] \mathbf{K}_c^{-1} \mathbf{y} \triangleq \mathbf{K}_{tc} \mathbf{y}_*. \end{aligned} \quad (2.6.21)$$

从而

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{K}_1 \mathbf{x} + \mathbf{u}_*^* = -\mathbf{K}_1 \mathbf{x} + \mathbf{K}_{tc} \mathbf{y}_*. \quad (2.6.22)$$

而 \mathbf{P} 与 η 的求解应将 \mathbf{u}^* , v^* 代入状态方程(2.6.1)和干扰约束(2.6.3)中来确定:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}_1 \mathbf{K}_1 + \mathbf{B}_2 \mathbf{K}_2) \tilde{\mathbf{x}} \triangleq \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{x}}$$

若 $\tilde{\mathbf{A}}$ 渐近稳定, 则

$$\tilde{x}(t) = e^{\tilde{A}t}\tilde{x}(0) = e^{\tilde{A}t}\tilde{x}_0$$

可得

$$v^*(t) = K_2 e^{\tilde{A}t} \tilde{x}_0$$

由

$$\begin{aligned} \max_{\|\tilde{x}_0\|^2 \leq \delta_0^2} \int_0^\infty v^* v^* dt &= \max_{\|\tilde{x}_0\|^2 \leq \delta_0^2} \int_0^\infty \tilde{x}_0' e^{\tilde{A}'t} K_2' K_2 e^{\tilde{A}t} \tilde{x}_0 dt \\ &\triangleq \max_{\|\tilde{x}_0\|^2 \leq \delta_0^2} \tilde{x}_0' \tilde{U}_0 \tilde{x}_0 = \delta^2 \end{aligned} \quad (2.6.23)$$

由 2.4 节中的引理 2.4.1 待定常数 η 由

$$\max \lambda(\tilde{U}_0(\eta)) = \delta^2 / \bar{\delta}_0^2 \quad (2.6.24)$$

决定, 式中,

$$\bar{\delta}_0^2 = \mathbf{x}_*'(1 - \eta_0)^{-1} \eta_0^2 (1 - \eta_0)^{-1} \mathbf{x}_*,$$

而 $\tilde{U}_0(\eta)$ 满足

$$\tilde{U}_0 \tilde{A} + \tilde{A}' \tilde{U}_0 + K_2' K_2 = 0 \quad (2.6.25)$$

最优指标

$$J(u^*, v^*) \leq \max_{\|\tilde{x}_0\|^2 \leq \delta_0^2} J(u^*, v^*) \quad (2.6.26)$$

其中指标上界的求法与 2.5 节类同。

综合上述结果, 对 $\max\min$ 指标下的常值跟踪问题有如下结论:

定理 2.6.1 假定系统(2.6.1)的 (A, B_1) 可控, 若有实对称阵 $P = P'$ 和常数 $\eta > 0$ 满足如下方程组:

$$PA + A'P + C_1'QC_1 - P(B_1B_1' - B_2\eta^{-1}B_2')P = 0$$

$$\operatorname{Re} \lambda [A - (B_1B_1' - B_2\eta^{-1}B_2')P] < 0$$

$$\max \lambda(\tilde{U}_0(\eta)) = \delta^2 / \bar{\delta}_0^2$$

$$\tilde{U}_0 \tilde{A} + \tilde{A}' \tilde{U}_0 + K_2' K_2 = 0$$

$$\mathbf{x}_*'(1 - \eta_0)^{-2} \mathbf{x}_* = \bar{\delta}_0^2$$

$$\bar{\delta}_0^2 = \mathbf{x}_*'(1 - \eta_0)^{-1} \eta_0^2 (1 - \eta_0)^{-1} \mathbf{x}_* \quad (\eta_0 \text{ 为中间变量})$$

则 $\max\min$ 常值跟踪问题(2.6.1)~(2.6.4)和(2.6.12)有解:

最优控制

$$\mathbf{u}^* = -\mathbf{K}_1 \mathbf{x} + \mathbf{K}_{t_0} \mathbf{y},$$

式中,

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{B}_1' \mathbf{P}$$

$$\mathbf{K}_{t_0} = [1 - \mathbf{K}_1 (\mathbf{A} - \mathbf{B}_1 \mathbf{K}_1)^{-1} \mathbf{B}_1] \mathbf{K}_e^{-1}$$

$$\mathbf{K}_e = -\mathbf{C}_1 (\mathbf{A} - \mathbf{B}_1 \mathbf{K}_1)^{-1} \mathbf{B}_1$$

最优指标值及其上界可由式(2.6.26)求出。

2.7 具 L₂有界不确定性系统线性二次鲁棒最优状态反馈控制 ——maxmin 意义下的 PI 调节问题

相应于确定性线性二次最优控制的 PI 调节器问题,下面考虑不确定性系统的情况。

系统设为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1 \mathbf{u} + \mathbf{B}_2 \mathbf{v}, \quad \mathbf{x}(0)' \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0' \mathbf{x}_0 \leq \delta_0^2 < \infty \quad (2.7.1)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_1 \mathbf{x} + \mathbf{D}_1 \mathbf{v}$$

干扰约束

$$\int_0^\infty \mathbf{v}' \mathbf{v} dt \leq \delta^2 < \infty \quad (2.7.2)$$

指标提为

$$J = \max_{\|\mathbf{u}\|_2^2 \leq \varepsilon^2} \min_{\mathbf{u}} \int_0^\infty (\mathbf{x}' \mathbf{Q}_0 \mathbf{x} + \dot{\mathbf{u}}' \dot{\mathbf{u}}) dt \quad (2.7.3)$$

令 $\mathbf{u}_1 = \dot{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}$, 则可扩展式(2.7.1)为

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{u}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}_1 + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{v} \\ &\triangleq \hat{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{B}}_1 \mathbf{u}_1 + \hat{\mathbf{B}}_2 \mathbf{v} \end{aligned} \quad (2.7.4)$$

设 $\mathbf{u}(0)$ 已知或 $\mathbf{u}(0)' \mathbf{u}(0) \leq \sigma_0^2$, 则初值约束为

$$\hat{\mathbf{x}}_0' \hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{x}_0' \mathbf{x}_0 + \mathbf{u}(0)' \mathbf{u}(0) \leq \delta_0^2 + \sigma_0^2 \triangleq \hat{\delta}_0^2 \quad (2.7.5)$$

指标变为

$$\begin{aligned}
J &= \max_{\|x\|_2^2 \leq \delta^2} \min_{u_1} \int_0^\infty \left([x' \ u'] \begin{bmatrix} Q_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} + u_1' u_1 \right) dt \\
&\triangleq \max_{\|v\|_2^2 \leq \delta^2} \min_{u_1} \int_0^\infty (\hat{x}' \hat{Q} \hat{x} + u_1' u_1) dt
\end{aligned} \tag{2.7.6}$$

若系统(2.7.1)可控, 则系统(2.7.4)亦可控。因此, 对系统(2.7.1)~(2.7.3)或(2.7.4)~(2.7.6)的最优化问题可引用2.4节解法的结论, 得最优解为

$$u_1^* = -\hat{B}_1' \hat{P} \hat{x} = -K_1 \hat{x} \triangleq K_{11} x + K_{12} u \tag{2.7.7}$$

$$v^* = \eta^{-1} \hat{B}_2 \hat{P} \hat{x} = K_2 \hat{x} \triangleq K_{21} x + K_{22} u \tag{2.7.8}$$

P 满足

$$PA + A'P + Q - P(\hat{B}_1 \hat{B}_1' - \hat{B}_2 \eta^{-1} \hat{B}_2')P = 0 \tag{2.7.9}$$

η 定解方程为

$$\max \lambda(\hat{U}(\eta)) = \delta^2 / \hat{\delta}_0^2 \tag{2.7.10}$$

$\hat{U}(\eta)$ 满足

$$\hat{U}(\eta)A' + A'\hat{U}(\eta) + K_2' K_2 = 0 \tag{2.7.11}$$

式中,

$$\bar{A} \triangleq \hat{A} - (\hat{B}_1 \hat{B}_1' - \hat{B}_2 \eta^{-1} \hat{B}_2')P$$

在考虑“最坏”干扰情况下, 即 $v = v^*$ 时实现最优控制, 将式(2.7.8)代入式(2.7.1):

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + B_1 u + B_2(K_{21}x + K_{22}u) \\
&= (A + B_2 K_{21})x + (B_1 + B_2 K_{22}u) \\
&\triangleq \tilde{A}x + \tilde{B}_1 u
\end{aligned}$$

当 $B_1 + B_2 K_{22}$ 列满秩时, 则可有最小二乘解

$$u^* = (\tilde{B}_1' \tilde{B}_1)^{-1} \tilde{B}_1' (\dot{x} - \tilde{A}x) \triangleq \tilde{K}_{11} x + \tilde{K}_{12} \dot{x} \tag{2.7.12}$$

代入式(2.7.7)得

$$\begin{aligned}
u_1^* &= \dot{u}^* = K_{11} x + K_{12}(\tilde{K}_{11} x + \tilde{K}_{12} \dot{x}) \\
&= (K_{11} + K_{12} \tilde{K}_{11})x + K_{12} \tilde{K}_{12} \dot{x}
\end{aligned}$$

记为

$$u^* = \bar{K}_{11}x + \bar{K}_{12}\dot{x} \quad (2.7.13)$$

式中,

$$\bar{K}_{11} = K_{11} + K_{12}\tilde{K}_{11}, \quad \bar{K}_{12} = K_{12}\tilde{K}_{12}$$

两边积分得

$$u^* = u(0) + \bar{K}_{11} \int_0^x z(x) dz + \bar{K}_{12}(x(t) - x(0)) \quad (2.7.14)$$

由式(2.7.14)可见, u^* 为此例积分控制器。在 $u(0)$ 可选择、 $x(0)$ 已知确定的情况下, 若选 $u(0) = \bar{K}_{12}x(0)$, 则可得准确的 PI 控制规律。这是在确定性系统的情形, 在不确定性系统的情况下, $x(0)$ 不一定可测量或精确知道, 这样会使由于 $u(0)$ 的选择不同而使控制作用有别。这是实际系统中应予以考虑的问题。

对于确定性系统, 在 IQ 指标中含有控制作用导数加权项时导出的 PI 控制律具有抑制常值干扰的特性, 这里的方案也具有这个性质, 分析从略。

2.8 具 L_2 有界不确定性系统线性二次鲁棒最优状态反馈控制的数值求解

在 2.4 节中, 定理 2.4.1 给出了不确定性系统线性二次指标下的 maxmin 鲁棒最优控制问题(2.4.1)~(2.4.4) 的状态反馈控制律的求解方程为

$$PA' - A'P + Q - P(B_1B_1' - B_2\eta^{-1}B_2')P = 0 \quad (2.8.1)$$

$$\operatorname{Re}\lambda(A - (B_1B_1' - B_2\eta^{-1}B_2')P) < 0 \quad (2.8.2)$$

$$U(\eta)\bar{A} + \bar{A}'U(\eta) + K_2'K_2 = 0 \quad (2.8.3)$$

当 x_0 已知时

$$x_0'U(\eta)x_0 = \delta^2 \quad (2.8.4)$$

当 $\|x_0^2\| \leq \delta_0^2$ 时

$$\max\lambda(U(\eta)) = \delta^2/\delta_0^2 \quad (2.8.5)$$

式中, $U(\eta)$ 是引入的中间变量, 为实对称矩阵, 是 η 的函数; $\bar{A} = A - (B_1B_1' - B_2\eta^{-1}B_2')P$; $K_2 = \eta^{-1}B_2'P$ 。从上述方程组中解出实对称阵 P , 则可得最优状态反馈控制律为

$$\mathbf{u}^* = -\mathbf{B}_1' \mathbf{P} \mathbf{x}$$

在满足定理 2.4.1 的条件下, 问题求解可采用数值计算。一种比较简便的方法是对待定常数 η 在其可能取值范围内赋值逐步搜索, 从而得到满足一定误差要求的解 η^*, \mathbf{P}^* 。

依微分对策理论的有关结论知: 泛函指标

$$J(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_0^\infty (\mathbf{x}' Q \mathbf{x} + \mathbf{u}' \mathbf{u} - \eta \mathbf{v}' \mathbf{v}) dt$$

式中, $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{u} + \mathbf{B}_2\mathbf{v}$, 具有对策鞍点策略的条件之一是要求 η 充分大, 实质上是 $J(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ 可对 \mathbf{v} 极大化要求 η 充分大。因此在式(2.8.1)中可令 $\beta = \eta^{-1}$, 又知 β 充分小对式(2.8.1)总可能有镇定系统的实对称解, 因此, 利用第四章中有关一般 Riccati 方程有实对称镇定解的要求条件, 可以找到一个 β 值的上界 $\bar{\beta}$ 使得 $\beta \leq \bar{\beta}$ 时满足定理 2.4.1 条件, 然后可对此范围搜索一合适的常数 $\beta^* = \eta^{-1*}$, 使式(2.8.4)或(2.8.5)在满足一定误差要求范围内成立, 这样可求得一组 η^*, \mathbf{P}^* 解。由此得最优反馈控制律

$$\mathbf{u}^* = -\mathbf{B}_1' \mathbf{P}^* \mathbf{x}$$

图 2.2 给出了上述思想的概略程序计算方法。这里是对误差控制量 ϵ 和搜索步长 Δ 设定情况下的简单算法思路的说明, 在实际系统设计中, 各框图中都可适当考虑采用一些优化算法, 搜索步长和误差控制量的设计和选择也可以考虑在程序中自动进行。总之, 设计程序的完善化也是一个很有意义的研究, 是实现本章结果的重要环节。

下面以某型导弹高度控制系统为例, 应用前述 2.4 节的结论和上述算法给予求解。

采用导弹系统的短周期运动数学模型, 其高度控制系统的状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{H} \\ \ddot{H} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \\ \dot{H} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_{14} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_{24} \end{bmatrix} v$$

此方程取自文献[287]的无干扰模型, 本例中加入干扰项 $v(t)$ 来考虑实际应用情况, 式中, H 为导弹高度与预定高度之差; \dot{H} 为垂直速度; θ 为俯仰角偏差; $\dot{\theta}$ 为俯仰角速度; u 为舵偏角与稳态值的偏差; v 为综合不确定性干扰。

由于导弹飞行过程中参数变化范围很大, 本例应用中只考虑一种飞行状态下

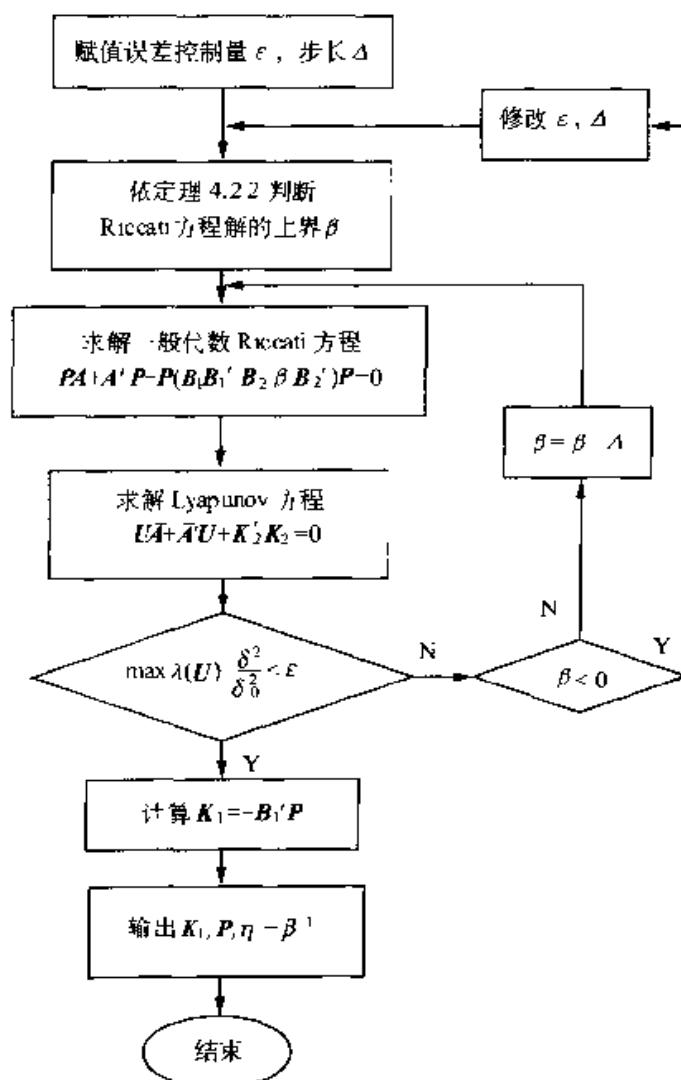


图 2.2 具 L_2 有界不确定性系统线性二次鲁棒最优状态反馈控制的数值求解算法

参数取值^[28]：

$$a_{22} = -0.60, \quad a_{23} = 3.55, \quad a_{42} = 4.50$$

$$a_{43} = -21.00, \quad a_{44} = -0.50, \quad b_{14} = -36.00$$

为简化起见, 可取 $b_{14} = b_{24}$ 。

初值

$$[H(0), \dot{H}(0), \theta(0), \dot{\theta}(0)] = [50, -5, 2, -1]$$

干扰约束 $\int_0^\infty v'v dt \leq \delta^2 = 150$ 。

实际系统中, 对 δ 可给出一个经验估计, 本例中加入正负脉冲。初值是为仿真过程设定的。因此, 本例中是初态已知的情形。实际系统中若初态不定, 则可给予一个上界或经验估计值。已有理论证明: 若对较大的初态和干扰约束值, 对应的一般 Riccati 方程中待定常数 η 使问题有解, 则在初态约束和干扰约束范围内, 此 η 可使问题亦有解, 当然, 此时的解是次优的。

应用中考察了如下三种情况下的高度下降过程和控制 u 、干扰 v 的关系。

(1) 在无干扰下, 即 $v = 0$, 指标为通常的单边极小化问题

$$J = \min_u \int_0^\infty (x' Q x + u' R u) dt$$

Q, R 的选择如下:

$$Q = \begin{bmatrix} 2.12 & 1.17 & 1.26 & 0.01 \\ 1.17 & 1.20 & 1.16 & 0.014 \\ 1.23 & 1.16 & 2.11 & 0.032 \\ 0.01 & 0.014 & 0.032 & 9.96 \end{bmatrix}, \quad R = 0.16$$

Q, R 是通过考虑了闭环极点和对参数变化不敏感原则的一种参数空间方法来选定的。

这种情况下的降高过程曲线、最优控制律和实际系统中经非线性限幅器后的舵机偏转规律见文献[168]图 A.1, A.2, A.3。

(2) 在干扰 v 为人为加入的正负脉冲试验下, 指标仍是单边极小化的 IQ 最优控制律, 即要考察不考虑干扰下的最优控制过程在受干扰情况下的变化。从文献 [168] 图 B.1, B.2, B.3, B.4 可见, 受干扰 $v(t)$ 作用后, 原无干扰下求得的最优控制、高度下降过程及舵机偏转量均有较大变化。若认为无干扰时的设计过程是最优的, 则图 B 所示的过程是干扰下明显变化的情形。

(3) 考虑同上干扰 $v(t)$, 但使用如下 maxmin 指标求取最优控制律:

$$J = \max_{\|v\|_2^2 \leq \delta^2} \min_u \int_0^\infty (x' Q x + u' R u) dt$$

当搜索参数 $\eta \approx 2.00$ 时控制效果几乎接近无干扰下的最优控制过程, 见文献[168]图 C.1, C.2, C.3, C.4。

通过这个简单的应用例子, 可以看到本文的 maxmin 鲁棒最优控制理论结果是有效的, 可知, 其应用前景也是广泛的。

2.9 本章小结

本章从所考虑的平方可积干扰类入手,在时域线性二次指标下考虑所谓“最坏干扰”下的最优控制问题。依据受约束二次泛函极值问题的有关结论化约束最优化问题为无约束的等价优化问题,从而得到了最优控制与“最坏干扰”都是状态反馈形式的解——本章的主要结论定理 2.4.1,乘子常数 η 与系统的鲁棒性直接相关,而引入初值的不确定性约束使问题的解更有实际意义。

另外,本章还推广了确定性系统 LQ 问题的跟踪、伺服和 PI 调节有关问题提法到不确定性系统,并给出了相应的结论。最后的应用举例说明了本章理论结果具有实用价值。

第三章 具 L_2 有界不确定性系统线性二次鲁棒最优控制——LQL 方法

3.1 引言

在前一章中讨论了具 L_2 有界不确定性系统线性二次鲁棒最优控制的状态反馈问题及其求解。而在实际控制系统的设计中,许多情况下系统状态无法直接测得,或不完全能直接测量。这就需要对系统的状态进行重构和估计,在考虑系统存在不确定性因素(uncertainty)以及干扰因素影响时,这种状态重构或估计同样存在着对系统性能的影响,基于理想模型设计的控制系统在实际应用中常常会因此而导致性能指标的下降甚至失去稳定性,这就是本章要考虑的在具 L_2 有界不确定性因素下的状态估计与反馈控制问题。

系统中不确定性的描述是鲁棒性设计的关键问题,针对不同的描述常常给出不同的设计方法。目前已有许多种不确定性描述,主要分为两大类,即结构不确定性和非结构不确定性,其中一类非结构不确定性被认为是满足 L_2 范数有界的,Bertsekas^[69]曾讨论过这种不确定性,而 Yakubovich^[87] 和 Petersen^[91] 又对此描述进行了推广,使其满足二次型积分约束(integral quadratic constraint)以包括更广范围的不确定性,如非线性的、时变的、动态的不确定性等。当不确定性因素的知识太少以至于无法给出较理想的干扰模型或统计推断时,此类描述更符合实际,也更为有效,Savkin 和 Petersen 在文献[85]中给出了一个实际系统例子。

针对具满足 L_2 范数有界不确定性的线性系统,文献[106]中基于微分对策思想提出一种较为保守的最优化设计方法,该法考虑在“最坏干扰”情况下,如何设计出具有最大限度“容忍”不确定性因素的最佳系统性能,数学上,这种最优化设计可抽象化为所谓的如下 maxmin 指标最优化问题。

基于第二章的问题提法,设系统的状态空间模型为

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F(x, u, v, t) \\ y &= G(x, u, v, t)\end{aligned}$$

式中,状态 $x \in \mathbb{R}^n$; 控制 $u \in \mathbb{R}^m$; 干扰 $v \in \mathbb{R}^l$; 输出 $y \in \mathbb{R}^l$; 时间变量 $t \in [0, \infty)$ 。状态初值亦可设为具有不确定性,如初态满足的约束为

$$H_0[x(0)] \leq \delta_0^2 < \infty$$

干扰 v 满足约束

$$\int_0^{\infty} H(v, t) dt \leq \delta^2 < \infty$$

性能指标提为

$$J = \max_v \min_u \int_0^{\infty} L(x, u, v, t) dt$$

以上描述中

$$F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$G: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^l$$

$$H_0: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$H: \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$L: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^+$$

特别地, 上述问题的一种简单形式是线性定常系统的二次型指标最优化(LQ)问题, 即第二章给出的 maxmin 状态反馈的闭环控制系统。

受微分对策思想的启发, 在讨论估计器的设计时, 将其中对不确定性的 L_2 有界约束推广为二次型积分约束以同时包含不确定性输入和输出, 由此而设计所得的 minmax 鲁棒状态估计器具有较好的鲁棒性。本章对全阶估计器和降阶估计器同时进行了讨论, 其结果是对文献[111]、[112] 的改进和推广, 是处理更广意义上的不确定性的一种设计方法; 基于所得到的 minmax 估计器给出闭环系统的鲁棒控制——LQL 方法。另外为使 maxmin 优化指标在状态估计和状态反馈中统一起来, 又给出 maxmin 估计器的设计, 以构成 maxmin 状态估计——反馈控制闭环系统, 并对 LQL 方法的连接形式进行了讨论。

3.2 线性二次 maxmin 鲁棒最优状态反馈

考虑到本章叙述的完整性, 本节将对已有结果进行简要总结。

3.2.1 问题描述

相对于 3.1 节引言中问题的一般提法, 考虑线性二次型指标下的 maxmin 最优控制问题:

考虑如下不确定性系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B_1 u + B_2 v \\ y &= Cx + Dv \\ z &= Ex\end{aligned}\tag{3.2.1}$$

式中, 系统状态 $x \in \mathbb{R}^n$; 控制输入 $u \in \mathbb{R}^m$; 不确定性输入 $v \in \mathbb{R}^r$; 不确定性输出 $z \in \mathbb{R}^s$; 量测输出 $y \in \mathbb{R}^l$; A, B_1, B_2, C, D, E 为相应的定常数阵。不确定性因素包括初态 x_0 和噪声输入 v , 满足如下二次型积分约束:

$$x_0' P_0^{-1} x_0 + \int_0^\infty v'(t)v(t)dt \leq a^2 + \int_0^\infty z'(t)z(t)dt \tag{3.2.2}$$

式中, $a > 0$ 为某一正常数。性能指标取为

$$J = \max_{v(\cdot), x_0} \min_u \int_0^\infty (x' Q x + u' u) dt \tag{3.2.3}$$

式中, $Q = Q' \geq 0$ 为常数状态加权阵。则线性二次型指标下的 maxmin 最优控制问题即是求取极大化上式指标的“最坏干扰”情况下的极小化指标的最优控制。

因本节所要解决的是状态可得即全信息情况下的状态反馈问题, 此时可不考虑系统的不确定性输出, 则对二次型积分约束式(3.2.2)可取 $P_0 = I$, 从而化为文献[106] 中给出的不确定性约束, 即

$$\|x_0\|^2 = x_0' x_0 \leq \delta_0^2 < \infty, \quad \int_0^\infty v'(t)v(t)dt \leq \delta^2 < \infty \tag{3.2.4}$$

3.2.2 状态反馈解

对上述问题, 第二章 2.4 节已给出如下结果。

系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B_1 u + B_2 v \\ y &= Cx + Dv\end{aligned}\tag{3.2.5}$$

结论 3.2.1 对系统(3.2.5), 其中不确定性 $x_0, v \in L_2[0, \infty)$, 选择如式(3.2.3)所示的二次型性能指标, 假设 (A, B_1) 可镇定, (A, Q) 可检测, 若存在正定阵 $P = P'$ 和常数 $\eta > 0$, 满足如下方程组:

$$\begin{aligned}PA + A'P + Q - P(B_1 B_1' - B_2 \eta^{-1} B_2')P &= 0 \\ \bar{A} = A - B_1 B_1' P + \eta^{-1} B_2 B_2' P, \text{Re}\lambda(\bar{A}) &< 0\end{aligned}\tag{3.2.6}$$

$$\mathbf{U}(\eta) \bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{A}}' \mathbf{U}(\eta) + \mathbf{K}_2' \mathbf{K}_2 = 0$$

当 \mathbf{x}_0 已知时

$$\mathbf{x}_0' \mathbf{U}(\eta) \mathbf{x}_0 = \delta^2$$

当 $\|\mathbf{x}_0\|^2 \leq \delta_0^2$ 时

$$\max \lambda(\mathbf{U}(\eta)) = \delta^2 / \delta_0^2$$

则 maxmin 最优控制策略解为: 最优反馈控制

$$\mathbf{u}^* = -\mathbf{B}_1' \mathbf{P} \mathbf{x} = -\mathbf{K}_1 \mathbf{x}$$

“最坏”干扰

$$\mathbf{v}^* = \eta^{-1} \mathbf{B}_2' \mathbf{P} \mathbf{x} = \mathbf{K}_2 \mathbf{x}$$

式中, $\mathbf{K}_2 := \mathbf{B}_1' \mathbf{P}$, $\mathbf{K}_1 := \eta^{-1} \mathbf{B}_2' \mathbf{P}$ 。

最优指标值当 \mathbf{x}_0 已知时为

$$J^* = \mathbf{x}_0' \mathbf{P} \mathbf{x}_0 + \eta \delta^2$$

当 $\|\mathbf{x}_0\|^2 \leq \delta_0^2$ 时为

$$J^* \leq \max \lambda(\mathbf{P}) \delta_0^2 + \eta \delta^2$$

3.3 具 L_2 有界不确定性系统线性二次鲁棒 最优控制——LQL 方法

3.3.1 具 L_2 有界不确定性系统的 minmax 状态估计-maxmin 反馈控制闭环方案

前面所讨论的问题得到的状态反馈结果都是假定在系统的状态变量可直接准确测得时才是有效的。但实际系统常常只能测得系统输出或受干扰后的输出量, 这样就使得状态反馈控制的实现遇到了困难。在确定性系统理论中, 通常可用 Luenberger 观测器重构系统状态, 它是渐近于系统真实状态的, 然后用重构状态作为反馈控制器的输入, 也即用重构状态代替精确状态实现状态反馈闭环控制^[281, 206, 210]。在随机控制理论中, 典型的 LQG 方法, 则是利用卡尔曼滤波状态估计代替系统的真实状态作为反馈控制器的输入^[197, 198]。相应地, 在我们所考虑的干扰类下的不确定性系统, 如果系统状态不能直接精确测得, 是否也可以考虑根据可测得的输出信息估计系统状态呢? 如果可能, 那么也应在所谓“最坏”干扰下求取“最

“优”状态估计的意义下得到系统状态的估计量才具有鲁棒性的含义。利用这种意义下的状态估计量,结合前面已得到的“最坏”干扰下的“最优控制的状态反馈结论构成闭环反馈控制系统”,便形成了与确定性系统的状态观测器-反馈控制器闭环和随机系统的 LQC 方法闭环的对应方案。这样的构想本书称之为 LQL 方法,这后一个“L”表示干扰为 L_2 可积的含义,记号便于与 LQC 方法的 Gauss 过程对应。称为“具 L_2 有界不确定性系统线性二次鲁棒最优控制”方法,英文表述为:Linear Quadratic optimal control of the systems with L_2 bounded uncertainties. 数学上表述为“极大极小”或“极小极大”估计和控制问题。其系统框图中表示为 minmax 状态估计-maxmin 反馈控制闭环方案,如图 3.3 所示。LQL 方法与确定性系统和随机系统的闭环控制结构的类比关系如图 3.1~3.3 所示。

(1) 确定性系统:Luenberger 观测器-状态反馈结构。如图 3.1。

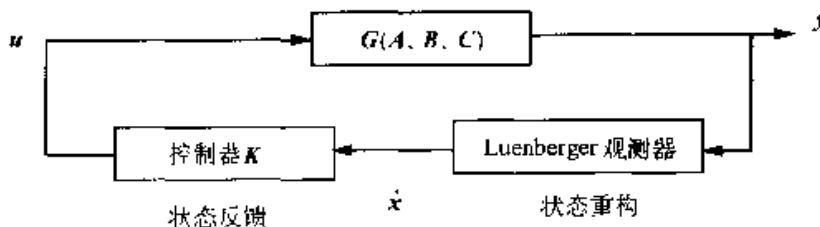


图 3.1 Luenberger 观测器-状态反馈控制

(2) 随机系统:Kalman 滤波估计-状态反馈结构。如图 3.2。

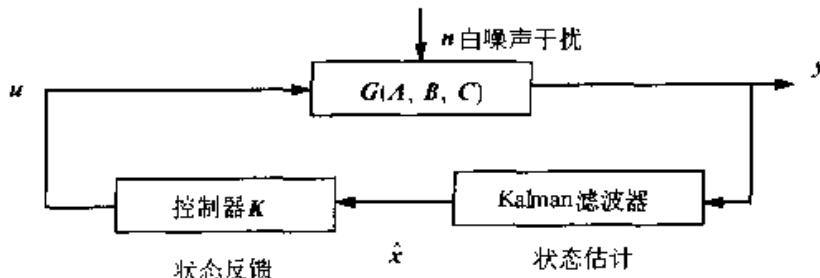


图 3.2 Kalman 滤波估计-状态反馈控制

(3) 不确定性系统:minmax 状态估计-maxmin 状态反馈结构——LQL 方法。如图 3.3。

3.3.2 LQL 方法 minmax 状态估计器设计

为完成图 3.3 的 LQL 方法闭环结构,需要给出 minmax 状态估计器的结构算法。随着不确定性系统鲁棒控制的不断发展,与之相应的对偶问题——鲁棒状态

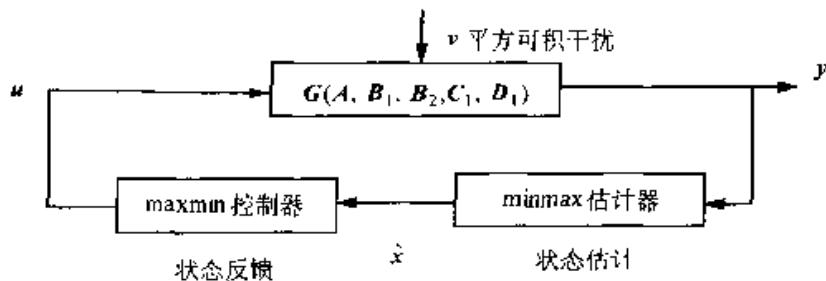


图 3.3 LQL 方法

估计也随之得到发展。其中较典型的^[107]是最小化最坏情况下的从噪声输入到估计误差输出传函的 H_∞ 范数。作为一种基于最优轨迹估计的处理方法, 它与被广泛研究的 H_∞ 控制问题紧密相联。这里, 我们将采用终端状态估计, 并对满足二次型积分约束的 L_2 有界不确定性存在下的最大可能估计误差进行优化处理, 即基于线性系统之间存在的对偶关系式^[107] 应用对策论的结果来得到与文献[107]中的 H_∞ 滤波器具有不同结构的 minmax 鲁棒状态估计器。

本章中, 基于线性对偶系统之间存在的对偶关系式, 应用 3.2 节的 maxmin 优化结果给出满足二次型积分约束的 L_2 有界不确定性系统的 minmax 鲁棒状态估计。我们可以利用文献[111]、[112]关于不确定系统状态估计的结果, 其问题提法和思想与本文的构想一致, 处理的亦是平方可积干扰下的不确定性系统, 状态估计是在所谓“最坏”干扰下进行的。数学上提为 minmax 状态估计器。下面简要叙述一下利用文献[111]的结果构成的 minmax 状态估计器:

系统 Σ :

$$\dot{x} = Ax + B_1 u + B_2 v \quad (3.3.1)$$

$$y = C_1 x + D_1 v \quad (3.3.2)$$

初态约束

$$x(0)'x(0) = x_0'x_0 \leq \delta_0^2$$

干扰约束

$$\int_0^\infty v'v dt \leq \delta^2 \quad (3.3.3)$$

在式(3.3.1)和(3.3.2)中假定系统过程与输出测量受同一干扰 v 并不失一般性。因为若有 v_1, v_2 满足平方可积要求性质, 即 $\int_0^\infty v_1'v_1 dt \leq \delta_1^2$, $\int_0^\infty v_2'v_2 dt \leq \delta_2^2$, 则总

可以找到一个常数 $k = \delta_1/\delta_2$ 使

$$\int_0^\infty v_1' v_1 dt \leq k^2 \delta_2^2 = \delta_1^2$$

等价于

$$\int_0^\infty (v_1/k)' (v_1/k) dt \leq \delta_2^2$$

因此, 对所考虑的干扰为平方可积约束特征的情况, v_1/k 可被认为是与 v_2 相同的干扰, 即满足同一个不等式约束。因此, 在系统(3.3.1)和(3.3.2)中, 只要将系数 k 吸收在 B_2 或 D_1 中就可以表成同一干扰形式了。

文献[111] 是采用对偶系统的处理方法, 将式(3.3.1)和(3.3.2)的系统 Σ 的对偶系统表为 Σ^* :

$$\dot{\psi} = -\psi A - \lambda C_1 \quad (3.3.4)$$

$$\phi_1 = \psi B_1 \quad (3.3.5)$$

$$\phi_2 = \psi B_2 + \lambda D_1 \quad (3.3.6)$$

式中, ψ, ϕ_1, ϕ_2 为行向量。系统 Σ 与 Σ^* 的对偶关系恒等式为

$$\psi(T)x(T) - \psi(0)x(0) = \int_0^T [\phi_1(t)u(t) + \phi_2(t)v(t) - \lambda(t)y(t)] dt \quad (3.3.7)$$

改写为

$$\psi(T)x(T) - \int_0^T [\phi_1(t)u(t) - \lambda(t)y(t)] dt = \psi(0)x(0) + \int_0^T \phi_2(t)v(t) dt \quad (3.3.8)$$

u 为已知量, 若给定 $\psi(T)$ 和 $\lambda(t)$, 则 $\psi(0), \phi_1(t), \phi_2(t)$ 是由 Σ^* 完全确定的。

于是可用

$$\int_0^T [\phi_1(t)u(t) - \lambda(t)y(t)] dt \quad (3.3.9)$$

作为 $\phi(T)x(T)$ 的估计量, 其估计误差为

$$\psi(0)x(0) + \int_0^T \phi_2(t)v(t) dt \quad (3.3.10)$$

若同时考虑初态 $x(0)$ 也是未知的不确定量, 则估计式(3.3.10)可能出现的最大误

差为

$$\max_{x(0), v(t)} \left[\psi(0)x(0) + \int_0^T \phi_2(t)v(t)dt \right] \quad (3.3.11)$$

对给定的 $\psi(T)$, 这个最大可能误差依赖于 $\lambda(t)$ 的选择, 由于不知道不确定性因素 $x(0), v(t)$ 的具体形式, 因此选取 $\lambda(t)$ 使式(3.3.11)最大可能误差最小化来估计 $\psi(T)x(T)$ 是比较合适的方案, 即最大最小估计或“最坏”干扰下的“最佳”估计问题。这种意义上的状态估计问题指标可表示为

$$\min_{\lambda(t)} \max_{x(0), v(t)} \left[\psi(0)x(0) + \int_0^T \phi_2(t)v(t)dt \right] \quad (3.3.12)$$

再假定

$$x'(0)x(0) + \int_0^T v'(t)v(t)dt \leq a^2(T) \leq \delta_0^2 + \delta^2 \quad (3.3.13)$$

式中, $a(T)$ 给定; δ_0^2, δ^2 为式(3.3.3) 中的初值及干扰约束界限值, 详细推导步骤可参见文献[111] 的类似处理方法, 求取最优 $\lambda^*(t)$ 的问题实际上就是对偶系统 Σ^* 对给定的 $\psi(T)$, 使二次泛函指标

$$\hat{J} = \psi(0)\psi'(0) + \int_0^T [\psi(t)\mathbf{B}_2 + \lambda(t)\mathbf{D}_1][\psi(t)\mathbf{B}_2 + \lambda(t)\mathbf{D}_1]'dt \quad (3.3.14)$$

达到最小的最优控制 $\lambda(t)$ 的问题。

设 $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_1' > 0$ 则式(3.3.14)在 Σ^* 系统下的最优控制 $\lambda^*(t)$ 是状态 $\psi(t)$ 的线性反馈形式:

$$\lambda^*(t) = -\psi(t)\hat{\mathbf{K}}(t) \quad (3.3.15)$$

式中,

$$\hat{\mathbf{K}}(t) = (\mathbf{B}_2\mathbf{D}_1' - \hat{\mathbf{P}}\mathbf{C}_1')(\mathbf{D}_1\mathbf{D}_1')^{-1} \quad (3.3.16)$$

$\hat{\mathbf{P}}$ 满足

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{P}}} &= \hat{\mathbf{P}}\mathbf{A}' + \mathbf{A}\hat{\mathbf{P}} - \mathbf{B}_2\mathbf{B}_2' + (\mathbf{B}_2\mathbf{D}_1' - \hat{\mathbf{P}}\mathbf{C}_1')(\mathbf{D}_1\mathbf{D}_1')^{-1}(\mathbf{D}_1\mathbf{B}_2' - \mathbf{C}_1\hat{\mathbf{P}}) \\ &\quad \hat{\mathbf{P}}(0) = \mathbf{I} \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

minmax 状态估计方程为

$$\dot{\hat{x}} = \mathbf{A}\hat{x} + \hat{\mathbf{K}}(t)[y(t) - \mathbf{C}_1\hat{x}] + \mathbf{B}_1\mathbf{u}, \quad \hat{x}(0) = 0 \quad (3.3.18)$$

由于状态反馈控制律只对式(3.3.1)求解, 而与输出测量无关, 因此状态反馈控制求取仍可采用指标

$$J = \max_{\|v\|_2^2 \leq \delta^2} \min_u \int_0^\infty (x' Q x + u' u) dt \quad (3.3.19)$$

其结果与 2.4 节完全一致, 以状态估计 \hat{x} 代替 x , 最优策略为:

最优控制

$$u^* = -B_1' P \hat{x} \triangleq K_1 \hat{x} \quad (3.3.20)$$

“最坏”干扰

$$v^* = \eta^{-1} B_2' P \hat{x} \triangleq K_2 \hat{x}$$

至此, 可得 minmax 状态估计-maxmin 反馈控制闭环结构的详细框图(图 3.4)为:

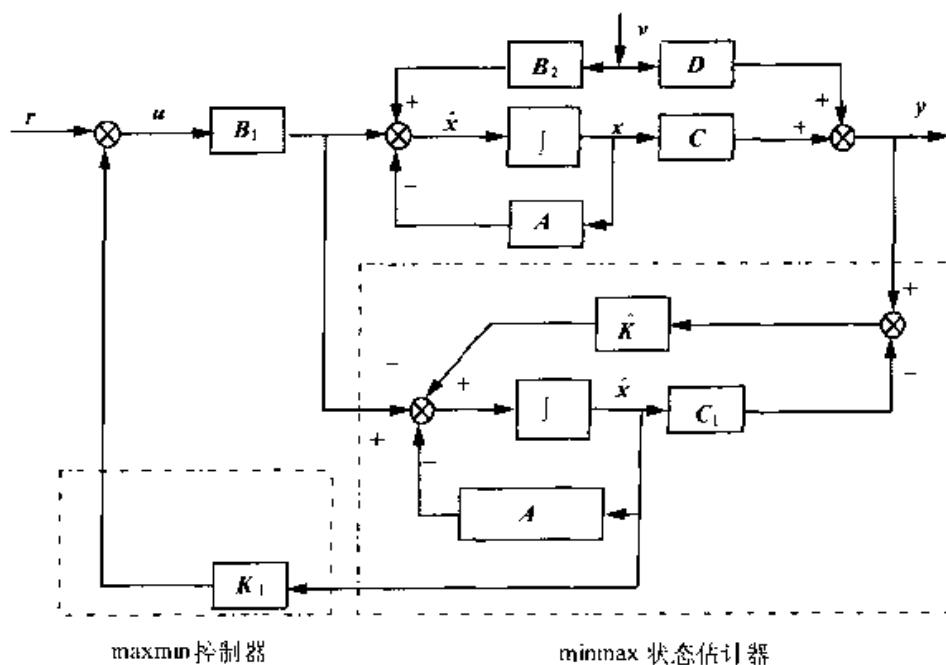


图 3.4 minmax 状态估计-maxmin 反馈控制闭环结构框图

在满足 minmax 和 maxmin 指标等价性条件下, 则可将状态估计与反馈控制指标采用 minmax 使之在形式上统一起来。

众所周知, 确定性系统的观测器-控制器结合和随机系统的 LQG 方法状态估计器-控制器的结合都是基于状态重构或估计与反馈控制律设计可分离性原理成立而进行的。因此, 在 minmax 状态估计-反馈控制方案中也应考察这种分离性设计的合理依据, 分析如下:

一般地, 状态重构(或估计)-反馈连接有效所基于的可分离性设计原理是否成立, 应从三方面来考察:

- (1) 状态反馈的特征值闭环后是否仍有效;
- (2) 估计器的特征值是否受反馈的影响;
- (3) 估计器对闭环系统传递函数矩阵的影响。

如果闭环后的估计器特征值和状态反馈闭环特征值互不影响, 并且估计器对系统传递函数矩阵无影响, 则可判定分离性原理成立, 即估计-控制闭环连接有效。

令 $u = r - K_1 \hat{x}$ 代入式(3.3.1), 则有

$$\dot{x} = Ax + B_1(r - K_1 \hat{x}) + B_2 v \quad (3.3.21)$$

而由式(3.3.18)的状态估计方程并考虑式(3.3.2), 有

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + \hat{K}(C_1x + D_1v - C_1\hat{x}) + B_1(r - K_1\hat{x}) \\ &= (A - \hat{K}C_1)\hat{x} + \hat{K}C_1x + \hat{K}D_1v + B_1(r - K_1\hat{x}) \end{aligned}$$

即

$$\dot{\hat{x}} = (A - \hat{K}C_1 - B_1K_1)\hat{x} + \hat{K}C_1x + B_1r + \hat{K}D_1v \quad (3.3.22)$$

联立上两式

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -B_1K_1 \\ \hat{K}C_1 & A - \hat{K}C_1 - B_1K_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_1 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} B_2 \\ \hat{K}D_1 \end{bmatrix} v \quad (3.3.23)$$

做变换

$$\begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x - \hat{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} \quad (3.3.24)$$

则式(3.3.23)可写成

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & -B_1K_1 \\ \hat{K}C_1 & A - \hat{K}C_1 - B_1K_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} B_2 \\ B_2 - \hat{K}D_1 \end{bmatrix} v$$

$$= \begin{bmatrix} A - B_1 K_1 & -B_1 K_1 \\ 0 & A - \hat{K} C_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} B_2 \\ B_2 - \hat{K} D_1 \end{bmatrix} v \quad (3.3.25)$$

而式(3.3.2)成为

$$\begin{aligned} y &= C_1 x + D_1 v = [C_1 \ 0] \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + D_1 v \\ &= [C_1 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + D_1 v \\ &= [C_1 \ 0] \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + D_1 v \end{aligned} \quad (3.3.26)$$

由于线性变换不改变系统特征值, 则由此可见:

- (1) 闭环系统极点独立: 状态反馈闭环特征值仍为 $A - B_1 K_1$ 的特征值;
- (2) 估计器闭环特征值仍是 $A - \hat{K} C_1$ 的特征值;
- (3) 对 $r - y$ 的闭环传递矩阵可验证为

$$Y(s) = C_1 [sI - (A - B_1 K_1)]^{-1} B_1 R(s) \triangleq G(s) R(s) \quad (3.3.27)$$

$G(s)$ 仍保持不变, 即未受估计器影响。

由此可见分离性原理成立, 因此, minmax 状态估计-maxmin 反馈控制连接是有效的。

下面再看

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) - \hat{x}(t)] \quad (3.3.28)$$

的性状, 由式(3.3.25)

$$\dot{e}(t) = (A - \hat{K} C_1)e + (B_2 - \hat{K} D_1)v \quad (3.3.29)$$

假定在“最坏”干扰下

$$v^* = K_2 x = K_2 e^{\tilde{A}t} x_0 \quad (3.3.30)$$

由 2.4 节的结论知 \tilde{A} 渐近稳定。记 $\hat{A} = A - \hat{K} C_1$, 由于估计器设计是采用 LQ 最优控制指标求得, 因此也必有 $\text{Re}\lambda(\hat{A}) < 0$, 由式(3.3.29), (3.3.30) 得

$$e(t) = e^{\hat{A}t} e(0) + \int_0^t e^{\hat{A}(t-\tau)} (B_2 - \hat{K} D_1) K_2 e^{\tilde{A}\tau} d\tau x_0$$

而

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{\hat{A}(t-\tau)} (\bar{B}_2 - \hat{K} D_1) K_2 e^{A\tau} d\tau x_0$$

设 \bar{A} 的实部最大(绝对值最小)的特征值为 λ , 有 $\bar{\alpha} = \operatorname{Re}\bar{\lambda} < 0$, 再记 λ_B 为 $(\bar{B}_2 - \hat{K} D_1) K_2$ 中特征值实部绝对值最大者, 记 $\alpha_B = \operatorname{Re}\lambda_B$. 考察当 \bar{A}, \hat{A} 可化为对角阵有下式成立^[205], 存在常数 $a > 0$ 使

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| \leq a \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{\hat{a}(t-\tau)} + \alpha_B + e^{\alpha_B \tau} d\tau \|x_0\|$$

式中, \hat{a} 相应于 \hat{A} 的特征值的最大实部, 亦有 $\hat{a} < 0$.

上式亦可写为

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e\| \leq a \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{\hat{a}t} e^{(\hat{\alpha} - \hat{a})\tau} + \alpha_B + \|x_0\| d\tau$$

当 $\hat{a} \neq \alpha$ 时

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = a \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\hat{a}t} [e^{(\alpha - \hat{a})\tau} / (\hat{\alpha} - \hat{a})^{-1}]_{\tau=0} + \alpha_B + \|x_0\| = 0$$

因为 $\|x_0\| \leq \delta_0, |\alpha_B|$ 有限。

当 $\hat{a} = \bar{\alpha}$ 时

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = a \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\hat{a}t} + \alpha_B + \|x_0\| = 0$$

因此, 总有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0$ 亦即 $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$.

一般地, \bar{A}, \hat{A} 总可约当化, 仍可证明有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0$, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ 成立。也即在“最坏”干扰 v^* 的意义下有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{x}(t) = x(t)$$

这表明状态可实现渐近估计。

以上结论假定有条件 $D_1 D_1'$ 可逆成立, 若不然, 亦可参考文献[111]进行适当分块。仍可得到类似结论。

而当观测方程(3.3.2)为 $y = C_1 x$ 时, 可参考文献[112]对不确定性系统的降维 minmax 状态重构的结果得到类似的状态估计。此处从略。

3.4 maxmin 与 minmax 控制指标的等价性讨论

在 2.4 节中, 采用的 maxmin 最优化指标是基于对 H_∞ 方法优化指标而采用的。

若从微分对策方法考虑, 则还有一个 minmax 指标优化问题, 本节讨论这两种优化指标的等价问题。如果等价性条件成立, 则可采用微分对微的鞍点求法求取最优控制, 一般系统, 还可应用最大最小(最小最大)原理求解最优策略^[286]。

考虑系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B_1 u + B_2 v \\ y &= C_1 x + D_1 v\end{aligned}\quad (3.4.1)$$

初态约束

$$x(0)'x(0) = x_0'x_0 \leq \delta_0^2 < \infty \quad (3.4.2)$$

干扰约束

$$\int_0^\infty v'v dt \leq \delta^2 \quad (3.4.3)$$

指标

$$J = \min_u \max_{\|v\|_2^2 \leq \delta^2} \int_0^\infty (x'Qx + u'u) dt \quad (3.4.4)$$

式中, $x \in \mathbb{R}^n$; $u \in \mathbb{R}^m$; $v \in \mathbb{R}^l$; $y \in \mathbb{R}^l$; A , B_1 , B_2 , C , D 为相应的定常数阵; $Q = Q' \geq 0$ 为相容矩阵。

假定 (A, B_1) , (A, B_2) 可控, (A, Q) 可观且 A 渐近稳定。则对系统 (3.4.1) ~ (3.4.4) 问题可求解如下:

(1) 对 v 取极大化。令

$$\bar{J}(u) = \max_{\|v\|_2^2 \leq \delta^2} \int_0^\infty (x'Qx + u'u) dt \quad (3.4.5)$$

依 2.3 节的有关结论, 并考虑 A 渐近稳定, 则对 v 极大化指标可等价为

$$J(u) = \max_v \int_0^\infty (x'Qx + u'u - \eta v'v) dt \quad (3.4.6)$$

式中, $\eta > 0$ 为待定常数, 满足

$$\int_0^\infty v'v dt \leq \delta^2 \quad (3.4.7)$$

做配平方运算, 即设有实数阵 $P_1 = P_1'$ 和时间函数向量 $l(t)$, 做

$$\bar{J}(u) + \int_0^\infty d(x'P_1 x) + \int_0^\infty d(x'l + l'x)$$

整理得

$$\begin{aligned}\bar{J}(\mathbf{v}) = & \max_{\mathbf{v}} \left| \mathbf{x}_0' \mathbf{P}_1 \mathbf{x}_0 + 2\mathbf{l}_0' \mathbf{x}_0 \right. \\ & + \int_0^\infty \left[\mathbf{x}' (\mathbf{A}' \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_1 \mathbf{A} + \mathbf{Q} + \mathbf{P}_1 \mathbf{B}_2 \eta^{-1} \mathbf{B}_2' \mathbf{P}_1) \mathbf{x} \right. \\ & - [\mathbf{v} - \eta^{-1} \mathbf{B}_2' (\mathbf{P}_1 \mathbf{x} + \mathbf{l})] \cdot \eta [\mathbf{v} - \eta^{-1} \mathbf{B}_2' (\mathbf{P}_1 \mathbf{x} + \mathbf{l})] \\ & \left. + 2\mathbf{l}' \mathbf{B}_1 \mathbf{u} + \mathbf{u}' \mathbf{u} + 2\mathbf{x}' [\mathbf{P}_1 \mathbf{B}_2 \eta^{-1} \mathbf{B}_2' \mathbf{l} + \mathbf{A}' \mathbf{l} + \mathbf{P}_1 \mathbf{B}_1 \mathbf{u} + \mathbf{l}] + \mathbf{l}' \mathbf{B}_2 \eta^{-1} \mathbf{B}_2' \mathbf{l} \right] dt \right|\end{aligned}$$

若 \mathbf{P}_1 满足

$$\mathbf{P}_1 \mathbf{A} + \mathbf{A}' \mathbf{P}_1 + \mathbf{Q} + \mathbf{P}_1 \mathbf{B}_2 \eta^{-1} \mathbf{B}_2' \mathbf{P}_1 = 0 \quad (3.4.8)$$

且

$$\operatorname{Re} \lambda(\mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \eta^{-1} \mathbf{B}_2' \mathbf{P}_1) < 0 \quad (3.4.9)$$

式(3.4.8)有解, 满足式(3.4.9)的条件, 可参见 4.1 节中的结论 4.1.4, $\mathbf{l}(t)$ 满足:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{l}} = & -(\mathbf{A}' + \mathbf{P}_1 \mathbf{B}_2 \eta^{-1} \mathbf{B}_2') \mathbf{l} - \mathbf{P}_1 \mathbf{B}_1 \mathbf{u} \\ \triangleq & \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{l} + \tilde{\mathbf{B}}_1 \mathbf{u}, \quad \mathbf{l}(\infty) = 0\end{aligned} \quad (3.4.10)$$

则最优解

$$\mathbf{v}^* = \eta^{-1} \mathbf{B}_2' (\mathbf{P}_1 \mathbf{x} + \mathbf{l}) \quad (3.4.11)$$

最优等价指标为

$$\begin{aligned}\bar{J}^*(\mathbf{u}) = & \mathbf{x}_0' \mathbf{P}_1 \mathbf{x}_0 + 2\mathbf{l}_0' \mathbf{x}_0 + \int_0^\infty (2\mathbf{l}' \mathbf{B}_1 \mathbf{u} + \mathbf{l}' \mathbf{B}_2 \eta^{-1} \mathbf{B}_2' \mathbf{l} + \mathbf{u}' \mathbf{u}) dt \\ & (3.4.12)\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\bar{J}^*(\mathbf{u}) = & \bar{J}^*(\mathbf{u}) + \eta \delta^2 \\ = & \mathbf{x}_0' \mathbf{P}_1 \mathbf{x}_0 + 2\mathbf{l}_0' \mathbf{x}_0 + \eta \delta^2 + \int_0^\infty (2\mathbf{l}' \mathbf{B}_1 \mathbf{u} + \mathbf{l}' \mathbf{B}_2 \eta^{-1} \mathbf{B}_2' \mathbf{l} + \mathbf{u}' \mathbf{u}) dt \\ & (3.4.13)\end{aligned}$$

将(3.4.13)代入(3.4.4)得

$$\begin{aligned}J = \min_{\mathbf{u}} & \left| \mathbf{x}_0' \mathbf{P}_1 \mathbf{x}_0 + 2\mathbf{l}_0' \mathbf{x}_0 + \eta \delta^2 + \int_0^\infty (2\mathbf{l}' \mathbf{B}_1 \mathbf{u} + \mathbf{l}' \mathbf{B}_2 \eta^{-1} \mathbf{B}_2' \mathbf{l} + \mathbf{u}' \mathbf{u}) dt \right|\end{aligned} \quad (3.4.14)$$

(2) 对 u 取极小化。

现在的问题是在式(3.4.10)下求指标(3.4.14)的优化问题。在式(3.4.14)中, I_0 由式(3.4.10)惟一确定为

$$I_0 = \int_0^\infty e^{\tilde{A}s} \tilde{B}_1 u(s) ds \quad (3.4.15)$$

可见 I_0 是 u 的函数, 因此, 优化问题(3.4.10), (3.4.14)也是一个初值控制问题。利用引理 2.4.1(初值控制的极大值原理), 取哈密顿函数为

$$H = \lambda' (\tilde{A}_1 + \tilde{B}_1 u) + 2I' B_1 u + I' B_2 \eta^{-1} B_2' l + u' u$$

伴随方程为

$$\dot{\lambda} = \frac{\partial H}{\partial I} = -\tilde{A}' \lambda - 2B_1 u - 2B_2 \eta^{-1} B_2' l \quad (3.4.16)$$

$$\lambda(0) = -2x_0$$

由驻值条件

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u} &= 0 \\ u^* &= (2B_1' l + \tilde{B}_1' \lambda)/2 \end{aligned} \quad (3.4.17)$$

将式(3.4.11)代入式(3.4.17):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + B_2 \eta^{-1} B_2' P_1) x + B_2 \eta^{-1} B_2' l + B_1 u \\ &= -\tilde{A}' x + B_2 \eta^{-1} B_2' l + B_1 u, \quad x(0) = x_0 \end{aligned} \quad (3.4.18)$$

由式(3.4.16)

$$\begin{aligned} -\dot{\lambda}/2 &= -\tilde{A}'(-\lambda/2) + B_2 \eta^{-1} B_2' l + B_1 u \\ -\lambda(0)/2 &= x_0 \end{aligned} \quad (3.4.19)$$

比较式(3.4.18)和式(3.4.19)得

$$-\lambda/2 \approx x \quad \text{即} \quad \lambda = -2x$$

代入式(3.4.17)得

$$u^* = -B_1'(P_1 x + l) \quad (3.4.20)$$

将式(3.4.20)代入(3.4.10), 有

$$\dot{l} = -[A' + P_1(B_2 \eta^{-1} B_2' - B_1 B_1')]l + P_1 B_1 B_1' P_1 x$$

$$\hat{Q} = -\hat{A}'l - \hat{B}'x, \quad l(\infty) = 0 \quad (3.4.21)$$

将 u^*, v^* 代入式(3.4.1)记为

$$\dot{x} = \hat{A}x + \hat{B}\hat{R}^{-1}\hat{B}'l, \quad x(0) = x_0 \quad (3.4.22)$$

式中,

$$\begin{aligned} \hat{Q} &= -P_1 B_1 B_1' P_1, & \hat{B} &= [B_1 \ B_2], & \hat{R}^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\eta^{-1} \end{bmatrix} \\ \hat{A} &= A + (B_2 \eta^{-1} B_2' - B_1 B_1') P_1 \end{aligned}$$

而式(3.4.21)和(3.4.22)可视为由系统

$$\dot{x} = \hat{A}x + \hat{B}\hat{u}$$

在指标

$$\hat{J} = \min_{\hat{u}} 1/2 \int_0^\infty (x' \hat{Q} x + \hat{u}' \hat{R} \hat{u}) dt$$

下应用最大值原理, 设伴随向量为 $l(t)$ 而导出的伴随方程组。由 LQ 问题的熟知结论知: l 与 x 有线性关系, 可设为

$$l = P_2 x, \quad P_2 = P_2' \quad \text{待定} \quad (3.4.23)$$

对上式求导, 并结合式(3.4.21), (3.4.22)和(3.4.8)整理可得

$$\begin{aligned} &[(P_1 + P_2)A + A'(P_1 + P_2) + Q \\ &- (P_1 + P_2)(B_1 B_1' - B_2 \eta^{-1} B_2')(P_1 + P_2)]x \equiv 0 \end{aligned}$$

若 P_2 满足

$$\begin{aligned} &[(P_1 + P_2)A + A'(P_1 + P_2) + Q \\ &- (P_1 + P_2)(B_1 B_1' - B_2 \eta^{-1} B_2')(P_1 + P_2)] = 0 \end{aligned}$$

即 $P = P_1 + P_2$ 满足

$$PA + A'P + Q - P(B_1 B_1' - B_2 \eta^{-1} B_2')P = 0 \quad (3.4.24)$$

则最优控制

$$\begin{aligned} u^* &= -B_1'(P_1 x + l) = -B_1'(P_1 + P_2)x \\ &= -B_1'Px \triangleq K_1 x \end{aligned} \quad (3.4.25)$$

“最坏”干扰

$$v^* = \eta^{-1} \mathbf{B}_2' (\mathbf{P}_1 \mathbf{x}_0 + \mathbf{l}) = \eta^{-1} \mathbf{B}_2' \mathbf{P} \mathbf{x} \triangleq \mathbf{K}_2 \mathbf{x} \quad (3.4.26)$$

最优指标

$$\begin{aligned} J^* &= \mathbf{x}_0' \mathbf{P}_1 \mathbf{x}_0 + 2 \mathbf{l}_0' \mathbf{x}_0 + \eta \delta^2 + \int_0^\infty (2 \mathbf{l}' \mathbf{B}_1 \mathbf{u}^* \\ &\quad + \mathbf{l}' \mathbf{B}_2 \eta^{-1} \mathbf{B}_2' \mathbf{l}^* + \mathbf{u}' \mathbf{u}^*) dt \\ &= \mathbf{x}_0' (\mathbf{P}_1 + 2 \mathbf{P}_2) \mathbf{x}_0 + \eta \delta^2 \\ &\quad + \int_0^\infty \mathbf{x}' (-\mathbf{P}_2 \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1' \mathbf{P} - \mathbf{P} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1' \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_2 \mathbf{B}_2 \eta^{-1} \mathbf{B}_2' \mathbf{P}_2 + \mathbf{P} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1' \mathbf{P}) \mathbf{x}^* dt \\ &= \mathbf{x}_0' (\mathbf{P}_1 + 2 \mathbf{P}_2) \mathbf{x}_0 + \eta \delta^2 + \int_0^\infty \mathbf{x}' [\mathbf{P}_2 (\mathbf{A} - \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1' - \mathbf{B}_2 \eta^{-1} \mathbf{B}_2') \mathbf{P} \\ &\quad - \mathbf{P}_2 (\mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \eta^{-1} \mathbf{B}_2' \mathbf{P}) + [\mathbf{A} - (\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1' - \mathbf{B}_2 \eta^{-1} \mathbf{B}_2') \mathbf{P}]' \mathbf{P}_2 \\ &\quad - (\mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \eta^{-1} \mathbf{B}_2' \mathbf{P})' \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_2 \mathbf{B}_2 \eta^{-1} \mathbf{B}_2' \mathbf{P}_2 + \mathbf{P} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1' \mathbf{P}] \mathbf{x}^* dt \\ &= \mathbf{x}_0' (\mathbf{P}_1 + 2 \mathbf{P}_2) \mathbf{x}_0 + \eta \delta^2 + \int_0^\infty d(\mathbf{x}' \mathbf{P}_2 \mathbf{x}^*) \\ &\quad + \int_0^\infty [\mathbf{x}' [\mathbf{P}_2 \mathbf{B}_2 \eta^{-1} \mathbf{B}_2' \mathbf{P}_2 + \mathbf{P} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1' \mathbf{P} - \mathbf{P}_2 (\mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \eta^{-1} \mathbf{B}_2' \mathbf{P}) \\ &\quad - (\mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \eta^{-1} \mathbf{B}_2' \mathbf{P})' \mathbf{P}_2] \mathbf{x}^*] dt \end{aligned}$$

考虑式(3.4.8)和(3.4.24)

$$J^* = \mathbf{x}_0' (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2) \mathbf{x}_0 + \eta \delta^2 + \int_0^\infty 0 dt = \mathbf{x}_0' \mathbf{P} \mathbf{x}_0 + \eta \delta^2 \quad (3.4.27)$$

与 2.4 节的结论, 即定理 2.4.1 比较可见

$$\max_{\|\mathbf{x}\|_2^2 \leq \delta^2} \min_{\mathbf{u}} \int_0^\infty (\mathbf{x}' \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}' \mathbf{u}) dt = \min_{\mathbf{u}} \max_{\|\mathbf{x}\|_2^2 \leq \delta^2} \int_0^\infty (\mathbf{x}' \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}' \mathbf{u}) dt \quad (3.4.28)$$

关于 η 的确定等结论与 2.4 节相同, 还应注意到式(3.4.8)有实稳定解的条件可参见第四章 4.1 节的结论 4.1.4。

至此, 可归纳本节的讨论为:

定理 3.4.1 对问题(2.4.1)~(2.4.4)和(3.4.1)~(3.4.4)假定

- (1) $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_1), (\mathbf{A}, \mathbf{B}_2)$ 可控(可镇定), (\mathbf{A}, \mathbf{Q}) 可观;
- (2) \mathbf{A} 渐近稳定;

$$(3) \bar{H}(-i\omega, i\omega) = 1 - \eta^{-1} \mathbf{B}_2' (-i\omega - \mathbf{A}')^{-1} \mathbf{Q} (i\omega - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}_2 \\ \geq \epsilon_1 \mathbf{B}_2' (-i\omega - \mathbf{A}')^{-1} (i\omega - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}_2$$

对某 $\epsilon_1 > 0$ 成立, 则问题(2.4.1)~(2.4.4) 和 (3.4.1)~(3.4.4) 等价, 即式(3.4.28) 成立。或称极大极小化次序可交换。

注释 其中条件(3)见定理 4.2.2 推证。

3.5 maxmin 状态估计-maxmin 反馈控制 闭环系统设计的 LQL 方法

对系统进行状态反馈控制而状态不可直接准确测得时, 需考虑带有状态重构的反馈控制结构。前文给出了具 L_2 有界不确定性的 LQL 方法, 即采用 maxmin 状态反馈-minmax 状态估计的闭环控制结构。为使 maxmin 优化意义在状态反馈和状态估计中得到统一, 本节给出 maxmin 状态反馈-状态估计的闭环控制结构设计, 可认为是 LQL 方法的又一种形式, 也是 LQL 方法状态观测器-反馈控制器闭环系统的形式统一。

3.5.1 maxmin 状态估计器

为实现上述的闭环控制结构, 我们利用线性系统的对偶原理来给出 maxmin 状态估计器的设计, 即将对偶系统的 maxmin 最优调节器通过对偶关系式转化为原系统的 maxmin 状态估计器。考虑如下系统:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mathbf{A}x + \mathbf{B}_1u + \mathbf{B}_2v \\ y &= \mathbf{C}_1x + \mathbf{D}_1v \\ z &= \mathbf{Ex}\end{aligned}\tag{3.5.1}$$

其中不确定性输入和初态满足二次型积分约束(3.2.4)和(3.2.7)。而 z 为与量测值 y 可分离的由不确定性输入而造成的不确定性输出。在如下的设计中我们认为其对估计器是有影响的, 可作为估计过程中的一种不确定性输入。取(3.5.1)对偶系统为

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= \psi A + \mu C + \xi E \\ \varphi_1 &= \psi B_1 \\ \varphi_2 &= \psi B_2 + \mu D\end{aligned}\tag{3.5.2}$$

相应地, 其为带有满足如下约束的不确定性输入 ξ 的不确定性系统:

$$\int_0^t \xi \xi' d\tau \leq \delta_\xi^2 \quad (3.5.3)$$

则系统(3.5.1)与对偶系统(3.5.2)之间存在的对偶关系式为

$$\begin{aligned} & \psi(0)x(t) - \psi(t)x(0) \\ &= \int_0^t [\varphi_1(t-\tau)u(\tau) + \varphi_2(t-\tau)v(\tau) - \mu(t-\tau)y(\tau) - \xi(t-\tau)z(\tau)]d\tau \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

此时, 对对偶系统(3.5.2)求取如下 maxmin 指标意义下的最优调节器

$$J = \max_{\xi(\cdot)} \min_{\mu(\cdot)} \int_0^t (\psi \hat{Q} \psi' + \mu \mu') d\tau \quad (3.5.5)$$

式中, \hat{Q} 为协状态加权阵。因系统(3.5.1)中 (A, B_1) 可控, (A, C) 可观, 所以对偶系统(3.5.2)中 (A, C) 可控, (A, B_1) 可观, 又设 (A, \hat{Q}) 可观, 则由定理 2.4.1 的相应于有限时间上的结论可得, 若存在实对称正定矩阵 \hat{P} 和常数 $\hat{\eta} > 0$, 满足如下方程组:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{P}} &= A \hat{P} + \hat{P} A' + \hat{Q} - \hat{P} (C'C - \hat{\eta}^{-1} E'E) \hat{P}, \quad \hat{P}(0) = 0 \\ \text{Re}\lambda(\hat{A}) &= \text{Re}\lambda(A - (C'C - \hat{\eta}^{-1} E'E) \hat{P}) < 0 \\ U(\hat{\eta}) \hat{A} + \hat{A}' U(\hat{\eta}) + \hat{P} \hat{\eta}^{-2} E'E \hat{P} &= 0 \\ \psi_0 U(\hat{\eta}) \psi'_0 &= \delta_\xi^2 \end{aligned} \quad (3.5.6)$$

式(3.5.5)指标意义下的最优策略为:

最优控制

$$\mu^* = -\psi \hat{P}(t) C' = -\psi \hat{K}_1, \quad \hat{K}_1 = \hat{P}(t) C'$$

“最坏”不确定性输入

$$\xi^* = \psi \hat{P}(t) E' = \psi \hat{K}_2, \quad \hat{K}_2 = \hat{P}(t) E'$$

此时

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \psi(B_2 - \hat{K}_1 D) \\ \dot{\psi} &= \psi (A - \hat{K}_1 C + \hat{K}_2 E) \end{aligned} \quad (3.5.7)$$

代入到对偶关系式(3.5.4)中, 有

$$\begin{aligned}\psi(0)x(t) - \psi(t)x(0) &= \int_0^t \psi(t-\tau)[B_1u(\tau) + (B_2 - \hat{K}_1D)v(\tau) \\ &\quad + \hat{K}_1y(\tau) - \hat{K}_2z(\tau)]d\tau\end{aligned}$$

取 $\psi(0)$ 为 n 个单位坐标向量, 则对应的 $\psi(t)$ 组成方程(3.5.7)的状态转移矩阵

$$\Phi(t) = e^{(A - \hat{K}_1C + \hat{K}_2E)t} = e^{\hat{A}t} \quad (3.5.8)$$

所以

$$\begin{aligned}x(t) &= \int_0^t \Phi(t-\tau)[B_1u(\tau) + (B_2 - \hat{K}_1D)v(\tau) \\ &\quad + \hat{K}_1y(\tau) - \hat{K}_2z(\tau)]d\tau + \Phi(t)x(0)\end{aligned} \quad (3.5.9)$$

令

$$\hat{x}(t) = \int_0^t \Phi(t-\tau)[B_1u(\tau) + \hat{K}_1y(\tau) - \hat{K}_2z(\tau)]d\tau \quad (3.5.10)$$

则它满足方程

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= (A - \hat{K}_1C + \hat{K}_2E)\hat{x} + B_1u + \hat{K}_1y - \hat{K}_2z \quad (3.5.11) \\ \hat{x}(0) &= 0\end{aligned}$$

此即为 maxmin 估计器方程。对于估计误差的渐近收敛性将在下节详细论证, 这里可先认为此条件成立。

注意到与 minmax 估计器所不同的是 maxmin 估计器的方程中多了一项不确定性输入 z , 这是因为系统中存在着不确定性输入, 它在系统的输出端也必然会引起所不希望的不确定性输出干扰。假如我们能将其与真正的系统输出相分离而测得, 则这种扰动输出信息就可被利用来进行真实的状态重构, 从而为 minmax 估计中保守性的降低提供了可能。

maxmin 估计器方程又可写为

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B_1u + \hat{K}_1(y - C\hat{x}) - \hat{K}_2(z - E\hat{x})$$

从上式可更清楚地看出, $E\hat{x}$ 一项可近似看成是对不确定性输出扰动的估计, 而 \hat{K}_2 又可视为不确定性输出对状态估计影响的加权增益。在 H_∞ 的输出反馈控制器中, 其估计器方程包含了对最坏干扰输入的估计, 此处, 我们则直接考虑不确定性输出作为估计中的不确定性输入的影响, 处理更为直接, 也更易于理解。

从式(3.5.9)和(3.5.10)直观可见,估计器的收敛速度与对偶系统的状态转移阵的收敛速度直接相关,由此,可通过对 $\max\min$ 优化指标(3.5.5)中的协状态加权阵 \hat{Q} 的适当选取,来使 \hat{A} 的极点远离状态反馈闭环极点,以满足一定的估计收敛速度要求。

3.5.2 $\max\min$ 状态估计- $\max\min$ 反馈控制闭环结构

如上我们得到了 $\max\min$ 估计器,而相应的 $\max\min$ 状态反馈控制仍可采用 3.2 节的结果,即在指标

$$J = \max_{x(\cdot)} \min_{u(\cdot)} \int_0^{\infty} (x' Q x + u' u) dt$$

意义下的最优策略:

最优控制

$$u^* = -B_1'Px = -K_1x, \quad K_1 = B_1'P$$

“最坏”不确定性输入

$$v^* = \eta^{-1} B_2'Px = K_2x, \quad K_2 = \eta^{-1} B_2'P$$

式中, P , η 是方程组(3.2.8)的解。这样就构成了 $\max\min$ 状态估计-反馈控制闭环结构,其框图如图 3.5 所示。

同样,在 $\max\min$ 状态估计-反馈控制方案中也应考察这种分离性设计的合理依据。为此,给出如下分析:

类似 3.3 节的分析,考察图 3.5 状态估计-反馈控制连接有效性。令

$$u = r - K_1\hat{x}$$

代入到系统(3.5.1),则

$$\dot{x} = Ax + B_1(r - K_1\hat{x}) + B_2v \quad (3.5.12)$$

再将系统的输入和输出代入到估计器方程(3.5.10)中得

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= (A - B_1K_1 - \hat{K}_1C + \hat{K}_2E)\hat{x} + \hat{K}_1Cx - \hat{K}_2Ex + B_1r + \hat{K}_1Dv \\ &\quad (3.5.13) \end{aligned}$$

联立上两式,有

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -B_1K_1 \\ \hat{K}_1C - \hat{K}_2E & A - B_1K_1 - \hat{K}_1C + \hat{K}_2E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_1 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} B_2 \\ \hat{K}_1D \end{bmatrix} v \quad (3.5.14)$$

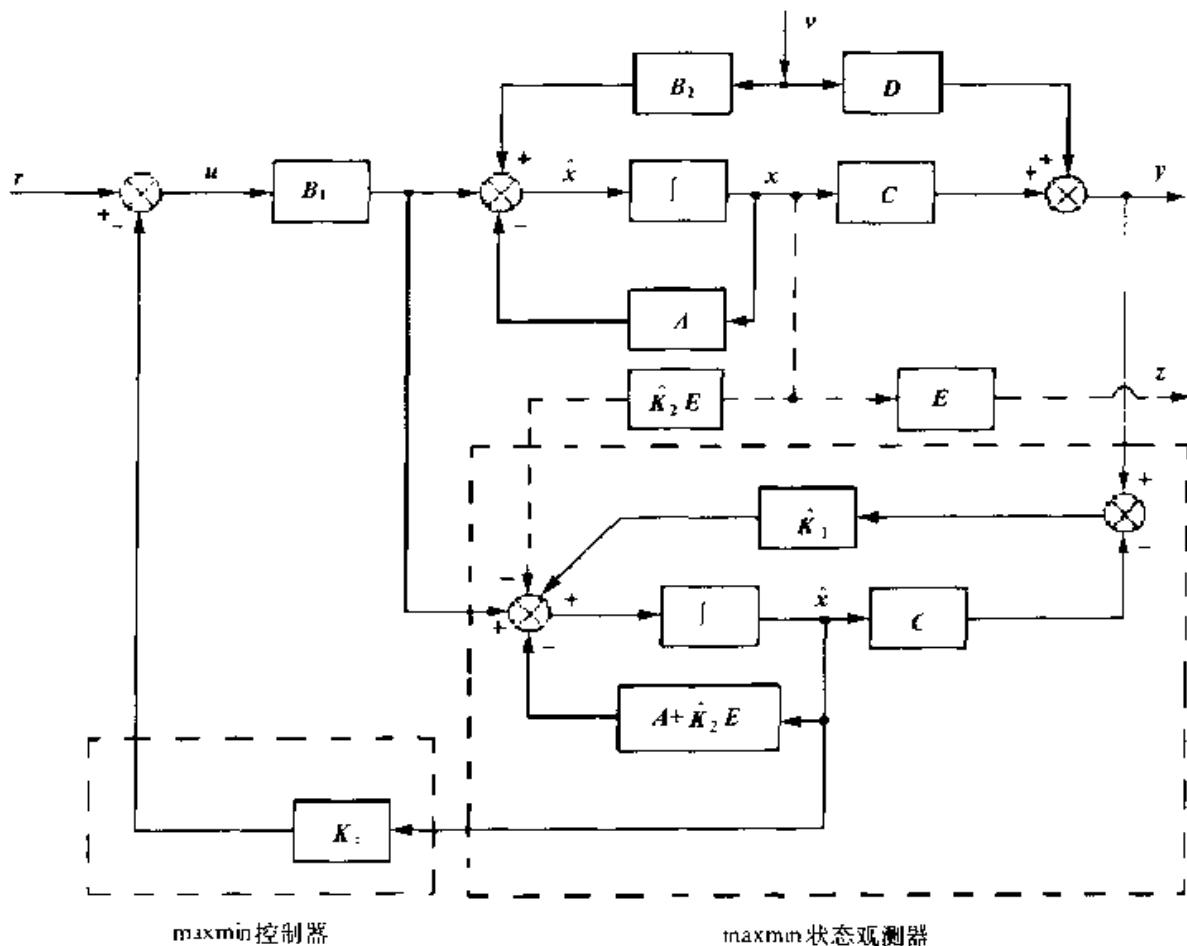


图 3.5 maxmin 状态估计-反馈控制闭环结构

令 $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ 为状态估计误差, 则可将方程(3.5.14)改写为

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - B_1 K_1 & B_1 K_1 \\ 0 & A - \hat{K}_1 C + \hat{K}_2 E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} B_2 \\ B_2 - \hat{K}_1 D \end{bmatrix} v \quad (3.5.15)$$

而

$$y = Cx + Dv = [C \ 0] \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + Dv = [C \ 0] \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + Dv \quad (3.5.16)$$

由于线性变换不改变系统特征值, 则可得如下结论:

- 1) 闭环系统极点独立, 即状态反馈闭环特征值仍为 $A - B_1 K_1$ 的特征值;
- 2) maxmin 估计器的闭环特征值仍为 $A - K_1 C + K_2 E$ 的特征值;

3) 闭环传递函数 $G_{yr}(s)$ 可验证仍为

$$G_{yr}(s) = C [sI - (A - B_1 K_1)]^{-1} B_1$$

即未受 maxmin 估计器的影响, 状态估计与反馈控制的分离性原理在此成立, 所以 maxmin 估计-maxmin 控制连接有效。

对于估计误差可验证其是渐近收敛的。由式(3.5.9)和(3.5.10)可得

$$\begin{aligned} e(t) &= x(t) - \hat{x}(t) = \int_0^t \Phi(t-\tau)(B_2 - \hat{K}_1 D)v(\tau)d\tau + \Phi(t)x(0) \\ &\quad \text{(3.5.17)} \end{aligned}$$

假定在“最坏”的不确定性输入下, 即

$$v^* = K_2 x = K_2 e^{\bar{A}t} x(0) \quad (3.5.18)$$

由定理 2.4.1 的相应于有限时间上的结论知 $\bar{A} = A - B_1 K_1 + B_2 K_2$ 渐近稳定, 同样 $\hat{A} = A - K_1 C + K_2 E$ 也是渐近稳定的, 这样由式(3.5.8)有 $\Phi(t) \rightarrow 0(t \rightarrow \infty)$, 所以式(3.5.17)中第二项趋于 0, 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{\hat{A}(t-\tau)} (B_2 - \hat{K}_1 D) K_2 e^{\bar{A}\tau} d\tau x(0) \quad (3.5.19)$$

其余的分析类似 3.3 节。可证明 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\|_2 = 0$, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ 成立。也即在“最坏”不确定性输入 v^* 的意义下有: $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{x}(t) = x(t)$, 实现了状态的渐近估计。

综上所述, 得到如下结论:

结论 3.5.1 对于完全可控、可观的系统(3.5.1), 若方程组(3.5.6)有解, 则 maxmin 全阶估计器可由式(3.5.11)构成。且其与 maxmin 反馈控制连接有效, 从而构成 maxmin 状态估计-maxmin 控制的闭环结构。

3.5.3 maxmin 降阶状态估计器

当系统(3.5.1)中 $D = 0$ 时, 考虑 maxmin 降阶估计器的设计。设 C 满秩, 则总可以找到非奇异变换

$$T = \begin{bmatrix} T_1 \\ C \end{bmatrix}$$

且 T_1 满足

$$\textcircled{1} C T_1' = 0;$$

$$\textcircled{2} \quad \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_1' = \mathbf{I}_{n+l}$$

则变换 \mathbf{T} 之逆为

$$\mathbf{T}^{-1} = [\mathbf{T}_1' \quad \mathbf{C}'(\mathbf{CC}')^{-1}]$$

在变换 \mathbf{T} 之下, 系统(3.5.1)变为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} B_{12} \\ B_{22} \end{bmatrix} v \\ y &= [0 \quad I_l] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ z &= [E_1 \quad E_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.5.20)$$

则其对偶系统在变换 \mathbf{T}^{-1} 之下, 变为

$$\begin{aligned} [\dot{\psi}_1 \quad \dot{\psi}_2] &= [\psi_1 \quad \psi_2] \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} + \mu [0 \quad I_l] + \xi [E_1 \quad E_2] \\ \varphi_1 &= [\psi_1 \quad \psi_2] \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \end{bmatrix} \\ \varphi_2 &= [\psi_1 \quad \psi_2] \begin{bmatrix} B_{21} \\ B_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.5.21)$$

系统(3.5.20)与(3.5.21)之间存在的对偶关系式为

$$\begin{aligned} [\psi_1(0) \quad \psi_2(0)] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} &- [\psi_1(t) \quad \psi_2(t)] \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} \\ &= \int_0^t [\varphi_1(t-\tau)u(\tau) + \varphi_2(t-\tau)v(\tau) - \mu(t-\tau)y(\tau) - \xi(t-\tau)z(\tau)] d\tau \end{aligned} \quad (3.5.22)$$

因系统(3.5.1)完全能观测, 所以对偶系统(3.5.21)中阵对 (A_{11}, A_{21}) 是能控的阵对。此时, 对偶系统(3.5.21)的分系统中

$$\dot{\psi}_1 = \psi_1 A_{11} + \psi_2 A_{21} + \xi E_1 \quad (3.5.23)$$

可将 ψ_2 视为独立于 ψ_1 的控制量, 即它是使分系统(3.5.23)稳定的控制作用, 而与之相反的不确定性输入 $\xi(t) \in L_2[0, \infty)$ 将起破坏系统稳定的作用, 二者构成了对策的双方。这样, 可对分系统(3.5.23)提出如下 maxmin 优化指标

$$J = \max_{\xi(\cdot)} \min_{\psi_2(\cdot)} \int_0^T (\psi_1 \hat{Q}_1 \psi_1' + \psi_2 \psi_2') d\tau \quad (3.5.24)$$

求取约束 $\int_0^T \xi \xi' d\tau \leq \delta_\xi^2$ 下的最优策略 (ψ_2^*, ξ^*) 。由定理 2.4.1 的相应于有限时间上的结论可知若存在实对称正定矩阵 \hat{P} 和常数 $\hat{\eta} > 0$, 满足如下方程组:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{P}} &= A_{11} \hat{P} + \hat{P} A_{11}' + \hat{Q}_1 - \hat{P} (A_{21}' A_{21} - \hat{\eta}^{-1} E_1' E_1) \hat{P}, \quad \hat{P}(0) = 0 \\ \text{Re}\lambda(\hat{A}_1) &= \text{Re}\lambda(A_{11} - (A_{21}' A_{21} - \hat{\eta}^{-1} E_1' E_1) \hat{P}) < 0 \\ U(\hat{\eta}) \hat{A}_1 + \hat{A}_1' U(\hat{\eta}) + \hat{P} \hat{\eta}^{-2} E_1' E_1 \hat{P} &= 0 \\ \psi_1(0) U(\hat{\eta}) \psi_1'(0) &= \delta_\xi^2 \end{aligned} \quad (3.5.25)$$

则最优控制

$$\psi_2^* = -\psi_1 \hat{K}_1, \quad \hat{K}_1 = P(t) A_{21}' \quad (3.5.26)$$

“最坏”不确定性输入

$$\xi^* = \psi_1 \hat{K}_2, \quad \hat{K}_2 = \hat{\eta}^{-1} P(t) E_1' \quad (3.5.27)$$

将 ξ^* 代入到式(3.5.23)及

$$\dot{\psi}_2 = \psi_1 A_{12} + \psi_2 A_{22} + \mu + \xi E_2 \quad (3.5.28)$$

中得, 在“最坏”不确定性输入下若如下选取 μ

$$\mu = -\psi_1 [(A_{11} - \hat{K}_1 A_{21} + \hat{K}_2 E_1) \hat{K}_1 + (A_{12} - \hat{K}_1 A_{22}) + \hat{K}_2 E_2] = -\psi_1 G$$

式中,

$$G = (A_{11} - \hat{K}_1 A_{21} + \hat{K}_2 E_1) \hat{K}_1 + (A_{12} - \hat{K}_1 A_{22}) + \hat{K}_2 E_2 \quad (3.5.29)$$

则可保证最优策略中的最优控制 ψ_2^* , 此时分系统(3.5.23)成为

$$\dot{\psi}_1 = \psi_1 (A_{11} - \hat{K}_1 A_{21} + \hat{K}_2 E_1) \quad (3.5.30)$$

而 $\varphi_1 = \psi_1 (B_{11} - \hat{K}_1 B_{12})$, $\varphi_2 = \psi_1 (B_{21} - \hat{K}_2 B_{22})$, 代入到对偶关系式(3.5.22)中, 有

$$\begin{aligned}
& \boldsymbol{\psi}_1(0)[\hat{\mathbf{x}}_1(t) - \hat{\mathbf{K}}_1 \mathbf{y}(t)] + \boldsymbol{\psi}_1(t) \hat{\mathbf{K}}_1 \mathbf{y}(0) \\
& - \int_0^t \boldsymbol{\psi}_1(t-\tau) [(\mathbf{B}_{11} - \hat{\mathbf{K}}_1 \mathbf{B}_{12}) \mathbf{u}(\tau) + \mathbf{G}\mathbf{y}(\tau) - \hat{\mathbf{K}}_2 \mathbf{z}(\tau)] d\tau \\
& = \boldsymbol{\psi}_1(t) \hat{\mathbf{x}}_1(0) + \int_0^t \boldsymbol{\psi}_1(t-\tau) (\mathbf{B}_{21} - \hat{\mathbf{K}}_1 \mathbf{B}_{22}) \mathbf{v}(\tau) d\tau
\end{aligned}$$

取 $\boldsymbol{\psi}_1(0)$ 为 $n-l$ 个单位坐标向量, 则对应的 $\boldsymbol{\psi}_1(t)$ 组成式(3.5.30)的状态转移阵 $\boldsymbol{\Phi}_1(t)$, 所以

$$\begin{aligned}
& [\hat{\mathbf{x}}_1(t) - \hat{\mathbf{K}}_1 \mathbf{y}(t)] + \boldsymbol{\Phi}_1(t) \hat{\mathbf{K}}_1 \mathbf{y}(0) \\
& - \int_0^t \boldsymbol{\Phi}_1(t-\tau) [(\mathbf{B}_{11} - \hat{\mathbf{K}}_1 \mathbf{B}_{12}) \mathbf{u}(\tau) + \mathbf{G}\mathbf{y}(\tau) - \hat{\mathbf{K}}_2 \mathbf{z}(\tau)] d\tau \\
& = \boldsymbol{\Phi}_1(t) \hat{\mathbf{x}}_1(0) + \int_0^t \boldsymbol{\Phi}_1(t-\tau) (\mathbf{B}_{21} - \hat{\mathbf{K}}_1 \mathbf{B}_{22}) \mathbf{v}(\tau) d\tau
\end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}}_1(t) - \hat{\mathbf{K}}_1 \mathbf{y}(t) &= -\boldsymbol{\Phi}_1(t) \hat{\mathbf{K}}_1 \mathbf{y}(0) \\
&+ \int_0^t \boldsymbol{\Phi}_1(t-\tau) [(\mathbf{B}_{11} - \hat{\mathbf{K}}_1 \mathbf{B}_{12}) \mathbf{u}(\tau) + \mathbf{G}\mathbf{y}(\tau) - \hat{\mathbf{K}}_2 \mathbf{z}(\tau)] d\tau
\end{aligned}$$

则它是如下方程的解:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{x}}_1 - \hat{\mathbf{K}}_1 \mathbf{y}) &= (\mathbf{A}_{11} - \hat{\mathbf{K}}_1 \mathbf{A}_{21} + \hat{\mathbf{K}}_2 \mathbf{E}_1) (\hat{\mathbf{x}}_1 - \hat{\mathbf{K}}_1 \mathbf{y}) \\
&+ (\mathbf{B}_{11} - \hat{\mathbf{K}}_1 \mathbf{B}_{12}) \mathbf{u} + \mathbf{G}\mathbf{y} - \hat{\mathbf{K}}_2 \mathbf{z} \\
\hat{\mathbf{x}}_1(0) &= 0
\end{aligned}$$

令

$$\zeta(t) = \hat{\mathbf{x}}_1(t) - \hat{\mathbf{K}}_1 \mathbf{y}(t) \quad (3.5.31)$$

则

$$\begin{aligned}
\dot{\zeta} &= (\mathbf{A}_{11} - \hat{\mathbf{K}}_1 \mathbf{A}_{21} + \hat{\mathbf{K}}_2 \mathbf{E}_1) \zeta + (\mathbf{B}_{11} - \hat{\mathbf{K}}_1 \mathbf{B}_{12}) \mathbf{u} + \mathbf{G}\mathbf{y} - \hat{\mathbf{K}}_2 \mathbf{z} \\
& \quad (3.5.32)
\end{aligned}$$

于是 maxmin 降阶估计器由式(3.5.32), (3.5.31), (3.5.29), (3.5.27)和(3.5.26)及坐标变换 \mathbf{T} 构成。此时有

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{T}_1' \hat{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{C}' (\mathbf{C}\mathbf{C}')^{-1} \mathbf{y}$$

设系统(3.5.1)的状态反馈仍是采用 maxmin 指标意义下的最优策略, 则由前

述得到的 maxmin 降阶估计器与反馈控制器相连而得的闭环状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - B_1 K_1 (\bar{T}_1 \hat{K}_1 + T_2) C & -B_1 K_1 T_1 \\ GC - \hat{K}_2 E - HK_1 (\bar{T}_1 \hat{K}_1 + T_2) C & F - HK_1 T_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \zeta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ H \end{bmatrix} r \\ + \begin{bmatrix} B_2 \\ 0 \end{bmatrix} v \quad (3.5.33)$$

式中,

$$F = A_{11} - \hat{K}_1 A_{21} + \hat{K}_2 E_1, \quad H = B_{11} - \hat{K}_1 B_{21}$$

$$\bar{T}_1 = T_1', \quad \bar{T}_2 = C'(CC')^{-1}$$

令 $e = x_1 - \hat{x}_1$ 为估计误差, 则

$$e(t) = \Phi_1(t)x_1(0) + \int_0^t \Phi_1(t-\tau)(B_{21} - \hat{K}_1 B_{22})v(\tau)d\tau$$

与 maxmin 全阶估计器的情况类似分离性原理仍可成立, 且可得 $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$, 也即在“最坏”不确定性输入 v^* 的意义下有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{x}_1(t) = x_1(t)$, 实现了降阶状态的渐近估计。

由上得到如下结论:

结论 3.5.2 对于完全可控、可观的系统(3.5.1), 当 $D = 0$ 时, 若方程组(3.5.25)有解, 则阶次为 $n-l$ 的 maxmin 降阶观测器可由式(3.5.32), (3.5.31), (3.5.29), (3.5.27)和(3.5.26)构成。且其与 maxmin 反馈控制连接有效, 从而构成 maxmin 估计-控制的闭环结构。

注释 3.5.1 小节中的 maxmin 估计器是从为使 maxmin 优化意义在估计与控制中得到统一而提出的, 3.3 节中的 minmax 估计器却是从优化最大可能估计误差的角度而得到的, 其解是 minmax 优化意义下的最优策略解。在 maxmin 估计器中 maxmin 优化指标的提法更具有一般性意义, 但其附加了对不确定性输出的信息可分离获得的前提条件, 使其在实际应用中有可能受到一定的限制。

前面几节所述的 maxmin 意义下的鲁棒最优状态反馈、状态估计及 minmax 鲁棒状态估计的求解最后都可归于具不定二次项的代数 Riccati 方程或微分 Riccati 方程的求解, 对此问题的讨论可参见文献[162]、[172], 这里不再赘述。

3.6 本 章 小 结

本章对具 L_2 有界不确定性系统当状态不可直接获得时的“minmax”和“maxmin”

状态估计器设计进行了讨论,结合第二章的“maxmin”状态反馈控制结果,从而提出了“真 L_2 有界不确定性系统线性二次鲁棒最优控制”——LQL 方法。其闭环结构有几种情况:

“minmax”状态估计 + “maxmin”反馈控制

“minmax”状态估计 + “minmax”反馈控制

“maxmin”状态估计 + “minmax”反馈控制

“maxmin”状态估计 + “maxmin”反馈控制

在一定条件下,上述四种连接具有有效性和等价性。一般地,方案“minmax”状态估计 + “maxmin”反馈控制总是有效的。本书中,若不具体指出连接方式和条件时,均指的是第一种连接的 LQL 方法。

第四章 一般代数 Riccati 方程与 H_∞ 问题状态 反馈的存在性质

4.1 一般代数 Riccati 方程解的存在性已有结论及其推论

从第二章 2.4 节的定理 2.4.1 知: 具 L_2 有界不确定系统 maxmin 意义下的鲁棒最优状态反馈控制问题(2.4.1)~(2.4.4)可归结为下述方程组的求解:

$$\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}'\mathbf{P} + \mathbf{Q} - \mathbf{P}(\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1' - \mathbf{B}_2\eta^{-1}\mathbf{B}_2')\mathbf{P} = 0 \quad (4.1.1)$$

$$\max \lambda(\mathbf{U}(\eta)) = \delta^2/\delta_0^2 \quad (4.1.2)$$

$$\mathbf{U}(\eta)\bar{\mathbf{A}} + \mathbf{A}'\mathbf{U}(\eta) = -\mathbf{K}_2'\mathbf{K}_2 \quad (4.1.3)$$

求解上述方程组对状态反馈控制设计有用的是 Riccati 方程(4.1.1)存在实对称解 \mathbf{P} , 并使闭环系统渐近稳定, 即满足

$$\operatorname{Re}(\bar{\mathbf{A}}) = \operatorname{Re} \lambda[\mathbf{A} - (\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1' - \mathbf{B}_2\eta^{-1}\mathbf{B}_2')\mathbf{P}] < 0$$

由上述方程组可见, 直接讨论这个方程解的存在性是困难的, 我们来考虑问题的简化讨论。

从问题(2.4.1)~(2.4.4), 由于系统 $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_1), (\mathbf{A}, \mathbf{B}_2)$ 可控, 因此, 状态反馈镇定解总是存在的。又由 2.3 节中定理 2.3.4 关于有干扰约束指标转化为无干扰约束指标的结论, 知待定常数 $\eta > 0$ 满足 $\int_0^\infty v'v dt = \delta^2$ 的解是存在且惟一的。如果 δ 不同, 则对应有不同的 η 值。而式(4.1.2)和(4.1.3)是由

$$\max_{\|x_0\|^2 \leq \delta_0^2} \int_0^\infty v'v dt = \delta^2$$

导出的等价方程。因此, 视 $\eta > 0$ 为某确定存在的常数, 只考虑代数 Riccati 方程(4.1.1)在各种情况下实对称解 \mathbf{P} 的存在性, 并满足 $\operatorname{Re} \lambda(\bar{\mathbf{A}}) < 0$ 的条件, 即完成了对原问题解存在性的讨论。因为(4.1.1)实对称解存在且使 $\operatorname{Re} \lambda(\bar{\mathbf{A}}) < 0$, 则(4.1.2),(4.1.3)的解 η, \mathbf{U} 必存在且惟一, 这两者的存在性是一致的。因此, 本章着重讨论一般代数 Riccati 方程的实对称镇定解的存在性问题。

在(4.1.1)中对可能取到的不同的 $\eta > 0$, 记 $\mathbf{M} = \mathbf{B}_1\mathbf{B}_1' - \mathbf{B}_2\eta^{-1}\mathbf{B}_2'$, 则 \mathbf{M} 的

取值有三种情况,即正定、负定或不定。对方程(4.1.1)做如下表示:

$$\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}'\mathbf{P} + \mathbf{Q} - \mathbf{P}\mathbf{M}\mathbf{P} = 0 \quad (4.1.4)$$

更一般的情况也可以设 $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}'$ 有正定、负定和不定三种情况。因此本章将要讨论的问题将是具有不定二次项 \mathbf{Q}, \mathbf{M} 的一般形式 Riccati 方程实对称解的存在性,并满足 $\operatorname{Re}\lambda(\mathbf{A} - \mathbf{M}\mathbf{P}) < 0$ 的条件。

下面先简要叙述一下对 \mathbf{Q}, \mathbf{M} 正、负定几种情况的已有结论并给出其简单推论。主要参考文献为文献[283]、[270]。

1. $\mathbf{M} \geq 0, \mathbf{Q} \geq 0$

不妨记 $\mathbf{M} = \mathbf{B}\mathbf{B}', \mathbf{Q} = \mathbf{L}'\mathbf{L}$, 则式(4.1.4)为

$$\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}'\mathbf{P} + \mathbf{L}'\mathbf{L} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{B}'\mathbf{P} = 0 \quad (4.1.5)$$

相应于式(4.1.5), 记

$$H_1(-i\omega, i\omega) = 1 + \mathbf{B}'(-i\omega - \mathbf{A}')^{-1}\mathbf{Q}(i\omega - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \quad (4.1.6)$$

结论 4.1.1 对方程(4.1.5)

- (1) 若 (\mathbf{A}, \mathbf{B}) 可镇定, 则方程(4.1.5)实对称解存在的充要条件是 $H_1(-i\omega, i\omega) \geq 0$, 且至少有一个准正定解存在;
- (2) 若 (\mathbf{L}, \mathbf{A}) 可检测(可观测), 则准正定解(正定解)仅限一个 $\mathbf{P}_+ \geq 0$ ($\mathbf{P}_+ > 0$) 满足 $\operatorname{Re}\lambda(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{B}'\mathbf{P}_+) < 0$ 。

2. $\mathbf{M} \leq 0, \mathbf{Q} \leq 0$

不妨记 $\mathbf{M} = -\mathbf{B}\mathbf{B}', \mathbf{Q} = -\mathbf{L}'\mathbf{L}$ 则式(4.1.4)为

$$\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}'\mathbf{P} - \mathbf{L}'\mathbf{L} + \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{B}'\mathbf{P} = 0 \quad (4.1.7a)$$

变换上式为

$$(-\mathbf{P})\mathbf{A} + \mathbf{A}'(-\mathbf{P}) + \mathbf{L}'\mathbf{L} - (-\mathbf{P})\mathbf{B}\mathbf{B}'(-\mathbf{P}) = 0$$

令 $\bar{\mathbf{P}} = -\mathbf{P}$ 则为

$$\bar{\mathbf{P}}\mathbf{A} + \mathbf{A}'\bar{\mathbf{P}} + \mathbf{L}'\mathbf{L} - \bar{\mathbf{P}}\mathbf{B}\mathbf{B}'\bar{\mathbf{P}} = 0 \quad (4.1.7b)$$

结论 4.1.2 对方程(4.1.7a)

- (1) 若 (\mathbf{A}, \mathbf{B}) 可镇定, 则方程(4.1.7a)存在实对称解的充要条件是 $H_1(-i\omega, i\omega) \geq 0$ 且至少有一个准负定解存在。
- (2) 若 (\mathbf{L}, \mathbf{A}) 可检测(可观测), 则存在惟一的 $\mathbf{P}_- \leq 0$ ($\mathbf{P}_- < 0$) 使 $\operatorname{Re}\lambda(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{B}'\mathbf{P}_-) < 0$ 。此结论是结论 4.1.1 的直接推论, 比较式(4.1.7b)与(4.1.5)可知。

3. $\mathbf{M} \geq 0, \mathbf{Q} \leq 0$

不妨设 $M = BB'$, $Q = -L'L$, 则式(4.1.4)为

$$PA + A'P - L'L - PBB'P = 0 \quad (4.1.8)$$

相应于式(4.1.8), 记

$$\bar{H}_1(-i\omega, i\omega) = 1 - B'(-i\omega - A')^{-1}L'L(i\omega - A)^{-1}B \quad (4.1.9)$$

结论 4.1.3 设式(4.1.8)中 A 漐近稳定, 则

- (1) 若 (A, B) 可控, (4.1.8) 实对称解存在的充要条件是

$$\bar{H}_1(-i\omega, i\omega) \geq 0$$

且有 $P_+ \leq 0$, 满足 $\operatorname{Re}\lambda(A - BB'P_+) \leq 0$;

- (2) P_+ 是(4.1.8)的最大解;

(3) 若再有 $\bar{H}_1(-i\omega, i\omega) \geq \epsilon_1 B'(-i\omega - A')^{-1}(i\omega - A)^{-1}B$ 对某 $\epsilon_1 > 0$ 成立, 则 $\operatorname{Re}\lambda(A - BB'P_+) < 0$;

- (4) 若 (L, A) 可观测, 则 $P_+ < 0$ 存在惟一。

4. $M \leq 0, Q \geq 0$

不妨设 $M = -BB'$, $Q = L'L$, 则式(4.1.4)为

$$PA + A'P + L'L - PBB'P = 0 \quad (4.1.10a)$$

变换上式为

$$(-P)A + A'(-P) - L'L - (-P)BB'(-P) = 0$$

记 $P = -P$ 为

$$\bar{P}A + A'\bar{P} - L'L - \bar{P}BB'\bar{P} = 0 \quad (4.1.10b)$$

结论 4.1.4 设式(4.1.10a)中 A 漐近稳定, 则

(1) 若 (A, B) 可控, 式(4.1.10a)存在实对称解的充要条件是 $\bar{H}_1(-i\omega, i\omega) \geq 0$, 且有 $P_- \geq 0$ 满足 $\operatorname{Re}\lambda(A + BB'P_-) \leq 0$;

- (2) P_- 是(4.1.10)的最小解;

(3) 若再有 $\bar{H}_1(-i\omega, i\omega) \geq \epsilon_1 B'(-i\omega - A')^{-1}(i\omega - A)^{-1}B$ 对某 $\epsilon_1 > 0$ 成立, 则 $\operatorname{Re}\lambda(A + BB'P_-) < 0$;

- (4) 若 (L, A) 可观测, 则 $P_- < 0$ 存在惟一。

此结论是结论 4.1.3 的直接推论, 比较式(4.1.10b)与(4.1.8)可知。

5. $M \geq 0, Q = Q'$ 不定

不妨设 $M = BB'$, 则式(4.1.4)为

$$\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}'\mathbf{P} + \mathbf{Q} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{B}'\mathbf{P} = 0 \quad (4.1.11)$$

相应于式(4.1.11)记

$$\hat{H}_1(-i\omega, i\omega) \equiv 1 + \mathbf{B}'(-i\omega - \mathbf{A}')^{-1}\mathbf{Q}(i\omega - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \quad (4.1.12)$$

结论 4.1.5 设 (\mathbf{A}, \mathbf{B}) 可控, 则式(4.1.11)实对称解存在的充要条件是 $\hat{H}_1(-i\omega, i\omega) \geq 0$ 对几乎所有的实数 ω 都成立, 且在满足此条件下:

(1) 有实对称解 $\mathbf{P}_+, \mathbf{P}_-$ 存在, 使 $\operatorname{Re}\lambda(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{B}'\mathbf{P}_+) \leq 0, \operatorname{Re}\lambda(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{B}'\mathbf{P}_-) \geq 0$;

(2) \mathbf{P}_+ 是式(4.1.11)的最大解, \mathbf{P}_- 是最小解, $\mathbf{P}_+, \mathbf{P}_-$ 是惟一确定的;

(3) 若有不等式 $\hat{H}_1(-i\omega, i\omega) \geq \varepsilon_1 \mathbf{B}'(-i\omega - \mathbf{A}')^{-1}(i\omega - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$ 对某 $\varepsilon_1 > 0$ 成立, 则最大、最小实对称解 $\mathbf{P}_+, \mathbf{P}_-$ 满足

$$\operatorname{Re}\lambda(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{B}'\mathbf{P}_+) < 0, \quad \operatorname{Re}\lambda(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{B}'\mathbf{P}_-) > 0, \quad \text{且 } \mathbf{P}_+ - \mathbf{P}_- > 0$$

6. $\mathbf{M} \leqslant 0, \mathbf{Q} = \mathbf{Q}'$ 不定

不妨设 $\mathbf{M} = -\mathbf{B}\mathbf{B}'$, 则式(4.1.4)为

$$\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}'\mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{B}'\mathbf{P} = 0 \quad (4.1.13a)$$

变换上式为

$$(-\mathbf{P})\mathbf{A} + \mathbf{A}'(-\mathbf{P}) - \mathbf{Q} - (-\mathbf{P})\mathbf{B}\mathbf{B}'(-\mathbf{P}) = 0$$

记 $\bar{\mathbf{P}} = -\mathbf{P}, \bar{\mathbf{Q}} = -\mathbf{Q}$, 则上式为

$$\bar{\mathbf{P}}\mathbf{A} + \mathbf{A}'\bar{\mathbf{P}} + \bar{\mathbf{Q}} - \bar{\mathbf{P}}\mathbf{B}\mathbf{B}'\bar{\mathbf{P}} = 0 \quad (4.1.13b)$$

相应记

$$\tilde{H}_1(-i\omega, i\omega) \equiv 1 - \mathbf{B}'(-i\omega - \mathbf{A}')^{-1}\mathbf{Q}(i\omega - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \quad (4.1.14)$$

结论 4.1.6 设 (\mathbf{A}, \mathbf{B}) 可控, 则式(4.1.13a)有实对称解存在的充要条件是 $\tilde{H}_1(-i\omega, i\omega) \geq 0$ 几乎对所有实数成立, 且在满足该条件下有:

(1) 有实对称解存在使 $\mathbf{P}_-, \mathbf{P}_+$ 存在, 且使 $\operatorname{Re}\lambda(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{B}'\mathbf{P}_-) \leq 0, \operatorname{Re}\lambda(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{B}'\mathbf{P}_+) \geq 0$;

(2) \mathbf{P}_- 是最小解, \mathbf{P}_+ 是最大解, $\mathbf{P}_-, \mathbf{P}_+$ 惟一确定;

(3) 若再有 $\tilde{H}_1(-i\omega, i\omega) \geq \varepsilon_1 \mathbf{B}'(-i\omega - \mathbf{A}')^{-1}(i\omega - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$ 对某 $\varepsilon_1 < 0$ 成立, 则有 $\operatorname{Re}\lambda(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{B}'\mathbf{P}_-) < 0, \operatorname{Re}\lambda(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{B}'\mathbf{P}_+) > 0$, 且 $\mathbf{P}_- - \mathbf{P}_+ < 0$ 或 $\mathbf{P}_+ - \mathbf{P}_- > 0$ 。

此结论是结论 4.1.5 的直接推论, 见(4.1.13b)与(4.1.11)的比较。

显见, 对方程(4.1.4)除上述讨论的几种情况外, 还有如下几种情形没有涉及:

- ① \mathbf{M} 不定, $\mathbf{Q} \geq 0$; ② \mathbf{M} 不定, $\mathbf{Q} \leq 0$; ③ \mathbf{M} 不定, \mathbf{Q} 不定。

①, ②两种情形可合为一类。迄今为止, 对这三种情况的实对称解存在的条件尚未见到有效的结论。这个问题也是多年来一直为控制理论界所关注的难题之一。许多控制问题的最终解可归结为一般代数 Riccati 方程解的存在性讨论, 因此, 研究这个问题对控制理论的发展具有广泛的重要意义。本章的其余部分将对此问题进行深入的探讨。

4.2 从微分方程到代数方程解的存在性讨论

为了研究一般代数 Riccati 方程

$$PA + A'P + Q - PMP = 0 \quad (4.2.1)$$

当 $Q = Q'$, $M = M'$ 时实对称镇定解的存在性, 这里先从简单情况 $Q = Q_0 > 0$ 入手, 即考虑方程

$$PA + A'P + Q_0 - PMP = 0 \quad (4.2.2)$$

的实对称镇定解的存在条件及其性质。为此目的, 本节从方程(4.2.2)相应的微分 Riccati 方程

$$-\dot{P} = PA + A'P + Q_0 - PMP, \quad P(T, T) = P_T \quad (4.2.3)$$

在 $t \in [0, T]$, $T < \infty$ 上的解 $P(t, T)$ 的性质分析开始, 逐步依据七个引理, 推出方程(4.2.2)的实对称解的存在条件, 从而最后建立起方程(4.2.1)实对称解的存在性条件。

关于式(4.2.3)在 $t \in [0, T]$ 上的解 $P(t, T)$ 的存在性条件有如下结论:

引理 4.2.1 微分方程(4.2.3)在 $t \in [0, T]$, $T < \infty$ 上有解的充要条件是下式在 $t \in [0, T]$ 上可逆:

$$\varphi_{21}(T-t)P_T + \varphi_{22}(T-t)$$

式中 $\varphi_{21}, \varphi_{22}$ 由矩阵

$$e^{\tilde{A}(T-t)} = \begin{bmatrix} \varphi_{11}(T-t) & \varphi_{12}(T-t) \\ \varphi_{21}(T-t) & \varphi_{22}(T-t) \end{bmatrix} \quad (4.2.4)$$

的 φ_y 元素定义, φ_y 为 $n \times n$ 分块方块, 并且式中矩阵

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -A' & -Q_0 \\ -M & A \end{bmatrix}$$

证 因式(4.2.3)的等价矩阵微分方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{V}} \\ \dot{\mathbf{U}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A} & -\mathbf{Q}_0 \\ -\mathbf{M} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{U} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{V}(T, T) \\ \mathbf{U}(T, T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_T \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (4.2.5)$$

而方程(4.2.3)的解为

$$\mathbf{P}(t, T) = \mathbf{V}(t, T) \mathbf{U}^{-1}(t, T) \quad (4.2.6)$$

由式(4.2.5)可得

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}(t, T) \\ \mathbf{U}(t, T) \end{bmatrix} = e^{\tilde{\mathbf{A}}(t-T)} \begin{bmatrix} \mathbf{V}(T, T) \\ \mathbf{U}(T, T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_{11}(T-t) & \boldsymbol{\varphi}_{12}(T-t) \\ \boldsymbol{\varphi}_{21}(T-t) & \boldsymbol{\varphi}_{22}(T-t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_T \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

因此

$$\mathbf{U}(t, T) = \boldsymbol{\varphi}_{21}(T-t) \mathbf{P}^T + \boldsymbol{\varphi}_{22}(T-t) \quad (4.2.7)$$

若对某边界条件 $\mathbf{P}_T = \mathbf{P}_T'$, $\mathbf{U}(t, T)$ 在 $t \in [0, T]$, $T < \infty$ 上可逆, 则式(4.2.6)的 $\mathbf{P}(t, T)$ 即在 $t \in [0, T]$ 上存在, 也即(4.2.3)的解存在。

特别地对 $\mathbf{P}_T = 0$, $\mathbf{U}(t, T) = \mathbf{U}(T-t) = \boldsymbol{\varphi}_{22}(T-t)$ 可逆, 则 $\mathbf{P}(t, T)$ 在 $t \in [0, T]$ 上存在, 即方程(4.2.3)在边界条件 $\mathbf{P}(t, T) = 0$ 下解存在。

引理证毕。

若在 $\mathbf{P}(T, T) = 0$ 下满足引理 4.2.1 条件, 由于系统的时不变性质, 则方程(4.2.3)的解 $\mathbf{P}(t, T)$, $t \in [0, T]$ 取决于 $\tau = T-t$, 即可表为

$$\mathbf{P}(T-t) = \mathbf{P}(\tau) = \mathbf{P}(t, T)$$

因此边界条件: $\mathbf{P}(T, T) = \mathbf{P}(0) = \mathbf{P}_T$, 另记 $\mathbf{P}(0, T) = \mathbf{P}_0$ 。

在方程(4.2.3)中, 若记 $\mathbf{M} = \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1' - \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2'$, 则方程(4.2.3)可看成是由系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1 \mathbf{u} + \mathbf{B}_2 \mathbf{v}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (4.2.8)$$

在指标

$$J_T^* = \max_{\mathbf{v}} \min_{\mathbf{u}} \int_0^T (\mathbf{x}' \mathbf{Q}_0 \mathbf{x} + \mathbf{u}' \mathbf{u} + \mathbf{v}' \mathbf{v}) dt = \max_{\mathbf{v}} \min_{\mathbf{u}} J_T(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad (4.2.9)$$

或

$$J_T^{**} = \min_{\mathbf{u}} \max_{\mathbf{v}} J_T(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

下导出的微分方程。熟知, 上述是标准的线性微分对策问题。

在满足引理 4.2.1 条件下, 借助方程(4.2.3)的解 $\mathbf{P}(t, T)$, 可将式(4.2.9)表

成

$$\begin{aligned} J_T^* &= \max_v \min_u \left\{ \bar{x}_0' P_0 \bar{x}_0 + \int_0^T [\| u + B_1' P(t, T) x \|^2 + \| v - B_2' P(t, T) x \|^2] dt \right\} \end{aligned}$$

参见文献[204],[95]知上式最优解为平衡对策控制策略

$$u^* = -B_1' P(t, T) x \quad (4.2.10)$$

$$v^* = B_2' P(t, T) x$$

关于 $P(t, T)$ 的性质可有如下结论^[95]:

引理 4.2.2 假定 $P(t, T) = P(T-t) = P(\tau)$ 为方程(4.2.3)在 $P_T = 0$ 条件下、 $t \in [0, T]$ 上的解，则 $P(t, T)$ 在正定阵意义下是随 t 下降而增加的。即 $P(\tau)$ 是随 τ 的增加而增加的。

证 由方程(4.2.3)对任 $t_0 \in [0, T]$ 记 $\tau_0 = T - t_0$ 则

$$J_{T-t_0}^*(\bar{x}_0) = \bar{x}_0' P(t_0, T) \bar{x}_0 = \bar{x}_0' P(\tau_0) \bar{x}_0$$

这里 $\bar{x}_0 = x(t_0)$ ，现考虑 $\tau = T - t_0 + \Delta t$ 的对策值。

取对 v 的控制策略为

$$\bar{v}(t) = \begin{cases} B_2' P(t_0, T) x(t), & t \in [0, T - t_0] \\ 0, & t \in [\tau_0, \tau_0 + \Delta t] \end{cases} \quad (4.2.11)$$

由式(4.2.9)

$$\begin{aligned} \max_v \min_u J_{T-t_0+\Delta t}^*(x_0) &= \max_v \min_u \int_0^{T-t_0+\Delta t} (x' Q_0 x + u'u - v'v) dt \\ &= \max_v \min_u \left[\int_0^{T-t_0} (x' Q_0 x + u'u - v'v) dt + \int_{T-t_0}^{T-t_0+\Delta t} (x' Q_0 x + u'u - v'v) dt \right] \\ &= \bar{x}_0' P(t_0 - \Delta t, T) \bar{x}_0 = \bar{x}_0' P(\tau_0 + \Delta t) \bar{x}_0 \\ &= J_{T-t_0+\Delta t}^*(\bar{x}_0) \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

将式(4.2.11)的 $v = \bar{v}(t) = B_2' P(t_0, T) x$ 代入式(4.2.12)，则分别有

$$\int_0^{T-t_0} (x' Q_0 x + u'u - v'v) dt$$

$$\begin{aligned}
 &= \bar{x}_0' P(t_0, T) \bar{x}_0 + \int_0^{T-t_0} \| u + B_1' P(t, T) x \|^2 dt \\
 &\geq \bar{x}_0' P(t_0, T) \bar{x}_0 = \bar{x}_0' P(\tau_0) \bar{x}_0 = J_{T-t_0}^*(\bar{x}_0)
 \end{aligned}$$

而

$$\int_{T-t_0}^{T-t_0+\Delta t} (x' Q_0 x + u'u - v'v) dt = \int_{T-t_0}^{T-t_0+\Delta t} (x' Q_0 x + u'u) dt \geq 0$$

综合上两式, 则式(4.2.12)变为

$$J_{T-t_0+\Delta t}^*(\bar{x}_0) \geq J_{T-t_0}^*(\bar{x}_0)$$

等价于

$$\bar{x}_0' P(\tau_0 + \Delta t) \bar{x}_0 \geq \bar{x}_0' P(\tau_0) \bar{x}_0 \quad (4.2.13)$$

即 $P(\tau_0 + \Delta t) \geq P(\tau_0)$, 引理成立。

下面的结论指出 $P(\tau)$ 随 $\tau \rightarrow \infty$ ($T \rightarrow \infty$) 是上有界的。

引理 4.2.3 假定对任 $T < \infty$, $t \in [0, T]$, $P_T = 0$, 且若系统(4.2.8)的 $(A, B_1), (A, B_2)$ 可控, 则当 $T \rightarrow \infty$ 时, 式(4.2.3)中的 $P(t, T)$ 有与 T 无关的上界 \bar{P} , 并且 $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t, T) = \bar{P} \geq 0$ 。

证 由于系统(4.2.8)对 u, v 可控, 所以对任意 $x(0) = x_0$, 在 $t \in [0, \infty)$ 上必存在控制对 \bar{u}, \bar{v} 和有限时刻 $t = t_1$, 使 $x(t)$ 在 t_1 时为零, 即 $x(t_1) = 0$ 。若特别定义 \bar{u}, \bar{v} 在 $[0, t_1]$ 上, 而在 $t \geq t_1$ 后置 $\bar{u}(t), \bar{v}(t)$ 为零。此时状态 $x(t)$ 亦应保持为零, 于是对任意 $T < \infty$, 设最优策略 u^*, v^* 对应的最优轨线为 x^* , 由于 $J_T^*(x_0)$ 的最优性有

$$J_T^*(x_0) = x_0' P(0, T) x_0 = \int_0^T (x^*' Q_0 x^* + u^* u^* - v^* v^*) dt \quad (4.2.14)$$

定义

$$\begin{aligned}
 \bar{v} &= \begin{cases} v^* = B_2' P(t, t_1) x(t), & t \in [0, t_1] \\ 0, & t \geq t_1 \end{cases} \\
 \hat{u} &= \begin{cases} \hat{u}, & t \in [0, t_1] \\ 0, & t \geq t_1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

因为对任 $T < \infty$ 均有 $P(t, T)$ 存在, 因此对任有限的 $t_1 < \infty$, 亦有 $P(t, t_1)$ 存在, 因此 v^* 可在 $[0, t_1]$ 上定义。而 \hat{u} 为使 $x(t_1) = 0$ 的任意控制策略。因为系统对 u

的可控性,这样的控制 \hat{u} 是一定存在的,而 v^* 仍可按原反馈最优策略设定,这样 \bar{u}, \bar{v} 就可以按如上的定义得到。由式(4.2.14)及 maxmin 的最优化不妨设 $t_1 \geq T$ (若不然结论显然成立),则有

$$\begin{aligned} J_T^*(x_0) &\leq \int_0^T (x'Q_0x + \hat{u}'\hat{u} - v^*v^*)dt \quad (\text{因为 } J_T(u^*, v^*) \leq J_T(u, v^*)) \\ &\leq \int_0^\infty (x'Q_0x + \bar{u}'\bar{u} - \bar{v}'\bar{v})dt \quad (\text{因为 } J_T^* \text{ 为 } T \text{ 增的}) \\ &= \int_0^{t_1} (x'Q_0x + \hat{u}'\hat{u} - v^*v^*)dt = J_{t_1}(x_0) < \infty \end{aligned}$$

上式表明: $J_T^*(x_0)$ 有一个与 T 无关的上界。由于 x_0 的任意性,可推知 $P(0, T)$ 亦有一个与 T 无关的上界记为 \bar{P} ,并考虑到引理 4.2.2 的结论, $P(0, T)$ 对 T 增,而由引理 4.2.1, $P(t, T)$ 在 $t \in [0, T]$ 上,对任 $T < \infty$ 存在,其连续性显然(指数函数性质)。

因此有

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P(0, T) = P$$

而且对任 $t < T$ 有

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P(t, T) = \lim_{T \rightarrow \infty} P(0, T - t) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} P(\tau) = \bar{P}$$

与 T 无关。因此, \bar{P} 是与 t 无关的常数,因此有 $\dot{P} = 0$,即 \bar{P} 满足(4.2.2)代数方程

$$\bar{P}A + A'\bar{P} + Q_0 - \bar{P}M\bar{P} = 0$$

又因, $P(t, T) = P(\tau)$ 随 τ 增(随 T 增)而增及 $P(0) = 0$,得 $\bar{P} \geq 0$ 。

对 P 满足的代数方程(4.2.2)有结论如下:

引理 4.2.4 若代数方程(4.2.2)有实对称解 P ,则必非奇异,且 $\bar{P} > 0$ 。

证 反设方程(4.2.2)有奇异解 \hat{P} ,则必存在非零向量 ξ 使 $\hat{P}\xi = 0$,将 \hat{P} 代入方程(4.2.2)并同时用 ξ' , ξ ,左右乘方程两边,考虑 $\hat{P}\xi = 0$,则有 $\xi'Q\xi = 0$,但由于 $Q_0 > 0$,推知必应有 $\xi = 0$ 与假定 $\xi \neq 0$ 矛盾,从而知 \hat{P} 必非奇异。

又由引理 4.2.3, \bar{P} 为方程(4.2.2)的非负定解,且 $\bar{P} \geq 0$ 。因此,应有 $P > 0$ 。

引理 4.2.5 设 $\bar{P} = P'$ 是方程(4.2.2)的非负定解,且对任 $T < \infty$ 和 $P_T = 0$,方程(4.2.3)在 $t \in [0, T]$ 上的解 $P(t, T)$ 存在,则有 $\bar{P} \geq P(t, T)$ ^[95]。

证 由 \bar{P} 是方程(4.2.2)的非负定解,则有

$$J_{T-t}(x_t) = \int_t^T (x'Q_0x + u'u - v'v)dt$$

$$= \mathbf{x}_t' \bar{\mathbf{P}} \mathbf{x}_t - \mathbf{x}_T' \bar{\mathbf{P}} \mathbf{x}_T + \int_t^T (\|\mathbf{u} + \mathbf{B}_1' \bar{\mathbf{P}} \mathbf{x}\|^2 - \|\mathbf{v} - \mathbf{B}_2' \bar{\mathbf{P}} \mathbf{x}\|^2) d\tau \quad (4.2.15)$$

又由 $\mathbf{P}(t, T)$ 是方程(4.2.3)的解, 则对 $\mathbf{P}_T = 0$ 有

$$\begin{aligned} J_{T-t}(\mathbf{x}_t) &= \mathbf{x}_t' \mathbf{P}(t, T) \mathbf{x}_t \\ &\quad + \int_t^T [\|\mathbf{u} + \mathbf{B}_1' \mathbf{P}(t, T) \mathbf{x}\|^2 - \|\mathbf{v} - \mathbf{B}_2' \mathbf{P}(t, T) \mathbf{x}\|^2] d\tau \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

式中, $\mathbf{x}_t = \mathbf{x}(t)$ 视为初值。由于式(4.2.16)对任意 \mathbf{u}, \mathbf{v} 的成立, 可令 $\bar{\mathbf{u}} = -\mathbf{B}_1' \bar{\mathbf{P}} \mathbf{x}$, $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{B}_2' \mathbf{P}(t, T) \mathbf{x}$, 代入式(4.2.15)和(4.2.16)并相减得

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_t' \bar{\mathbf{P}} \mathbf{x}_t - \mathbf{x}_T' \bar{\mathbf{P}} \mathbf{x}_T - \mathbf{x}_t' \mathbf{P}(t, T) \mathbf{x}_t - \int_t^T (\|\bar{\mathbf{v}} - \mathbf{B}_2' \bar{\mathbf{P}} \mathbf{x}\|^2) d\tau \\ - \int_t^T (\|\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{B}_1' \mathbf{P}(\tau, T) \mathbf{x}\|^2) d\tau = 0 \\ \mathbf{x}_t' (\mathbf{P} - \mathbf{P}(t, T)) \mathbf{x}_t = \mathbf{x}_T' \bar{\mathbf{P}} \mathbf{x}_T + \int_t^T [\|\bar{\mathbf{v}} - \mathbf{B}_2' \bar{\mathbf{P}} \mathbf{x}\|^2 \\ + \|\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{B}_1' \mathbf{P}(\tau, T) \mathbf{x}\|^2] d\tau \geq 0 \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

推得

$$\bar{\mathbf{P}} \geq \mathbf{P}(t, T)$$

引理证毕。

引理 4.2.6 设 \mathbf{P} 是方程(4.2.2)的非负定解, 且方程(4.2.3)对任 $T < \infty$ 和 $\mathbf{P}_T = 0$ 在 $t[0, T]$ 上的解 $\mathbf{P}(t, T)$ 存在, 若 $\mathbf{P} = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}(t, T)$, 则 $\bar{\mathbf{P}}$ 是方程(4.2.2)的最小非负定解。

证 设 $\hat{\mathbf{P}}$ 是方程(4.2.2)的另一非负定解, 则依引理 4.2.5 知 $\hat{\mathbf{P}} \geq \mathbf{P}(t, T)$, 因此有

$$\hat{\mathbf{P}} \geq \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}(t, T) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\tau) = \bar{\mathbf{P}}$$

可知 $\bar{\mathbf{P}}$ 为方程(4.2.2)的最小非负定解。

依此引理, 并考虑引理 4.2.1~4.2.4, 知 $\bar{\mathbf{P}} > 0$ 是方程(4.2.2)的最小正定解, 从而又有如下结论:

引理 4.2.7 设 $\bar{\mathbf{P}}$ 是方程(4.2.2)最小正定解, 且

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(-i\omega, i\omega) &= \mathbf{I} + \mathbf{C}(-i\omega + \mathbf{A})^{-1} \mathbf{M} (i\omega + \mathbf{A}')^{-1} \mathbf{C}' \\ &\geq \epsilon \mathbf{C}(-i\omega + \mathbf{A})^{-1} (i\omega + \mathbf{A}')^{-1} \mathbf{C}' \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

对某 $\epsilon > 0$ 成立, 则 $\operatorname{Re} \lambda(\mathbf{A} - \mathbf{M} \bar{\mathbf{P}}) < 0$, 式中 $\mathbf{C}' \mathbf{C}$ 为 \mathbf{Q}_0 的分解, 即 $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{C}' \mathbf{C}$ 。

证 由于 $\bar{P} > 0$ 存在, 记 $S^{-1} = \bar{P}$ 代入方程(4.2.2)得

$$(-A)S + S(-A)' + M - SQ_0S = 0 \quad (4.2.19)$$

上式有解 $S = \bar{P}^{-1}$ 。

依文献[270]定理5, 当 (A', C') 可控且 $H(-i\omega, i\omega)$ 满足式(4.2.8)时, 则方程(4.2.19)有最大解 S_+ 和 S_- 使

$$\operatorname{Re}\lambda(-A' - Q_0S_+) < 0, \quad \operatorname{Re}\lambda(-A' - Q_0S_-) > 0 \quad (4.2.20)$$

由于 $Q_0 = C'C > 0$, (A', C') 可控性成立, 定理条件满足, 故上述结论成立。

又因 $\bar{P} > 0$ 是方程(4.2.2)的最小解 $\bar{P} \geq S_+^{-1} > 0$ (因 S_+ 是最大解), 而由 S_+ 是方程(4.2.19)的最大解 $S_+ \geq \bar{P}^{-1} > 0$ (因 \bar{P} 是最小解), 因此可知 $S_+ = \bar{P}^{-1}$ 成立。

令 $\bar{P} = S_+^{-1}$ 代入方程(4.2.2)得

$$S_+^{-1}A + A'S_+^{-1} + Q_0 - S_+^{-1}MS_+^{-1} = 0$$

有

$$-(A' + Q_0S_+)S_+^{-1} = S_+^{-1}(A - MS_+^{-1})$$

即

$$-(A' + Q_0S_+) = S_+^{-1}(A - M\bar{P})S_- \quad (4.2.21)$$

可见 $-(A' + Q_0S_+)$ 与 $A - M\bar{P}$ 相似, 则两者应有相同的特征值, 由式(4.2.20)可得

$$\operatorname{Re}\lambda(-A' - Q_0S_+) = \operatorname{Re}\lambda(A - M\bar{P}) < 0$$

引理证毕。

归纳上述七个引理可得如下结论:

定理 4.2.1 设微分 Riccati 方程(4.2.3)对任 $T < \infty$ 和 $P_T = 0$ 满足引理 4.2.1 条件有解. 将方程中 M 表示为 $B_1B_1' - B_2B_2'$, Q_0 表示为 $C'C$, 若 (A, B_1) , (A, B_2) 可控, (C, A) 可观, 且式(4.2.18)的 $H(-i\omega, i\omega)$ 条件成立, 则方程(4.2.2)有正定解 \bar{P} , 使 $\operatorname{Re}\lambda(A - M\bar{P}) < 0$ 。

证 按引理 4.2.1~4.2.7 步骤即可推出定理结论成立。

注释 虽然定理 4.2.1 只给出 $Q_0 > 0$ 情况的结论, 然而 $Q_0 \geq 0$ 时, 若对分解 $Q_0 = C'C$ 有 (C, A) 可观, 定理 4.2.1 结论同样成立。其依据是文献[254]的定理 1 及推论 1.1。其定理 1 为:

假定方程 $PA + A'P + Q - PMP = 0$, $Q \geq 0$ 。记 $Q = C'C$ 存在一个对称非负定解 P_+ , 则 P_+ 的零空间等于开环系统 (C, A) 的所有不能观测状态的集合。

其推论 1.1 为:

假定上述方程存在一个对称非负定解 \mathbf{P}_+ , \mathbf{P}_+ 为正定的充要条件是开环系统 (\mathbf{C}, \mathbf{A}) 完全可观测。

据此, 可得对 $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{C}'\mathbf{C} \geq 0$, (\mathbf{C}, \mathbf{A}) 可观测的情况下定理 4.2.1 仍然成立。

此外, 对不定的 $\mathbf{M}, \mathbf{B}_1\mathbf{B}'_1 - \mathbf{B}_2\mathbf{B}'_2$ 分解总是存在, 并有 $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_1), (\mathbf{A}, \mathbf{B}_2)$ 可控, 对于对策问题 $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_1), (\mathbf{A}, \mathbf{B}_2)$ 可控是必要的, 而对控制问题, 只要 $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_1)$ 可控就足够了, $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_2)$ 可控条件不是必须的。

有了定理 4.2.1 下面考察方程(4.2.1)的实对称解的存在性及其相关性质。为此, 先将 \mathbf{Q}, \mathbf{M} 分解为

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_2, \quad \mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_1' = \mathbf{C}_1'\mathbf{C}_1 > 0; \quad \mathbf{Q}_2 = \mathbf{Q}_2' = \mathbf{C}_2'\mathbf{C}_2 > 0$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2, \quad \mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_1' = \mathbf{B}_1\mathbf{B}_1' > 0; \quad \mathbf{M}_2 = \mathbf{M}_2' = \mathbf{B}_2\mathbf{B}_2' > 0$$

由分解式可知, $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$ 均为实可逆方阵, 当然可取 $\mathbf{C}_1 = \mathbf{Q}_1^{1/2}, \mathbf{C}_2 = \mathbf{Q}_2^{1/2}, \mathbf{B}_1 = \mathbf{M}_1^{1/2}, \mathbf{B}_2 = \mathbf{M}_2^{1/2}$ 。分别考察下述两个方程:

$$\mathbf{P}_1\mathbf{A} + \mathbf{A}'\mathbf{P}_1 + \mathbf{C}_1'\mathbf{C}_1 - \mathbf{P}_1\mathbf{M}\mathbf{P}_1 = 0 \quad (4.2.22)$$

$$\mathbf{X}\mathbf{A}_+ + \mathbf{A}_+'X - \mathbf{C}_2'\mathbf{C}_2 - X\mathbf{M}X = 0 \quad (4.2.23)$$

式中, $\mathbf{A}_+ = \mathbf{A} - \mathbf{M}\mathbf{P}_{1+}$; \mathbf{P}_{1+} 为方程(4.2.22)的最小正定解, 并使

$$\operatorname{Re}\lambda(\mathbf{A} - \mathbf{M}\mathbf{P}_{1+}) < 0$$

依定理 4.2.1, 此解的存在性条件可以给出。对方程(4.2.23)变形为

$$(-X)\mathbf{A}_+ + \mathbf{A}_+'(-X) + \mathbf{C}_2'\mathbf{C}_2 - (-X)(-\mathbf{M})(-X) = 0$$

记 $X = -X, \bar{\mathbf{M}} = -\mathbf{M}$, 则上式为

$$\bar{\mathbf{X}}\mathbf{A}_+ + \mathbf{A}_+' \bar{\mathbf{X}} - \mathbf{C}_2'\mathbf{C}_2 - \bar{\mathbf{X}}\bar{\mathbf{M}}\bar{\mathbf{X}} = 0 \quad (4.2.24)$$

由 \mathbf{Q} 的分解知 $(\mathbf{C}_1, \mathbf{A}), (\mathbf{C}_2, \mathbf{A})$ 可观, 可证 $(\mathbf{C}_2, \mathbf{A}_+)$ 亦可观。所以, 式(4.2.24)的实对称解的存在条件仍可应用定理 4.2.1 给出。设其最小正定解为 $\bar{\mathbf{X}}_+$, 且使

$$\operatorname{Re}\lambda(\mathbf{A}_+ - \bar{\mathbf{M}}\bar{\mathbf{X}}_+) < 0$$

而式(4.2.23)的解 $X_+ = -\bar{\mathbf{X}}_+ < 0$ 为最大负定解, 则

$$\operatorname{Re}\lambda(\mathbf{A}_+ - \mathbf{M}X_+) < 0$$

再考虑 $\mathbf{A}_+ = \mathbf{A} - \mathbf{M}\mathbf{P}_{1+}$ 则有

$$\operatorname{Re}\lambda(\mathbf{A}_+ - \mathbf{M}(\mathbf{P}_{1+} + X_+)) < 0 \quad (4.2.25)$$

因此,若有 $\mathbf{P}_+ = \mathbf{P}_{1+} + \mathbf{X}_+$ 为方程(4.2.1)的解,则必有 $\operatorname{Re}\lambda(\mathbf{A}_+ - \mathbf{M}\mathbf{P}_+) < 0$ 。

归纳上述讨论有:

定理 4.2.2 设方程(4.2.22)和(4.2.24)应用方程(4.2.3)形式的微分 Riccati 方程,对任 $T < \infty$, $t \in [0, T]$ 满足引理 4.2.1 的条件有解,并且对式(4.2.22)有

$$\begin{aligned}\bar{H}(-i\omega, i\omega) &= 1 + \mathbf{C}_1(-i\omega + \mathbf{A})^{-1}\mathbf{M}(i\omega + \mathbf{A}')^{-1}\mathbf{C}_1' \\ &\geq \epsilon \mathbf{C}_1(-i\omega + \mathbf{A})^{-1}(i\omega + \mathbf{A}')^{-1}\mathbf{C}_1'\end{aligned}$$

对某 $\epsilon > 0$ 成立;对式(4.2.24)有

$$\begin{aligned}\hat{H}(-i\omega, i\omega) &= 1 + \mathbf{C}_2(-i\omega + \mathbf{A}_+)^{-1}\mathbf{M}(i\omega + \mathbf{A}_+')^{-1}\mathbf{C}_2' \\ &\geq \epsilon \mathbf{C}_2(-i\omega + \mathbf{A}_+)^{-1}(i\omega + \mathbf{A}_+')^{-1}\mathbf{C}_2'\end{aligned}$$

对某 $\epsilon > 0$ 成立,则方程(4.2.1)有实对称解 $\mathbf{P}_+ = \mathbf{P}_{1+} - \bar{\mathbf{X}}_+ = \mathbf{P}_{1+} + \mathbf{X}_+$, 具有性质 $\operatorname{Re}\lambda(\mathbf{A} - \mathbf{M}\mathbf{P}_+) < 0$ 。这里 \mathbf{P}_{1+} 为方程(4.2.22)的实对称解,且 $\mathbf{P}_{1+} > 0$ 满足 $\operatorname{Re}\lambda(\mathbf{A} - \mathbf{M}\mathbf{P}_{1+}) < 0$; $\bar{\mathbf{X}}_+$ 为方程(4.2.24)的实对称解, $\bar{\mathbf{X}}_+ > 0$ 满足 $\operatorname{Re}\lambda(\mathbf{A}_+ - \mathbf{M}\bar{\mathbf{X}}_+) < 0$, 也即 \mathbf{X}_+ 为方程(4.2.23)的实对称解,且 $\mathbf{X}_+ < 0$ 满足 $\operatorname{Re}\lambda(\mathbf{A}_+ - \mathbf{M}\mathbf{X}_+) < 0$ 。

证 依前面的 \mathbf{Q}, \mathbf{M} 分解知 $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_1), (\mathbf{A}, \mathbf{B}_2), (\mathbf{A}_+, \mathbf{B}_2), (\mathbf{C}_1, \mathbf{A}), (\mathbf{C}_2, \mathbf{A}), (\mathbf{C}_2, \mathbf{A}_+)$ 可控可观性成立。因此,与定理 4.2.1 证明过程类似,可得出分解方程(4.2.22)、(4.2.23)或(4.2.24)的解 $\mathbf{P}_{1+}, \mathbf{X}_+$ 或 \mathbf{X}_- 并且具有性质

$$\operatorname{Re}\lambda(\mathbf{A} - \mathbf{M}\mathbf{P}_{1+}) < 0, \quad \operatorname{Re}\lambda(\mathbf{A}_+ - \mathbf{M}\mathbf{X}_+) < 0$$

因此,只要证明 $\mathbf{P}_+ = \mathbf{P}_{1+} + \mathbf{X}_+$ 满足方程(4.2.1)即可。下面将 $\mathbf{P}_+ = \mathbf{P}_{1+} + \mathbf{X}_+$ 代入方程(4.2.1)左边验证:

$$\begin{aligned}&(\mathbf{P}_{1+} + \mathbf{X}_+)\mathbf{A} + \mathbf{A}'(\mathbf{P}_{1+} + \mathbf{X}_+) + \mathbf{C}_1'\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2'\mathbf{C}_2 - (\mathbf{P}_{1+} + \mathbf{X}_+)\mathbf{M}(\mathbf{P}_{1+} + \mathbf{X}_+) \\ &= [\mathbf{P}_{1+}\mathbf{A} + \mathbf{A}'\mathbf{P}_{1+} + \mathbf{C}_1'\mathbf{C}_1 - \mathbf{P}_{1+}\mathbf{M}\mathbf{P}_{1+}] + \mathbf{X}_+\mathbf{A} + \mathbf{A}'\mathbf{X}_+ \\ &\quad - \mathbf{C}_2'\mathbf{C}_2 - \mathbf{P}_{1+}\mathbf{M}\mathbf{X}_+ - \mathbf{X}_+\mathbf{M}\mathbf{P}_{1+} - \mathbf{X}_+\mathbf{M}\mathbf{X}_+, \\ &= [\mathbf{P}_{1+}\mathbf{A} + \mathbf{A}'\mathbf{P}_{1+} + \mathbf{C}_1'\mathbf{C}_1 - \mathbf{P}_{1+}\mathbf{M}\mathbf{P}_{1+}] + [\mathbf{X}_+(\mathbf{A} - \mathbf{M}\mathbf{P}_{1+}) \\ &\quad + (\mathbf{A} - \mathbf{M}\mathbf{P}_{1+})'\mathbf{X}_+ - \mathbf{C}_2'\mathbf{C}_2 - \mathbf{X}_+\mathbf{M}\mathbf{X}_+]\end{aligned}$$

与方程(4.2.22)和(4.2.23)比较知上式右边两方括号内均恒为零。即验证了 $\mathbf{P}_+ = \mathbf{P}_{1+} + \mathbf{X}_+$ 是方程(4.2.1)的解。而 $\operatorname{Re}\lambda(\mathbf{A} - \mathbf{M}\mathbf{P}_{1+}) < 0$ 可由方程(4.2.24)解的性质证明:

$$\operatorname{Re}\lambda(A_+ - \bar{M}X_+) = \operatorname{Re}\lambda(A - MP_{++} - MX_+) = \operatorname{Re}\lambda[A - M(P_{++} + X_+)] < 0$$

定理证毕。

至此,关于一般代数 Riccati 方程(4.2.1)的实对称解存在条件及其使闭环系统近稳定的性质便得到了。可以看到,这是基于微分方程解的存在性、并运用解析工具而得到的一种充分性条件。

4.3 一个简化的等价问题

在 4.2 节中讨论一般代数 Riccati 方程

$$PA + A'P + Q - PMP = 0 \quad (4.3.1)$$

$Q = Q'$, $M = M'$ 的实对称解的存在性是借助于微分方程解的存在性进行的。然而也可以直接从代数方程出发,研究下列简单方程:

$$PA + A'P + Q - PBB'P = 0, \quad Q = Q' \quad (4.3.2)$$

的非奇异实对称解的存在性条件,从而即可推出方程(4.3.1)实对称解的存在条件。推理如下:

设 ZZ 为方程(4.3.2)存在实对称解 \bar{P} 、且 \bar{P} 非奇异并满足 $\operatorname{Re}\lambda(A - BB'\bar{P}) < 0$ 的条件,则若令 $S = \bar{P}^{-1}$ 可得方程

$$AS + SA' + SQS - BB' = 0 \quad (4.3.3)$$

这个方程存在实对称解 $S_+ = \bar{P}^{-1}$ 且满足 $\operatorname{Re}\lambda(-A' - QS_+) < 0$ 的条件亦可由 ZZ 条件推出。而对形如

$$PA + A'P + Q - PBB'P = 0 \quad (4.3.4)$$

方程可作变形为

$$P(-A) + (-A')P + (-Q) - PBB'P = 0$$

记 $\bar{A} = -A$, $\bar{Q} = -Q$, 则上式为

$$\bar{P}\bar{A} + \bar{A}'\bar{P} + \bar{Q} - PBB'P = 0 \quad (4.3.5)$$

可见对(4.3.4)型方程亦可用(4.3.2)型方程解的存在条件 ZZ 类推给出。

因此对一般方程(4.3.1)分解 $Q = Q_1 - Q_2$, $Q_1 \geq 0$, $Q_2 \geq 0$, 记 $Q_1 = C_1'C_1$, $Q_2 = C_2'C_2$ 相应可考虑如下两个方程:

$$P_1A + A'P_1 + C_1'C_1 - P_1MP_1 = 0 \quad (4.3.6)$$

$$YA_1 + A_1'Y - C_2'C_2 - YMY = 0 \quad (4.3.7)$$

式中, $A_1 = A - M\bar{P}_1$; \bar{P}_1 为方程(4.3.6)的实对称解, 且具有 $\operatorname{Re}\lambda(A - M\bar{P}_1) < 0$ 性质, 这种解的存在性质是可以参考 ZZ 条件类推得到的。可见方程(4.3.6)与(4.3.2)等价, 因由方程(4.3.6)可得

$$(-A)S + S(-A') + M - SC_1'C_1S = 0$$

型方程, 若记 $\bar{A} = -A'$, 则上式与方程(4.3.2)同型。而方程(4.3.7)与(4.3.4)等价, 因由方程(4.3.7)可得

$$(-A_1)S_1 + S_1(-A_1') + M - S_1C_2'C_2S_1 = 0$$

若记 $\bar{A}_1 = -A_1'$, 则上式与方程(4.3.4)同型。而方程(4.3.4)的实对称解条件亦可由方程(4.3.2)的非奇异解条件推出, 因此方程(4.3.6)和(4.3.7)实对称解条件均可归为对方程(4.3.2)的讨论, 都可由 ZZ 条件类似推出。

若方程(4.3.6)和(4.3.7)的实对称解条件得到, 则可得到其解为 P_{1+} 和 Y_+ , 而一般方程(4.3.1)的实对称解 P_+ 可表为方程(4.3.6)与(4.3.7)的实对称解之和, 即 $P_{1+} = P_{1+} + Y_+$ 。相应的闭环镇定性条件亦可保持。

根据以上推理(可参考 4.1 和 4.2 节的有关证明), 可得如下结论:

命题 4.3.1 一般代数 Riccati 方程(4.3.1)的实对称解的存在问题可等价地转化为研究方程(4.3.2)的非奇异实对称解的存在性条件问题。

一旦解决了简化问题, 则可推演出一般问题的结论, 我们认为这是一个很有价值的思路, 有待于进一步探讨。

4.4 H_∞ 问题状态反馈解的存在性质

H_∞ 问题的状态反馈控制问题提法:

考虑系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1u + B_2v \\ y &= C_1x + D_1v \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

指标

$$\begin{aligned} J &= \max_{\|v\|_2^2 \leq \delta^2} \min_u \int_0^\infty (x'Qx + u'u)dt \\ &= \max_{\|v\|_2^2 \leq \delta^2} \min_u \int_0^\infty z'z dt \end{aligned}$$

$$= \max_{\|v\|_2^2 \leq \delta^2} \min_u \|z\|_2^2 \quad (4.4.2)$$

式中 z 定义为

$$z = \begin{bmatrix} Q^{1/2} \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \triangleq C_2 x + D_2 u \quad (4.4.3)$$

$$Q = Q' \geq 0, \quad C_2 = \begin{bmatrix} Q^{1/2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

z 变量可理解为人为虚设或期望的输出。这里所取的 z 定义亦可使指标有意义。注意到 J 指标是线性二次型问题的标准形式, 其工程意义明确, 也可与 LQG 指标相对应。

在 H_∞ 问题讨论中, 我们令状态反馈集合为

$$S_K(A, B_1) = \{K : \operatorname{Re}\lambda(A - B_1 K) < 0\}$$

因此, 对 $K \in S_K(A, B_1)$ 有

$$\dot{x} = (A + B_1 K)x + B_2 v$$

$$z = (C_2 + D_2 K)x$$

从 v 到 z 的拉普拉斯变换式记为 $Z(s) = F(s)V(s)$, 式中, 传递数矩阵 $F(s)$ 定义为

$$F(s) = [C_2 + D_2 K][sI - (A - B_1 K)]^{-1}B_2$$

由 H_∞ 问题优化指标为

$$\inf_{K \in S_K(A, B_1)} \|F\|_{H_\infty}, \text{ 简记为 } \inf_{K \in S} \|F\|_\infty \quad (4.4.4)$$

关于 H_∞ 问题(4.4.1)~(4.4.2)或(4.4.4)的状态反馈解有如下结论:

定理 4.4.1 假定系统(4.4.1)满足 (A, B_1) 可镇定; (A, C_2) 即 $(A, Q^{1/2})$ 可观测, 则存在一个状态反馈 $K \in S_K(A, B_1)$ 使 $\|F\|_\infty < 1$ 的充要条件是存在一个 $P = P'$ 满足

$$PA + A'P + Q - P(B_1 B_1' - (1/\gamma^2) B_2 B_2')P = 0 \quad (4.4.5)$$

且使 $\operatorname{Re}\lambda\{A - [B_1 B_1' - (1/\gamma^2) B_2 B_2']P\} < 0$ 。

注释 文献[279]给出定理 4.4.1 结论的证明如下:

证 为证定理 4.4.1 先做如下准备:

注意到 $\|F\|_\infty < \gamma$, 即 $\|\gamma^{-1}F\|_\infty < 1$, 故以下简化为对 $\gamma = 1$ 证明而不失一般性。

对熟知的线性二次问题 $\dot{x} = Ax + Bu$, $x(0) = x_0$, 有

引理 4.4.1 令 (A, B) 可镇定, $(A, Q^{1/2})$ 可检测(可观测), 则存在惟一的 $P = P' \geq 0 (> 0)$ 满足

$$PA + A'P + Q - PBB'P = 0$$

且 $\text{Re}\lambda(A - BB'P) < 0$, 状态反馈 $u = -B'Px$ 是优化指标

$$J = \min_u \int_0^\infty (x'Qx + u'u)dt, \quad Q = Q' \geq 0$$

的解。

证 略。

引理 4.4.2 令 $G = Q^{1/2}(sI - A)^{-1}B$, 且 A 稳定, 则 $\|G\|_\infty < 1$ 的充要条件是存在一个 $S = S' \geq 0$ 满足

$$SA + A'S + Q + SBB'S = 0$$

且 $\text{Re}\lambda(A + BB'S) < 0$, 状态反馈 $u = B'Sx$ 是优化指标

$$J = \min_u \int_0^\infty (x'Qx - u'u)dt, \quad Q = Q' \geq 0$$

的解。

证 见文献[27]。

引理 4.4.3 存在一个 $S = S' > 0$ 满足

$$SA + A'S + Q - S(B_1B_1' - B_2B_2')S = 0 \quad (4.4.6)$$

且 $\text{Re}\lambda(A - (B_1B_1' - B_2B_2')S) < 0$ 的充要条件是存在一个 $P = P' > 0$, 满足

$$AP + PA' + PQP - B_1B_1' + B_2B_2' = 0 \quad (4.4.7)$$

且 $-A' - QP$ 稳定。

证 令 $P = S^{-1}$, 易证 $A - (B_1B_1' - B_2B_2')S$ 与 $-A' - QP$ 相似, 具有一致的稳定性, 则结论易证。

下面证明定理 4.4.1。

充分性: $P = P' > 0$ 满足式(4.4.5)且使 $\text{Re}\lambda[A - (B_1B_1' - B_2B_2')P] < 0$, 对式(4.4.5)做加减整理可得

$$P(A - B_1B_1'P) + (A - B_1B_1'P)'P + (C_2 - D_2B_1'P)'$$

$$\cdot (\mathbf{C}_2 - \mathbf{D}_2 \mathbf{B}_1' \mathbf{P}) + \mathbf{P} \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2' \mathbf{P} = 0 \quad (4.4.8)$$

注意到在式(4.4.3)中, $\mathbf{D}_2' [\mathbf{C}_2 \quad \mathbf{D}_2] = [0 \quad 1]$, 并且由 $(\mathbf{A}, \mathbf{C}_2)$ 可观, 推知 $(\mathbf{A} - \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1' \mathbf{P}, \mathbf{C}_2 - \mathbf{D}_2 \mathbf{B}_1' \mathbf{P})$ 亦可观。反证如下:

设有 $\xi \neq 0$ 使 $(\mathbf{A} - \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1' \mathbf{P}) \xi = \lambda \xi$, $(\mathbf{C}_2 - \mathbf{D}_2 \mathbf{B}_1' \mathbf{P}) \xi = 0$, 由 $\mathbf{D}_2' (\mathbf{C}_2 - \mathbf{D}_2 \mathbf{B}_1' \mathbf{P}) \xi = -\mathbf{B}_1' \mathbf{P} \xi = 0 \Rightarrow \mathbf{A} \xi = \lambda \xi$, $\mathbf{C}_2 \xi = 0$, 此与 $(\mathbf{A}, \mathbf{C}_2)$ 可观矛盾^[283], 故 $(\mathbf{A} - \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1' \mathbf{P}, \mathbf{C}_2 - \mathbf{D}_2 \mathbf{B}_1' \mathbf{P})$ 可观。

因此, 在式(4.4.8)中 $(\mathbf{A} - \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1' \mathbf{P}, \mathbf{C}_2 - \mathbf{D}_2 \mathbf{B}_1' \mathbf{P})$ 可观性与 $\mathbf{P} > 0$ 的条件结合意味着 $\mathbf{A} - \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1' \mathbf{P}$ 稳定(Lyapunov 稳定性理论), 因此, $\mathbf{K} = -\mathbf{B}_1' \mathbf{P}$ 是镇定系统。

又由式(4.4.8)和 $\text{Re}\lambda(\mathbf{A} - (\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1' - \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2') \mathbf{P}) < 0$, 依引理 4.4.2 知 $\| \mathbf{F} \|_{\infty} < 1$ 成立。

必要性: 只需证与式(4.4.7)相应的等价条件成立即可。

令 $\mathbf{K} \in S_K(\mathbf{A}, \mathbf{B}_1)$ 使 $\| \mathbf{F} \|_{\infty} < 1$, 依引理 4.4.2 存在一个 $\tilde{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{P}} \geq 0$, 满足

$$\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{A} + \mathbf{B}_1 \mathbf{K}) + (\mathbf{A} + \mathbf{B}_1 \mathbf{K})' \tilde{\mathbf{P}} + (\mathbf{C}_2 + \mathbf{D}_2 \mathbf{K})' (\mathbf{C}_2 + \mathbf{D}_2 \mathbf{K}) + \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2' \tilde{\mathbf{P}} = 0 \quad (4.4.9)$$

且 $\mathbf{A} + \mathbf{B}_1 \mathbf{K} + \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2' \tilde{\mathbf{P}}$ 稳定。变换式(4.4.9)可得

$$\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{A} + \mathbf{A}'\tilde{\mathbf{P}} + \mathbf{Q} + \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2' - \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1')\tilde{\mathbf{P}} = -(\mathbf{K} + \mathbf{B}_1' \tilde{\mathbf{P}})'(\mathbf{K} + \mathbf{B}_1' \tilde{\mathbf{P}}) \quad (4.4.10)$$

注意到由 $(\mathbf{A}, \mathbf{C}_2)$ 可观可得 $(\mathbf{A} - \mathbf{B}_1 \mathbf{K}, \mathbf{C}_2 + \mathbf{D}_2 \mathbf{K})$ 可观, 因此 $\tilde{\mathbf{P}} > 0$, 令 $\bar{\mathbf{P}} > \tilde{\mathbf{P}}^{-1}$ 将式(4.4.10)表为

$$\mathbf{AP} + \mathbf{PA}' + \bar{\mathbf{P}}\mathbf{Q}\bar{\mathbf{P}} + \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2' - \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1' = -\bar{\mathbf{V}}'\bar{\mathbf{V}} \quad (4.4.11)$$

这里记 $\bar{\mathbf{V}} = \mathbf{K}\bar{\mathbf{P}} + \mathbf{B}_1'$ 。

现令 $\Delta \mathbf{P} = \mathbf{P} - \bar{\mathbf{P}}$ 则从式(4.4.7)减去(4.4.11)可得

$$(-\bar{\mathbf{A}})' \Delta \mathbf{P} + \Delta \mathbf{P} (-\bar{\mathbf{A}}) + \bar{\mathbf{V}}'\bar{\mathbf{V}} - \Delta \mathbf{P} \mathbf{Q} \Delta \mathbf{P} = 0 \quad (4.4.12)$$

式中, $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}' + \mathbf{Q}\bar{\mathbf{P}}$ 。

如果在式(4.4.12)中能找到一个对称解 $\Delta \mathbf{P} \geq 0$, 则 $\mathbf{P} = \bar{\mathbf{P}} + \Delta \mathbf{P}$ 满足式(4.4.7), 然而, 式(4.4.12)又是引理 4.4.1 中标准 LQ 问题 Riccati 方程形式, 因此, 必要的可镇定性与可检测性可陈述如下:

- (1) $(-\bar{\mathbf{A}}, \mathbf{C}_2')$ 可控, 这可直接从 $(\mathbf{A}, \mathbf{C}_2)$ 可观和 $-\bar{\mathbf{A}} = -\mathbf{A}' - \mathbf{Q}\bar{\mathbf{P}}$ 得到;
- (2) $(-\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{V}})$ 可检测, 因从式(2.4.11)可得

$$-\bar{A} - \bar{K}'\bar{V} = \bar{P}(A + B_1 K + B_2 B_2' \bar{P})\bar{P}^{-1}$$

即 $-\bar{A} - \bar{K}'\bar{V}$ 与 $A + B_1 K + B_2 B_2' \bar{P}$ 相似稳定, 可推出 $(-\bar{A}, \bar{V})$ 可检测的结论。

这些结论与引理 4.4.1 一起保证了满足式(4.4.12)的 $\Delta P > 0$ 的存在性和惟一性。因此, $P = \bar{P} + \Delta P > 0$ 且满足式(4.4.7)。

再证 $-A' - QP$ 稳定, 依引理 4.4.1, 可知 $-\bar{A} - Q\Delta P$ 稳定, 但 $-\bar{A} - Q\Delta P = -A' - QP$, 依引理 4.4.3, 则可知结论成立。

上面是对 H_∞ 问题解的存在性质的结论。注意到 H_∞ 问题是不考虑初值的(因优化传递函数阵)。下面我们考察此性质对考虑初值影响的 maxmin 线性二次型问题的作用。

由定理 4.4.1, 对 $\|F\|_\infty < \gamma$, 存在代数 Riccati 方程

$$PA + A'P + Q - P(B_1 B_1' - (1/\gamma^2)B_2 B_2')P = 0 \quad (4.4.13)$$

有对称正定解 $P > 0$ 使 $A - [B_1 B_1' - (1/\gamma^2)B_2 B_2']P$ 稳定, 且有最优状态反馈解

$$u^* = -B_1'Px \quad (4.4.14)$$

代入式(4.4.1)有

$$\dot{x} = (A - B_1 B_1' P)x + B_2 v$$

而

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x'Px) &= [(A - B_1 B_1' P)x + B_2 v]'Px + x'P[(A - B_1 B_1' P)x + B_2 v] \\ &= -x'PB_1 B_1' Px - (1/\gamma^2)x'PB_2 B_2' Px - x'Qx \\ &\quad + v'B_2'Px + x'PB_2 v \end{aligned} \quad (4.4.15)$$

另外, 由式(4.4.15)

$$\begin{aligned} \min_u \int_0^\infty (x'Qx + u'u) dt &= \int_0^\infty (x'Qx + u^{*'}u^*) dt \\ &= -\int_0^\infty d(x'Px) - (1/\gamma^2)\int_0^\infty x'PB_2 B_2' Px dt + \int_0^\infty (v'B_2'Px + x'PB_2 v) dt \\ &= x_0'Px_0 - \int_0^\infty [\gamma v - (1/\gamma)B_2'Px]'[\gamma v - (1/\gamma)B_2'Px] dt + \gamma^2 \int_0^\infty v'v dt \\ &= x_0'Px_0 - \|\gamma v - (1/\gamma)B_2'Px\|_2^2 + \gamma^2 \|v\|_2^2 \end{aligned} \quad (4.4.16)$$

对 v 取 max 运算

$$\max_{\|u\|_2^2 \leq \delta^2} \min_u \int_0^\infty (\mathbf{x}' Q \mathbf{x} + u' u) dt = \mathbf{x}_0' P \mathbf{x}_0 + \gamma^2 \delta^2 \quad (4.4.17)$$

“最坏”干扰

$$v^* = (1/\gamma^2) \mathbf{B}_t' P \mathbf{x} \quad (4.4.18)$$

比较式(4.4.13),(4.4.14),(4.4.17),(4.4.18)与2.4节中定理2.4.1结论,可见,这里的 γ^2 相当于定理2.4.1的待定常数 η 。

周知, H_∞ 问题最优解中 γ 参数是一个试探确定的值,而定理2.4.1中 η 是对应一个初态约束限制给定的一个确定常数。因此,可以说定理4.4.1是给出了 H_∞ 问题状态反馈解存在性质的刻画,而定理2.4.1则是给出了相应问题时域上的一个确定解的结论,两者是互为补充证明的。

这样也说明了maxmin鲁棒最优状态的反馈问题解的存在性可归结为一般代数Riccati方程(4.4.1)的实对称镇定解的存在性问题。两者是等价问题,并且,与 H_∞ 状态反馈解问题建立了本质上的一致性。这一结论是十分重要的。

4.5 本 章 小 结

本章为研究第二章具 L_2 有界不确定系统maxmin意义下的鲁棒最优状态反馈控制问题(2.4.1)~(2.4.4)解的存在性质问题而专门讨论了一般代数Riccati方程(4.1.4)的实对称解的存在性问题。4.1节中利用已有结论叙述了几种简单情形的直接推广。4.2节中研究了从微分方程解存在性讨论,探讨了一般代数Riccati方程实对称镇定解的存在性问题,并建立了相应的判定条件和结论。文中的结论是一种充分条件,而且就理想的解决而言,从微分方程出发讨论条件有时会有验证上的困难。周知,这个问题在控制理论界和数学界已是探讨多年的问题了,更为理想的结果仍有待继续研究。4.4节中,证明了 H_∞ 问题的状态反馈解的存在性与第二章中maxmin鲁棒最优控制问题解的存在性具有一致性。而且,最终归结为代数Riccati方程(4.4.13)的解的存在性问题,这样就刻画出了问题的实质,因而具有重要的意义。

第五章 线性二次型指标下的最优输出反馈问题

在第二章中主要解决了不确定性系统在状态全部可测得时的状态反馈闭环控制律设计问题。当状态不可测得时,第三章给出了类似 LQG 方法的 minimax 状态估计-反馈控制的闭环结构——本书称谓的 IQL 方法。然而,从 H_∞ 问题的最优化反馈看,是以直接输出反馈形式给出控制律的。注意到 H_∞ 问题的输出反馈在求解算法上常常是一个迭代逼近解,因此,在本章我们考虑在适当的线性二次型指标下直接给出最优的输出反馈控制律设计的可能性问题。

5.1 问题提出

在确定性线性二次最优控制理论中,系统

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

的状态反馈设计是基于二次指标

$$J = \min_u \int_0^\infty (x'Qx + u'u) dt$$

最优化得到的。众所周知,当 $Q = Q' \geq 0$, (A, B) 可控, 则有惟一的最优状态反馈解

$$u^* = -B'Px$$

式中, $P = P' \geq 0$ 满足 Riccati 方程

$$PA + A'P + Q - PBB'P = 0$$

并使闭环系统稳定。

然而当状态不能测得时,一个自然的问题是若能将状态反馈 $u^* = -B'Px$ 表成输出反馈的形式,即

$$u^* = -B'Px = -FCx = Fy$$

则是最理想的方便结果,但是,在一般情况下, $B'P$ 不能表成 FC 。为此,许多学者

多年来一直在这个问题上做了大量的探索和努力,但由于一般性问题求解的困难性,至今尚无明确的存在可解的简便应用的结论,不要说是最优输出反馈,就是输出反馈镇定问题也还没有令人满意的解决。当然,众所周知,输出反馈镇定和最优控制问题也是控制理论中多年来为众多学者所关注的难题之一。

促使我们研究这个问题的动因仍是 H_∞ 方法的输出反馈解的启示。同时,我们看到 Riccati 方程中 A, B 确定后,解 P 是随着 Q 的不同选择而变化的, Q 是二次泛函指标中的加权阵,从系统综合的观点看, Q 是可以根据我们的要求选择的。已有结果表明, Q 的选择可以配置闭环极点。另外,若取 Q 使 $(Q^{1/2}, A)$ 可观,则可使 Riccati 方程解 $P > 0$,说明 Q 的选择能影响 P 的秩,而将 $B'P$ 表成 FC 的要求也是与矩阵秩直接相关的。因此,我们自然想到:能否有这样一种 Q 的选择,使得 Riccati 方程解 P 满足

$$B'P = FC$$

如果这样的选择可行,那么最优输出反馈问题也就有了确定的解,这就是我们的基本想法。

5.2 确定性系统 LQ 指标下的静态最优输出反馈问题

基于 5.1 节的想法,本书对最优输出反馈问题提法如下:

考虑系统

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0 \quad (5.2.1)$$

$$y = Cx \quad (5.2.2)$$

式中, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^l$ 。寻求一个 $Q = Q' \geq 0$ 使系统(5.2.1)和(5.2.2)在指标

$$J = \min_u \int_0^\infty (x'Qx + u'u) dt \quad (5.2.3)$$

下有最优输出反馈解

$$u^* = -B'Px = -FCx = -Fy \quad (5.2.4)$$

即要求 $B'P = FC$ 有解 F 。式中, P 满足

$$PA + A'P + Q - PBB'P = 0 \quad (5.2.5)$$

要求解此问题就要求:

- ① 给出 Q 的存在条件(用 A, B, C 表出);
- ② 给出 Q 的构造(用 A, B, C 表出)。

1. 首先考虑输出维数相等, 即 $m = l$ 的情况

有结论如下:

定理 5.2.1 假定

(1) 系统(5.2.1), (5.2.2)的 (A, B) 可控, (C, A) 可观;

(2) $\operatorname{Re}\lambda(A) < 0$ 即 A 漂近稳定, 且传递矩阵 $H(s) = C(sI - A)^{-1}B$ 正实。

则必存在可由 (A, B, C) 确定的对称正定阵 \bar{P} 和非负定阵 \bar{Q} , 当在指标(5.2.3)中选 $Q = \bar{Q} + \bar{P}BB'\bar{P}$, Riccati 方程(5.2.5)有解 $P^* = \bar{P}$ 使得

$$B'P^* = B'\bar{P} = C$$

则最优输出反馈为 $u^* = -y$ 。

若对任意实数 $k \neq 0$, 在指标中选 $Q = Q_k = k^2(\bar{Q} + k_2\bar{P}BB'\bar{P})$, 则对应 Q_k 的 Riccati 方程(5.2.5)有解为 P_k^* 并有

$$B'P_k^* = k^2 B'\bar{P} = k^2 C$$

则最优输出反馈为 $u^* = -k^2 y$ 。

证 为证定理 5.2.1, 先引述文献[194]中有关结论如下:

引理 5.2.1 (文献[194]的引理 6) 令 $n \times n$ 阵 $Z(s)$ 是正实的, 且设 $Z(s) + Z'(-s)$ 几乎处处有秩 r , 则存在 $r \times n$ 阵 $W(s)$ 使

$$Y(s) = Z(s) + Z'(-s) = W'(-s)W(s) \quad (5.2.6)$$

分解成立, 且

(1) 若 $Z(s)$ 元素在 $\operatorname{Re}s > 0$ 解析, $W(s)$ 元素亦在 $\operatorname{Re}s > 0$ 解析;

(2) 对 $\operatorname{Re}s > 0$, $\operatorname{rank}W(s) = r$ 。

引理 5.2.2 (文献[194]的引理 8) 令 $Z(s)$ 的一个最小实现为 (G, K, J) , $Z(\infty) = 0$, Z 与 W 的关系由引理 5.2.1 给出, 则 $W(s)$ 有一个最小实现 (G, K, \bar{J}) 。

引理 5.2.3 (文献[194]的定理 1) 令 $Z(s)$ 为有理函数矩阵, 且 $Z(\infty) = 0$, Z 仅在 $\operatorname{Re}s < 0$ 内有极点, $W(s)$ 与 $Z(s)$ 的关系由引理 5.2.1 给出。且 $W(s)$ 的最小实现为 (G, K, \bar{J}) , $Z(s)$ 的最小实现为 (G, K, J) , 则 $Z(s)$ 是正实的充要条件是存在一个正定阵 Π 使下式成立:

$$\begin{aligned} \Pi G + G'H &= -\bar{J}'\bar{J} \\ \Pi K &= J' \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

或

$$K'H = J \quad (5.2.8)$$

有了上述结论, 则可对定理做如下几步推证:

1) 依引理 5.2.1 和引理 5.2.2, 知系统(5.2.1)和(5.2.2)的传递矩阵 $H(s)$ 满足条件且有如下分解:

$$\mathbf{H}(s) + \mathbf{H}'(-s) \triangleq \mathbf{N}'(-s)\mathbf{N}(s)$$

记 $\mathbf{N}(s)$ 的最小实现为 $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \tilde{\mathbf{C}})$, 依引理 5.2.3, 则定理 5.2.1 中假定(1)和(2)等价于存在一个正定阵 $\bar{\mathbf{P}}$ 和半正定阵 $\tilde{\mathbf{Q}} = \tilde{\mathbf{C}}'\tilde{\mathbf{C}}$ 使

$$\bar{\mathbf{P}}\mathbf{A} + \mathbf{A}'\bar{\mathbf{P}} = -\tilde{\mathbf{Q}} = -\tilde{\mathbf{C}}'\tilde{\mathbf{C}} \quad (5.2.9)$$

$$\bar{\mathbf{P}}\mathbf{B} = \mathbf{C} \quad \text{即} \quad \mathbf{B}'\bar{\mathbf{P}} = \mathbf{C} \quad (5.2.10)$$

由于 $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \tilde{\mathbf{C}})$ 是 $\mathbf{N}(s)$ 的最小实现, 则有 $(\tilde{\mathbf{C}}, \mathbf{A})$ 可观, 对此实现确定的 $\tilde{\mathbf{C}}, \bar{\mathbf{P}}$ 可由式(5.2.9)惟一确定为

$$\bar{\mathbf{P}} = \int_0^\infty e^{\mathbf{A}t} \tilde{\mathbf{C}}' \tilde{\mathbf{C}} e^{\mathbf{A}t} dt > 0 \quad (5.2.11)$$

由于 $\tilde{\mathbf{C}}'\tilde{\mathbf{C}}$ 是由 $\mathbf{H}(s)$ 的系数阵 $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ 决定, 因此 $\bar{\mathbf{P}}$ 亦由 $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ 决定。

2) 再考虑(5.2.1)~(5.2.5)的最优控制问题: 最优控制(5.2.4)中的 \mathbf{P} 要满足 Riccati 方程(5.2.5), 将它与式(5.2.9)比较, 若取

$$\mathbf{Q} = \tilde{\mathbf{Q}} + \bar{\mathbf{P}}\mathbf{B}\mathbf{B}'\bar{\mathbf{P}}$$

则方程(5.2.5)为

$$\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}'\mathbf{P} = -\tilde{\mathbf{Q}} = -\tilde{\mathbf{C}}'\tilde{\mathbf{C}} \quad (5.2.12)$$

因 $(\tilde{\mathbf{C}}, \mathbf{A})$ 可观, 上式亦有惟一解

$$\mathbf{P} = \int_0^\infty e^{\mathbf{A}t} \tilde{\mathbf{C}}' \tilde{\mathbf{C}} e^{\mathbf{A}t} dt = \bar{\mathbf{P}} > 0$$

因此, 若在式(5.2.5)中取

$$\mathbf{Q} = \tilde{\mathbf{Q}} + \bar{\mathbf{P}}\mathbf{B}\mathbf{B}'\bar{\mathbf{P}} \quad (5.2.13)$$

则方程(5.2.5)为

$$\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}'\mathbf{P} + \tilde{\mathbf{Q}} + \bar{\mathbf{P}}\mathbf{B}\mathbf{B}'\bar{\mathbf{P}} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{B}'\mathbf{P} = 0 \quad (5.2.14)$$

显见 $\mathbf{P} = \bar{\mathbf{P}}$ 满足式(5.2.14), 因此当取式(5.2.3)中

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \tilde{\mathbf{Q}} + \bar{\mathbf{P}}\mathbf{B}\mathbf{B}'\bar{\mathbf{P}} \\ &= \tilde{\mathbf{C}}'\tilde{\mathbf{C}} + \left(\int_0^\infty e^{\mathbf{A}t} \tilde{\mathbf{C}}' \tilde{\mathbf{C}} e^{\mathbf{A}t} dt \right) \mathbf{B}\mathbf{B}' \left(\int_0^\infty e^{\mathbf{A}t} \tilde{\mathbf{C}}' \tilde{\mathbf{C}} e^{\mathbf{A}t} dt \right) \end{aligned} \quad (5.2.15)$$

则方程(5.2.5)有解 $\mathbf{P} = \bar{\mathbf{P}}$.

又由式(5.2.10)

$$\bar{\mathbf{P}}\mathbf{B} = \mathbf{P}\mathbf{B} = \mathbf{C}' \rightarrow \mathbf{B}'\mathbf{P} = \mathbf{B}'\bar{\mathbf{P}} = \mathbf{C}$$

即式(5.2.4)可表为

$$\mathbf{u}^* = -\mathbf{B}'\mathbf{P}\mathbf{x} = -\mathbf{B}'\bar{\mathbf{P}}\mathbf{x} = -\mathbf{C}\mathbf{x} = -\mathbf{y} \quad (5.2.16)$$

可见为单位输出负反馈。由式(5.2.15)可知,因 $\bar{\mathbf{C}}$ 由 $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ 给定, 所以 $\bar{\mathbf{Q}}$ 亦是由 $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ 给定的。

3) 对任意实数 $k \neq 0$, 由式(5.2.9)可知, 两边同乘 k^2 , 若视为取

$$\bar{\mathbf{Q}}_k = (k\bar{\mathbf{C}})'(k\bar{\mathbf{C}}) = k^2\bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{C}}' = k^2\bar{\mathbf{Q}} \quad (5.2.17)$$

相当于方程

$$\bar{\mathbf{P}}_k\mathbf{A} + \mathbf{A}'\bar{\mathbf{P}}_k = -\bar{\mathbf{Q}}_k = -k^2\bar{\mathbf{Q}}$$

则相应于 $\bar{\mathbf{Q}}_k$ 的 $\bar{\mathbf{P}}_k$ 解为 $\bar{\mathbf{P}}_k = k^2\bar{\mathbf{P}}$, $\bar{\mathbf{P}}$ 依然由式(5.2.11)给定, 且有

$$\mathbf{B}'\bar{\mathbf{P}}_k = k^2\mathbf{C} \quad (5.2.18)$$

因此, 若在式(5.2.3)中选

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_k = \bar{\mathbf{Q}}_k + \bar{\mathbf{P}}_k\mathbf{B}\mathbf{B}'\bar{\mathbf{P}}_k = k^2(\bar{\mathbf{Q}} + k^2\bar{\mathbf{P}}\mathbf{B}\mathbf{B}'\bar{\mathbf{P}}) \quad (5.2.19)$$

则式(5.2.5)对应解为

$$\mathbf{P}_k = \bar{\mathbf{P}}_k = k^2\bar{\mathbf{P}}$$

最优控制为

$$\mathbf{u}^* = -\mathbf{B}'\bar{\mathbf{P}}_k\mathbf{x} = -k^2\mathbf{B}'\bar{\mathbf{P}}\mathbf{x} = -k^2\mathbf{C}\mathbf{x} = -k^2\mathbf{y} \quad (5.2.20)$$

定理证毕。

下面对 \mathbf{Q} 的另一种选择给出定理 5.2.1 的推论:

推论 5.2.1 若定理 5.2.1 的假定条件保持, 则必存在可由系统(5.2.1)和(5.2.2)的参数阵 $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ 确定的正定阵 \mathbf{P} 和半正定阵 \mathbf{Q} , 当在指标(5.2.3)中选 $\mathbf{Q} = \bar{\mathbf{P}}(\bar{\mathbf{Q}} + \mathbf{B}\mathbf{B}')\bar{\mathbf{P}}$ 时, 式(5.2.5)有解 $\mathbf{P}^* = \bar{\mathbf{P}}$, 使

$$\mathbf{B}'\mathbf{P}^* = \mathbf{B}'\bar{\mathbf{P}} = \mathbf{C} \quad (5.2.21)$$

即最优输出反馈为: $\mathbf{u}^* = -\mathbf{y}_0$ 。

若对任意实数 $k \neq 0$, 选

$$\mathbf{Q}_k = k^{-2}\bar{\mathbf{P}}(\bar{\mathbf{Q}} + \bar{k}^{-2}\mathbf{B}\mathbf{B}')\bar{\mathbf{P}} \quad (5.2.22)$$

则对应式(5.2.5)中 $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_k$ 的解为 \mathbf{P}^* , 且有

$$\mathbf{B}'\mathbf{P}_k = \bar{k}^{-2}\mathbf{B}'\bar{\mathbf{P}} = \bar{k}^{-2}\mathbf{C} \quad (5.2.23)$$

即有最优输出反馈

$$\mathbf{u}_k^* = -\bar{k}^{-2}\mathbf{y}$$

证 由假定条件: $\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}(sI - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$ 正实 $\rightarrow \mathbf{H}'(s)$ 亦正实。而 $\mathbf{H}'(s)$ 可视为系统(5.2.1)的对偶系统

$$\dot{\bar{x}} = \mathbf{A}'\bar{x} + \mathbf{C}'\mathbf{u} \quad (5.2.24)$$

$$\bar{y} = \mathbf{B}'\bar{x}$$

的传递矩阵,因此,类似定理 5.2.1 的证明步骤如下:

(1) 由引理 5.2.1 和引理 5.2.2,有分解式

$$\mathbf{H}'(s) + \mathbf{H}(-s) = \bar{\mathbf{N}}'(s)\bar{\mathbf{N}}(-s) \quad (5.2.25)$$

成立。设 $(\bar{\mathbf{A}}', \bar{\mathbf{C}}', \bar{\mathbf{B}}')$ 为 $\mathbf{N}(s)$ 的一个最小实现,知 $(\bar{\mathbf{B}}', \bar{\mathbf{A}}')$ 可观。由引理 5.2.3 知,定理 5.2.1 中假定条件(1)和(2)并结合对偶系统性质则等价于存在一个 $\hat{\mathbf{P}} > 0$ 和 $\bar{\mathbf{Q}} = \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{B}}'$ 使得

$$\hat{\mathbf{P}}\mathbf{A} + \mathbf{A}'\hat{\mathbf{P}} = -\bar{\mathbf{Q}} = -\mathbf{B}\mathbf{B}' \quad (5.2.26)$$

$$\hat{\mathbf{P}}\mathbf{C}' = \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{B}' \quad (5.2.27)$$

(2) 由于 $(\mathbf{B}', \mathbf{A}')$ 可观 \rightarrow 方程(5.2.26)有惟一解

$$\hat{\mathbf{P}} = \int_0^\infty e^{\mathbf{A}t}\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{B}}'e^{\mathbf{A}'t}dt > 0 \quad (5.2.28)$$

令 $\mathbf{P} = \hat{\mathbf{P}}^{-1}$, 则方程(5.2.26)为

$$\bar{\mathbf{P}}\mathbf{A} + \mathbf{A}'\bar{\mathbf{P}} = -\bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{B}}'\bar{\mathbf{P}} \quad (5.2.29)$$

有解

$$\bar{\mathbf{P}} = \left[\int_0^\infty e^{\mathbf{A}t}\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{B}}'e^{\mathbf{A}'t}dt \right]^{-1} > 0 \quad (5.2.30)$$

与式(5.2.5)比较,若取 $\mathbf{Q} = \mathbf{P}\bar{\mathbf{Q}}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{B}'\mathbf{P}$, 则式(5.2.5)变成式(5.2.29)形式。因此,选

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P}(\mathbf{Q} + \mathbf{B}\mathbf{B}')\bar{\mathbf{P}} \quad (5.2.31)$$

代入式(5.2.5)

$$\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}'\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{Q}\bar{\mathbf{P}} + \bar{\mathbf{P}}\mathbf{B}\mathbf{B}'\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{B}'\mathbf{P} = 0$$

可见 $\mathbf{P} = \bar{\mathbf{P}}$ 满足上述方程。因此,在式(5.2.3)中选

$$\mathbf{Q} = \bar{\mathbf{P}}(\bar{\mathbf{Q}} + \mathbf{B}\mathbf{B}')\bar{\mathbf{P}}$$

$$= \left[\int_0^\infty e^{At} \bar{B} \bar{B}' e^{A^T t} dt \right]^{-1} [\bar{B} \bar{B}' + \bar{B} \bar{B}'] \left[\int_0^\infty e^{At} \bar{B} \bar{B}' e^{A^T t} dt \right]^{-1} \quad (5.2.32)$$

则使式(5.2.5)相应有解 $\bar{P}^* = \bar{P}$ 如式(5.2.30)所示。并且由式(5.2.27)推出

$$\hat{P} C' = \bar{P}^{-1} C' = B \rightarrow C' = \bar{P} B \quad \text{即} \quad B' P = C \quad (5.2.33)$$

最优输出反馈为 $u^* = -y$ 。

因 $\bar{Q} = BB'$ 由 $\bar{N}(s)$ 系数阵决定, 也即由 (A', C', B') 决定 \bar{P} 。

(3) 对任意实数 $k \neq 0$, 由方程(5.2.26)两边同乘 k^{-2} , 相当于取 $\bar{Q}_k = k^{-2} \bar{Q}$, 而解为如下方程:

$$\bar{P}_k A + A' \bar{P}_k = -\bar{Q}_k = -k^{-2} \bar{Q} \quad (5.2.34)$$

其解为 $\hat{P}_k = \bar{k}^2 \hat{P}$ 。又由式(5.2.29)推出

$$\hat{P}_k^{-1} = \bar{P}_{\bar{k}} = \bar{k}^{-2} \hat{P}^{-1} = \bar{k}^{-2} \bar{P} \quad (5.2.35)$$

而式(5.2.27)对应为

$$\hat{P}_k C' = \bar{k}^2 \hat{P} C' = \bar{k}^2 B$$

可得

$$\hat{P}_k^{-1} B = k^{-2} C' = \bar{P}_{\bar{k}} B = \bar{k}^{-2} C'$$

即

$$B' \bar{P}_{\bar{k}} = \bar{k}^{-2} C \quad (5.2.36)$$

因此, 若在式(5.2.3)中选

$$\begin{aligned} Q &= Q_k = \bar{P}_k \bar{Q}_k \bar{P}_k + \bar{P}_k B B' \bar{P}_k \\ &= \bar{k}^{-2} P [\bar{Q} + \bar{k}^{-2} B B'] \bar{P} \end{aligned} \quad (5.2.37)$$

则对应有最优输出反馈

$$u_k^* = -B' \bar{P}_{\bar{k}} x = -\bar{k}^{-2} C x = \bar{k}^{-2} y \quad (5.2.38)$$

推论证毕。

2. 下面考察输入输出不同维数, 即 $m \neq l$ 的情况

有结论如下:

定理 5.2.2 对系统(5.2.1)和(5.2.2), 设 (A, B) 可控, 且 $\text{Re}\lambda(A) < 0$, 若存在一个 $m \times l$ 矩阵 F 使:

(1) 传递函数阵 $H_F(s) = FC(sI - A)^{-1} B$ 正实;

(2) (FC, A) 可观测。

则必存在可由 (A, B, FC) 确定的正定阵 \bar{P}_F 和半正定阵 \bar{Q}_F , 当在式(5.2.3)中选

$$Q = Q_F = \tilde{Q}_F + \bar{P}_F BB' \bar{P}_F \quad (5.2.39)$$

时, 对应方程(5.2.5)有解 \bar{P}_F , 使 $B'\bar{P}_F = FC$, 即有最优输出反馈

$$u^* = -Fy \quad (5.2.40)$$

对任意实数 $k \neq 0$, 在式(5.2.3)中取 Q 如下式:

$$Q = Q_{Fk} = k^2 (\tilde{Q}_F + k^2 \bar{P}_F BB' \bar{P}_F) \quad (5.2.41)$$

则对应方程(5.2.5)的解为 P_F^* , 且有

$$B'P_F^* = k^2 B'\bar{P}_F = k^2 FC$$

即有最优输出反馈

$$u_k^* = -k^2 Fy \quad (5.2.42)$$

证 与定理 5.2.1 证明类同。只是用 FC 取代定理 5.2.1 中 C 的有关推证结论即可。

关于 Q_F, P_F 的表达式说明如下: 即

$$H_F(s) + H_F'(-s) = N_F'(-s)N_F(s)$$

$N_F(s)$ 的最小实现记为 (A, B, \tilde{C}_F) , 则

$$\tilde{Q}_F = \tilde{C}_F' \tilde{C}_F \quad (5.2.43)$$

而

$$\bar{P}_F = \int_0^\infty e^{At} \tilde{C}_F' \tilde{C}_F e^{At} dt > 0 \quad (5.2.44)$$

由于 \tilde{C}_F 可由 $N_F(s)$ 决定, 也即可由 (A, B, FC) 决定, 所以 \tilde{Q}_F, \bar{P}_F 及 Q_F, Q_{Fk} 均可由 (A, B, FC) 确定。其他证明从略。

关于 Q 的另一选择, 对 $m \neq l$ 的情况有定理 5.2.2 的另一推论:

推论 5.2.2 假定定理 5.2.2 条件保持, 则必存在可由 (A, B, FC) 确定的 $P_F = P_F' > 0$ 和 $\bar{Q}_F = \tilde{Q}_F' \geq 0$, 当在式(5.2.3)中选

$$Q = Q_F = \bar{P}_F (\tilde{Q}_F + BB') \bar{P}_F \quad (5.2.45)$$

时, 方程(5.2.5)有解 $P_F^* = \bar{P}_F$, 使得 $B'P_F^* = B'\bar{P}_F = FC$, 即有最优输出反馈

$$u^* = -Fy \quad (5.2.46)$$

对任意实数 $\bar{k} \neq 0$, 当在式(5.2.3)中选

$$\bar{Q} = \bar{Q}_{Fk} = \bar{k}^{-2} \bar{P}_F (\bar{Q}_F + \bar{k}^{-2} \bar{B} \bar{B}') \bar{P}_F \quad (5.2.47)$$

对应方程(5.2.5)有解 \bar{P}_{Fk} 使

$$\bar{B}' \bar{P}_{Fk} = \bar{k}^{-2} \bar{B}' \bar{P}_F = \bar{k}^{-2} \bar{F} \bar{C} \quad (5.2.48)$$

即有最优输出反馈

$$\bar{u}^* = -\bar{k}^{-2} \bar{F} \bar{y} \quad (5.2.49)$$

证 与推论 5.2.1 和定理 5.2.2 证明类同, 关于 \bar{Q}_F, \bar{P}_F 表达式说明如下:

由分解式 $\bar{H}_{3F}'(s) + \bar{H}_F(-s) = \bar{N}_P'(s) \bar{N}_F(-s), \bar{N}_F(s)$ 的最小实现记为 $(\bar{A}', (\bar{F}\bar{C})', \bar{B}_F')$, 则

$$\bar{Q}_F = \bar{B}_F \bar{B}_F' \quad (5.2.50)$$

而

$$\bar{P}_F = \left(\int_0^\infty e^{At} \bar{B}_F \bar{B}_F' e^{A^T t} dt \right)^{-1} > 0 \quad (5.2.51)$$

式中, \bar{B}_F 由 $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{F}\bar{C})$ 决定, 因此, \bar{Q}_F, \bar{P}_F 亦由 $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{F}\bar{C})$ 决定。其他证明从略。

5.3 确定性单入单出二阶系统 LQ 最优输出反馈解

为了验证 5.2 节中输出反馈结论的正确性, 下面特别考察如下二阶系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & a_1 a_2 \\ 1 & -(a_1 + a_2) \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix} u \triangleq Ax + Bu \quad (5.3.1)$$

$$y = [0 \ 1]x \triangleq Cx \quad (5.3.2)$$

其传递函数为

$$H(s) = \frac{s + b}{(s + a_1)(s + a_2)} \quad (5.3.3)$$

当 $b \neq a_1, a_2$ 时, 系统(5.3.1)和(5.3.2)是 $H(s)$ 的最小实现。

最优输出反馈问题是在指标

$$J = \min_u \int_0^\infty (x' Q x + u' u) dt \quad (5.3.4)$$

中选取一个合适的 Q , 使得系统(5.3.1)和(5.3.2)在(5.3.4)下有最优输出反馈

$$u^* = -B' P x = -F C x = -F y \quad (5.3.5)$$

P 满足方程

$$PA + A'P + Q - PBB'P = 0 \quad (5.3.6)$$

根据 5.2 节中定理 5.2.1 的结论, 求解步骤如下:

(1) 验证 $H(s)$ 的正实性条件:

1) 对实 s , 显见 $H(s)$ 为实;

2) $H(s)$ 在右半复平面无极点 \rightarrow 要求 $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0$;

3) $H(s)$ 在 $\operatorname{Re} s = 0$ 上极点相异 \rightarrow 要求 $a_1 > 0 (\geq 0), a_2 \geq 0 (> 0)$, 即 a_1, a_2 不同时为零。而在 $\operatorname{Re} s = 0$ 点的留数非负 \rightarrow 要求 $b \geq 0$;

4) 对 $s = j\omega$ 不是 $H(s)$ 的极点要求 $\operatorname{Re}[H(j\omega)] \geq 0$:

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \frac{j\omega + b}{(j\omega + a_1)(j\omega + a_2)} = \frac{j\omega + b}{a_1 a_2 - \omega^2 + j\omega(a_1 + a_2)} \\ &= \frac{a_1 a_2 b + \omega^2(a_1 + a_2 - b) + j[\omega(a_1 a_2 - \omega^2) - \omega(a_1 + a_2)b]}{(a_1 a_2 - \omega^2)^2 + \omega^2(a_1 + a_2)^2} \end{aligned}$$

由 $\operatorname{Re}[H(j\omega)] \geq 0 \rightarrow a_1 a_2 b + \omega^2(a_1 + a_2 - b) \geq 0$ 对所有 ω 成立 $\rightarrow a_1 + a_2 - b \geq 0$,

(2) 由 5.2 节中定理 5.2.1 的条件 A 渐近稳定 $\rightarrow a_1 > 0, a_2 > 0$, 因此, 在 $H(s)$ 中取

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad b \geq 0, \quad b \neq a_1, \quad a_2 \quad (5.3.7)$$

且

$$a_1 + a_2 - b \geq 0 \quad (5.3.8)$$

即满足定理条件。

(3) 做 $H(s) + H'(-s) \approx W'(-s)W(s)$ 分解, 求 $W(s)$; 下面先设 $a_1 + a_2 - b > 0, b > 0$ 做一般讨论。由

$$\begin{aligned} H(s) + H'(-s) &= \left(\frac{s+b}{s+a_1}(s+a_2) \right) + \left(\frac{-s+b}{-s+a_1}(-s+a_2) \right) \\ &= (1/\Delta) [(-s+a_1)(-s+a_2)(s+b) \\ &\quad + (-s+b)(s+a_1)(s+a_2)] \\ &= (1/\Delta) [2(a_1 + a_2 - b)(-s^2) + 2a_1 a_2 b] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1/\Delta)2(a_1 + a_2 - b) \left(-s^2 + \frac{a_1 a_2 b}{a_1 + a_2 - b} \right) \\
&= (1/\Delta)2(a_1 + a_2 - b) \left(-s \pm \sqrt{\frac{a_1 a_2 b}{a_1 + a_2 - b}} \right) \left(s \pm \sqrt{\frac{a_1 a_2 b}{a_1 + a_2 - b}} \right) \\
&= \frac{[\pm \sqrt{2(a_1 + a_2 - b)}] \left(-s \pm \sqrt{\frac{a_1 a_2 b}{a_1 + a_2 - b}} \right) \left(s \pm \sqrt{\frac{a_1 a_2 b}{a_1 + a_2 - b}} \right) [\pm \sqrt{2(a_1 + a_2 - b)}]}{\Delta}
\end{aligned}$$

式中, $\Delta = (-s + a_1)(-s + a_2)(s - a_1)(s + a_2)$,

得分解式

$$W(s) = \frac{\pm \sqrt{2(a_1 + a_2 - b)} \left(s \pm \sqrt{\frac{a_1 a_2 b}{a_1 + a_2 - b}} \right)}{(s + a_1)(s + a_2)} \quad (5.3.9)$$

为简化讨论, 下面仅在式(5.3.9)中取正号的情况, 即

$$W(s) = \frac{\sqrt{2(a_1 + a_2 - b)} \left(s + \sqrt{\frac{a_1 a_2 b}{a_1 + a_2 - b}} \right)}{(s + a_1)(s + a_2)} \quad (5.3.10)$$

为例讨论其解, 其余情况类似分析。

当 $\left(\frac{a_1 a_2 b}{a_1 + a_2 - b}\right)^{\frac{1}{2}} \neq a_1, a_2$ 时, $W(s)$ 有最小实现

$$W(s) = \tilde{\mathbf{C}}(sI - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \quad (5.3.11)$$

(4) 下面解式(5.3.11)中的 $\tilde{\mathbf{C}}$ 表达式。由

$$(sI - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{(s + a_1)(s + a_2)} \begin{bmatrix} s + a_1 + a_2 - a_1 a_2 \\ 1 \\ s \end{bmatrix}$$

设 $\tilde{\mathbf{C}} = [\tilde{c}_1 \quad \tilde{c}_2]$, 由式(5.3.1), $\mathbf{B}' = [b \quad 1]$, 代入式(5.3.11)得

$$\begin{aligned}
W(s) &= \tilde{\mathbf{C}}(sI - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} = \frac{\tilde{c}_1 [b(s + a_1 + a_2) - a_1 a_2] + \tilde{c}_2(s + b)}{(s + a_1)(s + a_2)} \\
&\quad (5.3.12)
\end{aligned}$$

将式(5.3.12)与式(5.3.10)比较得

$$\begin{aligned}
&s[2(a_1 + a_2 - b)]^{\frac{1}{2}} + (2a_1 a_2 b)^{\frac{1}{2}} \\
&= \tilde{c}_1[b(s + a_1 + a_2) - a_1 a_2] + \tilde{c}_2(s + b)
\end{aligned}$$

比较上式 s 系数得方程组

$$\bar{c}_1 b + \bar{c}_2 = [2(a_1 + a_2 - b)]^{\frac{1}{2}} \quad (5.3.13)$$

$$\bar{c}_1 [b(a_1 + a_2) - a_1 a_2] + \bar{c}_2 b = (2a_1 a_2 b)^{\frac{1}{2}} \quad (5.3.14)$$

若 $\begin{bmatrix} b & 1 \\ b(a_1 + a_2) - a_1 a_2 & b \end{bmatrix}$ 非奇异，则方程(5.3.13)和(5.3.14)有惟一解 \bar{c}_1, \bar{c}_2 存在，而该矩阵奇异的充要条件是

$$b(a_1 + a_2) - a_1 a_2 = b^2 \quad (5.3.15)$$

下面证明这是不可能的。

由于方程(5.3.15)对 b 的解的判别式是

$$(a_1 + a_2)^2 - 4a_1 a_2 = (a_1 - a_2)^2 \geq 0$$

因此方程(5.3.15)对 b 有解为

$$b = -[a_1 + a_2 \pm (a_1 - a_2)]/2 \quad (5.3.16)$$

即 $b = a_1$ 或 $b = a_2$ 是方程(5.3.15)的解。这与前面的 $H(s)$ 最小实现为 (A, B, C) 矛盾。故在定理 5.2.1 假定下，方程(5.3.15)无解，从而方程(5.3.13)和(5.3.14)解的判别式非奇异，因此有惟一 \bar{c}_1, \bar{c}_2 存在，解之得

$$\begin{aligned} \bar{c}_1 &= \frac{(2a_1 a_2 b)^{\frac{1}{2}} - b[2(a_1 + a_2 - b)]^{\frac{1}{2}}}{[b(a_1 + a_2) - a_1 a_2] - b^2} \\ \bar{c}_2 &= [2(a_1 + a_2 - b)]^{\frac{1}{2}} - b\bar{c}_1 \\ &= [2(a_1 + a_2 - b)]^{\frac{1}{2}} - \frac{b[(2a_1 a_2 b)^{\frac{1}{2}} - b[2(a_1 + a_2 - b)]^{\frac{1}{2}}]}{[b(a_1 + a_2) - a_1 a_2] - b^2} \end{aligned} \quad (5.3.17)$$

求得 \bar{c}_1, \bar{c}_2 即 \tilde{C} 后，可令 $\tilde{Q} = \tilde{C}'\tilde{C}$ ，并在式(5.3.4)中取

$$Q = \tilde{Q} + \tilde{P}BB'\tilde{P}$$

则 $u^* = -y$ 或对任 $k \neq 0$ 取

$$Q = k^2(\tilde{Q} + k^2\tilde{P}BB'\tilde{P})$$

则 $u^* = -k^2y$ ，式中 P 满足

$$\tilde{P}A + A'\tilde{P} = -\tilde{Q} = -\begin{bmatrix} \bar{c}_1^2 & \bar{c}_1 \bar{c}_2 \\ \bar{c}_1 \bar{c}_2 & \bar{c}_2^2 \end{bmatrix} \quad (5.3.18)$$

$$B'\tilde{P} = C \quad (5.3.19)$$

即得到系统(5.3.1)~(5.3.6)的最优输出反馈解。

由于 \bar{c}_1, \bar{c}_2 的表达式比较复杂，求解方程(5.3.18)的 \tilde{P} 并验证式(5.3.19)是

很繁琐的,故改换途径验证之。

(5) 假定有 $\tilde{Q} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} [I_1 \quad I_2] = \begin{bmatrix} I_1^2 & I_1 I_2 \\ I_1 I_2 & I_2^2 \end{bmatrix}$ 满足式(5.3.18)和式(5.3.19)即

$$\begin{aligned} \tilde{P}A + A'\tilde{P} &= -\tilde{Q} = -\begin{bmatrix} I^2 & I_1 I_2 \\ I_1 I_2 & I_2^2 \end{bmatrix} \\ B'\tilde{P} &= C \end{aligned} \quad (5.3.20)$$

从上式中解出 I_1, I_2 然后与式(5.3.16)和式(5.3.17)比较,若 $I_1 = \bar{c}_1, I_2 = \bar{c}_2$, 可证明 \bar{c}_1, \bar{c}_2 解亦满足式(5.3.18)和(5.3.19),也即验证了结论的正确性。记

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

则由式(5.3.20)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -a_1 a_2 \\ 1 & -(a_1 + a_2) \end{bmatrix} &+ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_1 a_2 & -(a_1 + a_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \\ &= -\begin{bmatrix} I_1^2 & I_1 I_2 \\ I_1 I_2 & I_2^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.3.21)$$

$$[b \quad 1] \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = [0 \quad 1]$$

展开上式得方程组

$$\left. \begin{array}{l} 2p_{12} = -I_1^2 \\ p_{22} - a_1 a_2 p_{21} - (a_1 + a_2)p_{12} = -I_1 I_2 \\ 2(a_1 a_2 p_{12} + (a_1 + a_2)p_{22}) = I_2^2 \\ b p_{11} + p_{12} = 0 \\ b p_{12} + p_{22} = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} p_{12} = -I_1^2/2 \\ p_{11} = I_1^2/2b \\ p_{22} = 1 + bI_1^2/2 \\ p_{22} = -I_1 I_2 - a_1 a_2 I_2^2/2b - (a_1 + a_2) I_1^2/2 \\ p_{22} = (I_2^2/2 + a_1 a_2 I_1^2/2)/(a_1 + a_2) \end{array} \quad (5.3.22)$$

将方程组(5.3.22)中第三式 p_{22} 代入后两式,得

$$\begin{aligned} 1 + b I_1^2/2 &= -I_1 I_2 + a_1 a_2 I_1^2/2b - (a_1 + a_2) I_1^2/2 \\ 1 + b I_1^2/2 &= (I_2^2/2 + a_1 a_2 I_1^2/2)/(a_1 + a_2) \end{aligned}$$

整理得

$$1 + (b + a_1 + a_2 - a_1 a_2/b) I_1^2/2 = -I_1 I_2 \triangleq 1 + \alpha I_1^2 \quad (5.3.23)$$

$$I_2^2 = 2(a_1 + a_2)[1 + [b(a_1 + a_2) - a_1 a_2] I_1^2/2(a_1 + a_2)] \triangleq \gamma + \beta I_1^2 \quad (5.3.24)$$

由上两式消去 I_2^2 , 得

$$I_1^2(\gamma + \beta I_1^2) = (1 + \alpha I_1^2)^2$$

即

$$I_1^4(\beta - \alpha^2) + I_1^2(\gamma - 2\alpha) - 1 = 0 \quad (5.3.25)$$

上式对 I_1^2 的解为

$$I_1^2 = \{2\alpha - \gamma \pm [(\gamma - 2\alpha)^2 + 4(\beta - \alpha^2)]^{1/2}\}/2(\beta - \alpha^2) \quad (5.3.26)$$

下面考察 I_1^2 解的存在性。由于

$$\begin{aligned} \beta - \alpha^2 &= 2(a_1 + a_2)[b/2 - a_1 a_2/2(a_1 + a_2)] - [b^2 + b(a_1 + a_2) - a_1 a_2]^2/(2b)^2 \\ &= -[b(a_1 + a_2 - b) - a_1 a_2]^2/4b^2 < 0 \\ \gamma - 2\alpha &= 2(a_1 + a_2) - 2[b/2 + (a_1 + a_2)/2 - a_1 a_2/2b] \\ &= [b(a_1 + a_2 - b) + a_1 a_2]/b > 0 \\ (\gamma - 2\alpha)^2 + 4(\beta - \alpha^2) &= 4[b(a_1 + a_2) - a_1 a_2] + [b(a_1 + a_2) - b^2 + a_1 a_2]^2/b^2 \\ &\quad - [b^2 + b(a_1 + a_2) - a_1 a_2]^2/b^2 \\ &= 4a_1 a_2(a_1 + a_2 - b)/b > 0 \end{aligned}$$

因此, 在式(5.3.26)中 I_1^2 有意义且表达式为

$$I_1^2 = \frac{2b[b(a_1 + a_2 - b) + a_1 a_2] \mp 4b^2[a_1 a_2(a_1 + a_2 - b)/b]^{1/2}}{[b(a_1 + a_2 - b) - a_1 a_2]^2} \quad (5.3.27)$$

对应 I_2^2 由式(5.3.24)可得

$$I_2^2 = \gamma + \beta I_1^2 = 2(a_1 + a_2) \left[1 + \frac{b(a_1 + a_2) - a_1 a_2}{2(a_1 + a_2)} I_1^2 \right] \quad (5.3.28)$$

据此两式, 由式(5.3.22)可解

$$p_{11} = I_1^2/2b, \quad p_{12} = -I_1^2/2 = p_{21}, \quad p_{22} = 1 + I_1^2 b/2 \quad (5.3.29)$$

可以验证式(5.3.27)和(5.3.28)的 I_1^2, I_2^2 与式(5.3.16)和(5.3.17)的 \hat{c}_2^2, \hat{c}_1^2 是相等的。由于 \hat{c}_1, \hat{c}_2 解是在式(5.3.9)中取单一正号讨论的,因此没有“ \mp ”或“ \pm ”号出现。若在式(5.3.9)中遍取各种符号的可能解,则可得出与式(5.3.27)和(5.3.28)中相应的 I_1^2, I_2^2 的各种符号情形。

(6) 下面再看特殊情况 $a_1 + a_2 - b = 0$ 或 $b = 0$ 。

1) $a_1 + a_2 - b = 0, b > 0$ 。由式(5.3.16)和(5.3.17)可知

$$\hat{c}_1 = \frac{(2a_1 a_2 b)^{\frac{1}{2}}}{b(a_1 + a_2) - a_1 a_2 - b^2}, \quad \hat{c}_2 = -\hat{b}c \quad (5.3.30)$$

2) $b = 0, a_1 + a_2 - b > 0$ 。由式(5.3.16)和(5.3.17)可知

$$\begin{aligned} \hat{c}_1 &= \frac{-b[2(a_1 + a_2 - b)]^{\frac{1}{2}}}{b(a_1 + a_2) - a_1 a_2 - b^2} \\ \hat{c}_2 &= [2(a_1 + a_2 - b)]^{\frac{1}{2}} - \hat{b}\hat{c}_1 = [2(a_1 + a_2)]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

3) $b = 0$ 且 $a_1 + a_2 - b = 0$ 为不可能情况,因 A 稳定及 $H(s)$ 正实要求。

(7) 下面取一组具体数据验证式(5.3.16), (5.3.17)和式(5.3.27), (5.3.28)的等价性以及最优输出反馈解的结论。

取 $a_1 = 1, a_2 = 3, b = 2$, 在式(5.3.26)中, 因 $\beta - \alpha^2 = -1/16 < 0, \gamma - 2\alpha = 7/2 > 0, (\gamma - 2\alpha)^2 + 4(\beta - \alpha^2) = 12 > 0$ 。由式(5.3.27)和(5.3.28), 得

$$I_1^2 = 28 \mp 16\sqrt{3} \quad (5.3.31)$$

$$I_2^2 = 148 \mp 80\sqrt{3} \quad (5.3.32)$$

从而由式(5.3.29)得 $p_{12} = -14 \pm 8\sqrt{3}, p_{11} = 7 \mp 4\sqrt{3}, p_{22} = 29 \mp 16\sqrt{3}$, 即

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} 7 \mp 4\sqrt{3} & -14 \pm 8\sqrt{3} \\ -14 \pm 8\sqrt{3} & 29 \mp 16\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad (5.3.33)$$

可验证

$$B' \bar{P} = [2 \quad 1] \begin{bmatrix} 7 \mp 4\sqrt{3} & -14 \pm 8\sqrt{3} \\ -14 \pm 8\sqrt{3} & 29 \mp 16\sqrt{3} \end{bmatrix} = [0 \quad 1] = C$$

即定理 5.2.1 结论成立, 最优输出反馈 $u^* = -y$ 。

而将 $a_1 = 1, a_2 = 3, b = 2$ 代入式(5.3.16)和(5.3.17)得

$$\hat{c}_1 = 2\sqrt{3} - 4, \quad \hat{c}_2 = 10 - 4\sqrt{3}$$

得

$$\begin{aligned}\hat{c}_1^2 &= 28 - 16\sqrt{3} = I_1^2 \\ \hat{c}_2^2 &= 148 - 80\sqrt{3} = I_2^2\end{aligned}\quad (5.3.34)$$

可见 \hat{c}_1, \hat{c}_2 的一组解是与 I_1, I_2 中一组解相等的, 遍取式(5.3.9)中符号讨论, 可验证各种情况下的 \hat{c}_1^2, \hat{c}_2^2 与 I_1^2, I_2^2 相等。

对 $a_1 + a_2 - b = 0$ 或 $b = 0$ 情况, 亦可取具体数据验证:

1) $a_1 + a_2 - b = 0$, 取 $a_1 = 1, a_2 = 3, b = 4$, 有

$$\hat{c}_1 = -2\sqrt{6}/3 \rightarrow \hat{c}_1^2 = 8/3$$

$$\hat{c}_2 = 8\sqrt{6}/3 \rightarrow \hat{c}_2^2 = 128/3$$

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} 1/3 & -4/3 \\ -4/3 & 1 + 16/3 \end{bmatrix}$$

可见

$$\mathbf{B}'\bar{P} = [4 \quad 1] \begin{bmatrix} 1/3 & -4/3 \\ -4/3 & 1 + 16/3 \end{bmatrix} = [0 \quad 1] = \mathbf{C}$$

2) $b = 0$, 取 $a_1 = 1, a_2 = 3$, 则

$$\hat{c}_1 = 0, \quad \hat{c}_1^2 = 0$$

$$\hat{c}_2 = 2\sqrt{2}, \quad \hat{c}_2^2 = 8$$

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}'\bar{P} = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \quad 1] = \mathbf{C}$$

此情况下应从式(5.3.20)求解 \bar{P} 。不宜代入方程(5.3.16)和(5.3.17), 且式(5.3.29)不可用。

这样就证明了定理 5.2.1 结论对二阶系统的正确性, 即说明了在定理 5.2.1 假定条件下, 最优输出反馈控制律集合非空。高阶系统的情况亦可举出例子, 这里从略。

5.4 不确定性系统 maxmin 鲁棒最优静态输出反馈问题

本节应用 5.2 节的结论考察不确定性系统的平方可积干扰下的静态最优输出反馈控制问题。

问题提法如下: 考察系统

$$\dot{x} = Ax + B_1 u + B_2 v, \quad x(0)'x(0) = x_0'x_0 \leq \delta_0^2 \quad (5.4.1)$$

$$y = Cx \quad (5.4.2)$$

式中, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $v \in \mathbb{R}^l$; $y \in \mathbb{R}^l$ 。干扰约束

$$\int_0^\infty v'v dt \leq \delta^2 \quad (5.4.3)$$

寻求一个 $Q = Q'$ 使得系统(5.4.1)~(5.4.3)在指标

$$J = \max_{\|v\|^2 \leq \delta^2} \min_u \int_0^\infty (x'Qx + u'u) dt \quad (5.4.4)$$

下有最优输出反馈

$$u^* = -B'Px = -FCx = -Fy \quad (5.4.5)$$

即要求 $B'P = FC$, P 满足

$$PA + A'P + Q - P(B_1 B_1' - B_2 \eta^{-1} B_2')P = 0 \quad (5.4.6)$$

η 是由 2.4 节中定理 2.4.1 确定的待定常数。

问题的求解要求:

- (1) Q 的存在条件(用 A, B_1, B_2, C 给出);
- (2) Q 的构造(用 A, B_1, B_2, C 表示)。

注意到上述问题的状态反馈解在第二章中已讨论过。 η 是在式(5.4.3)约束下的待定常数。本章均假定上述问题的状态反馈解是存在的。隐含了寻求的加权阵亦能满足式(5.4.6)有实对称解并使系统闭环渐近稳定等性质。

1. 先考虑控制与输出维数相同, 即 $m = l$ 的情况

有结论如下:

定理 5.4.1 假定系统(5.4.1), (5.4.2)满足:

- (1) (A, B_1) 可控, (C, A) 可观;
- (2) $\text{Re}\lambda(A) < 0$, 且 $u \sim y$ 的传递函数矩阵 $H_1(s) = C(sI - A)^{-1}B_1$ 正实,

则必存在可由 (A, B_1, C) 确定的正定阵 \bar{P} 和半正定阵 \tilde{Q} 。

当在式(5.4.4)中选 $Q = \tilde{Q} + \bar{P}(B_1 B_1' - B_2 \eta^{-1} B_2')\bar{P}$ 时, 式(5.4.6)有解 $P^* = \bar{P}$, 使得 $B_1'P^* = B_1'\bar{P} = C$, 即最优输出反馈解存在: $u^* = -y$ 。

对任 $k \neq 0$, 在式(5.4.4)中选 $Q = Q_k = k^2[\tilde{Q} + k^2\bar{P}(B_1 B_1' - B_2 \eta^{-1} B_2')\bar{P}]$, 则对应 Q_k , 式(5.4.6)的解为 P_k^* 有

$$\mathbf{B}_1' \mathbf{P}_k^+ = k^2 \mathbf{B}_1' \bar{\mathbf{P}} = k^2 \mathbf{C}$$

即有最优输出反馈

$$\mathbf{u}^* = -k^2 \mathbf{y}$$

证 引用 5.2 节中引理 5.2.1~5.2.3, 分以下几步推证:

(1) 由 5.2 节中引理 5.2.1 和引理 5.2.2, 知系统(5.4.1)和(5.4.2)的 $\mathbf{u} \sim \mathbf{y}$ 的传递矩阵 $\mathbf{H}_1(s)$ 满足引理条件, 且有如下分解式成立:

$$\mathbf{H}_1(s) + \mathbf{H}_1'(-s) = \mathbf{N}_1'(-s) \mathbf{N}_1(s)$$

记 $\mathbf{N}_1(s)$ 的最小实现为 $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_1, \tilde{\mathbf{C}})$, 则 $(\tilde{\mathbf{C}}, \mathbf{A})$ 可观。

由引理 5.2.3 知定理 5.4.1 中假定条件 1° 和 2° 等价于存在一个正定的 $\bar{\mathbf{P}}$ 和半定的 $\tilde{\mathbf{Q}} = \tilde{\mathbf{C}}' \tilde{\mathbf{C}}$ 使得

$$\bar{\mathbf{P}} \mathbf{A} + \mathbf{A}' \bar{\mathbf{P}} = -\tilde{\mathbf{Q}} = -\tilde{\mathbf{C}}' \tilde{\mathbf{C}} \quad (5.4.7)$$

$$\bar{\mathbf{P}} \mathbf{B}_1 = \tilde{\mathbf{C}}' \Rightarrow \mathbf{B}_1' \bar{\mathbf{P}} = \mathbf{C} \quad (5.4.8)$$

由于 $(\tilde{\mathbf{C}}, \mathbf{A})$ 可观, 方程(5.4.8)有惟一解

$$\bar{\mathbf{P}} = \int_0^\infty e^{\mathbf{A}t} \tilde{\mathbf{C}}' \tilde{\mathbf{C}} e^{\mathbf{A}t} dt > 0 \quad (5.4.9)$$

式中, $\tilde{\mathbf{C}}$ 由 $\mathbf{N}_1(s)$ 也即由系统参数阵 $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_1, \mathbf{C})$ 决定; $\bar{\mathbf{P}}$ 亦由 $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_1, \mathbf{C})$ 决定。

(2) 再考虑最优输出反馈解的存在性。

将式(5.4.6)的 Riccati 方程与式(5.4.7)比较, 若在式(5.4.4)中取

$$\mathbf{Q} = \tilde{\mathbf{Q}} + \bar{\mathbf{P}} (\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1' - \mathbf{B}_2 \eta^{-1} \mathbf{B}_2') \bar{\mathbf{P}} \quad (5.4.10)$$

则式(5.4.6)为

$$\mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}' \mathbf{P} = -\tilde{\mathbf{Q}} = -\tilde{\mathbf{C}}' \tilde{\mathbf{C}}$$

上式有惟一解 $\mathbf{P} = \bar{\mathbf{P}}$, 因此若在式(5.4.4)中选

$$\mathbf{Q} = \tilde{\mathbf{Q}} + \bar{\mathbf{P}} (\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1' - \mathbf{B}_2 \eta^{-1} \mathbf{B}_2') \bar{\mathbf{P}} \quad (5.4.11)$$

则式(5.4.6)为

$$\mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}' \mathbf{P} + \tilde{\mathbf{Q}} + \bar{\mathbf{P}} (\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1' - \mathbf{B}_2 \eta^{-1} \mathbf{B}_2') \bar{\mathbf{P}} - \mathbf{P} (\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1' - \mathbf{B}_2 \eta^{-1} \mathbf{B}_2') \mathbf{P} = 0$$

显见上式有惟一解

$$\mathbf{P} = \bar{\mathbf{P}}$$

又由式(5.4.8)可得

$$\bar{P}B_1 = C' \quad \rightarrow \quad B_1'\bar{P} = C$$

即问题(5.4.1)~(5.4.6)有最优输出反馈解存在:

$$u^* = -B_1'Px = -B_1'\bar{P}x = -Cx = -y \quad (5.4.12)$$

可见是单位负反馈,由式(5.4.11)可见 Q 可由系统参数(A, B_1, B_2, C)给出。

(3) 由式(5.4.7)对任实数 $k \neq 0$,两边同乘 k^2 ,并记

$$\tilde{Q}_k = (k\bar{C})'(k\bar{C}) = k^2\bar{C}'\bar{C} = k^2\bar{Q} \quad (5.4.13)$$

对应式(5.4.7)的同形方程为

$$\bar{P}_k - A + A'\bar{P}_k = -\tilde{Q}_k = -k^2\bar{Q} \quad (5.4.14)$$

上式有解

$$\bar{P}_k = k^2\bar{P} \quad \text{且} \quad B_1'\bar{P}_k = k^2C$$

因此若在式(5.4.4)中取

$$\begin{aligned} Q = Q_k &= \tilde{Q}_k + \bar{P}_k(B_1B_1' - B_2\eta^{-1}B_2')\bar{P}_k \\ &= k^2[\bar{Q} + k^2\bar{P}(B_1B_1' - B_2\eta^{-1}B_2')\bar{P}] \end{aligned} \quad (5.4.15)$$

对应的方程(5.4.6)有解

$$P_k^* = \bar{P}_k = k^2\bar{P}$$

因此有最优输出反馈解

$$u^* = -B_1'P_k^*x = -B_1'\bar{P}_kx = -k^2B_1'\bar{P}x = -k^2Cx = -k^2y \quad (5.4.16)$$

定理证毕。

对满足定理 5.4.1 条件的 Q 的另一选择有如下结论:

推论 5.4.1 假定定理 5.4.1 条件保持,则必存在可由系统参数确定的正定阵 \bar{P} 和半正定阵 Q ,当在式(5.4.4)中选择

$$Q = \bar{P}(\bar{Q} + B_1B_1' - B_2\eta^{-1}B_2')\bar{P}$$

时方程(5.4.6)有解 $P^* = \bar{P}$,并有

$$B_1'P^* = B_1'\bar{P} = C$$

即存在输出反馈 $u^* = -y$ 。

对任 $k \neq 0$,选

$$Q = Q_k = \bar{k}^{-2}\bar{P}[\bar{Q} + \bar{k}^{-2}(B_1B_1' - B_2\eta^{-1}B_2')]\bar{P}$$

则方程(5.4.6)相应 $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_k$ 的解记为 \mathbf{P}_k^* , 且有

$$\mathbf{B}_1' \mathbf{P}_k^* = k^{-2} \mathbf{B}_1' \bar{\mathbf{P}} = k^{-2} \mathbf{C}$$

即有最优输出反馈

$$\mathbf{u}_k^* = -\bar{k}^{-2} \mathbf{y}$$

证 由假定条件

$$\mathbf{H}_1(s) = \mathbf{C}(sI - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}_1 \text{ 正实} \rightarrow \mathbf{H}_1'(s) \text{ 正实}$$

而 $\mathbf{H}_1'(s)$ 可视为 $\mathbf{H}_1(s)$ 的对偶系统

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}' \bar{x} + \bar{C} \bar{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{B}_1' \bar{x}$$

的传递函数矩阵。因此, 有类似定理的推证如下:

(1) 由 5.2 节的引理 5.2.1 和引理 5.2.2, 有如下分解式成立:

$$\mathbf{H}_1'(s) + \mathbf{H}_1(-s) = \bar{\mathbf{N}}_1'(-s) \bar{\mathbf{N}}_1(s)$$

设 $\bar{\mathbf{N}}_1(s)$ 的最小实现为 $(\bar{A}', \bar{C}', \bar{\mathbf{B}}_1')$, 知 $(\bar{\mathbf{B}}_1', \bar{A}')$ 可观。

由引理 5.2.3 并结合对偶系统性质, 则定理 5.4.1 所具有的假定条件 1° 和 2° 等价于存在一个 $\hat{\mathbf{P}} = \hat{\mathbf{P}}'$ 和 $\hat{\mathbf{Q}} = \bar{\mathbf{B}}_1 \bar{\mathbf{B}}_1'$ 使

$$\hat{\mathbf{P}} \bar{A}' + \bar{A}' \hat{\mathbf{P}} = -\hat{\mathbf{Q}} = -\bar{\mathbf{B}}_1 \bar{\mathbf{B}}_1' \quad (5.4.17)$$

$$\hat{\mathbf{P}} \bar{C}' = \bar{\mathbf{B}}_1 \Rightarrow \bar{C} \hat{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{B}}_1' \quad (5.4.18)$$

(2) 由于 $(\bar{\mathbf{B}}_1', \bar{A}')$ 可观, 则方程(5.4.17)有惟一解

$$\hat{\mathbf{P}} = \int_0^\infty e^{\bar{A}t} \bar{\mathbf{B}}_1 \bar{\mathbf{B}}_1' e^{\bar{A}'t} dt > 0$$

作 $\mathbf{P} = \hat{\mathbf{P}}^{-1}$ 则方程(5.4.17)变为

$$\bar{\mathbf{P}} \bar{A} + \bar{A}' \bar{\mathbf{P}} = -\bar{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{B}}_1 \bar{\mathbf{B}}_1' \bar{\mathbf{P}} \quad (5.4.19)$$

有解

$$\bar{\mathbf{P}} = \left(\int_0^\infty e^{\bar{A}t} \bar{\mathbf{B}}_1 \bar{\mathbf{B}}_1' e^{\bar{A}'t} dt \right)^{-1} > 0 \quad (5.4.20)$$

将式(5.4.19)与式(5.4.6)比较, 若在式(5.4.6)中取

$$\mathbf{Q} = \bar{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{P}} + \bar{\mathbf{P}} (\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1' - \mathbf{B}_2 \eta^{-1} \mathbf{B}_2') \bar{\mathbf{P}}$$

则式(5.4.6)即与式(5.4.19)同形,因此,若在式(5.4.4)中取

$$Q = \bar{P} \bar{Q} \bar{P} + \bar{P} (\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1' - \mathbf{B}_2 \eta^{-1} \mathbf{B}_2') \bar{P} \quad (5.4.21)$$

则式(5.4.6)为

$$\mathbf{P} \mathbf{A}' + \mathbf{A}' \mathbf{P} + \mathbf{P} Q \mathbf{P} + \bar{P} (\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1' - \mathbf{B}_2 \eta^{-1} \mathbf{B}_2') \bar{P}$$

得

$$\mathbf{P} (\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1' - \mathbf{B}_2 \eta^{-1} \mathbf{B}_2') \mathbf{P} = 0$$

显见,上式有解 $\mathbf{P} = \bar{P}$,也即式(5.4.6)有对应解 $\mathbf{P}^* = \bar{P}$ 。

再由式(5.4.18)代入 $\bar{P} = \hat{P}^{-1}$ 得

$$\hat{P} \mathbf{C}' = \bar{P}^{-1} \mathbf{C}' = \mathbf{B}_1 \rightarrow \mathbf{B}_1' \bar{P} = \mathbf{C}$$

即有最优输出反馈存在:

$$u^* = -\mathbf{B}_1' \mathbf{P}^* x = -\mathbf{B}_1' \bar{P} x = -\mathbf{C} x = -y \quad (5.4.22)$$

(3) 对任实数 $k \neq 0$,若在式(5.4.17)两边同乘 k ,并记

$$\bar{Q}_k = (k \bar{B}_1)(k \bar{B}_1)' = k^2 \bar{B}_1 \bar{B}_1' = k^2 \bar{Q}$$

考虑方程(5.4.15)同乘 k^2 后的同形方程

$$\hat{P}_k \mathbf{A}' + \mathbf{A} \hat{P}_k = -\hat{Q}_k = -k^2 \bar{B}_1 \bar{B}_1' = -k^2 \bar{Q}$$

上式有解

$$\hat{P}_k = k^2 \hat{P}$$

由式(5.4.19)有

$$\hat{P}_k^{-1} = \hat{P}_k = k^{-2} \bar{P}^{-1} = k^{-2} \hat{P} \quad (5.4.23)$$

式(5.4.18)对应有

$$\begin{aligned} \hat{P}_k^{-1} \mathbf{C}' &= k^2 \hat{P} \mathbf{C}' = k^2 \mathbf{B}_1 \\ \hat{P}_k^{-1} \mathbf{B}_1 &= k^{-2} \mathbf{C}' \rightarrow \mathbf{B}_1' \hat{P}_k = k^{-2} \mathbf{C} \end{aligned} \quad (5.4.24)$$

因此,若在式(5.4.4)中选

$$\begin{aligned} Q = Q_k &= \bar{P}_k \bar{Q} \bar{P}_k + \bar{P}_k (\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1' - \mathbf{B}_2 \eta^{-1} \mathbf{B}_2') \bar{P}_k \\ &= k^{-2} \bar{P} [\bar{Q} + k^{-2} (\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1' - \mathbf{B}_2 \eta^{-1} \mathbf{B}_2')] \bar{P} \end{aligned} \quad (5.4.25)$$

对应的方程(5.4.6)有解 $\mathbf{P}^* = \bar{P}_k$ 使得最优输出反馈解存在,为

$$u^* = -\mathbf{B}_1' \mathbf{P}^* x = -\mathbf{B}_1' \bar{P}_k x = -k^{-2} \mathbf{C} x = -k^{-2} y \quad (5.4.26)$$

推论证毕。

2. 下面考察输入 u 与输出 y 不同维数, 即 $m \neq l$ 的情况

有结论如下:

定理 5.4.2 对系统(5.4.1)和(5.4.2)假定 (A, B_1) 可控, 且 $\text{Re}\lambda(A) < 0$, 若存在一个 $m \times l$ 阵 F 使

- (1) $H_{1F} = FC(sI - A)^{-1}B_1$ 正实;
- (2) (FC, A) 可观。

则必存在可由 (A, B_1, FC) 确定的正定阵 \bar{P}_F 和半正定阵 \tilde{Q}_F , 当在式(5.4.4)中选

$$Q = Q_F = \tilde{Q}_F + \bar{P}_F(B_1 B_1' - B_2 \eta^{-1} B_2') \bar{P}_F \quad (5.4.27)$$

方程(5.4.6)有解 $P_F^* = \bar{P}_F$ 使得

$$B_1' P_F^* = B_1' \bar{P}_F = FC \quad (5.4.28)$$

即最优输出反馈 $u^* = -Fy$ 。

对任实数 $k \neq 0$, 若在式(5.4.4)中选

$$Q = Q_{Fk} = k^2 [\tilde{Q}_F + k^2 \bar{P}_F(B_1 B_1' - B_2 \eta^{-1} B_2') \bar{P}_F] \quad (5.4.29)$$

相应 Q_{Fk} 的方程(5.4.6)的解为 $P_{Fk}^* = k^2 \bar{P}_F$, 使

$$B_1' P_{Fk}^* = k^2 B_1' \bar{P}_F = k^2 FC$$

即有最优输出反馈

$$u_k^* = -k^2 Fy \quad (5.4.30)$$

证 与定理 5.4.1 类同, 只需用 FC 取代 C 的推证过程即可。

关于 \tilde{Q}_F, \bar{P}_F 的构成说明如下: 由分解式

$$H_{1F}(s) + H_{1F}'(-s) = N_{1F}'(-s)N_{1F}(s)$$

记 $N_{1F}(s)$ 的最小实现为 (A, B_1, FC) , 则定理中

$$\tilde{Q}_F = \tilde{C}_F' \tilde{C}_F \quad (5.4.31)$$

而相应的

$$\bar{P}_F = \int_0^\infty e^{At} \tilde{C}_F' \tilde{C}_F e^{A^* t} dt > 0 \quad (5.4.32)$$

由于 \tilde{C}_F 由 (A, B_1, FC) 决定, 因此, \tilde{Q}_F, \bar{P}_F 由 (A, B_1, FC) 决定, 从而式(5.4.27)和(5.4.29)中的 Q 由 (A, B_1, B_2, FC) 决定。其余证明从略。

推论 5.4.2 设定理 5.4.2 条件保持, 则必存在可由 (A, B_1, FC) 确定的正定

阵 $\bar{\mathbf{P}}_F$ 和半正阵 $\bar{\mathbf{Q}}_F$, 当在式(5.4.4)中选

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_F = \bar{\mathbf{P}}_F (\bar{\mathbf{Q}}_F + \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1' - \mathbf{B}_2 \eta^{-1} \mathbf{B}_2') \bar{\mathbf{P}}_F \quad (5.4.33)$$

相应方程(5.4.6)有解 $\mathbf{P}_F^* = \bar{\mathbf{P}}_F$ 使

$$\mathbf{B}_1' \mathbf{P}_F^* = \mathbf{B}_1' \bar{\mathbf{P}}_F = \mathbf{F}\mathbf{C} \quad (5.4.34)$$

即有最优输出反馈存在

$$\mathbf{u}^* = -\mathbf{F}\mathbf{y} \quad (5.4.35)$$

对任实数 $k \neq 0$, 若在式(5.4.4)中选

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_{fk} = k^{-2} \bar{\mathbf{P}}_F [\bar{\mathbf{Q}}_F + k^{-2} (\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1' - \mathbf{B}_2 \eta^{-1} \mathbf{B}_2')] \bar{\mathbf{P}}_F \quad (5.4.36)$$

对应的方程(5.4.6)的解 $\mathbf{P}_{fk}^* = -k^{-2} \bar{\mathbf{P}}_F$ 使

$$\mathbf{B}_1' \mathbf{P}_{fk}^* = k^{-2} \mathbf{B}_1' \bar{\mathbf{P}}_F = k^{-2} \mathbf{F}\mathbf{C} \quad (5.4.37)$$

即有最优输出反馈

$$\mathbf{u}_k^* = -k^{-2} \mathbf{F}\mathbf{y} \quad (5.4.38)$$

证 与推论 5.4.1 和定理 5.4.2 类同。

关于 $\mathbf{Q}_F, \bar{\mathbf{P}}_F$ 的构成说明如下: 由分解式

$$\mathbf{H}_{1F}(s) + \mathbf{H}_{1F}'(-s) = \bar{\mathbf{N}}_{1F}'(-s) \mathbf{N}_{1F}(s)$$

记 $\bar{\mathbf{N}}_{1F}(s)$ 的最小实现为 $(\mathbf{A}, (\mathbf{F}\mathbf{C})', \bar{\mathbf{B}}_{1F}')$, 则定理中

$$\bar{\mathbf{Q}}_F = \bar{\mathbf{B}}_{1F} \bar{\mathbf{B}}_{1F}'$$

而

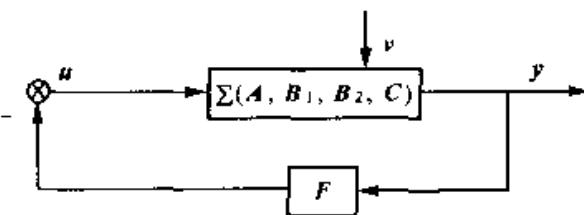
$$\bar{\mathbf{P}}_F = \left[\int_0^\infty e^{At} \bar{\mathbf{B}}_{1F} \bar{\mathbf{B}}_{1F}' e^{A't} dt \right]^{-1} > 0 \quad (5.4.39)$$

因 $\bar{\mathbf{B}}_{1F}$ 由 $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_1, \mathbf{F}\mathbf{C})$ 决定, 故 $\bar{\mathbf{Q}}_F, \bar{\mathbf{P}}_F$ 亦由 $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_1, \mathbf{F}\mathbf{C})$ 决定, 从而所选的 \mathbf{Q} (见式(5.4.33)和(5.4.36)) 可由 $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{F}\mathbf{C})$ 决定, 其余证明从略。

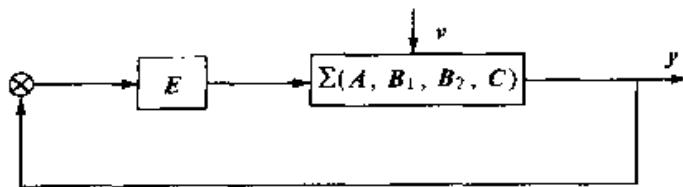
注释 1 上述对 $\mathbf{u} \sim \mathbf{y}$ 不同维是假定对 $\mathbf{H}_1(s) = \mathbf{C}(sI - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}_1$ 存在一个 $m \times l$ 阵 \mathbf{F} , 使 $\mathbf{H}_{1F}(s) = \mathbf{F}\mathbf{H}_1(s)$ 正实, $(\mathbf{F}\mathbf{C}, \mathbf{A})$ 可观而导出的结论。对偶地, 也可设存在一个 $m \times l$ 阵 \mathbf{E} 使 $\mathbf{H}_{1E}(s) = \mathbf{C}(sI - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}_1 \mathbf{E} = \mathbf{H}_1(s) \mathbf{E}$ 正实, 且 $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_1 \mathbf{E})$ 可控, 则可导出类似的结论。

这两种选择的框图为:

\mathbf{H}_{1F} 系统如图 5.1。

图 5.1 H_{1F} 系统框图

H_{1E} 系统如图 5.2。

图 5.2 H_{1E} 系统框图

这两种选择参数可能不同，但在正实性意义下是等价的。

注释 2 应强调的是本节讨论问题的基础是在所选择的 Q 能满足第二章中关于状态反馈存在性条件。没有这个基础假定，则还需对所选定的 Q 的形式证明状态反馈解的存在性才有意义。也可以从系统参数 (A, B_1, B_2, C) 提出限制条件使依 (A, B_1, B_2, C) 决定的 Q 的选择能保持状态反馈解的存在性，即一般 Riccati 方程有实对称镇定解，这里不再做深入讨论。

下面对定理 5.4.1 选择的 $Q = \tilde{Q} + \tilde{P}M\tilde{P}$ 使方程

$$PA + A'P + Q - PMP = 0 \quad (5.4.40)$$

有实对称解 $P = \tilde{P} > 0$ 的情况，对应闭环稳定性即 $A - M\tilde{P}$ 的稳定性做如下定性分析：

考虑闭环后

$$A - M\tilde{P} = A - (B_1 B_1' - B_2 \eta^{-1} B_2') \tilde{P} = \bar{A} \quad (5.4.41)$$

由于 \tilde{P} 满足

$$\tilde{P}A + A'\tilde{P} = -\tilde{Q} = -\tilde{C}'\tilde{C}$$

(\tilde{C}, A) 可观，又 $\text{Re}\lambda(A) < 0$ ，系统在无干扰下闭环必有 $\hat{A} = A - B_1 B_1' \tilde{P}$ 渐近稳定，见 5.2 节。

因此可见，对 B_2 是确定矩阵， \tilde{P} 是由选择 Q 确定后，直接由 (A, B_1, \tilde{C}) 确定

而与 η 无关。可见在干扰系统闭环状态阵

$$A - B_1 B_1' \bar{P} + B_2 \eta^{-1} B_2' \bar{P} = \hat{A} + B_2 \eta^{-1} B_2' \bar{P}$$

中,如果 η^{-1} 充分小,则不会破坏 $\hat{A} = A - B_1 B_1' \bar{P}$ 的稳定性。

下面说明 η^{-1} 充分小是与 δ 充分小一致的。

由 η 的定解方程

$$\max \lambda(\mathbf{U}(\eta)) = \delta^2 / \delta_0^2 \quad (5.4.42)$$

$$\begin{aligned} U(\eta) &= \int_0^\infty e^{\hat{A}'t} \bar{P} B_2 \eta^{-2} B_2' \bar{P} e^{\hat{A}t} dt \\ &= \int_0^\infty e^{(\hat{A} - B_2 \eta^{-1} B_2' \bar{P})t} \bar{P} B_2 \eta^{-2} B_2' \bar{P} e^{(\hat{A} + B_2 \eta^{-1} B_2' \bar{P})t} dt \\ &= \int_0^\infty e^{\hat{A}'t} [e^{(\bar{P} B_2 \eta^{-1} B_2')t} \bar{P} B_2 \eta^{-2} B_2' \bar{P} e^{(B_2 \eta^{-1} B_2' \bar{P})t}] e^{\hat{A}t} dt \end{aligned} \quad (5.4.43)$$

由于

$$e^{(B_2 \eta^{-1} B_2' \bar{P})t} = 1 + B_2 \eta^{-1} B_2' \bar{P} t + \frac{(B_2 \eta^{-1} B_2' \bar{P})^2}{2!} t^2 + \dots$$

当 η^{-1} 充分小,将上述展开式代入式(5.4.43)并略去 η^{-3} 以上项,则有

$$U(\eta) = \int_0^\infty e^{\hat{A}'t} \bar{P} B_2 \eta^{-2} B_2' \bar{P} e^{\hat{A}t} dt \triangleq \eta^{-2} \hat{U} \quad (5.4.44)$$

式中

$$\hat{U} = \int_0^\infty e^{\hat{A}'t} \bar{P} B_2 B_2' \bar{P} e^{\hat{A}t} dt$$

因此

$$\max \lambda(\mathbf{U}(\eta)) \approx \eta^{-2} \max \lambda(\hat{U}) \approx \delta^2 / \delta_0^2 \quad (5.4.45)$$

由于 U 为常数矩阵,假定 δ_0^2 为确定量,则 η^{-1} 与 δ^2 有近似的正比关系,由此得到的结论是:对不确定性系统最优输出反馈问题解的存在性,在本节所选择的 Q 的情况下,要受到干扰平方积分界限值 δ^2 的限制。对充分小的干扰积分界限值 δ^2 ,则闭环系统的稳定性是可以保持的,也即输出反馈解存在。

5.5 不确定性系统 $\max \min$ 鲁棒最优动态输出反馈问题

在 5.2 和 5.4 节中给出了确定性系统和不确定性系统在相应条件下的静态输

出反馈控制律。然而,如果那些条件不满足,则可能不存在静态最优输出反馈。众所周知,在确定性系统的情况下,动态输出反馈总是可以找到的。文献[228]和[255]中提出了二次指标中加入适当的控制作用导数加权项或与控制作用有关的动态变量后,可利用得到的扩展系统的静态最优状态反馈求得原系统的动态输出最优反馈控制律。

在不确定性系统情况下,是否也可以找到动态输出反馈呢?本节将采用这种思想并结合5.2和5.4节的结果探讨动态最优输出反馈设计问题。

考虑系统

$$\dot{x} = Ax + B_1 u + B_2 v, \quad x(0)'x(0) = x_0'x_0 \leq \delta_0^2 \quad (5.5.1)$$

$$y = Cx \quad (5.5.2)$$

式中, $x \in \mathbb{R}^n$; $u \in \mathbb{R}^m$; $v \in \mathbb{R}^r$; $y \in \mathbb{R}^l$ 。干扰约束

$$\int_0^\infty v'v dt \leq \delta^2 \quad (5.5.3)$$

若式(5.5.1)~(5.5.3)在指标:

$$J = \max_{\|v\|_2^2 \leq \delta^2} \min_u \int_0^\infty (x'Qx + u'u) dt$$

下无静态最优输出反馈,则可考虑引入如下 u, w 的动态过程:

$$\dot{z}_1 = A_1 z_1 + B_1 w \quad (5.5.4)$$

$$u^* = -C_1 z_1 + D_1 w \quad (5.5.5)$$

式中, $z_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$; $w \in \mathbb{R}^{m_1}$; $z_1(0) = z_0$ 且

$$z_0'z_0 \leq \delta_{10}^2 \quad (5.5.6)$$

这里的 A_1, B_1, C_1, D_1 , 假定是事先根据某些设计要求(如使连接后系统满足可实现静态最优输出反馈的条件,见5.2和5.4节以及其他指标考虑)已确定的设计参数。

令 $\hat{x} = \begin{bmatrix} x \\ z_1 \end{bmatrix}$, 将式(5.5.1)~(5.5.6)扩展为

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 C_1 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 D_1 \\ B_1 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix} v \quad (5.5.7)$$

$$\triangleq \hat{A} \hat{x} + \hat{B} w + \hat{D} v$$

$$\hat{y} = [\mathbf{C} \quad 0] \begin{bmatrix} \hat{x} \\ z_1 \end{bmatrix} \triangleq \hat{\mathbf{C}} \hat{x} \quad (5.5.8)$$

初值约束

$$\hat{x}'(0)\hat{x}(0) = \hat{x}_0'\hat{x}_0 = x_0'x_0 + z_0'z_0 \leq \hat{\delta}_0^2 \leq \delta_0^2 + \delta_{10}^2 \quad (5.5.9)$$

干扰约束不变

$$\int_0^\infty v'v dt \leq \delta^2 \quad (5.5.10)$$

指标提为

$$J = \max_{\|v\|^2 \leq \delta^2} \min_w \int_0^\infty (x'Qx + w'w) dt \quad (5.5.11)$$

参考 2.4 节, 则式(5.5.7)~(5.5.11)的状态反馈解为

$$w^* = -\hat{\mathbf{B}}'P\hat{x}, \quad v^* = \eta^{-1}\hat{\mathbf{D}}'\hat{\mathbf{P}}\hat{x} \quad (5.5.12)$$

P 满足

$$\hat{\mathbf{P}}\hat{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{A}}'\hat{\mathbf{P}} + \hat{\mathbf{Q}} - \hat{\mathbf{P}}(\hat{\mathbf{B}}'\hat{\mathbf{B}} - \eta^{-1}\hat{\mathbf{D}}\hat{\mathbf{D}}')\hat{\mathbf{P}} = 0 \quad (5.5.13)$$

式中, $\eta > 0$ 为待定常数, 满足

$$\max_{\|\hat{x}_0\|^2 \leq \delta_0^2} \int_0^\infty v'v dt \leq \delta^2 \quad (5.5.14)$$

详细求解过程同 2.4 节的状态反馈问题。

从上面可以看出, 如果实现了对式(5.5.7)~(5.5.14)的最优静态输出反馈, 即

$$w^* = -\hat{\mathbf{B}}'P\hat{x} = -F\hat{\mathbf{C}}\hat{x} = -Fy \quad (5.5.15)$$

则由方程(5.5.1)~(5.5.3)便得最优动态输出反馈解

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + Dv \\ y &= Cx \\ \dot{z}_1 &= A_1z_1 + B_1w^* = A_1z_1 - B_1Fy \\ u &= C_1z_1 + D_1w^* = C_1z_1 - D_1Fy \end{aligned} \quad (5.5.16)$$

上述系统的闭环结构如图 5.3 所示。

显见, 系统(5.5.16)为原系统的闭环动态输出反馈结构。

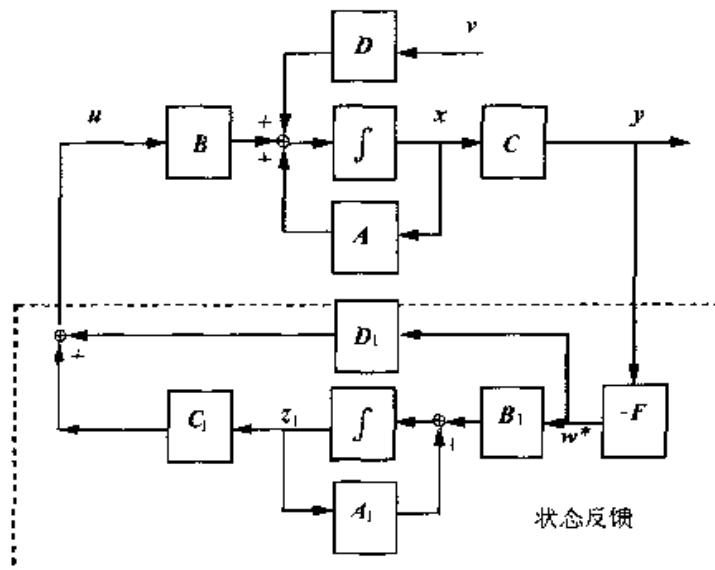


图 5.3 不确定系统闭环动态输出反馈结构

至此,系统(5.5.1)~(5.5.3)的动态最优输出反馈设计问题可提为:设计一个 $w \sim u$ 动态辅助过程(5.5.4)~(5.5.6)以满足使扩展系统(5.5.7)和(5.5.8)有静态最优输出反馈问题解的存在性条件。对扩展系统(5.5.7)~(5.5.11)的静态最优输出反馈问题是:寻求一个适当 $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}'$ 使得系统(5.5.7)~(5.5.10)在指标(5.5.11)下有最优输出反馈

$$w^* = -\hat{\mathbf{B}}' \hat{\mathbf{P}} \hat{x} = -\hat{\mathbf{F}} \hat{\mathbf{C}} \hat{x} = -\hat{\mathbf{F}} y$$

即有 $\hat{\mathbf{B}}' \hat{\mathbf{P}} = \hat{\mathbf{F}} \hat{\mathbf{C}}$ 成立。式中, $\hat{\mathbf{P}}$ 满足 Riccati 方程(5.5.13), 并使闭环系统渐近稳定。

最优输出反馈问题解要求:

- 1) \mathbf{Q} 的存在条件(用 $\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}}, \hat{\mathbf{D}}$ 表示);
- 2) \mathbf{Q} 的构造(用 $\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}}, \hat{\mathbf{D}}$ 表示)。

由式(5.5.16)知,只要得到了系统(5.5.7)~(5.5.11)问题的静态最优输出反馈,便可得到系统(5.5.1)~(5.5.3)的动态输出反馈设计解。而对系统(5.5.7)~(5.5.11)的静态输出反馈问题求解又完全回到了 5.4 节问题的形式。因此,其结论可类推给出。此处从略。

下面做两点说明:

(1) 动态辅助过程(5.5.4)~(5.5.6)的设计($\mathbf{A}, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1, \mathbf{D}_1$)要根据能使扩展系统(5.5.7)~(5.5.11)静态最优输出反馈存在条件满足来进行,诸如可控性、可观性、正实性等要求。其阶数与维数的选择也应依据此原则要求而取最小值,这是一个比较复杂的设计问题,有待于进一步研究。

(2) 寻求动态输出反馈的原因是由于原系统静态输出反馈不能实现。然而,

静态输出反馈不存在的严格结论本章尚未给出。因为 5.2 和 5.4 节的定理结论只是静态输出反馈存在的一种充分条件,不满足此条件并不能断定没有静态输出反馈存在。因此,这一基础上的欠缺妨碍了采用这一结论对动态输出反馈问题的完善的研究结论。可见,动态输出反馈的彻底解决仍有赖于静态输出反馈问题的完全解。所以,本节是在本章前节所得结论的基础上给出了解决动态输出反馈设计问题求解的一种思路,并没有解决全部静态输出反馈不能实现的动态输出反馈问题。与确定性系统中能控可观系统的动态反馈总是可以实现的结论相比,这是个遗憾,然而也表明,这是一个很有意义的继续研究方向。

5.6 本章小结

本章研究了在 LQ 指标下线性定常系统的最优输出反馈问题,其思想是根据系统参数(A, B, C)选择适当的指标加权阵 Q 使得最优状态反馈可表成输出反馈形式。对确定性系统给出了基于正实性条件下的最优静态输出反馈存在的一种充分条件。这个结论从数学上看可以认为是找到了 Riccati 方程与 Lyapunov 方程的一个契合点,从控制系统观点看,则可看成是 LQ 最优控制问题与系统镇定问题的一个契合点。在此基础上,又探讨了不确定性系统的静态最优输出反馈解的相应存在条件,并依此研究了动态最优输出反馈问题的一种思路,也是达到与 H_∞ 问题动态反馈设计目的相对应的一条途径。

第六章 LQL 方法与 H_∞ 方法应用设计比较

6.1 引言

Zames^[20]在 1981 年提出的 H_∞ 方法较好地解决了 LQG 理论中所存在的鲁棒稳定性较差的问题。简单地说, H_∞ 方法是以控制系统内某些信号间的传递函数(矩阵)的 H_∞ 范数为优化指标的方法, 自其产生便受到学者们的关注, 此后, 它的发展相当迅速, 但其早期研究所借助的算子理论和解析函数的插值理论^[179]使其频域设计十分复杂, 不易于工程应用, 因而许多学者探讨采用时域状态空间方法解决 H_∞ 问题的途径。具有代表性的是 Doyle 等在文献[27] 中给出的状态空间中基于两个代数 Riccati 方程的直接方法。此外, 文献[106] 中类比 LQG 方法采用时域优化方法去处理 H_∞ 方法所解决的 L_2 有界不确定性抑制问题, 即在一定条件下标准 H_∞ 问题提法可等价于具有 L_2 有界不确定性的系统的时域 maxmin 优化问题提法, 后者的求解方法是 LQL 方法。在理论上它与 Wiener-Hopf, LQG 和 H_∞ 方法构成了如图 1.2 的关系框图, 从中可见 LQL 方法是对时域优化理论 LQG 方法的扩展, 也是对频域方法的对称补充, 形成了一个比较完整的理论研究框架。

在本书的第二章及第三章中已对 LQL 方法进行了深入的讨论。注意到第一章中曾明确指出, 在一定条件下, 可将系统的内摄动和外干扰统一归范为 L_2 有界不确定性来处理。相应地, 由 LQL 设计方法所得的控制器也能够对内摄动和外干扰同时达到一定程度的抑制。这样, 在一定范围内, 我们可就 LQL 方法所提出的背景, 在微分对策意义下, 进一步探讨它的问题提法与 H_∞ 问题提法之间的关系; 并针对在实际工程应用中各自所遇到的问题及解决方法展开讨论, 推动 LQL 方法从理论向实用发展, 力求为工程设计人员提供一些实用设计准则。

6.2 H_∞ 控制综合

6.2.1 标准 H_∞ 控制问题

H_∞ 优化问题从 Zames 所讨论的 SISO(单入单出)系统的 H_∞ 灵敏度优化问题^[20, 180]为起点, 经过在 MIMO(多入多出)系统中的推广^[123]及 SISO 系统和 MIMO 系统的鲁棒稳定问题的研究^[22, 24], 发展到混合灵敏度 H_∞ 优化设计问题^[46, 181, 182]。而

当状态空间方法可应用于 H_∞ 优化问题的求解时, 其研究开始向一般性问题发展, 逐步形成了对标准 H_∞ 控制问题的研究^[26]。

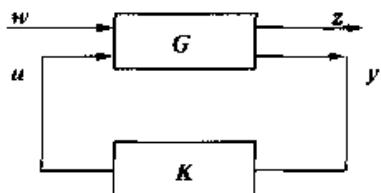


图 6.1 标准 H_∞ 控制问题框图

标准 H_∞ 控制问题的框图如图 6.1 所示。图中 w , z , u 和 y 各自为外干扰、被控输出、控制和量测信号, G 和 K 分别表示广义受控装置和控制器。前者包括实际受控对象和加权函数, 是系统的给定部分, 与设计目标有关。控制器 K 是待设计的部分。一般假设传递函数矩阵 $G(s)$ 和 $K(s)$ 是真 (proper) 实有理函数矩阵。令 $F_t(G, K)$ 是 K 的线性分式变换 (linear fractional transformation), 则 H_∞ 控制的标准问题是: 求一真实有理的 K , 使 G 为内稳定, 并使传递函数矩阵 $F_t(G, K)$ 的 H_∞ 范数极小, 即

$$\min_{K \text{ 使 } G \text{ 内稳定}} \| F_t(G, K) \|_\infty. \quad (6.2.1)$$

或表述为: 求所有真实有理的 K , 使 G 内稳定, 且使

$$\| F_t(G, K) \|_\infty < \gamma, \quad 0 < \gamma \in \mathbb{R} \quad (6.2.2)$$

前者称为 H_∞ 最优控制问题, 后者称为 H_∞ 次最优控制问题。

控制系统设计中的许多不同要求的 H_∞ 优化问题都能转化为上述的 H_∞ 标准问题, 如跟踪问题、鲁棒稳定性问题和模型匹配问题^[26]等。

解决 H_∞ 标准问题的方法很多, 其中最常见的方法有基于 Hankel 范数逼近的方法^[26] 和基于 Riccati 方程的方法^[27]。前者的代表性结果是“1984”方法^[27], 它在数学结构上艰深而完美, 同时为求解而付出的计算量也是相当大的, 求得的控制器非常复杂, 维数也很高。而基于 Riccati 方程的直接方法使 H_∞ 问题的算法得到了显著简化, 控制器的阶次也得到了降低, 特别是文献[27]中所给的控制器虽不像 H_2 控制器那么明显, 但也具有了一定的分离性结构, 即 H_∞ 输出反馈控制器可以看做是在“最坏”干扰下的全信息 (full information) 控制器^[27] 的输出估计器。这种分离性解释不仅使得 H_∞ 控制器的结构更加明确, 对进一步研究 H_∞ 控制理论与 H_2 (LQG) 及这里所研究的 LQL 方法之间的联系也有着很重要的意义。

6.2.2 混合灵敏度 H_∞ 控制问题

混合灵敏度问题是 H_∞ 控制的最典型问题之一。 H_∞ 控制的应用工作很多都集中在混合灵敏度 H_∞ 优化设计问题上。混合灵敏度设计能够将系统的鲁棒稳定性要求和性能要求转化为 H_∞ 范数意义下的最优问题或 H_∞ 标准问题。图 6.2 所示的是输

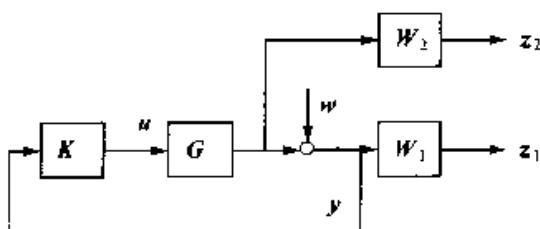


图 6.2 混合灵敏度 S/T 问题框图

出乘性不确定性系统的混合灵敏度(S/T)问题。其中,权函数 $W_1(s)$ 和 $W_2(s)$ 分别反映了系统在干扰作用下的性能要求和在模型不确定性下的鲁棒稳定性要求,即

$$\left\| \begin{array}{c} W_1 S \\ W_2 T \end{array} \right\|_\infty < 1 \quad (6.2.3)$$

设计中权函数的选取至关重要,文献[183]中给出了直接从反馈结构中提取出性能权函数以满足时域约束的方法,对于 SISO 调节器,使其输出在模型不确定性、控制器的饱和及外阶跃干扰下保持在指定的允许变化范围内。这里将依据该法选取灵敏度权函数 $W_1(s)$ 和补灵敏度权函数 $W_2(s)$ 。为此,将文献[183]中的结论简述如下:

考慮受外阶跃干扰影响的 SISO 调节系统

$$Y(s) = \tilde{G}_u(s)U(s) + G_D(s)D(s) \quad (6.2.4)$$

式中, $Y(s)$ 是期望输出的变化量; $U(s)$ 是名义控制量的变化量; $D(s)$ 是外阶跃干扰。设计目的之一是使其幅值 γ 得到最大化。假定 $\tilde{G}_u(s)$ 和 $G_D(s)$ 是真的,且无隐含的不稳模态, $\tilde{G}_u(s)$ 具有输出乘性不确定性。

设期望输出为 $z_0(t)$,对其可允许的变化范围限为

$$|z(t) - z_0(t)| = |y(t)| \leq \delta_y \quad (6.2.5)$$

设保持期望输出所需的控制量为 $\hat{u}_0(t)$,则对控制量的约束为

$$|\hat{u}(t) - \hat{u}_0(t)| = |u(t)| \leq \delta_u \quad (6.2.6)$$

定理 6.2.1 对于图 6.3 所示的反馈结构,若 $\|W_2 T\|_\infty < 1$ 中的 $W_2(s)$ 是幅值满足如下不等式的稳定传函

$$|W_2(jw)| \geq \left| \frac{\gamma \tilde{G}_D(jw)}{\delta_u \tilde{G}_u(jw)} \right| + |\hat{W}_2(jw)| \quad (6.2.7)$$

式中, $\hat{\gamma} = \gamma\Lambda$, $\Lambda = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$, 则当 $d(t)$ [注: $d(t)$ 的拉氏变换为式(6.2.4) 中的 $D(s)$] 是幅值为 γ 的阶跃输入时, 有 $|u(t)| \leq \delta_u$ 。

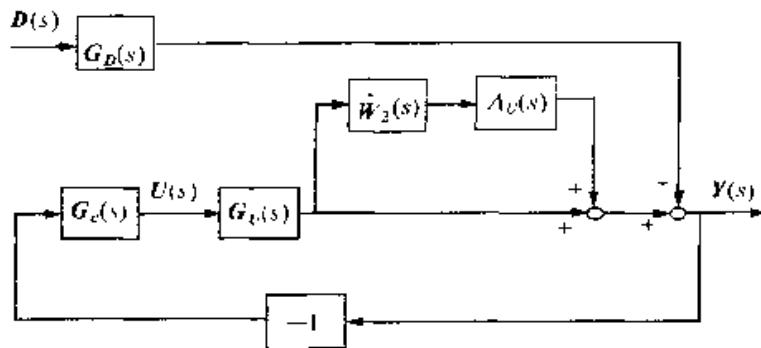


图 6.3 反馈设计系统框图

定理 6.2.2 对于图 6.3 所示的反馈结构, 若 $\| (W_1 S_0 + W_2 T_0) \|_\infty < 1$ 中的 $W_1(s)$ 选为

$$W_1(s) = \frac{\hat{\gamma} G_D(s)}{\delta_y} \quad (6.2.8)$$

式中, S_0 , T_0 为标称系统的灵敏度和补灵敏度函数; $W_2(s)$ 如定理 6.2.1 中所定义。则当 $d(t)$ 是幅值为 γ 的阶跃输入时, 有 $|y(t)| \leq \delta_y$ 。

证 可参见文献[183], 这里从略。

定理 6.2.1 和定理 6.2.2 明确给出了混合灵敏度设计中满足时域指标要求的权函数的选取公式, 其中包含待定参数量 $\hat{\gamma}$, 为此需分析其确定方法。注意到为使输出保持在允许的变化范围内所需的最小控制量取决于三个方面: 输出的可允许变化范围、扰动的大小及不确定性的大小, 系统给定后, 控制量的上下限和输出的可允许变化范围作为性能要求也就给定, 所以希望通过反馈控制器的设计以优化系统的可利用资源, 使输出指标得到满足的同时, 最大化可允许的阶跃扰动。按照这样的设计思想, 再根据鲁棒性能设计的必要条件

$$\min \{ \|W_1(jw)\|, \|W_2(jw)\|\} < 1, \quad \forall w \quad (6.2.9)$$

给出 $\hat{\gamma}$ 的初始猜测值 $\hat{\gamma}^*$, 然后逐步增大, 直到稳定性设计无解时为止。设计结束时, Λ 可知, 则 γ , 即最大可允许的阶跃扰动的幅值也便可知。

6.3 H_∞ 方法与 LQL 方法之间的关系

6.3.1 微分对策意义下的等价性

文献[27]中已提到次最优 H_∞ 控制器 K_{sub} 也是指标为 $\|z\|_2^2 - \gamma \|w\|_2^2$ 的

minmax 控制器。这说明 H_∞ 控制问题与二次型微分对策问题之间存在着密切联系。另外, Khargonekar, Petersen, Rotea 和 Zhou 在讨论 H_2 状态反馈控制问题的求解中^[63, 64, 65, 66], 初步建立了 H_∞ 最优控制与二次稳定及线性二次微分对策之间的联系。文献[65]和[66]中还证明了采用动态状态反馈甚至采用非线性时变状态反馈时所能达到的 H_∞ 指标, 并不比采用定常状态反馈更好。这些都促使了部分学者开始注意到应用微分对策论思想的线性二次鲁棒最优控制可作为时域求解 H_∞ 问题的途径。其中, 文献[106]中指出了可从具有 L_2 有界不确定性系统的时域 maxmin 优化的角度来提出 H_∞ 标准问题。Limebeer, Anderson, Khargonekar 和 Green^[69] 又研究了时变系统的 H_∞ 控制问题的对策论解法。因对策论中所需的数学基础为“配平方(completing the square)”, 所以应用对策论的求解方法相对较为简单。

在 H_∞ 控制问题中, 全信息 H_∞ 问题与 LQ 对策论存在着直接的关系, 而基于此, 我们可建立本论文所重点研究的不确定性系统的鲁棒最优设计 LQL 方法的状态反馈解与全信息 H_∞ 控制问题解在微分对策意义上的关系。

为便于与 LQL 方法进行比较, 这里考虑全信息 H_∞ 控制问题中的广义受控对象 G 有如下实现:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 u + B_2 v \\ y &= \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} \\ z &= C_2 x + D_2 u \end{aligned} \tag{6.3.1}$$

并满足假设: ① $[A, B_1]$ 可稳; ② $D_2' [C_2 \quad D_2] = [0 \quad I]$ 。

全信息 H_∞ 控制问题可叙述如下: 对于给定的常数 $\gamma > 0$, 求取使图 6.3 系统达到内稳定且满足 $\|T_v\|_\infty < \gamma$ 的所有控制器 K , 其中

$$T_v(s) = (C_2 + D_2 K)(sI - A - B_1 K)^{-1} B_2$$

关于其解有如下结论^[27]:

定理 6.3.1 图 6.3 系统满足假设①和②时, 使系统内稳定且 $\|T_v\|_\infty < \gamma$ 的控制器 K 存在的充要条件是, 存在 $Q > 0$, 使得代数 Riccati 方程

$$A'P + PA - P(B_1 B_1' - \gamma^{-2} B_2 B_2')P + C_2' C_2 = 0 \tag{6.3.2}$$

存在正定对称解 P 。此时, 所有形为

$$u = -(\Phi_1 x + \Phi_2 w) \tag{6.3.3}$$

使 $\|T_v\|_\infty < \gamma$ 的控制器为

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^* + J(\mathbf{v} - \mathbf{v}^*) \quad (6.3.4)$$

式中,

$$\mathbf{u}^* = -\mathbf{F}_\infty \mathbf{x} = -\mathbf{B}_1' \mathbf{P} \mathbf{x}, \quad \mathbf{v}^* = \gamma^{-2} \mathbf{B}_2' \mathbf{P} \mathbf{x} \quad (6.3.5)$$

$\gamma^{-1} J$ 是任意的 $L_2[0, \infty)$ 上的线性因果严格紧算子 (linear causal strictly contractive operator), 即 $\|J\|_\infty < \gamma$; 每个 θ_1 和 θ_2 可参数化为

$$\theta_1 = \mathbf{F}_\infty + \gamma^{-2} J \mathbf{B}_2', \quad \theta_2 = -J \quad (6.3.6)$$

证 可参见文献 [27], 与之不同的另一种证明见文献 [39] 的附录 A。

注意到由式(6.3.4)给出的控制器, 当干扰 $\mathbf{v} = \mathbf{v}^*$ 时, J 算子输入为零, 则相应的控制为 $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*$, 事实上, $(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*)$ 构成了代价函数为

$$J(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_0^\infty (\mathbf{z}' \mathbf{z} - \gamma^2 \mathbf{v}' \mathbf{v}) dt = \|\mathbf{z}\|_2^2 - \gamma^2 \|\mathbf{v}\|_2^2$$

的双人零和 LQ 对策问题的一对鞍点平衡策略。简要说明如下:

由式(6.3.1)及(6.3.2)可得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{x}' \mathbf{P} \mathbf{x} &= -\|\mathbf{C}_2 \mathbf{x}\|^2 - \gamma^{-2} \|\mathbf{B}_2' \mathbf{P} \mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{B}_1' \mathbf{P} \mathbf{x}\|^2 \\ &\quad + 2\langle \mathbf{v}, \mathbf{B}_2' \mathbf{P} \mathbf{x} \rangle + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{B}_1' \mathbf{P} \mathbf{x} \rangle \end{aligned}$$

配平方, 再由 $\mathbf{C}_2 \mathbf{x}$ 与 $\mathbf{D}_2 \mathbf{u}$ 之间的正交性得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{x}' \mathbf{P} \mathbf{x} &= -\|\mathbf{z}\|_2^2 + \gamma^2 \|\mathbf{v}\|_2^2 - \gamma^2 \|\mathbf{v} - \gamma^{-2} \mathbf{B}_2' \mathbf{P} \mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{u} + \mathbf{B}_1' \mathbf{P} \mathbf{x}\|^2 \\ &\quad - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{B}_1' \mathbf{P} \mathbf{x} \rangle - 2\langle \mathbf{v}, \mathbf{B}_2' \mathbf{P} \mathbf{x} \rangle \end{aligned} \quad (6.3.7)$$

设 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(\infty) = 0$, $\mathbf{v} \in L_2[0, \infty]$, 对式(6.3.7)从 $t = 0$ 到 $t = \infty$ 积分得

$$\|\mathbf{z}\|_2^2 - \gamma^2 \|\mathbf{v}\|_2^2 = \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^*\|_2^2 - \gamma^2 \|\mathbf{v} - \mathbf{v}^*\|_2^2 \quad (6.3.8)$$

式中, $\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*$ 如式(6.3.5)所定义。从式(6.3.8)及(6.3.5)不难得到

$$J(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}) \leq J(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*) \leq J(\mathbf{u}, \mathbf{v}^*)$$

在对策论中有如下命题:

命题 6.3.1^[38] 令 $\phi: U \times V \rightarrow \mathbb{R}$ 是一泛函, 对于如下优化问题

$$\inf_{\mathbf{u}} \sup_{\mathbf{v}} \phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \gamma^* \quad (6.3.9)$$

$$\sup_{\mathbf{v}} \inf_{\mathbf{u}} \phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \gamma_* \quad (6.3.10)$$

总有 $\gamma_* \leq \gamma^*$ 成立, 而当鞍点存在时, 等式成立。

这样当鞍点策略存在时, 与式(6.3.9)优化问题相对应的 H_∞ 指标优化问题也可通过相对较易处理的式(6.3.10)优化问题的解决来求解, 因为两者可达到相同的代价指标。为此, 给出如下的优化问题提法:

考虑具有 L_2 有界不确定性的系统

$$\dot{x} = Ax + B_1u + B_2v \quad (6.3.11)$$

$$y = C_1x + D_1v$$

系统中, 不确定性约束、初始条件如式(2.4.2)和(2.4.3)所示, 优化指标按式(2.4.4)选取, 同时其又可定义为

$$J := \max_{\|v\|_2^2 \leq \delta^2} \min_{\|u\|_2^2 \leq \delta^2} \int_0^\infty z'z dt = \max_{\|v\|_2^2 \leq \delta^2} \min_{\|u\|_2^2 \leq \delta^2} \|z\|_2^2 \quad (6.3.12)$$

式中,

$$z = \begin{bmatrix} Q^{1/2} \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} u := C_2x + D_2u \quad (6.3.13)$$

$$Q = Q' \geq 0, \quad C_2 := \begin{bmatrix} Q^{1/2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$$

z 变量可理解为人为虚设或期望的输出。这里所取的 z 定义亦可使指标有意义。注意到 J 指标是 LQ 问题的标准形式, 其工程意义明确, 也可与 LQG 指标相对应。

令状态反馈集合为

$$S_k(A, B_1) := \{K: \operatorname{Re}\lambda(A + B_1K) < 0\}$$

则对 $K \in S_k(A, B_1)$, 有

$$\dot{x} = (A + B_1K)x + B_2v$$

$$z = (C_2 + D_2K)x$$

记 $Z(s) = T_v(s)v(s)$, 式中, $T_v(s)$ 是由式(6.3.1)中所定义系统的导出式。而

$$\|T_v\|_\infty = \sup_{\|v\|_2^2 \leq 1} \|z\|_2 \quad (6.3.14)$$

比较式(6.3.12)和(6.3.14), 可见对如式(6.3.12)二次型指标的优化等价于对 H_∞ 指标 $\|T_v\|_\infty$ 的优化, 但在这种等价关系中所对应的 $Q = C_2'C_2$, $R = D_2'D_2$ 是

特定的,是由被控输出直接决定的,所以可认为 H_∞ 指标是 LQ 二次型指标的一个特殊情况,相对而言,LQ 二次型指标则具有更广泛的意义,也为设计提供了更大的自由度。

第二章中定理 2.4.1 给出了考虑初值影响的 $\max\min$ 线性二次型问题的解,对应地,再考察考虑初值影响的全信息 H_∞ 控制问题,即 $x(0) = x_0 \neq 0$ 。由式(6.3.8)得

$$\|z\|_2^2 - \gamma^2 \|v\|_2^2 - x_0' P x_0 = \|u - u^*\|_2^2 - \gamma^2 \|v - v^*\|_2^2$$

当取鞍点平衡策略(u^*, v^*)时,得

$$\|z\|_2^2 = \gamma^2 \|v\|_2^2 + x_0' P x_0 = \gamma^2 \delta^2 + x_0' P x_0 \quad (6.3.15)$$

由鞍点的定义可知式(6.3.9)应与式(6.3.10)相等,所以 $\gamma = \eta^{1/2}$ 。

在 H_∞ 最优问题中, γ 参数表征了闭环对 L_2 有界不确定性的抑制程度,是一个需通过反复试探而定的值。而定理 2.4.1 中 η 是对应一个初态约束限制给定的一个确定常数。所以可认为定理 2.4.1 给出了 LQL 设计对 L_2 有界不确定性抑制程度的确定性刻画。

与全信息 H_∞ 控制问题的解相对照,可知定理 2.4.1 所给解只是解集(6.3.4)中的一个对应于 LQ 对策问题的鞍点平衡解。这不难解释,因为前述所考虑的是全信息 H_∞ 次优控制问题,对任意的干扰 $v \neq 0 \in L_2[0, \infty]$, 控制 u 只需使 $\|T_v\|_\infty < \gamma$ 即 $J(K, v) < \gamma^2 \|v\|_2^2$ 即可。

6.3.2 H_∞ 输出反馈控制器与 $\min\max$ 估计-反馈 LQL 控制器

当状态不可得时,LQL 方法给出了 $\min\max$ 估计-反馈控制结构,而 H_∞ 方法给出的是输出反馈控制结构。这里我们只对两者结构上的特点给予简要的说明,而不是严格的理论论述,旨在对这两种方法的各自特点加深理解和认识。

对于 6.2.1 小节中描述的标准 H_∞ 问题,“DGKF”算法^[27]给出的中心控制器(central controller) $K_{\text{sub}}(s)$ 可用下述状态方程来描述:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A \hat{x} + B_1 \hat{w}_{\text{west}} + B_2 u + Z_\infty L_\infty (C \hat{x} - y) \\ u &= F_\infty \hat{x} \\ \hat{w}_{\text{west}} &= \gamma^{-2} B_1' X_\infty \hat{x} \end{aligned} \quad (6.3.16)$$

式中各增益阵的定义可参见文献[27],这里不再赘述。由式(6.3.16)可见 H_∞ 控制器虽与 LQG(H_2)控制器具有十分相似的结构,但与 LQG(H_2)控制器相比,控制器中

多了一项 $\hat{\mathbf{B}}_1 \hat{\mathbf{w}}_{\text{worst}}$, 且用 $\mathbf{Z}_\infty \hat{\mathbf{L}}_\infty$ 代替了 $\hat{\mathbf{L}}_\infty$ 。 $\hat{\mathbf{w}}_{\text{worst}}$ 并不对应物理上的某种意义, 却可大致理解为是对全信息 H_∞ 控制问题中的最坏干扰输入 $\hat{\mathbf{w}}_{\text{worst}} = \gamma^{-2} \hat{\mathbf{B}}_1' \mathbf{X}_\infty \hat{\mathbf{x}}$ 的估计值, $\mathbf{Z}_\infty \hat{\mathbf{L}}_\infty$ 是在最坏干扰输入下, 对全信息最优控制输入 $\hat{\mathbf{F}}_\infty \hat{\mathbf{x}}$ 估计的最优滤波增益, 而 \mathbf{Z}_∞ 也可看做是由于不完全了解对象信息而对控制器进行的加权。所以 H_∞ 输出反馈控制器可以看做是在最坏干扰作用下的全信息控制器^[27] 的输出估计器。当然, 这只是对 H_∞ 控制器的一种分离解释而已, 不能等同于 LQG 理论中的分离定理, 因为 H_∞ 估计中分明依赖于待估计的输出。

再看文献[106]中给出的 minmax 估计反馈 LQL 控制器, 它仍符合分离性设计准则, 所得的控制器自然具与 LQG(H_2)类似的分离性结构。但与 LQG(H_2)的估计器又相区别的是 minmax 状态估计针对的是最坏 L_2 有界不确定性下的最优估计, 即最小化由 L_2 有界不确定性而产生的最大可能估计误差, 所给出的 minmax 估计器与 Kalman 滤波器保持了形式上的一致性。另一方面, 在第三章中我们曾就二次型积分约束(3.2.2)下的 minmax 估计问题进行过研究, 所得的估计器是一种鲁棒 Kalman 滤波器, 同时与文献[99]中的 H_∞ 输出反馈控制问题中的估计器又具有相同的形式, 所以 H_∞ 输出反馈控制问题中的估计器可解释为一种鲁棒 Kalman 滤波器。可见, 两种设计方法在估计器的处理上存在着一定差异。

LQL 闭环控制器的分离性结构为设计提供了方便, 这也是它作为时域上解决 H_∞ 所提出的 L_2 有界不确定性抑制问题的众多方法之一所具有的一定优势。但注意到熟知的 LQC 设计中估计器的引入会降低甚至完全破坏设计的鲁棒性这一现象, LQL 方法的 minmax 估计-反馈闭环控制的鲁棒性尚需进一步的分析, 这将是 LQL 方法不断完善过程中的又一研究问题。而另一方面, H_∞ 输出反馈控制器的鲁棒性意义更为明确些。

6.4 LQL 方法与 H_∞ 方法应用于 HIT-3T2 型三轴仿真转台上的对比研究

下面将以 HIT-3T2 型三轴仿真转台为背景对 LQL 方法和 H_∞ 方法各自的设计特点进行对比性的研究。

6.4.1 HIT-3T2 型三轴仿真转台设计模型

导弹飞行姿态仿真转台是专门用于测试导引头性能的重要设备, 随着导弹动态性能和跟踪精度的提高, 对仿真转台的要求也越来越高, 所以关于它的研究很有价值。

HIT-3T2 型三轴飞行仿真转台具有速度变化范围大、响应要求快、负载惯量大

等特点,据此采用电液伺服系统来控制^[184]。根据三轴转台的动力学模型及其以阀控液压马达为驱动元件的结构可从理论上推导出内、中、外三框控制系统的微分方程^[185]。其方程表明,外框是一个参数时变不确定性系统,内、中框是参数时不变不确定性系统,而整个转台是一个三输入、三输出的具有变负载、变惯量、变参数特点的非线性系统,并在三框之间含有复杂的非线性耦合特性。按照系统设计的通常做法,首先应该对该控制系统进行解耦设计,但因其变负载、变惯量、变参数的特点,传统的基于系统参数精确相消的解耦设计方法此时很难精确实现。同时考虑到本转台控制对象的机械结构特点,该转台系统耦合关系不太强烈,文献[185]中已从理论上对此进行了分析,结果表明三框之间的耦合确实较弱,从鲁棒性设计的角度考虑,可将这种较弱的耦合视为系统的不确定性因素,而不直接进行系统解耦,从而避免了系统的非线性耦合难以处理的困难。经过这样的处理,可得三个SISO的子系统,并进而得到易于处理的线性不确定系统模型,由此对该转台控制系统进行鲁棒性最优设计。

以中框系统为设计对象,控制量输入是电液伺服阀的电流信号,输出为液压马达的输出转角。以系统的增益为最高、阻尼比为最低的相对最重要的工作点为标称工作点,因为从稳定性的观点来看,如果该系统在这一点是稳定的,则其在其他工作点也是稳定的。忽略各框之间的弱耦合,并将二阶电液伺服阀简化为线性比例环节时,中框系统的模型可用下式描述:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}\tag{6.4.1}$$

式中, $x = [\beta, \dot{\beta}, \ddot{\beta}]$, 分别为中框液压马达的输出转角、角速度和角加速度。系数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\omega_n^2 & -2\xi_n\omega_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K_p \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

式中, $\omega_n = 133.87$; $\xi_n = 0.097$ 分别为液压系统的固有频率和阻尼比; $K_p = 11283$ 是阀和马达增益之积。

受多方面因素的影响,所给模型本身不可能是精确的,如在模型化过程中采用阀的线性化流量方程来代替阀的非线性化流量方程就不可避免地使所得结果与真实结果存在着一定的差距。另外,HIT-3T2型仿真转台又是个复杂的大系统,其中自然也存在着许多影响中框液压系统特性的不确定性因素,具体给出如下简要说明:

1. 影响中框系统增益 K_p 的不确定性因素

影响中框系统增益 K_p 的不确定性因素主要是阀流量增益 K_q , 通常限制流量增益的降低不超过零位的 57.7%。我们考虑 K_q 的变化范围为 $K_q \times 57.7\% \sim K_q$ 。

2. 影响中框系统液压系统固有频率的不确定性因素

(1) 中框系统的变负载所引起的变惯量引起固有频率 ω_n 发生变化, 由于中框机械结构特点, 惯量变化较小, 从而固有频率 ω_n 变化较小。

(2) 阀工作点参数 K_c (流量 压力系数)发生变化, 造成固有频率 ω_n 微小的变化,

(3) 内框及外框对中框系统的耦合, 造成液压系统固有频率 ω_n 的微小变化。

(4) 中框结构的偏心矩, 造成固有频率 ω_n 发生微小的变化。

经过计算, 固有频率 ω_n 的变化比较小, 通过改变(增加)转动惯量 J_{y_p}' 的 4%, 并考虑内、外框对中框系统的最大耦合, 固有频率 ω_n 只变化 1.9%, 在此我们考虑固有频率 ω_n 的变化范围为 $\omega_n \pm \omega_n \times 10\%$, ω_n 为标称工作点的固有频率。

3. 影响中框系统液压系统阻尼比的不确定性因素

(1) 中框系统的变负载所引起的变惯量引起液压阻尼比发生变化, 但由于中框机械结构特点, 中框的转动惯量很大, 从而惯量变化相对很小, 引起的阻尼比变化较小。

(2) 中框结构的偏心矩造成液压阻尼比 ξ_n 微小变化。

(3) 内、外框对中框系统的耦合造成液压阻尼比发生变化。

(4) 阀工作点参数 K_c 的变化造成液压阻尼比发生变化。

液压阻尼比随工况、工作点参数变化而变化, 有时可能发生很大的变化, 产生过阻尼的情况。在此我们考虑液压阻尼比的变化范围为 $\xi_n \sim 10\xi_n$, ξ_n 为标称工作点时的阻尼比。

另外, 马达油温的变化对系统的固有频率和阻尼比也是有影响的。因此液压系统的固有频率和阻尼比的变化是由众多参数的变化引起的。

值得一提的是, 内框和外框对中框系统的非线性耦合引入了时变不确定性, 通常这种不确定性是比较难以处理的, 而当应用 LQL 方法设计时, 我们可用 L_2 有界的不确定性来对其进行描述, 使处理相对得到简化。

经过上述的分析, 可得中框模型中的参数摄动 ΔA 和 ΔB 分别为

$$\Delta A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\Delta b_3}{b_2} & -2\omega_n \Delta \omega_n - \Delta \omega_n^2 - \frac{\Delta b_2}{b_2} & -2\xi_n \Delta \omega_n - 2\Delta \xi_n (\omega_n + \Delta \omega_n) \end{bmatrix}$$

$$\Delta \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\Delta K_p}{b_2} \end{bmatrix}$$

式中, 系数 $b_2 = 9.0045e - 4$; Δb_2 和 Δb_3 均是由内框和外框对中框系统的非线性耦合引起的; $\Delta \omega_n$, $\Delta \xi_n$, ΔK_p 分别代表 ω_n , ξ_n , K_p 不同工况下的摄动量。

在模型简化的过程中忽略了二阶电液伺服阀的动特性, 事实上, 它的带宽并未达到 5 倍于中框控制系统带宽的要求, 所以需考虑它对系统稳定性的影响。在我们的设计中, 将视其为高频未建模动态不确定性来处理。

6.4.2 基于 LQL 方法的中框控制系统设计

对 HTT-3T2 型仿真转台控制系统的主要指标要求是快速响应特性和良好的跟踪性能。在标准的 LQ 最优跟踪解^[2] 中, 控制输入包含两部分, 一部分是状态的反馈, 另一部分则是由与参考信号相关的微分方程的解来构成的。注意到在鲁棒渐近跟踪系统的设计^[36] 中, 由图 6.4 所示的控制器结构与标准的 LQ 最优跟踪问题中的控制器的结构十分相似, 这样, 我们可选定闭环系统如图 6.4 所示。

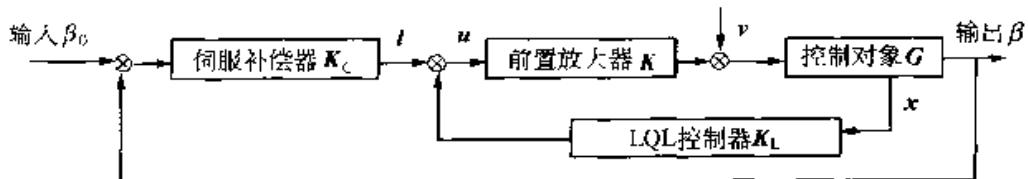


图 6.4 鲁棒渐近跟踪系统框图

1. L_2 有界不确定性等价估计原则

LQL 方法的设计应用中, 关键的一步是对不确定性的 L_2 范数界的估计。实际系统中常常可通过分析确定出参数摄动的大致范围, 那么如何衡量其对系统的能量影响? 为此可引入等价扰动信号。设某能量有限的外激励输入作用于标称系统时的输出在所给的误差准则上逼近于参数摄动后的系统输出, 则在对系统输出影响的意义上, 此能量有限的外激励输入与系统的参数摄动等价, 称此输入是系统参数摄动的等价扰动信号, 从而可将参数摄动系统作为具 L_2 有界不确定性系统进行鲁棒最优设计。

寻找等价扰动信号的直观有效方法是从时域脉冲响应去考察。标称系统 G_0 和摄动系统 \hat{G} 的单位脉冲响应设为 Y 和 \hat{Y} , 定义误差 $e := \hat{Y} - Y$ 。考察标称系统

G_0 的可逆性, 设其为可逆, 即与系统 G_0 具有一致的初始条件的逆系统存在, 且其为稳定的, 此时, 设系统 G_0 的阶次为 n , 为保证物理上的可实现性, 我们选用 G_0 的 n 阶积分逆系统 H_{0n} 来进行下一步的考察^[187]。对于单变量系统, n 为标量, 对于多变量系统, $n = (n_1, \dots, n_r)$, 为 r 维向量, 其中 r 是系统 G_0 输出维数。将摄动系统 \tilde{G} 的脉冲响应 \bar{Y} 做数值上的 n 阶差分处理, 对单变量系统得 $\bar{Y}^{(n)}$, 对多变量系统得 $\bar{Y}^n = [\bar{y}_1^{(n_1)}, \dots, \bar{y}_r^{(n_r)}]'$, 将 $\bar{Y}^{(n)}$ 或 \bar{Y}^n 加到 n 阶积分逆系统 H_{0n} 的输入端, 且与标称系统 G_0 保持一致的初始条件, 可得对应输出 \hat{v} , 则它与单位脉冲向量之差定义为

$$v := \hat{v} - \delta(t) \quad (6.4.2)$$

将 v 再次作用于初始条件不变的标称系统 G_0 的输入端, 得其输出 z_v , 定义

$$\delta_v^2 := \int_0^\infty z_v'(t) z_v(t) dt, \quad \delta_e^2 := \int_0^\infty e'(t) e(t) dt \quad (6.4.3)$$

若条件

$$|\delta_v^2 - \delta_e^2| < \epsilon \quad (6.4.4)$$

成立, 式中, ϵ 为给定的某一正数, 则 v 是所给参数摄动的等价扰动信号。否则, 适当修正 v 直至条件式(6.4.4)成立。

等价扰动信号的引入主要考虑参数摄动对系统输出的动态响应部分的影响, 而对稳态误差暂不考虑, 因它可被当做一种常值输入, 一般系统都有抑制方法, 所以可认为等价扰动信号是在有限时间内起作用, 这与系统的响应时间 t_r 有关, 因而式(6.4.3)的积分上限可改为 $k t_r$, $k \in [1, 1.5]$ 。

这样由等价扰动信号可大致估计出系统的参数摄动对系统输出影响的能量上限, 即

$$\delta^2 = \int_0^{k t_r} v'(t) v(t) dt \quad (6.4.5)$$

且得到 $B_2 = B_1$, 对于模型结构摄动可类似分析。注意到这种处理对时变不确定性和时不变不确定性皆适合, 只是对前者, 式(6.4.3)的积分上限要做适当的修正, 这要视时变不确定性的变化情况而定, 具体的分析将有待下一步的探讨。

对于标称系统 G_0 不可逆或其逆系统为不稳定的情况, 可根据有关传递函数 ∞ 范数的物理性意义而给出如下的另一种简单处理办法。设系统稳定, 具有实现

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$$

一般实际系统常存在一些不同的工况,相对于标称工况,设存在 k 个非标称工况,对于每一个非标称工况, $j = 1, \dots, k$, 在系统的输入端分别加入脉冲信号 $\delta(t)e_i$, e_i 是第 i 个标准基向量, $i = 1, \dots, m$, m 为系统输入维数, 测其输出, 记为 $z_j(t)$ 。对于 $D = 0$ 的情况, 定义 σ_j^2 为

$$\sigma_j^2 := \sum_i \| z_{ji} \|_2^2 \quad (6.4.6)$$

对于 $D \neq 0$ 的情况, 则可定义 σ_j^2 为

$$\sigma_j^2 := \sum_i \| z_{ji} - \bar{z}_{ji} \|_2^2 \quad (6.4.7)$$

式中, \bar{z}_{ji} 为 z_{ji} 的直流分量。再对标称系统 G_0 进行计算机仿真, 加入同样的信号 $\delta(t)e_i$, 测其输出, 记为 $z_{0i}(t)$ 。对应 $D = 0$ 或 $D \neq 0$ 的情况, 分别得到

$$\sigma_0^2 := \sum_i \| z_{0i} \|_2^2 \quad \text{或} \quad \sigma_0^2 := \sum_i \| z_{0i} - \bar{z}_{0i} \|_2^2 \quad (6.4.8)$$

式中, \bar{z}_{0i} 为 z_{0i} 的直流分量。设标称系统 G_0 传函的 ∞ 范数为 γ , 则可初步估算出不确定性的 L_2 上界为

$$\frac{\max_j |\sigma_j^2 - \sigma_0^2|}{\gamma} \quad (6.4.9)$$

此时, 仍有 $B_2 = B_1$ 。

由上所述, 关于不确定性的 L_2 范数界的估计, 我们有如下原则:

L_2 有界不确定性等价估计原则。

(1) 对于可逆且逆系统稳定的系统, 考察条件式(6.4.4)是否满足, 从而获得系统的不确定性在对系统输出影响意义上的等价扰动信号, 再由其在 $0 \sim k$ 上的 L_2 积分值估计出原系统不确定性对系统输出影响的 L_2 范数界。

(2) 对于不可逆或逆系统不稳定的系统, 考察单位脉冲响应, 获得系统的摄动在输出端相应引起的能量输出, 再由式(6.4.9)给出不确定性的 L_2 范数界的等价估计。

对于中框控制系统, 因其可逆且逆为稳定, 所以根据中框控制系统的参数摄动范围, 当取正数 $\epsilon = 0.1$ 时, 可大致估计出其对系统输出影响的能量上限。同时对于因忽略了二阶电液伺服阀的动特性而引起的模型不确定性, 也同样可大致估计出其对系统输出影响的能量上限。再考虑到系统中其他多种随机不确定性因素的存在, 略为保守些, 最后可得不确定性总能量上限的估计值, 约为 $\delta^2 = 115$, 初值不确定性的界给定为 $\delta_0^2 = 1$ 。

2. 性能指标的选取

LQI 设计中, 另一需要解决的问题是加权阵 Q , R 的选取。这里针对转台中框控制系统的特征求出一种相对较为简单的加权阵选取过程。

对式(2.4.6)的等价指标定义 Hamilton 函数

$$H = \mathbf{x}' Q \mathbf{x} + \mathbf{u}' R \mathbf{u} - \eta \mathbf{v}' \mathbf{v} + \lambda' (\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B}_1 \mathbf{u} + \mathbf{B}_2 \mathbf{v}) \quad (6.4.10)$$

式中, λ 是 Lagrange 乘子向量。应用极值原理可得最优解

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B}_1 \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}_1' + \mathbf{B}_2 \eta^{-1} \mathbf{B}_2' \\ -\mathbf{Q} & -\mathbf{A}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \lambda \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \lambda \end{bmatrix} \quad (6.4.11)$$

式中, $\tilde{\mathbf{A}}$ 是 $2n \times 2n$ 矩阵, $2n$ 个特征值 s 中的 n 个也就是闭环系统的特征值, 它们应满足

$$\det[s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}] = 0 \quad (6.4.12)$$

控制加权阵 R 可选为对角线结构, 其对角线上的元素选为 $R_{ii} = 1/u_{i,\max}$, $u_{i,\max}$ 表示每个控制输入量的最大上限。状态加权阵 Q 也同样设定其具有对角阵的结构 $Q = \text{diag}[q_1, q_2, \dots, q_n]$ 。根据系统的性能指标可选定希望的闭环极点。因它们应满足式(6.4.12), 从而为确定 q_i 提供了线索。设一希望的闭环极点 $s = \sigma + j\omega$, 将其代入式(6.4.12)可得包含 q_i ($i = 1, \dots, n$) 的一个方程

$$f(q_1, q_2, \dots, q_n) = \det[(\sigma + j\omega)\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}] = 0 \quad (6.4.13)$$

这样, 由 n 个闭环极点得到 n 个关于 q_i 代数方程

$$F(\mathbf{q}) = [f_1(\mathbf{q}), f_2(\mathbf{q}), \dots, f_n(\mathbf{q})]' = 0 \quad (6.4.14)$$

求解式(6.4.14)可得向量 $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ 。

利用 $\tilde{\mathbf{A}}$ 阵的分块结构, 可推出关于 q_i 的形式简单的代数方程。以转台的三阶模型为例, 它包含一个积分环节, 是一阶无差系统, 这在伺服系统中是常见的, 则 q_i 应满足的方程为

$$q_1 - s^2 q_2 + s^4 q_3 = \frac{(s^2 + a_2 s + a_1)(s^4 - a_2 s^3 + a_1 s^2)}{\frac{K_F^2}{\gamma} + \frac{K_P^2}{\eta}} \quad (6.4.15)$$

对应三个希望的闭环极点 s_1, s_2, s_3 , 可得

$$\mathbf{A}_q \mathbf{q} = \mathbf{b}_q \quad (6.4.16)$$

式中,

$$A_q = \begin{bmatrix} 1 & -s_1^2 & s_1^4 \\ 1 & -s_2^2 & s_2^4 \\ 1 & -s_3^2 & s_3^4 \end{bmatrix}, \quad b_q = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$b_j = \frac{(s_i^2 + a_2 s_i + a_1)(s_i^4 - a_2 s_i^3 + a_1 s_i^2)}{\frac{K_p^2}{\gamma} + \frac{K_p^2}{\eta}}$$

$$a_1 = \omega_n^2, \quad a_2 = 2\zeta_n \omega_n$$

则由式(6.4.16)容易求得 q_i 。因 Q 是半正定阵, 式(6.4.16)的解 q_i 若为负, 应代之以 0, 这意味对应的状态不计入指标中, 若有半数以上的 q_i 解得为负, 则需修正 R 。不同的控制目标对应的每个控制量所能达到的最大幅值也不同, 基于此调整 R , 重新求得 Q 。这样选 Q 减少了盲目性, 且将其与闭环系统的性能要求直接相联系, 增加了设计的可靠性。当模型阶次升高时, 可类似推导。对应四阶模型 q_i 的方程为

$$q_1 - s^2 q_2 + s^4 q_3 - s^6 q_4 = \frac{(s^3 + a_3 s^2 + a_2 s + a_1)(-s^5 + a_3 s^4 - a_2 s^3 + a_1 s^2)}{\frac{K_p^2}{\gamma} + \frac{K_p^2}{\eta}}$$

式中, 待定系数 η 的确定是个迭代搜索的过程。相应地, Q 阵的确定也是个迭代过程, 先给定一初值 $\eta_0 = 100$, 中框的控制输入量是阀电流信号, 其额定量是 10mA, 可选加权系数 $\gamma = 1e-4$, 中框要求 15Hz 的负相移大于 -90° , 考虑一定裕量, 同时因为调节回路处于内回路, 所以取实轴上的两个主导极点为 $s_1 = -65$, $s_2 = -532$, 非主导极点为 $s_3 = -2200$, 求得初始 Q_0 阵。根据方程组(2.4.58)进行迭代搜索, 其中基于计算误差的变化规律而对迭代步长进行了优化, 保证了一定初值选取范围内的快速收敛, 一般三层迭代 60 次左右即可收敛到终值。经搜索得

$$\eta = 16.6667, \quad Q = \text{diag}[4.4520e7, 1.0702e4, 3.9868e-2]$$

当前置放大器增益为 $K_a = 1000$ 时, 最优调节器状态反馈控制增益为

$$K_1 = [8.4486, 0.11781, 2.3934e-4]$$

为实现全状态反馈, 需得到速度和加速度信号。因测速机和加速度计都不可避免地要引入噪声, 又因加速度计相当昂贵, 所以考虑利用状态估计器来重构状态。采用文献[106]中给出的 minmax 闭环方案的 minmax 状态估计器的估计方法, 可得估计器增益为

$$K_{\text{cl}} = [1.3536e3, 7.6948e5, 2.0198e8]'$$

将其与状态反馈相结合, 得到图 6.4 中的 LQL 调节器 K_L 。

考虑到对阶跃信号渐近跟踪及改善动态响应特性的要求, 伺服补偿器选为 PI 结构

$$C_{\text{PI}}(s) = \frac{24(s + 80)}{s}$$

这样就可实现图 6.4 所示的闭环控制结构。

6.4.3 基于混合灵敏度 H_∞ 方法的中框控制系统设计

下面基于混合灵敏度 H_∞ 方法对中框控制系统进行设计, 以与基于 LQL 方法的设计结果进行比较。

在混合灵敏度 H_∞ 方法设计中, 首先要适当选取权函数。6.2.2 小节中给出了满足时域指标的权函数选取方法, 基于频域约束来实现时域指标时, 一般常会引入较大的保守性, 从而在实际系统设计中难以使其优势得到充分发挥, 而该方法正可避免这一点, 大大地降低了设计的保守性。这也是我们选用它的原因之一。

式(6.2.5)和(6.2.6)中所定义的 δ_y 和 δ_u 对应转台中框控制系统的指标要求分别为 $\delta_y = 0.1^\circ$, $\delta_u = 5\text{mA}$ 。再考虑到 $W_2(s)$ 应足够大以包含二阶电液伺服阀所引入的高频末建模动态不确定性, 这样可选择 $W_2(s)$ 为

$$W_2(s) = 0.004(s + 5e - 4) / \left(\frac{s}{900} + 1 \right) \quad (6.4.17)$$

相应地, $W_1(s)$ 的选取应与 $W_2(s)$ 相匹配, 即满足式(6.2.7)的约束条件。根据系统的跟踪性能要求, 可按如下定义的形式选 $W_1(s)$:

$$W_1(s) = \frac{\hat{\gamma}}{s + 5e - 4} \quad (6.4.18)$$

式中, $\hat{\gamma}$ 为可调因子。分母中 $5e - 4$ 项的引入是为了避免 Matlab 算法所带来的数值上的奇异现象。

中框控制系统模型中有零极点, 为此, 需先进行移轴处理, 即将虚轴略向左平移, 这里的平移距离取为 0.1。将经移轴处理后的受控对象与式(6.4.17)和(6.4.18)所给的权函数 $W_1(s)$ 和 $W_2(s)$ 相连接, 可得到广义对象的状态空间实现。为满足“DGKF”算法^[27]对广义对象的要求, 将其中的 D_{12} 进行微调整, 取其为 $[0 : 1e - 7]$, 经参数的反复调配, 当取可调因子 $\hat{\gamma} = 200$ 时, 得 H_∞ 次优控制器为

$$K_{H_\infty}(s) = 4.9705e9 \left[\frac{(s + 700.1)(s + 0.1999)(s + 12.9797s \pm j133.2424)}{(s + 0.1)(s + 541.6)(s + 7211.6)(s + 3175.4s \pm j5990.1)} \right]$$

闭环代价传函奇异值曲线如图 6.5 所示,其 ∞ 范数为 0.9488,加权灵敏度曲线和加权补灵敏度奇异值曲线如图 6.6 所示。从中可见,系统的鲁棒性能要求基本得到满足,但控制器的零点对消了系统的谐振极点,这种现象在混合灵敏度 H_∞ 设计中较为常见,是由 H_∞ 最优控制律的全通特性而引起的。这样的设计对能够影响被消极点位置的结构不确定性将表现出很差的参数鲁棒性,尤其在像转台这样的具有靠近虚轴的极点,即存在弱阻尼或谐振极点的系统中,这种现象更是所不期望的。

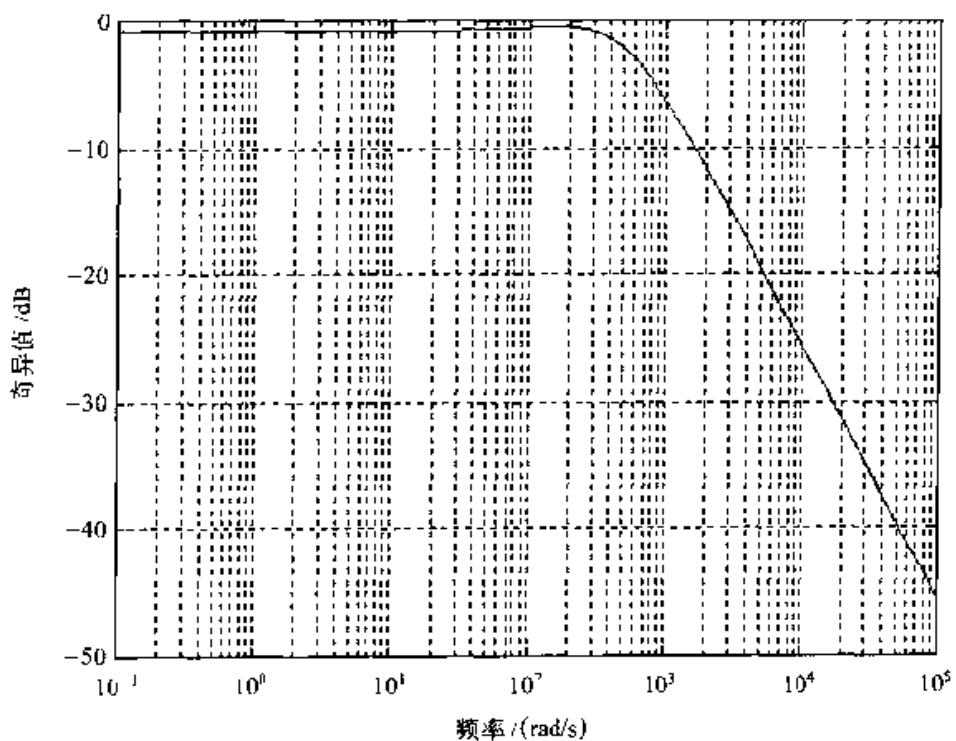
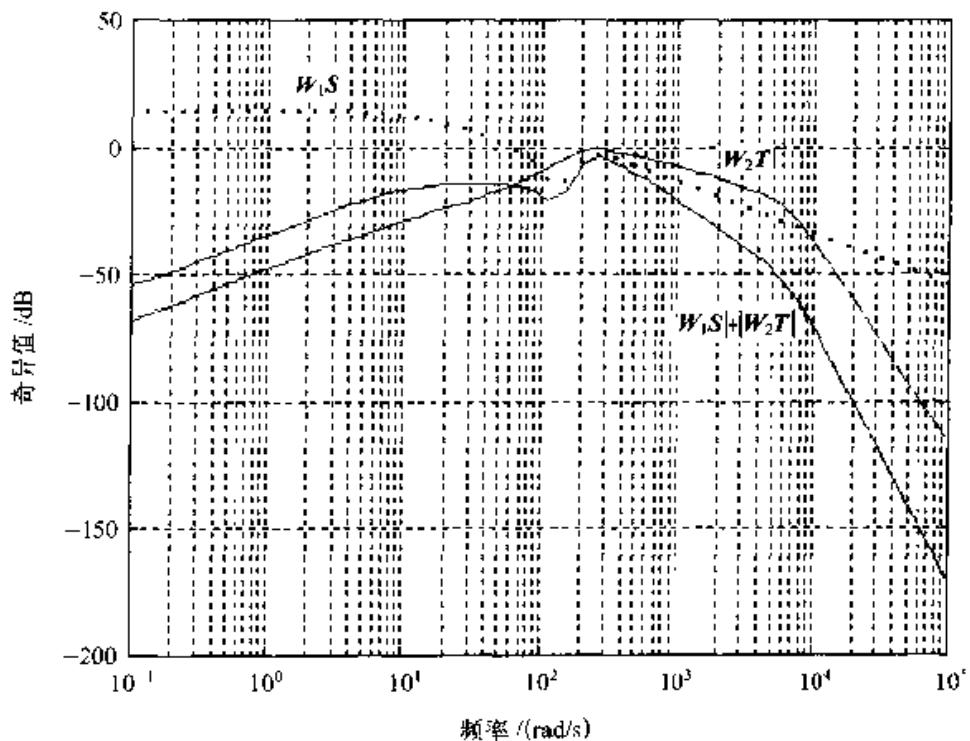


图 6.5 S/T 设计闭环代价传函奇异值曲线图

对此问题已有一些不同的处理手段^[188, 189],其中一种能够同时处理非结构不确定性和结构不确定性的方法是对角线标定(diagonally scaled) H_∞ 方法,即 μ 综合方法。但这种方法在使结构不确定性和非结构不确定性的鲁棒性达到预定要求的同时,也使控制器的阶次从通常的“ n ”维增加到“ $2n$ ”维甚至更高^[190],这是因为在与频率相关的对角线标定化过程中所额外附加的对象状态。而若降低所得 H_∞ 控制器的阶次,则系统性能和鲁棒性都将急剧降低。为此,可尝试在 S/T 问题的 H_∞ 综合的框架下,给出几种改进的方法以同时克服非结构不确定性和结构不确定性。

图 6.6 S/T 设计的 $W_1 S$, $W_2 T$ 及 $|W_1 S| + |W_2 T|$ 奇异值曲线图

但又不引入如上复杂的设计方法。

改进方案之一：基于 Bode 灵敏度定理的优化法。

设 SISO 受扰对象 $\tilde{G}(s)$ 为

$$\tilde{G}(s) = G(s) + \Delta G(s) \quad (6.4.19)$$

在反馈回路闭环后，则其受扰输出 $\tilde{y}(s)$ 可简单表示为

$$\tilde{y} = y + \Delta y = \frac{(G + \Delta G)K}{1 + (G + \Delta G)K} r \quad (6.4.20)$$

式中， r 是参考信号。经整理可得

$$\Delta y = \frac{\Delta GK}{(1 + GK + \Delta GK)(1 + GK)} r \quad (6.4.21)$$

对于 MIMO 系统类似地可得

$$\Delta y = [\Delta GK(I + GK) - GK\Delta GK](I + GK)^{-1}(I + GK + \Delta GK)^{-1}r \quad (6.4.22)$$

式(6.4.21)和(6.4.22)清楚地表明可通过最小化灵敏度函数 $S(s) = (I + GK)^{-1}$

来最小化对象振动 ΔG 的影响。确定出应使灵敏度函数得到减小的关键频段，并将此要求反映到设计中权函数 W_1 的选取上，据此再求解 H_∞ 控制器。

这种改进方法因要对具不确定性的极点所在频段的灵敏度函数进行加权处理，所以将增大系统的带宽，当系统高频处的非结构不确定性较大时，必须进行折衷处理。

改进方案之二：内回路反馈法。

反馈控制系统的设计中，常引入内回路反馈的概念，如经典伺服系统设计中，利用速度或加速度反馈来改善系统阻尼，增加系统带宽；等价回路被用于冗余管理控制和系统故障处理；大空间结构体的设计中，用速率反馈内回路实现模型降阶、系统阻尼的改善；非线性控制采用非线性内回路反馈以建立等价的线性模型；内回路反馈还用于降低系统乘性不确定性，Zames 曾形象地称之为“不确定性球相对于名义对象的收缩”。这里，我们可采用任何一个能够增大系统阻尼的内回路来改善不确定性弱阻尼极点的阻尼特性，将它们沿远离虚轴的方向移动，这样由结构不确定性而引起的极点位置的较小变化就不会再引起对象频率响应的大范围振动，然后再与外回路的 H_∞ 控制相联，所得的控制系统将仍能保持设计性能指标和对高频段非结构不确定性的鲁棒性。

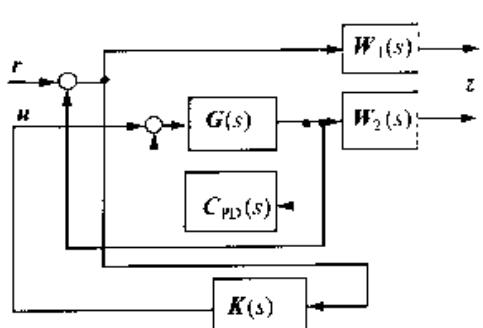


图 6.7 经改进的 H_∞ 混合灵敏度设计框图

这里，针对中框系统的弱阻尼特性及其较大的阻尼变化范围，首先应用改进方案之一。随着 γ 的增加，系统的带宽也将增大，而系统的可达带宽要受到不确定性频带的约束，因中频段处仍存在不确定性，经反复调配，可调因子 γ 最大值只能达到 340。此时，系统的参数鲁棒性也只能得到有限的改善。因此，我们又进一步应用改进方案之二，采用内回路反馈提高系统阻尼。内回路选为较简单的 PD 反馈补偿器，即

$$C_{pd}(s) = 227.6726s + 7.6447$$

由所选的 $W_1(s)$ ， $W_2(s)$ ，应用文献[27]中的“DGKF”算法，求得混合灵敏度 H_∞ 次优控制器为

$$K_{H_\infty}(s) = 1.3353e11 \left[\frac{(s+700)(s+0.2)(s^2 + 26.774s + 1792.12)}{s(s+14539)(s+3362)(s^2 + 9104s + 6.3409e7)} \right]$$

将内回路的 PD 反馈补偿器与外回路 H_∞ 控制器相联，则得到中框的闭环控制系统如图 6.7 所示。此时，最大可允许的阶跃扰动的幅值 $\gamma_{max} = 4$ ，闭环代价传递函数奇异值曲线如图 6.8 所示，其 ∞ 范数为 0.9998，加权灵敏度曲线和加权补灵敏度奇异值曲线如图 6.9 所示。从中可见，系统的鲁棒性能仍可满足要求。

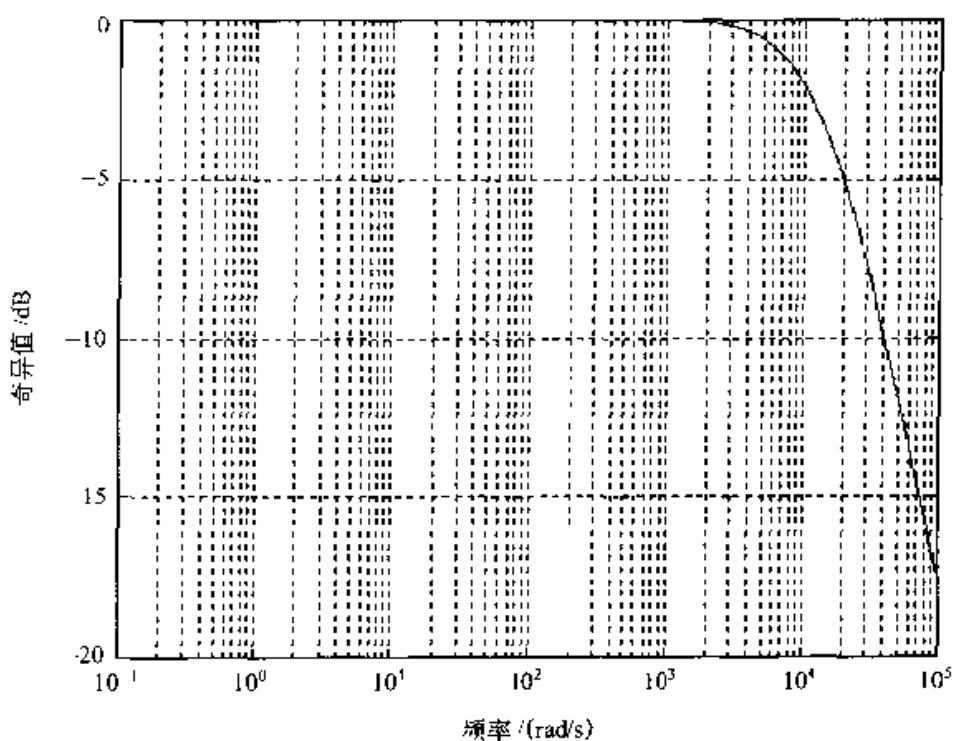
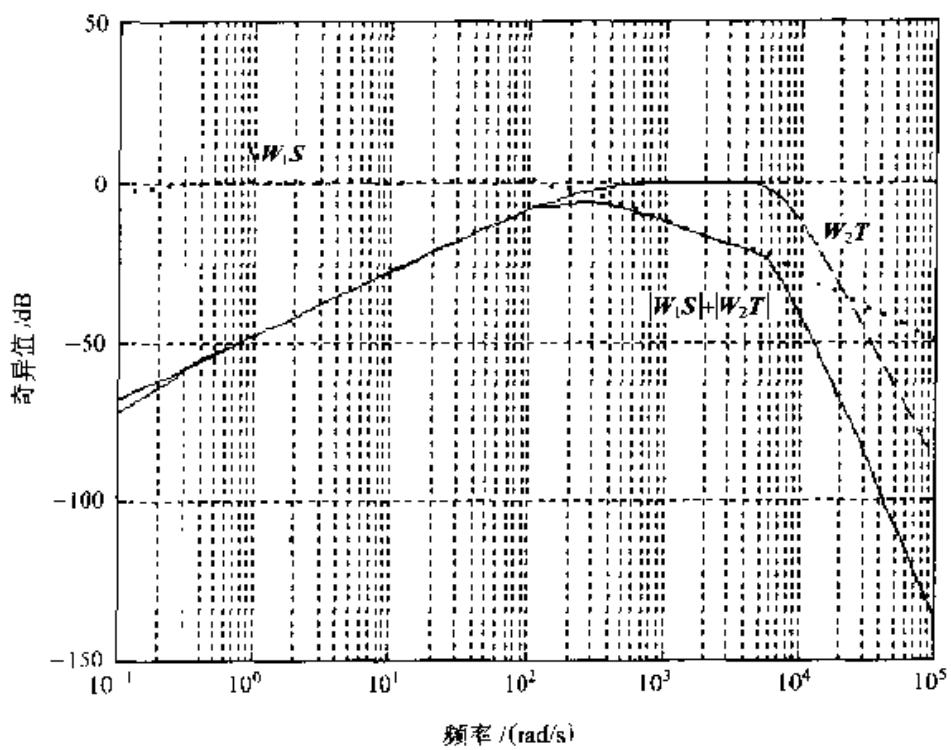
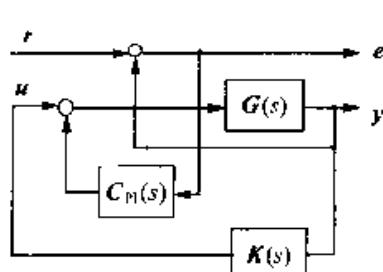


图 6.8 改进 S/T 设计闭环代价传函奇异值曲线图

图 6.9 改进 S/T 设计的 W_1S , W_2T 及 $|W_1S| + |W_2T|$ 奇异值曲线图

6.4.4 设计结果比较

现对前两小节的设计结果进行比较以继续阐明 LQL 方法和 H_∞ 方法之间的异同之处。



1. 控制器的结构

将图 6.4 中的控制系统整理成图 6.10 所示的结构。可见, 图 6.10 与图 6.7 具有十分相似之处。

LQL 方法的设计中, 控制输入由两部分构成, 分别为对跟踪误差和量测输出的加权。前者是为保证系统的跟踪性能, 后者是为提高系统的鲁棒性。注意

到 H_∞ 方法的设计中, 被控输出也包含了对跟踪误差和量测输出的加权。这表明 LQL 方法中性能指标的选取与 H_∞ 方法中被控输出的确定即权函数 $W_1(s)$ 和 $W_2(s)$ 的选取在一定程度上是相一致的, 这也是因为两种设计的出发点的一致性, 即求解最坏不确定性存在下的最优控制问题。在 H_∞ 控制器 $K_{H_\infty}(s)$ 中, 存在相对较大的快极点, 这将引起实现中的困难。而当尝试进行控制器降阶时, 系统性能和鲁棒性都变坏了。与之相比, LQL 控制器较易于实现。

2. 响应特性和鲁棒性

鲁棒性分析是设计方法评估中重要的一步。对于不同的工况, 两种设计在指定频率 6Hz 和 15Hz 处的频响性能如表 6.1 所示。图 6.11 给出了两种设计在不同工况下的阶跃响应。

从表 6.1 可见, 两种控制器都可保证名义系统实现良好的响应特性, 即 6Hz, 15Hz 正弦信号的相位跟踪误差分别小于 10° 和 90° , 而幅值跟踪误差小于 10%。当对名义系统加入高频未建模动态不确定性, 即二阶电液伺服阀的动特性时, 两种控制器都能保证系统的性能要求。这一点表明了 LQL 控制器对被忽略的执行器的动特性也确实显示出了一定的鲁棒性。在参数鲁棒性检测上, 两种控制器给出的结果基本相近。同时也可见在 H_∞ 混合灵敏度中采用的两种改进措施确实是有效的。因本例中 LQL 控制器在实现上相对简单些, 所以其设计在保证系统参数摄动下的鲁棒性能方面具有一定的实用价值。

表 6.1(a) LQL 设计的响应特性

	6Hz 正弦		15Hz 正弦		阶跃	
	幅值	相位/(°)	幅值	相位/(°)	$\sigma/\%$	t_s/ms
工况 0	1.0124	-9.5957	1.0374	-26.912	8.1524	0.02
工况 1	1.0205	-9.5435	1.1003	-26.438	36.77	0.06
工况 2	1.0216	-10.080	1.0282	-27.776	32.85	0.2
工况 3	1.0332	-9.3866	1.0616	-29.424	28.559	0.1

表 6.1(b) H_∞ 设计的响应特性

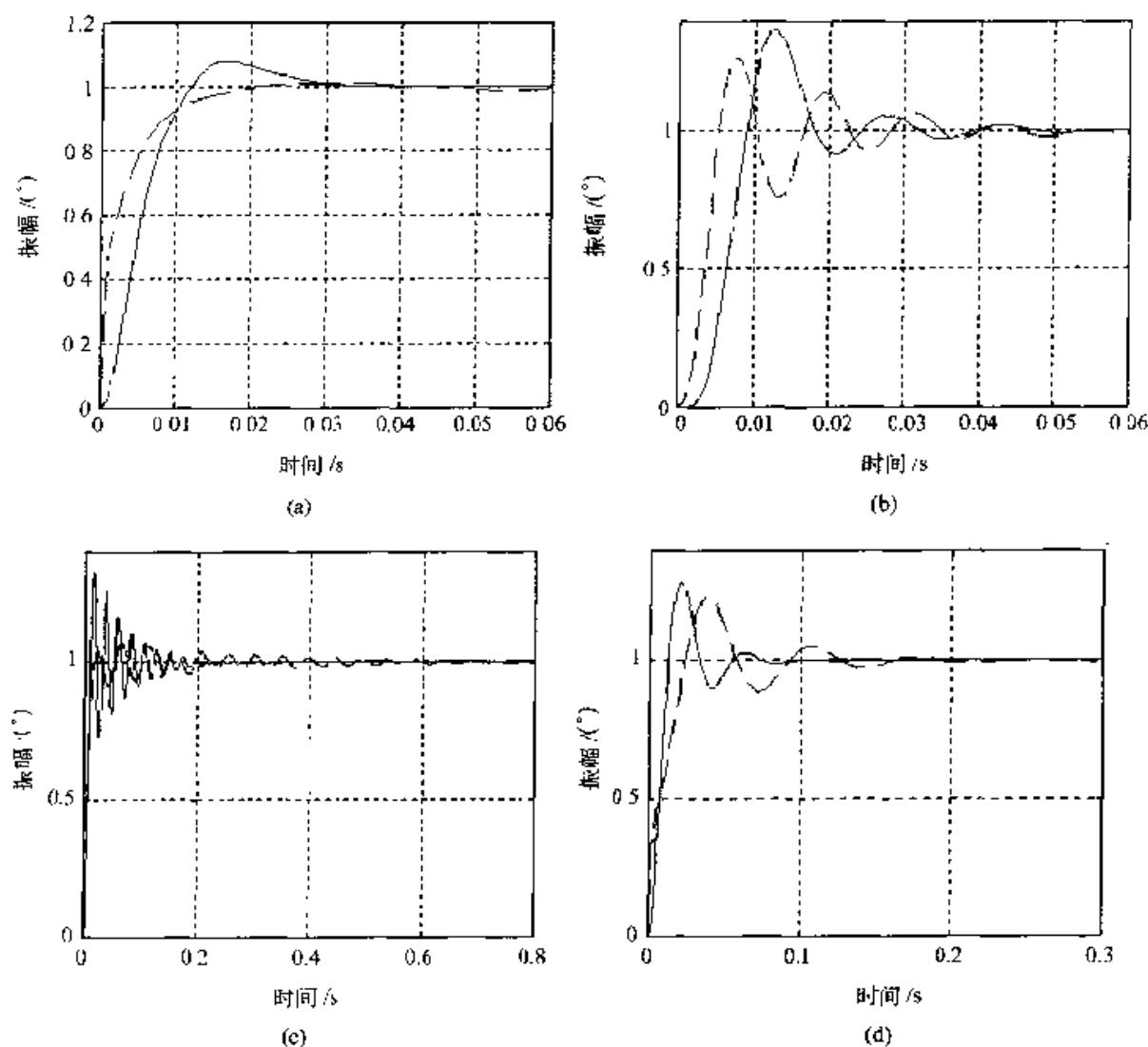
	6Hz 正旋		15Hz 正旋		阶跃	
	幅值	相位/(°)	幅值	相位/(°)	$\sigma/\%$	t_s/ms
工况 0	0.9920	-6.3935	0.9562	-15.931	1.25	0.02
工况 1	1.0004	-6.4189	1.0087	-16.268	26.68	0.06
工况 2	0.9710	-10.658	0.8941	-18.865	7.23	0.8
工况 3	1.0693	-12.678	1.0915	-83.939	23.7	0.2

工况 0: 名义工作点(ξ_n , ω_n , K_p);

工况 1: 视伺服阀为二阶滤波器;

工况 2: 参数摄动($\xi_2 = 0.1\xi_n$, $\omega_2 = 0.9\omega_n$, $K_2 = 0.577K_p$);

工况 3: 参数摄动($\xi_3 = 10\xi_n$, $\omega_3 = 1.1\omega_n$, $K_3 = 0.577K_p$)。

图 6.11 LQL 和 H_∞ 设计的阶跃响应比较(——LQL, - - - H_∞)

(a) 工况 0; (b) 工况 1; (c) 工况 2; (d) 工况 3

3. 扰动抑制

为比较两种设计对扰动的抑制水平, 计算相应代价函数的 ∞ 范数, 得 $\gamma_{H_\infty} = 0.9984$, $\gamma_{LQL} = 1.4055$ 。可见它们具有比较相近的扰动抑制程度。图 6.12 示出了 LQL 方法设计中代价函数的奇异值曲线, 从中也可看出 LQL 性能指标的选取意义。

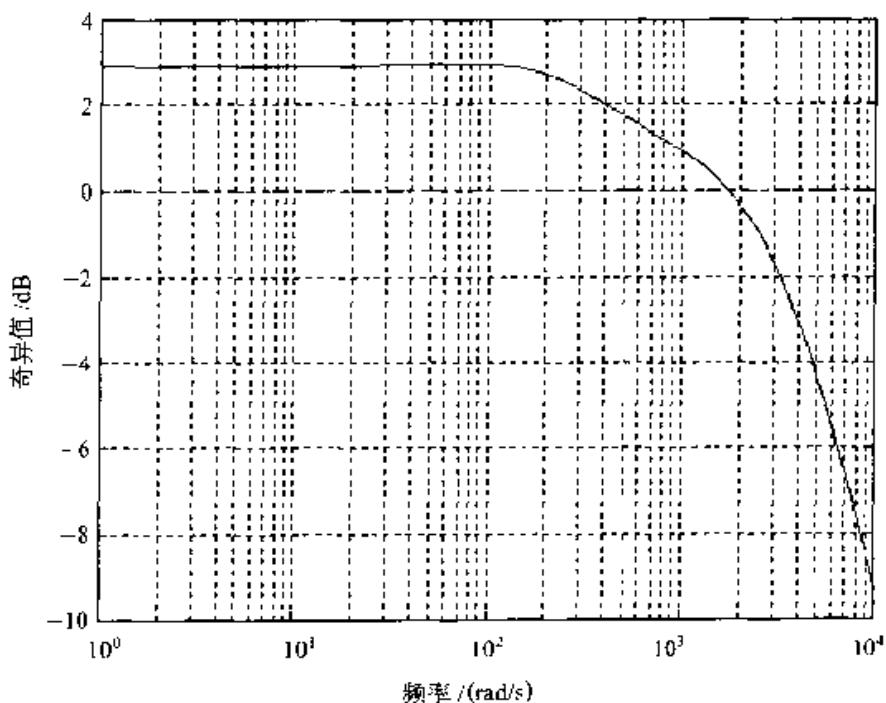


图 6.12 LQL 方法设计代价泛函的奇异值曲线图

对 HIT-3T2 型三轴仿真转台的中枢控制系统, 我们分别应用 LQL 方法和 H_∞ 方法进行了设计。通过对设计结果所进行的比较研究, 可得知考虑最坏 L_2 有界不确定性存在下的最优控制问题的 LQL 方法对各种不确定性具有一定的处理能力。因而, 在系统的闭环稳定性不受影响的前提下, 可视其为一种时域处理 L_2 有界不确定性的有效办法。

6.5 本章小结

本章比较了 LQL 方法和 H_∞ 方法的有效性问题, 表明 LQG 方法采用时域优化方法去处理 H_∞ 方法所解决的 L_2 有界不确定性抑制问题, 即在一定条件下标准 H_∞ 问题提法可等价于具有 L_2 有界不确定性系统的时域 maxmin 优化问题提法, LQL 方法是对时域优化理论 LQG 方法的扩展, 也是对 H_∞ 频域方法的对称补充。

本章还讨论了 LQL 方法在应用中不确定性参数界的估算方法,为 LQL 方法用于实际系统设计提供了参考原则。

最后分别应用 LQI 方法和 H_∞ 方法对 HIT-3T2 型三轴仿真转台的中框控制系统进行了设计。系统设计的仿真结果比较表明,考虑最坏 L_2 有界不确定性存在下的最优控制问题的 LQL 方法对各种不确定性具有一定的处理能力,在系统的闭环稳定性不受影响的前提下,可视其为一种时域处理 L_2 有界不确定性的有效办法。

第七章 控制系统 LQL 方法优化设计软件包

7.1 引 言

控制系统计算机辅助设计(CACSD)从成为一门单独的学科以来至今已经有 20 多年的历史,在其发展过程中出现了各种各样的实用工具和理论成果,Matlab 便是其中一例^[191]。Matlab 语言的出现不但对 CACSD 算法的研究,也对其他 CACSD 软件环境的开发起到了巨大的推动作用,它已经成为国际控制界应用最广的语言和工具。

Matlab 语言提供了多个可以直接使用的系统时域设计工具箱,如 J. Lime, A. Laub 设计的控制系统工具箱,R. Chiang, M. Safonov 编写的鲁棒控制工具箱^[192] 及 J. Doyle 和 K. Glover 推出的 μ 分析与综合工具箱^[193]。这些工具箱尤其是控制系统工具箱为控制系统的计算机辅助分析和设计提供了强有力的工具,也为 CACSD 领域的其他工具箱的开发奠定了基础。鲁棒控制工具箱以 LQG 鲁棒控制和 H_∞ 最优控制理论为依据,是系统鲁棒性分析和设计的方便工具。另外 Matlab 还提供了控制系统模型图形输入与仿真工具 Simulink,极大地方便了复杂系统的输入。

对于本书所研究的具 L_2 有界不确定性系统鲁棒最优控制——LQL 方法,其理论意义已经明确。为使其从理论研究逐步向工程应用推广,有必要建立相应的设计软件。这也是 LQL 方法不断完善过程中的一项重要基础工作。

自然,利用 Matlab 现有的工具箱还不能完整地解决 LQL 方法全部设计过程,但它所提供的丰富的函数,方便的图形界面设计功能,又为我们构造了一个良好的平台环境。所以,我们将在 Matlab 软件平台上,采用 Matlab 语言建立 LQL 方法优化设计的软件包。

作为一个控制系统设计软件包,应具有完整的系统设计功能,包括模型的建立,控制器的求取,闭环系统的实现,系统性能的评价等。其他一些软件包的常备功能也是必不可少的,诸如数据文件输入、调用、修改、过程和结果显示、打印、绘图等。

LQL 方法优化设计软件包是作者对 LQL 方法在理论上进行深入研究的同时,为检验理论结果的有效性而逐步建立起来的,目前仍处在不断完善之中。随着对 LQL 方法及其与 LQG, H_∞ 之间的联系的更为深入的探讨,其优化设计软件包也将得到相应的完善。考虑到这一点,我们采用模块化设计思想以便于将来功能上的

扩充。

这里,将从功能、特点和设计流程等几方面对 LQL 方法优化设计软件包进行简要的介绍。

7.2 模块结构

LQL 方法优化设计软件包基本由系统的初始化即模型的建立、LQL 方法优化控制器的求解、闭环的实现、性能的评价几大模块构成,具体的模块结构图如图7.1所示。

7.3 功能和特点

LQL 方法优化设计软件包是针对具 L_2 有界不确定性的时域鲁棒最优控制设计的实现而编制的。运算主要基于状态空间模型,能够根据系统通常给定的设计指标来进行控制器设计,并通过对设计满意程度的考察允许设计者在线调整参数,以实现最终的设计目的。

主要的功能如下:

(1) 模型的输入和对系统不确定性的分析处理。 L_2 有界不确定性是一种涵盖很广的不确定性描述。在一定条件下,非线性的、时变的、动态的不确定性等都可等价规范为 L_2 范数有界的。所以为实现 LQL 方法的优化设计,首要问题是将系统的不确定性表述为能量有界的,并给出上限的估计值。

(2) LQL 控制器的求取及闭环实现。根据设计要求,选取适当的性能指标,迭代求解控制器,包括状态反馈及状态估计-反馈两种形式。实现与受控对象的闭环连接。

(3) 系统设计性能评价。从频域和时域两方面分别进行系统的常规分析。

软件包是以 Matlab 为平台而开发的,对 Matlab 特有优势的充分利用,使其具有如下几个突出特点:

(1) Matlab 强大的矩阵处理和绘图功能帮助我们避免了 FORTRAN 和 C 等高级语言编程时在这两方面出现的繁琐现象。同时借助 Matlab 已有的功能函数使设计得到了简化,也易于修改。

(2) 基于各种菜单和对话框的友好用户界面提供了强大的人机交互功能,方便了用户的使用和掌握,也使系统设计过程更为直观、易懂。

(3) 模块化的设计思想便于程序的进一步扩展。

(4) 数据文件在多个程序之间可方便地互相传递,且在 Matlab 平台上还能够轻易地实现与其他软件的数据链接和资源共享。

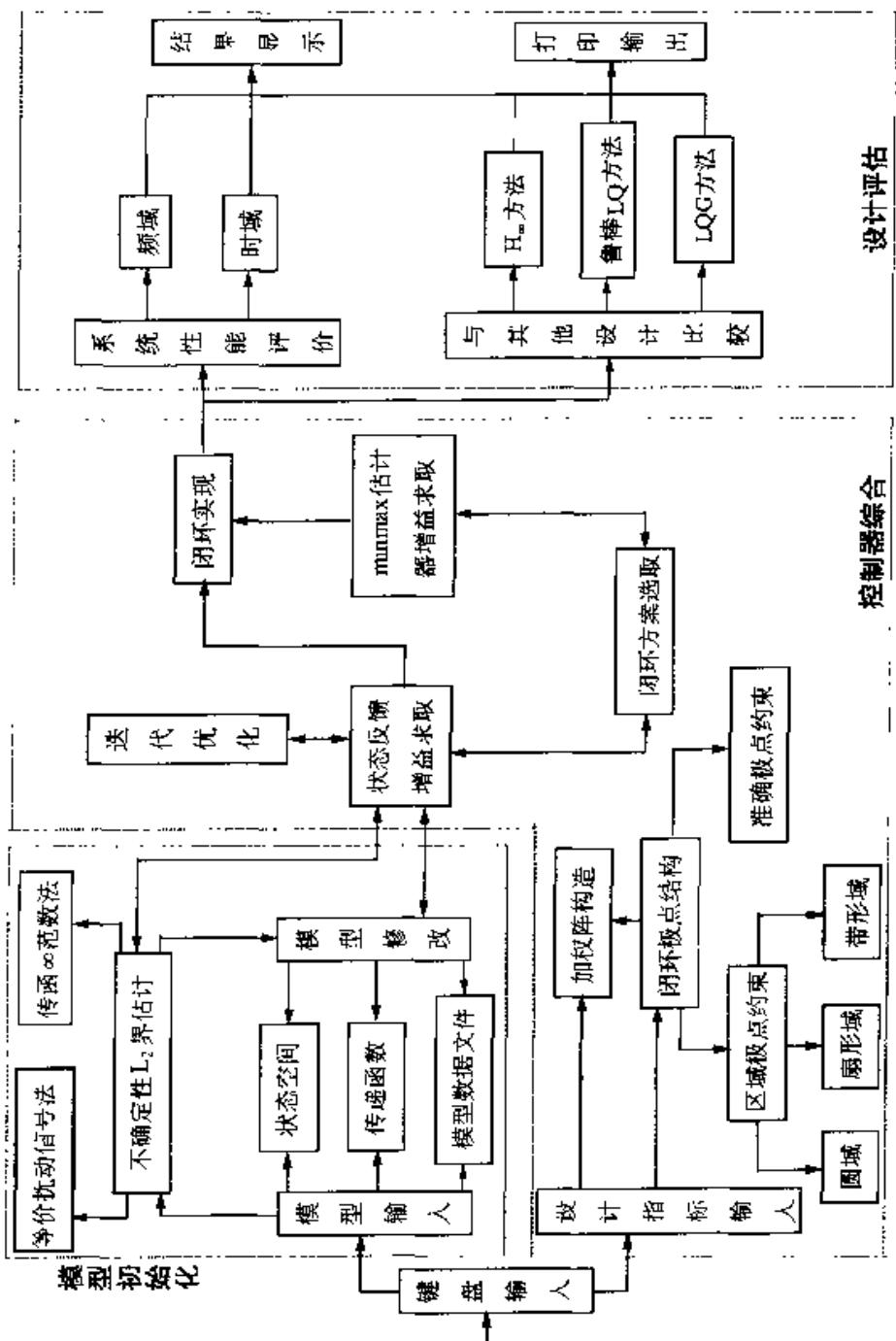


图 7.1 LQG 方法优化设计软件包模块结构图

总之,我们所建立的软件包力求使其成为一个具备当前较为先进的软件包模式而又能满足设计所需的实用软件包。

7.4 设计流程及使用说明

软件包的总流程如图 7.2 所示。

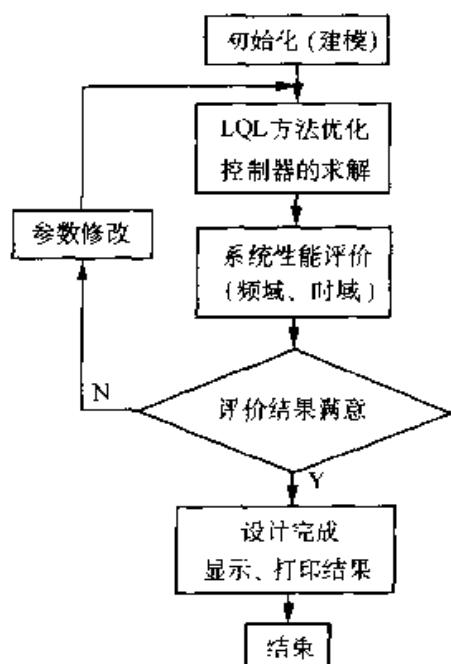


图 7.2 LQL 方法优化设计流程图

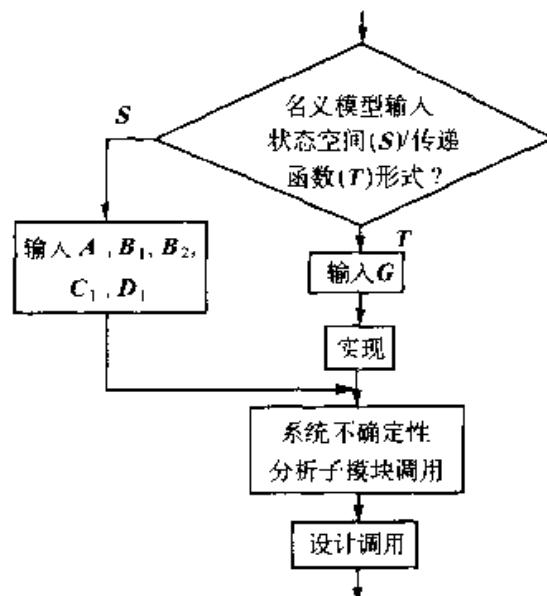


图 7.3 初期化流程图

1. 初始化

这部分包括为使实际的系统能够符合 LQL 方法优化设计对模型的要求而需做的一些预处理工作,图 7.3 示出其流程图。主要是对系统中不确定性在对输出的影响意义上能量上限的估算,图 7.4 示出该子模块流程图。引入等价扰动信号,并依据 6.4.2 小节中给出的等价 L_2 有界不确定性估计原则可分别对系统中的参数摄动、高频未建模动态不确定性等进行估算处理。

2. LQL 方法优化控制器的求解

模型确立后,分析系统的设计指标要求,初步给定闭环系统极点的结构。据此按照第六章给出的不同情况下的加权阵构造公式,给出二次型性能指标中加权阵的初始选取值及待定常数 η 的迭代初值。由对方程组(2.4.58)解的存在性的判定决定迭代的继续与终止。迭代中基于计算误差的变化规律而对迭代步长进行实时优化,保证一定初值选取范围内的快速收敛。目前对低阶系统已取得了较为可靠的数值稳定性。进一步的工作将是开发稳定、可靠而又高效的算法,使其能够适用

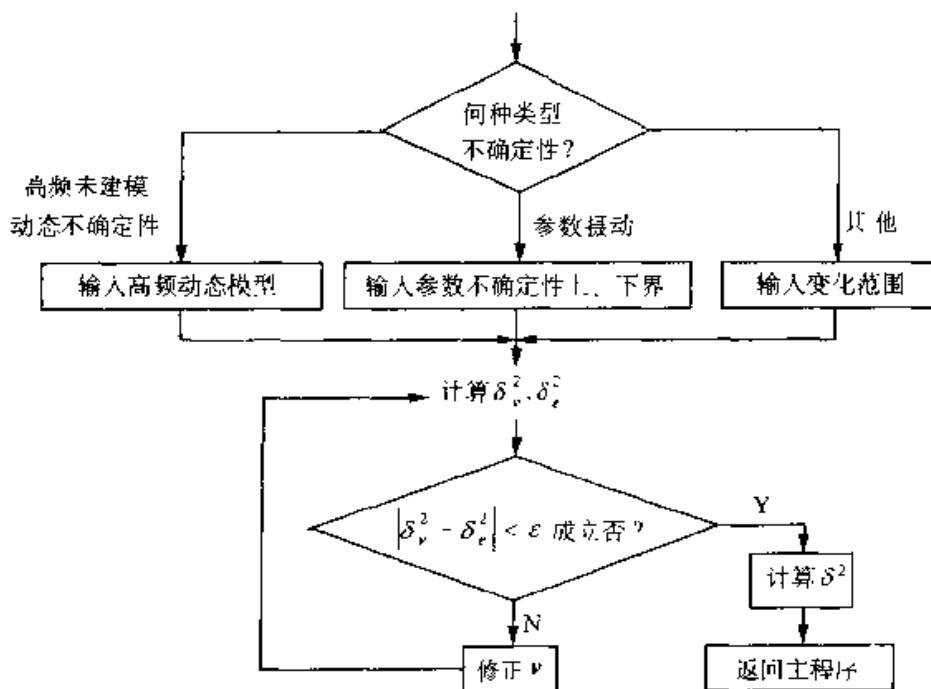


图 7.4 不确定性分析、建模子模块流程图

于复杂的高阶系统。

迭代过程的中间结果在屏幕的显示窗口给出动态显示,使用户能够观察到迭代进程是否令人满意。用户也可以根据自己的判定从键盘上随时中止迭代进程,或认可计算结果,或修改设计参数以便重新进行计算。这样就提高了设计的透明度,为用户提供了更多的选择余地以满足不同的设计要求。

将所求得的控制器按闭环设计方案实现回路的闭合。图 7.5 给出了控制器求解的设计流程图。

3. 系统性能评价

从频域和时域两方面对系统设计的性能进行分析。频域分析包括单输入单输出系统的 Bode 图、Nyquist 图、Nichols 图、根轨迹图,多输入系统的灵敏度函数和补灵敏度函数及代价函数的奇异值特性曲线。时域分析包括名义系统和摄动系统的阶跃响应分析及脉冲响应分析。

为便于与其他设计方法进行横向比较,在此还增加了其他方法设计功能子模块,包括混合灵敏度 H_2 方法、LQG 方法和鲁棒 LQ 方法。

以上分析和比较的结果可以数据或曲线的形式显示或打印。当系统性能满足设计要求时,设计完成。如果不满足,根据分析的结果,判定可能的原因,修改设计的参数,返回初始化部分或控制器综合部分的入口,再次设计。

以第六章中所给的 HIT-3T2 型仿真转台中框控制系统的为例,简要说明

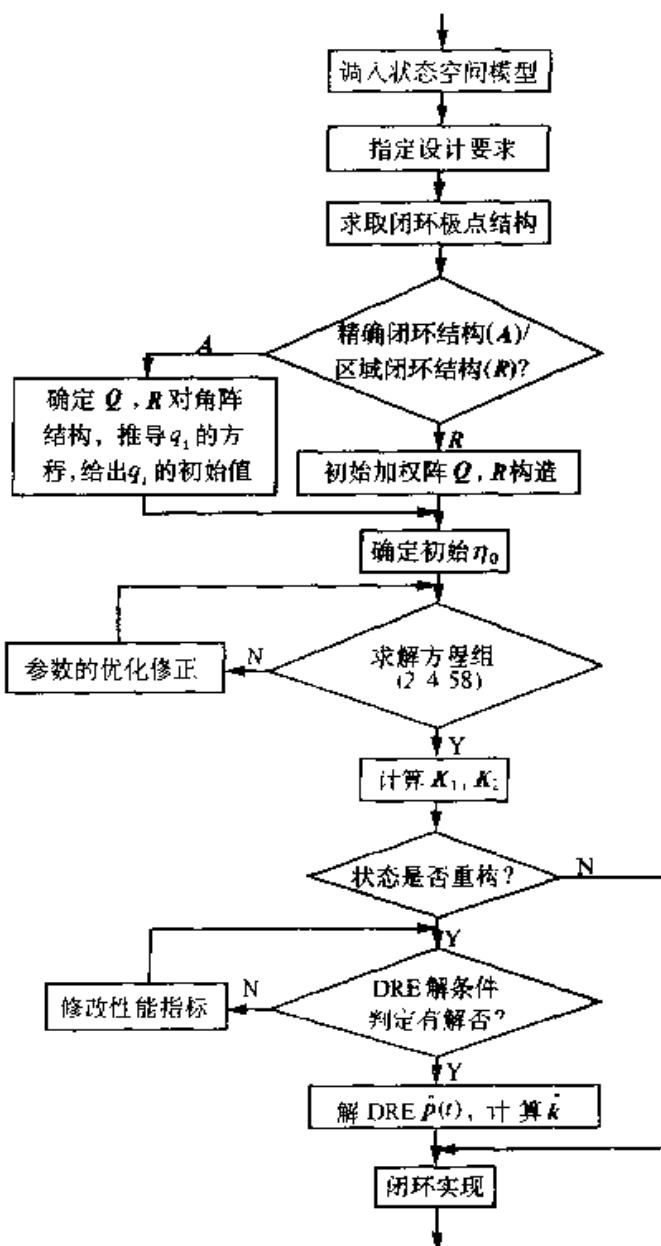


图 7.5 控制器设计求解流程图

使用该软件包进行设计的主要过程。有关界面见图 7.6~7.8。

1. 模型输入

在主菜单中选中“模型输入”，在下拉子菜单中选中“输入模型”，在下一级子菜单中选中“状态空间”，然后在弹出的对话框中输入各系数矩阵

$$\mathbf{A} = [0, 1, 0; 0, 0, 1; 0, -1.7922e4, -25.9593]$$

$$\mathbf{B1} = [0; 0; 1.1283e4]$$

$$\mathbf{C} = [1, 0, 0]$$

$$\mathbf{D} = [0]$$



图 7.6 LQI 优化设计软件包界面之一

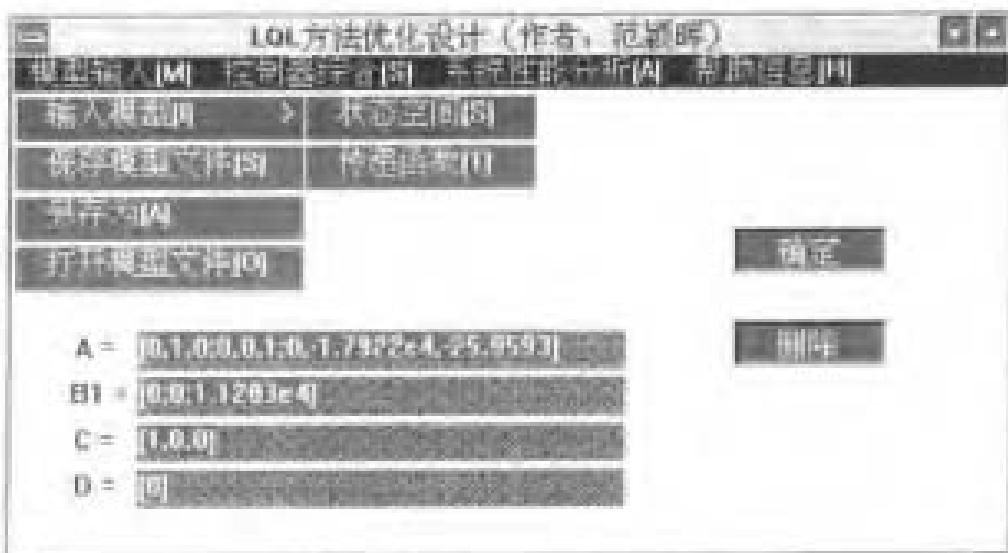


图 7.7 LQI 优化设计软件包界面之二

鼠标单击“确定”按钮，结束输入。

2. 不确定性 L_2 界估计

在主菜单中选中“控制器综合”，在下拉子菜单中选中“不确定 L₂ 界估计”。再在下一级子菜单中选中“等价扰动信号估计”，此时，“不确定性估计”对话框被弹

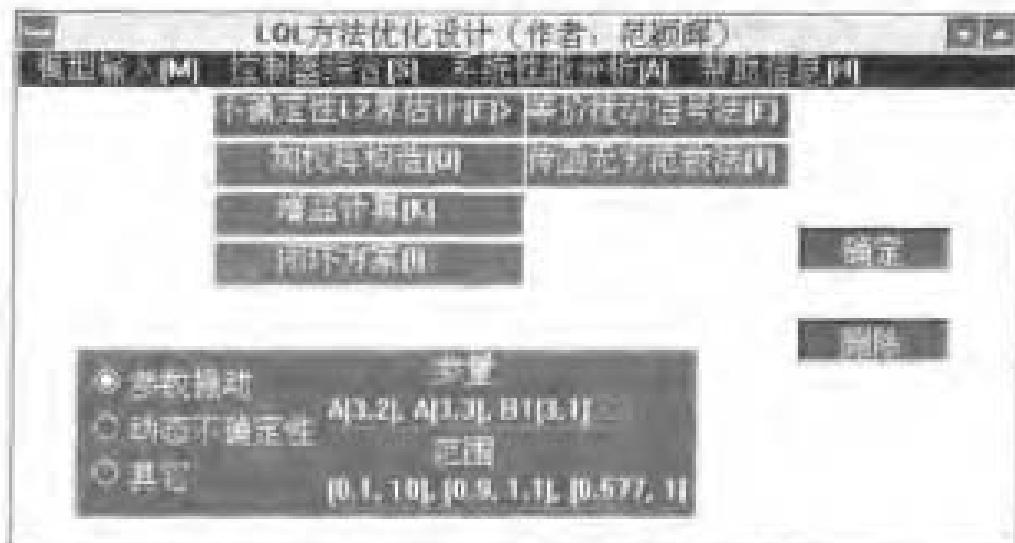


图 7.8 LQI 优化设计软件包界面之三

出,选择不确定性类型按钮“参数振动”,输入变化参量

$A[3,2]$, $A[3,3]$, $B[3,1]$

及取值范围

$[0,1,10]$, $[0,9,1,1]$, $[0,577, 1]$

鼠标单击“确定”按钮,屏幕显示“请等待”,稍后,可得估计结果。再次单击“确定”按钮,对话框关闭,估计结束;或单击“清除”按钮,放弃此次估计。

3. 闭环控制方案选取

在“控制器综合”的下拉子菜单中选中“闭环方案”,在对话框中同时选中“状态反馈”和“状态估计”两个选项,用鼠标单击“确定”按钮。

4. 加权阵构造

在“控制器综合”的下拉子菜单中选中“加权阵构造”,在下一级子菜单中选中“准确极点配置”,在弹出的“加权阵构造”对话框中输入希望极点

$$\lambda_1 = -65, \quad \lambda_2 = -532, \quad \lambda_3 = -2200$$

用鼠标单击“确定”按钮。

5. 状态反馈增益计算

在“控制器综合”的下拉菜单中选中“增益计算”,在下一级子菜单中选中“状态反馈”,在弹出的对话框中输入迭代初值

$$\eta(0) = 100$$

及迭代精度要求 $1e-5$, 鼠标单击“确定”按钮。稍等, 求解成功, 显示出计算结果

$$\eta = 16.6667, \quad Q = \text{diag}[4.4520e7, 1.0702e4, 3.9868e-2]$$

$$K_1 = [8.4486, 0.11781, 2.3934e-4]$$

反之, 则给出进程失败的简要说明。

6. 系统性能评价

在主菜单中选中“系统性能评价”, 在下拉子菜单中选中“频域”, 再在下一级子菜单中选中“代价函数奇异值图”, 得到 LQL 方法设计的代价函数奇异值曲线图及相应的扰动衰减值 $\gamma_{LQL} = 1.4055$; 再选中“Bode 图”, 分别求得 6Hz 和 15Hz 的频率响应值, 检验是否符合设计要求。

在下拉子菜单中选中“时域”, 再在下一级子菜单中选中“阶跃响应”。从所得曲线分析设计是否满足要求, 若满足, 结束设计, 打印结果(部分结果可参见第四章); 若不满足, 则寻找差距, 进行参数调整, 重新设计。

7. 与其他方法设计的比较

在主菜单中选中“系统性能评价”, 在下拉子菜单中选中“其他方法设计”, 再在下一级子菜单中选中“混合灵敏度 H_∞ 方法”, 则打开一个新的设计界面, 用户可按所给提示输入相应设计参数进行设计, 此处从略。

7.5 本章小结

为了在控制系统设计与实际应用中方便应用 LQL 方法, 本章将本书的 LQL 算法编制成可实用的设计软件包, 便于使其从理论研究逐步向工程应用推广, 这也是 LQL 方法不断完善过程中的一项重要基础工作。

本章简述了利用 Matlab 现有的软件平台, 采用 Matlab 语言自主开发了 LQL 方法优化设计的软件包, 采用模块化设计思想以便于将来功能上的扩充。

该设计软件包是作者对 LQL 方法在理论上进行深入研究的同时, 为检验理论结果的有效性而逐步建立起来的, 目前仍处在不断完善之中。随着对 LQL 方法及其与 LQG, H_∞ 之间的联系的更为深入的探讨, 其优化设计软件包也将得到相应的完善。

结 束 语

本书运用线性二次最优控制的思想和基本方法来处理平方可积不确定性干扰下的线性定常系统的鲁棒(robust)最优反馈控制问题。

借助于微分对策的思想,将不确定干扰因素视为使系统性能“变坏”的对策一方,从而提出了 $\max\min$ 指标下最优控制律设计问题,即“最坏”干扰下的“最优”控制问题。由此思路形成了用时域开环最优化方法解决近年来兴起的 H_∞ 方法用频域闭环最优方法所处理的同一类问题,从技术上实现了简化,并给出 Kalman 思想下的对应解决问题的框架和相应结论。提出了“具 L_2 有界不确定性系统线性二次鲁棒最优控制”——LQL 方法(linear quadratic optimal control of the systems with L_2 bounded uncertainties),数学上表述为“极大极小”或“极小极大”估计和控制问题,其系统表示为 $\min\max$ 状态估计- $\max\min$ 反馈控制闭环方案。并提出了 LQL 方法与控制系统设计理论中的 W-H(Wiener-Hopf), H^∞ , LQG 等方法形成了如下分类关系:

频域优化方法:W-H, H_∞ , 称谓 Wiener 方法类;

时域优化方法:LQG, LQL, 称谓 Kalman 方法类;

白噪声干扰抑制;W-H, LQG, 优化 H_2 范数指标;

L_2 有界扰动抑制: H_∞ , LQL, 优化 H_∞ 范数指标。

这种内在的、也是逻辑上的框架关系对于系统研究最优鲁棒控制理论和深化对现有各种派生的鲁棒控制系统设计应具有一定的指导意义。

本书还涉及了两个控制理论界存在多年的著名难题——一般代数 Riccati 方程的实对称镇定解的存在性和 LQ 指标下的最优输出反馈问题的讨论。

在确定性系统状态反馈解的存在性讨论中涉及了一般代数 Riccati 方程解的存在性问题,本书从微分 Riccati 方程解的存在性条件出发给出相应代数方程解的存在性结论。并且指出了一般 Riccati 方程问题,不确定系统 $\max\min$ 鲁棒最优控制问题和 H_∞ 问题状态反馈解的存在性之间存在着本质上的一致性。

在考虑最优输出反馈问题中,本书给出了依据确定性系统结构参数(A, B, C)判定在二次型 LQ 指标下的最优静态输出反馈存在的一种充分条件的结论。这个结论从数学上看可以认为是找到了 Riccati 方程与 Lyapunov 方程的一个契合点。从控制系统观点看,则可看成是 LQ 最优控制问题与系统镇定问题的一个契合点。

在此结论的基础上,进而讨论了不确定性系统的动态最优输出反馈设计问题。

本书还讨论了 LQL 方法的几种表述形式,LQL 设计方法与 H_∞ 方法的比较和在仿真转台设计中的应用研究,以及 LQL 应用中不确定参数界的估算原则,最后给出了 LQL 方法用于控制系统设计的软件包,向实际应用研究推进了一步。

对上述涉及线性系统、最优控制、鲁棒控制理论的一些基本问题的讨论,本书一方面给出了相应的研究结果,同时也指出了进一步完善的研究思路和问题,希望能够对读者起到一点抛砖引玉的启示。

参 考 文 献

- 1 Kailath T. Linear System. Prentice-Hall, 1980
- 2 Anderson B D O, Moore J B. Linear Optimal Control. Prentice-Hall, 1971
- 3 黄琳, 郑应平, 张进. Lyapunov 第二法与最优控制器分析设计问题. 自动化学报, 1976, 2(4)
- 4 Kalman R E. When is a Linear Control System Optimal? Trans. ASME J. Basic Engr. Series D. 1964, 86(1): 51 ~ 60
- 5 Safonov M G, Athans M. Gain and Phase Margin of Multiloop LQG Regulator. IEEE Trans. Automat. Contr. 1977, AC-22(2): 173 ~ 177
- 6 Grimble M I. Reduced Order Optimal Controller for Discrete Time Stochastic Systems. Proc. Inst. Elec. Eng. London, 1980: 55 ~ 63
- 7 Doyle J. Guaranteed Margins for LQG Regulators. IEEE Trans. Automat. Contr. 1978, AC-23(4): 756 ~ 757
- 8 Rosenbrock H H. Computer-aided Control System Design. New York: Academic Press, 1974
- 9 Macfarlane A G J, Belletti J J. the Characteristic Locus Design Method. Automatica, 1973, 9(5): 575 ~ 588
- 10 Postlethwaite I. Sensitivity of the Characteristic Gain Loci. Automatica, 1982, 18(6): 709 ~ 712
- 11 Macfarlane A G J. Frequency Response Methods in Control Systems. IEEE Reprint Series, New York, 1979
- 12 Mayne D Q. The Design of Linear Multivariable Systems. Automatica, 1973, 9(2): 201 ~ 207
- 13 Bode H W. Network Analysis and Feedback Amplifier Design. Princeton, NJ, 1945
- 14 Cruz J B, Perkins W R. A New Approach to the Sensitivity Problem in Multivariable Feedback System Design. IEEE Trans. Automat. Contr. 1964, AC-9(3): 216 ~ 223
- 15 王龙, 黄琳. 系数空间中多项式的鲁棒稳定性和有理函数的严格正实不变性. 控制理论与应用, 1992, 9(2): 155 ~ 160
- 16 Lin H, Hollot C V, Bartlett A C. Stability of Families of Polynomials: Geometric Considerations in Coefficient Space. Int. J. Contr. 1987, 45(2): 649 ~ 660
- 17 Lin H, Hollot C V. Results on Positive Pairs of Polynomials and Their Application to the Construction of Stability Domains. Int. J. Contr. 1987, 46(1): 153 ~ 159
- 18 Lin H, Long W. Value Mapping and Parameterization Approach to Robust Stability. Science in China(A). 1991, 34: 1122 ~ 1232
- 19 正恩平, 耿志力. 非线性参数化实系数多项式多项式族稳定性的边界检验. 控制理论与应用年会论文集. 武汉: 海洋出版社, 1993, 84 ~ 87
- 20 Zames G. Feedback and Optimal Sensitivity: Model Reference Transformations, Multiplicative Seminorms, and Approximate Inverse. IEEE Trans. Automat. Contr. 1981, AC-26(2): 301 ~ 320
- 21 Zames G, Francis B A. Feedback, Minimax Sensitivity and Optimal Robustness. IEEE Trans. Automat. Contr. 1983, AC-28(5): 585 ~ 601
- 22 Kimura H. Robust Stabilization for A Class of Transfer Functions. IEEE Trans. Automat. Contr. 1984, AC-29(6): 778 ~ 793

- 23 Francis B A, Helton J W, Zames G. H_∞ Optimal Feedback Controllers for Linear Multivariable Systems. IEEE Trans. Automat. Contr. 1984, AC-29(7):888 ~ 900
- 24 Vidyasagar M, Kimura H. Robust Controllers for Uncertain Linear Multivariable Systems. Automatica. 1986, 22(1): 85 ~ 94
- 25 Glover K. Robust Stabilization of Linear Multivariable System: Relations to Approximations. Int. J. Contr. 1986, 43(3):741 ~ 766
- 26 Francis B A. A Course in H_∞ Control Theory. Lecture Notes in Control and Information Sciences 1987, 88, Springer-Verlag
- 27 Doyle J, Glover K, Khargonekar P P et al. State-space Solutions to Standard H₂ and H_∞ Control Problems. Proc. American Control Conference, Atlanta, GA. 1988. & IEEE Trans. Automat. Contr. 1989, AC-34(8):831 ~ 847
- 28 Packard A K, Doyle J. the Complex Structured Singular Value. Automatica, 1993, 29(1):71 ~ 109
- 29 Georgiou T T, Smith M C. Robust Stabilization in the GAP Metric: Controller Design for Distributed Plants. IEEE Trans. Automat. Contr. 1992, AC-37(8):1133 ~ 1143
- 30 Toker O, 8zbay H. Gap Metric Problem for MIMO Delay Systems: Parameterization of All Suboptimal Controllers. Automatica, 1995, 31(7):931 ~ 940
- 31 Petersen I R, Hollot C V. A Riccati Equation Approach to the Stabilization of Uncertain Linear Systems. Automatica, 1986, 22(3):397 ~ 411
- 32 Doyle J, Packard A, Zhou K. Review of LFT'S, LMI'S and μ . Proc. IEEE Conf. Decis. Contr., Brighton, England, 1991, 1227 ~ 1232
- 33 Pan Z, Basar T. H_∞-Optimal Control for Singularly Perturbed Systems. Part I: Perfect State Measurements. Automatica, 1993, 29(2):401 ~ 423
- 34 Pan Z, Basar T. H_∞-Optimal Control for Singularly Perturbed Systems, Part 2: Imperfect State measurements. IEEE Trans. Automat. Contr. 1994, AC-39(2): 230 ~ 249
- 35 Papavassiliopoulos G P, Safonov M G. Robust Control Design via Game Theoretic Methods. Proc. IEEE Conf. Decis. Contr., Tampa, Florida, Dec. 1989, 382 ~ 387
- 36 黄琳,于年才,王龙.李亚谱诺夫方法的发展与历史性成就.自动化学报. 1993, 19(5):587 ~ 595
- 37 Safonov M G, Laub A J, Hartmann G L. Feedback Properties of Multivariable Systems: The Rule and Use of the Return Difference Matrix. IEEE Trans. Automat. Contr. 1981, AC-26(1): 47 ~ 65
- 38 Grimble M J. Robust LQG Design of Discrete System Using a Dual Criterion. Proc. IEEE Conf. Decis. Contr., San Antonio, Texas, 1983, 1196 ~ 1198
- 39 Grimble M J. LQG Design of Discrete System Using a Dual Criterion. IEE Proc., pt. D., 1985, 132(1):61 ~ 68
- 40 Grimble M J. Multivariable Controllers for the LQG Self-tuning Applications with Colored Measurement Noise and Dynamic Cost Weightings. Int. J. Syst. Sci. 1986, 17(4):543 ~ 557
- 41 Moore J B, Blight J D. Performance and Robustness Trades in LQG Regulator Design. Proc. IEEE Conf. Decis. Contr., San Diego, USA, 1981, 1191 ~ 1200
- 42 Grimble M J. Optimal H Robustness and the Relationship to LQG Design Problems. Int. J. Contr. 1986, 43(2): 351 ~ 372
- 43 Grimble M J. Optimal H_∞ Multivariable Robust Controllers and the Relationship to LQG Design Problems. Int. J. Contr. 1988, 48(1): 33 ~ 58
- 44 Kwakernaak H. Robustness Optimization of Linear Feedback Systems. Proc. IEEE Conf. Decis. Contr., San Antonio, Texas, 1983, 618 ~ 624

- 45 Kwakernaak H. Minimax Frequency Domain Optimization of Multivariable Linear Feedback System. IFAC World Congress. Budapest, 1984, 1445 ~ 1453.
- 46 Kwakernaak H. A Polynomial Approach to Minimax Frequency Domain Optimization of Multivariable Feedback Systems. Int. J. Contr. 1985, 44(1): 117 ~ 156.
- 47 Grimble M J. Extensions to H_∞ Multivariable Robust Controllers and the Relationship to LQG Design Problems. Int. J. Contr. 1989, 50(1): 309 ~ 338
- 48 Youla D C, Jabr H, Borgiorno J J. Modern Wiener-Hopf Design of Optimal Controllers-Part II. IEEE Trans. Automat. Contr. 1976, AC-21(3):319 ~ 338
- 49 Grimble M J. Two Degrees of Freedom Feedback and Feedforward Optimal Control of Multivariable Stochastic Systems. Automatic, 1989, 24(6):809 ~ 817
- 50 Grimble M J. Minimization of a Combined H_∞ and LQG Cost-function for A Two-degree-of-freedom Control Design. Automatic, 1989, 25(4):635 ~ 638
- 51 Grimble M J, Salle De La, Ho D. Relationship Between Internal Model Control and LQG Controller Structure. Automatic, 1989, 25(1): 41 ~ 53
- 52 Choi S G, Johnson M A, Grimble M J. Polynomial LQG Control of Back-Up-Roll Eccentricity Gauge Variations in Cold Rolling Mills. Automatic, 1994, 30(6): 975 ~ 992
- 53 Grimble M J. Relationship Between Polynomial and State-Space Solutions for the Optimal Regulator Problem. Syst. Contr. Lett., 1987, 8(5):411 ~ 416
- 54 Mosca E, Giarré L, Casarola A. On the Polynomial Equations for the MIMO LQ Stochastic Regulator. IEEE Trans. Automat. Contr. 1990, AC-35(3):320 ~ 322
- 55 Casarola A, Grimble M J, Mosca E, et al. Continuous-time LQ Regulator Design by Polynomial Equations. Automatic, 1991, 27(3): 555 ~ 558
- 56 Barnish B R. Necessary and Sufficient Condition for Quadratic Stabilizability of an Uncertain System. J. of Optimization Theory and Application, 1985, 46(4):399 ~ 408
- 57 Bernstein D S. Robust Static and Dynamic Output-feedback Stabilization: Deterministic and Stochastic Perspectives. IEEE Trans. Automat. Contr. 1987, AC-32(12):1072 ~ 1084
- 58 Bernstein D S, Haddad W M. The Optimal Projection Equations with Petersen-Holot Bounds: Robust Stability and Performance via Fixed-order Dynamic Compensation for Systems with Structured Real-valued Parameter Uncertainty. IEEE Trans. Automat. Contr. 1988, AC-33(6):578 ~ 582
- 59 Khargonekar P P, Petersen I R, Zhou K. Robust Stabilization of Uncertain Linear Systems: Quadratic Stabilizability and H_∞ Theory. IEEE Trans. Automat. Contr. 1990, AC-35(3):356 ~ 361
- 60 Xie L, de Souza C. Robust H_∞ Control for Linear System with Norm Bounded Time-varying Uncertainty. Proc. IEEE Conf. Decis. Contr., Honolulu, HI, 1990, 1034 ~ 1035
- 61 Douglas J, Athans M. Robust Linear Quadratic Designs with Real Parameter Uncertainty. IEEE Trans. Automat. Contr. 1994, AC-39(1):107 ~ 111
- 62 Mehdi D, Hamid M, Perrin F. Robust and Optimality of Linear Quadratic Controller for Uncertain Systems. Automatic, 1996, 32(7): 1081 ~ 1087
- 63 Petersen I R. Disturbance Attenuation and H_∞ Optimization: A Design Method Based on the Algebraic Riccati Equation. IEEE Trans. Automat. Contr. 1987, AC-32(5):427 ~ 429
- 64 Khargonekar P P, Petersen I R, Rotea M A. H_∞ -Optimal Control with State-feedback. IEEE Trans. Automat. Contr. 1988, AC-33(8):786 ~ 788

- 65 Zhou K, Khargonekar P P. An Algebraic Riccati Equation Approach to H_∞ Optimization. *Syst. Contr. Lett.* 1987, 11(2):85~91
- 66 Petersen I R, Hollot C V. Using Observers in the Stabilization of Uncertain Linear Systems and in Disturbance Rejection Problems. Proc. IEEE Conf. Decis. Contr., Athen, Greece, 1986, 1466~1471
- 67 Petersen I R, Hollot C V. High Gain Observer Approach to Disturbance Attenuation Using Measurement Feedback. *Int. J. Contr.* 1988, 48(6): 2453~2464
- 68 Petersen I R. A Riccati Equation Approach to the Design of Stabilizing Controllers and Observers for a class of Uncertain Linear Systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1985, AC-30(7):904~907
- 69 Khargonekar P P, Petersen I R, Zhou K. Feedback Stabilization of Uncertain Systems. Proc. of 25th Allerton Conf. Commu. Contr. Computation, Monticello, Illinois, IB, 1987, 88~96
- 70 Bernstein D S, Haddad W M. LQG Control with an H_∞ Performance Bound: A Riccati Equation Approach. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1989, AC-34(3):293~305
- 71 Savkin A V, Petersen I R. A Connection Between H_∞ Control and the Absolute Stabilizability of Uncertain Systems. *Syst. Contr. Lett.* 1994, 23(3):197~203
- 72 Moheimani S O R, Savkin A V, Petersen I R. A Connection Between H_∞ Control and the Absolute Stabilizability of Discrete-time Uncertain Linear Systems. *Automatic*, 1995, 31(8): 1193~1195
- 73 Haddad W M, Bernstein D S. Explicit Construction of Quadratic Lyapunov Function for the Small gain, positivity, circle and Popov Theorems and their Application to Robust Stability. Proc. IEEE Conf. Decis. Contr., Brighton, England, 1991, 2618~2623
- 74 Haddad W M, Bernstein D S. Parameter-dependent Lyapunov Functions and the Popov Criterion in Robust Analysis and Synthesis. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1995, AC-40(3):536~543
- 75 Barnish B R, De Marco C L. A New Method for Improvement of Robustness Bounds for Linear State Equations. Proc. Cont. Infor. Sci. Sys. Princeton, NJ, 1986, 115~120.
- 76 Leal M A, Gibson J S. A First-order Lyapunov Robustness Method for Linear Systems with Uncertain Parameters. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1990, AC-35(1):1068~1070
- 77 W.M. Haddad, V. Kapila, D.S. Bernstein. Robust H_∞ Stabilization via Parameterized Lyapunov Bounds. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1997, AC-42(2):243~248
- 78 Haddad W M, Kapila V. Robust Reduced-order Modeling for State-space Systems via Parameter-dependent Bounding Functions. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1997, AC-42(2):248~253
- 79 Chang S S L, Peng T K C. Adaptive Guaranteed Cost Control of System with Uncertain Parameters. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1972, AC-17(4): 474~488
- 80 Bernstein D S, Haddad W M. Robust Stability and Performance Analysis for State-Space Systems via Quadratic Lyapunov Bounds. *SIAM. J. Matrix Anal.* 1990, 11(2): 239~271
- 81 Kosmidou O I. Robust Stability and Performance of Systems with Structured and Bounded Uncertainties: an Extension of the Guaranteed Cost Control Approach. *Int. J. Contr.*, 1990, 52(3):627~640
- 82 Stoervogel A A. The Robust H_2 Problem: A Worst Case Design. Proc. IEEE Conf. Decis. Contr., Brighton, England, 1991, 194~199
- 83 Petersen I R, Macfarlane D C. Optimal Guaranteed Cost Control and Filtering for Uncertain Linear Systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1994, AC-39(9): 1971~1977
- 84 Bernstein D S, Haddad W M. Robust Reduced-order Nonstrictly Proper State Estimation via the Optimal Projection Equations with Guaranteed Cost Bounds. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1988, AC-33(6): 591~595

- 85 Savkin A V, Petersen I R. Minimax Optimal Control of Uncertain Systems with Structured Uncertainty. *Int. J. Robust and Nonlinear Control.*, 1995, 5(2):119 ~ 137
- 86 Savkin A V, Petersen I R. An Uncertainty Averaging Approach to Optimal Guaranteed Cost Control of Uncertain Systems with Structured Uncertainty. *Automatica*, 1995, 31(11): 1649 ~ 1653
- 87 Yakubovich V A. Minimization of Quadratic Functionals under the Quadratic Criterion for Absolute Stability of Nonlinear Control Systems. *Soviet Mathematics Doklady*, 1973, 14:593 ~ 597
- 88 Petersen I R. Quadratic Stabilizability of Uncertain Linear Systems: Existence of a Nonlinear Stabilizing Control does not Imply Existence of a Linear Stabilizing Control. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1985, AC-30(3):291 ~ 293
- 89 Stoer Vogel A A. Nonlinear L_1 Optimal Controllers for Linear System. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1995, AC-40(4):694 ~ 696
- 90 Kharoush M, Dahleh M. Time-varying Control and the Robust Performance of Systems with Structured Norm-bounded Perturbations. *Automatica*, 1992, 28(4): 819 ~ 822
- 91 Savkin A V, Petersen I R. Nonlinear versus Linear Control in the Absolute Stabilizability of the Uncertain Linear Systems with Structured Uncertainty. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1995, AC-40(1):122 ~ 127
- 92 Savkin A V, Petersen I R. Nonlinear versus Linear Control in the Robust Stabilizability of the Linear Uncertain Systems via Fix-order Output Feedback. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1996, AC-41(9):1335 ~ 1338
- 93 Glover K, Doyle J. State Space Formulae for all Stabilizing Controllers that Satisfy an H_∞ -norm Bound and Relations to Risk Sensitivity. *Syst. Contr. Lett.* 1988, 11(3):167 ~ 172
- 94 Ho Y C, Bryson A E, Barron S. Differential Game and Optimal Pursuit-evasion Strategies. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1965, AC-10(4):385 ~ 389
- 95 Magierow E F. Values and Strategies for Infinite Time Linear Quadratic Games. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1976, AC-21(4):547 ~ 550
- 96 Jacobson D H. Optimal Stochastic Linear Systems with Exponential Performance Criteria and Their Relation to Deterministic Differential Games. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1973, AC-18(2):124 ~ 131
- 97 Basar T, Bernhard P. H_∞ -Optimal Control and Related Minimax Design Problems: A Dynamic Game Approach, 2nd ed.. Boston, MA: Birkhäuser, 1995
- 98 Xu M, Mizukarui K. Linear-quadratic Zero-sum Differential Games for Generalized State Space Systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1994, AC-39(1):143 ~ 147
- 99 Limebeer D J N, Anderson B D O, Khargonekar P P, et al. A Game Theoretic Approach to H_∞ Control for Time-varying Systems. *SIAM. J. Contr. Optim.* 1992, 30(2):262 ~ 283
- 100 Rhee I, Speyer J L. A Game Theoretic Approach to a Finite-time Disturbance Attenuation Problem. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1991, AC-36(9):1021 ~ 1032
- 101 Basar T. A Dynamic Game Approach to Controller Design: Disturbance Rejection in Discrete Time. *Proc. IEEE Conf. Decis. Contr.*, Tampa, FL, 1989, 407 ~ 414
- 102 Toivonen H T. Sampled-data H_∞ Optimal Control of Time-varying Systems. *Automatica*, 1992, 28(4): 823 ~ 826
- 103 Shaked U, De Souza C E. Continuous-time Tracking Problems in an H_∞ Setting: A Game Theory Approach. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1995, AC-40(5):841 ~ 852
- 104 Yaesh I, Shaked U. Two-Degree-of-Freedom H_∞ -Optimization of Multivariable Feedback Systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1991, AC-36(11):1272 ~ 1276
- 105 Gusev S V. Minimax Control Under a Bound on the Partial Covariance Sequence of the Disturbance. *Automatica*, 1995, 31(9): 1287 ~ 1301

- 106 Chen S B. The Robust Optimal Control of Uncertain System-State Space Method. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1993, AC-38(6):951~957
- 107 Nagpal K, Khargonekar P P. Filtering and Smoothing in an H_∞ -setting. *Proc. IEEE Conf. Decis. Contr.*, Tampa, FL, 1989, 451~420, also in *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1991, AC-36(2):152~166
- 108 Basar T. Optimum Performance Levels for Minimax Filters, Predicators and Smoothers. *Syst. Contr. Lett.* 1991, 16(5):309~317
- 109 Banavar R N, Speyer J L. A Linear Quadratic Game Theory Approach to Estimation and Smoothing. *Proc. Amer. Contr. Conf.*, Boston, 1991, 2818~2822
- 110 Yaesh I, Shaked U. Game Theory Approach to Finite-time Horizon Optimal Estimation. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1993, AC-38(6):957~963
- 111 韩京清. 对偶关系与不确定系统的状态估计. *自动化学报*. 1979, 5(1) : 1~5
- 112 许可康. 含有不确定因素的一类降维状态估计. *数学年刊*. 1980, 1(1) : 41~45
- 113 Kwakernaak H. Robust Control and H_∞ -optimization-Tutorial Paper. *Automatic*, 1993, 29(2): 255~273
- 114 Jaimoukha I M, Limebeer D J N. State-space Algorithm for the Solution of the 2-block Super-optimal Distance Problem. *SIAM. J. Contr. Optim.* 1993, 31(5):1115~1134
- 115 Limebeer D J N, Halikias G D, Glover K. State-space Algorithm for the Computation of Super-optimal Matrix Interpolating Functions. *Int. J. Contr.* 1989, 50(6): 2431~2466
- 116 Mustafa D, Glover K. Minimum Entropy H_∞ Control. *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Springer-Verlag, 1990, 146
- 117 Sideris A. H_∞ Optimal Control as a Weighted Wiener-Hopf Problem. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1990, AC-35(3):361~366
- 118 Mustafa D. Relations Between Maximum Entropy H_∞ Control and Combined H_∞ /LQG Control. *Syst. Contr. Lett.* 1989, 12(3):193~203
- 119 Doyle J, Zhou K, Bodenheimer B. Optimal Control with Mixed H_2 and H_∞ Performance Objective. *Proc. Amer. Contr. Conf.*, Pittsburgh, PA, 1989, 2065~2070
- 120 Zhou K, Doyle J, Glover K, Bodenheimer B. Mixed H_2 and H_∞ Control. *Proc. Amer. Contr. Conf.*, San Diego, 1990, 2502~2507
- 121 Yeh H H, Banda S S, Chang B C. Necessary and Sufficient Conditions for Mixed H_2 and H_∞ Optimal Control. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1992, AC-37(3):355~358
- 122 Limebeer D J N, Anderson B D O, Hended B. A Nash Game Approach to Mixed H_2 / H_∞ Control. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1994, AC-39(1):69~82
- 123 Rotea M A, Khargonekar P P. Generalized H_2 / H_∞ Control via Convex Optimization. *IEEE Conf. Decis. Contr.*, Brighton, England, 1991, 2719~2720
- 124 Scherer C. Mixed H_2 / H_∞ Control. *Trends in Control-A European Perspective*. A. Isidori(Ed.), Springer, 1995, 173~216
- 125 Whorton M, Buschek H, Calise A J. Homotopy Algorithm for Fixed-order Mixed H_2 / H_∞ Design. *AIAA. J. Guid. Cont. Dyn.*, 1996, 19(6):1262~1269
- 126 Doyle J, Stein G. Multivariable Feedback Design : Concepts for A Classical , Modern Synthesis. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1981, AC-36(1):4~16
- 127 Stein G, Athans M. The LQG/LTR Procedure for Multivariable Feedback Control Design. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1987, AC-26(1):105~114

- 128 Morari M, Zafiriou E. Robust Process Control. Englewood Cliffs, New Jersey, USA: Prentice Hall, 1989
- 129 Geray O, Looza D P. Linear Quadratic Regulator Loop Shaping for High Frequency Compensation. Int. J. Contr., 1996, 63(6): 1055 ~ 1068
- 130 Zhang C, Fu M. A Revisit to the Gain and Phase Margins of Linear Quadratic Regulators. IEEE Trans. Automat. Contr., 1996, AC-41(10): 1527 ~ 1530
- 131 Shtessel Y B. Principle of Proportional Damages in A Multiple criteria LQR Problem. IEEE Trans. Automat. Contr., 1996, AC-41(3): 461 ~ 464
- 132 Jacobus M J, Jamshidi M, Abdallah C et al. Suboptimal Strong Stabilization Using Fixed-order Dynamic Compensation. Proc. Amer. Contr. Conf., San Diego, CA, 1990, 2659 ~ 2660
- 133 Halevi Y, Bernstein D S, Haddad W M. On Stable Full-order and Reduced-order LQG Controllers. Optimal Control Applications & Methods, 1992, 12(3): 163 ~ 172
- 134 Wang Y W, Bernstein D S. H_2 -suboptimal Stable Stabilization. Automatic, 1994, 30(11): 1797 ~ 1800
- 135 Ji Y, Chizeck H J. Controllability, Observability and Discrete-time Markovian Jump Linear Quadratic Control. Int. J. Contr., 1988, 48(2): 481 ~ 498
- 136 Ji Y, Chizeck H J. Controllability, Stabilizability and Continuous-time Markovian Jump Linear Quadratic Control. IEEE Trans. Automat. Contr., 1990, AC-35(7): 777 ~ 788
- 137 Special Issue on the LQG Problem. IEEE Trans. Automat. Contr., 1971, AC-16(6)
- 138 Harvey C A, Stein G. Quadratic Weights for Asymptotic Regulator Properties. IEEE Trans. Automat. Contr., 1978, AC-23(3): 378 ~ 387
- 139 Wittenmark B, Evans R J, Soh Y C. Constrained Pole Placement Using Transformation and LQ-Design. Automatica, 1987, 23(6): 767 ~ 769
- 140 Haddad W M, Bernstein D S. Controller Design with Regional Pole Constraints. IEEE Trans. Automat. Contr., 1992, AC-37(1): 54 ~ 69
- 141 Wu J L, Lee T T. Optimal Control with Regional Pole Constraints via the Mapping Theory. IEE Proc. Control Theory Appl., 1995, 142(6): 638 ~ 646
- 142 Garcia G, Bernussou J, Arezueler D. An LMI Solution for Disk Pole Location with H_2 Guaranteed Cost. European J. Contr., 1995, 1(1): 54 ~ 61
- 143 Reza S O, Moheimani, Peterson I R. Quadratic Guaranteed Cost Control with Robust Pole Placement in a Disk. IEEE Proc. Control Theory Appl., 1996, 143(1): 37 ~ 43
- 144 Garcia G, Daafouz J, Bernussou J. Output Feedback Disk Pole Assignment for Systems with Positive Real Uncertainty. IEEE Trans. Automat. Contr., 1996, AC-41(9): 1385 ~ 1391
- 145 Saberi A, sanmudi P, Stoerogal A A. H_2 Optimal Controllers with Measurement Feedback for Continuous-time Systems-Flexibility in Closed-loop Pole Placement. Automatic, 1996, 32(8): 1201 ~ 1209
- 146 De Nicolo G, Lorito F, Strada S. Dual LQG-Based Methods for Rejection of Narrow Band Disturbances. 2nd IFAC Workshop on Systems Structure and Control, Prague, 1992, 64 ~ 67
- 147 Connolly A J, Green M, Chicharo J F et al. The Design of LQG & H_∞ Controllers for use in Active Vibration Control & narrow Band Disturbance Rejection. Proc. IEEE Conf. Decis. Contr., New Orleans, LA, 1995, 2982 ~ 2987
- 148 Vincent J H, Anex R A. Flight Control Design Considerations for STOL Powered-lift Flight. AIAA Paper 90-3225, Sept. 1990
- 149 Fan Y, Cliff E M, Lutze F H et al. Mixed H_2/H_∞ Optimal Control for an Elastic Aircraft. AIAA. J. Guid. Cont. Dyn., 1996, 19(3): 650 ~ 655

- 150 Wise K A, Brinker J S. Linear Quadratic Flight Control for Ejection Seats. *AIAA J. Guid. Cont. Dyn.*, 1996, 19(1):15~22
- 151 Lin C M, Shi Z R. Quantitative Performance Robustness Linear Quadratic Optimal System Design. *AIAA J. Guid. Cont. Dyn.*, 1996, 19(3):600~604
- 152 Visser H G. Minimax Optimal Control Analysis of Lateral Escape Maneuvers for Micrometeoroid Encounters. *AIAA J. Guid. Cont. Dyn.*, 1997, 20(2):370~376
- 153 郑应平. Lagrange乘子法和Wiener-Hopf技术及其在控制系统设计中的应用. 自动化学报, 1983, 9(4):289~295
- 154 王恩平, 王朝珠. 线性最优控制系统的频域综合方法(单输入-单输出系统). 自动化学报, 1983, 9(2):162~166
- 155 孙增圻, 马少平. 连续系统中二次型性能指标函数对系统参数灵敏度的计算. 控制理论与应用, 1992, 9(3):209~214
- 156 张霖, 吴麒. 设计鲁棒控制器的主导特征向量配正方法. 自动化学报, 1991, 17(1):40~46
- 157 张霖, 吴麒, 高黛陵. 设计多变量鲁棒控制系统的正规矩阵方法. 自动化学报, 1994, 20(2):138~145
- 158 范玉顺, 吴麒, 王恩平. 具有预期闭环极点区域的稳定控制器的 H_∞ 优化设计方法. 自动化学报, 1991, 17(1):10~16
- 159 胡建昆, 王广雄, 张国锋. H_∞ 最优控制问题中关于在虚轴上一般变秩的研究. 控制理论与应用, 1993, 10(2):165~172
- 160 翁正新, 王广雄, 姚一新. 鲁棒 H_∞ 状态反馈控制. 控制理论与应用, 1994, 11(4):456~459
- 161 陈善本. 线性二次型指标下的最优输出反馈问题. 控制理论与应用, 1993, 10(1):93~98
- 162 Chen S B, Zhang F E, Zhang Q, et al. On the Existence of Solution of the General Algebraic Riccati Equation. *Int. J. Systems Sci.*, 1994, 25(11):2023~2029
- 163 李人厚, 谢宋和, 朱荣华. LQ 逆问题研究. 自动化学报, 1992, 18(4): 475~481
- 164 倪茂林, 吴宏鑫. 具有完整性的最优控制系统设计. 控制理论与应用, 1992, 9(3):245~249
- 165 袁立嵩, 蒋慰孙. 参数摄动系统的鲁棒 LQ 反馈控制. 自动化学报, 1994, 20(6):678~686
- 166 王耀青. LQ 最优控制系统中加权阵的确定. 自动化学报, 1992, 18(2):213~217
- 167 Vincent B, Michel G, Anders L. Survey on the State of Systems and Control. *European J. Contr.* 1995, 1(1):5~23
- 168 陈善本. 不确定性系统的鲁棒最优控制问题. 博士论文, 哈尔滨工业大学, 1990
- 169 Bertsekas D P, Rhodes I B. Recursive State Estimation for a Setmembership Description of Uncertainty. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1971, AC-16(2):117~128
- 170 韩京清. 线性控制系统的对偶性. 数学年刊, 1980, 1(1):31~39
- 171 Astrom K J. *Introduction to Stochastic Control Theory*. Academic Press., 1970
- 172 Petersen I R. Some New Results on Algebraic Riccati Equations Arising in Linear Quadratic Games and the Stabilization of Uncertain Linear Systems. *Syst. and Cont. Lett.*, 1988, 10(4):341~348
- 173 Chilali M, Gahinet P. H_∞ Design with Pole Placement Constraints: an LMI Approach. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1996, AC-41(3):358~367
- 174 Boykin W H, Bullock T E, Elder J M, Frazier B D. Digital Missile Controller Design and Analysis Information. AD 729854. College of Engineering, University of Florida Gainesville, Florida, 1971: 78~84
- 175 Funata K, Kim S B. Pole Assignment in a Specified Disk. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1987, AC-32(3):423~427

- 176 黄琳. 系统与控制理论中的线性代数. 北京: 科学出版社, 1984: 224 ~ 269
- 177 Franklin G F, Powell J D, Abbas E N. Feedback control of dynamic systems. Addison-Wesley, 1986, 447 ~ 473, 487 ~ 494
- 178 解学书. 最优控制理论与应用. 北京: 清华大学出版社, 1986: 315 ~ 318
- 179 Delsarte P, Genin Y, Kamp Y. The Nevanlinna-Pick Problem for Matrix Valued Functions. SIAM J. Appl. Math. 1979, 36(1): 47 ~ 61
- 180 Francis B A, Zames G. On H_∞ -Optimal Sensitivity Theory for SISO Feedback Systems. IEEE Trans. Automat. Contr. 1984, AC-29(1): 9 ~ 16
- 181 Bird J S, Francis B A. On the Robust Disturbance Attenuation Problem. Proc. of IEEE Conf. on Decis. and Contr., Athens, Greece, 1986, 1804 ~ 1809
- 182 Foo Y K, Postlethwaite I. An H_∞ minimax Approach to the Design of Robust Control Systems. Syst. Contr. Lett. 1984, 6(1): 81 ~ 88
- 183 Franchek M A. Enforcing Time Domain Specifications Through the Robust Performance and H_∞ Optimization Problem. Proc. Amer. Contr. Conf., Maryland, 1994, 1513 ~ 1517
- 184 李洪人. 液压控制系统. 北京: 国防工业出版社, 1991
- 185 彭晓红. “鲁棒控制器-观测器设计及其在 HTT-3T2 型转台中的应用研究”博士论文. 哈尔滨工业大学, 1995
- 186 郑大钟. 线性系统理论. 北京: 清华大学出版社, 1990
- 187 李春义, 冯元焜. 多变量非线性控制的逆系统方法. 北京: 清华大学出版社, 1991
- 188 Safonov M G. L_∞ Optimal Sensitivity vs. Stability Margin. Proc. IEEE Conf. Decis. Contr., San Antonio, Texas, 1983, 115 ~ 118
- 189 Tsai M C, Geddes E J M, Postlethwaite I. Pole-zero Cancellations and Closed-Loop Properties of an H_∞ Mixed Sensitivity Design Problem. Automatic, 1992, 28(3): 519 ~ 530
- 190 Balas G J, Doyle J. Robust control of Flexible Modes in the Controller Crossover Region. Proc. Amer. Contr. Conf., Pittsburgh, PA, 1989
- 191 Ogata K. Solving Control Engineering Problems with MATLAB. 1994
- 192 Chiang R Y, Safonov M C. Robust Control Toolbox, User's Manual. MathWork, 1989
- 193 Balas G J, Doyle J, Glover K et al. μ -tools, the μ -analysis and Synthesis Toolbox. MUSYN Inc and the Math-Works, 1991
- 194 Anderson B O D. A System Theory Criterion for Positive Real Matrices. J. SIAM Control. 1967, 5(1): 171 ~ 182
- 195 Anderson B O D et al. Output Feedback Stabilization and Related Problem Solution via Decision Methods. IEEE Trans. Automat. Contr. 1975, AC-20(1): 53 ~ 66
- 196 Allwright J C. Optimal Output Feedback without Trace. Appl. Math. 1976(2), 351 ~ 372
- 197 Astrom K J. Introduction to Stochastic Control Theory. Academic Press, 1970
- 198 Athans M. The Role and Use of the Stochastic LQG Problem in Control System Design. IEEE Trans. Automat. Contr. 1971, AC-16(4): 529 ~ 552
- 199 Bellman R E et al. Some Aspects of the Mathematical Theory of Control Process. The RAND Corporation, 1958
- 200 Bellman R E. Introduction to Matrix Analysis. The RAND Corporation, 1956
- 201 Bernstein D. Robust Static and Dynamic Output-feedback Stabilization: Deterministic and Stochastic Perspectives. IEEE Trans. Automat. Contr. 1987, AC-32(9): 1076 ~ 1084
- 202 Barnish B R et al. Robustness of Luenberger Observers: Linear Systems Stabilized via Non-linear Control. Automati-

- ca. 1986, 22(4):413 ~ 423
- 203 Bymes G J et al. Output Feedback and Generic Stability. SIAM J. Control and Optimization. 1982, 22(2):362 ~ 382
- 204 Bryson A E et al. Applied Optimal Control-Optimization, Estimation and Control. JOHN WILEY & SONS, 1975
- 205 Chen C T. Linear System Theory and Design. Holt, Rinehart and Winston, 1984.
- 206 Crouch P E. On the Existence of Solutions of the Riccati Differential Equation. Systems & Control letters. 1987, 9(2):203 ~ 206
- 207 Chang B C et al. Optimal Disturbance Reduction in Linear Multivariable Systems. IEEE Trans. Automat. Contr. 1984, AC-29(8):880 ~ 887
- 208 Chen B S et al. Robust Stabilization in an Observer-controller Feedback System under Nonlinear Time-varying Perturbations or Unmodeled Dynamics. IEEE Trans. Automat. Contr. 1987, AC-32(10):1131 ~ 1137
- 209 Chen B S et al. Robust Linear Controller Design: Time Domain Approach. IEEE Trans. Automat. Contr. 1987, AC-32(1):161 ~ 164
- 210 Chen M J et al. Necessary and Sufficient Condition for Robust Stability of Linear Distributed Feedback Systems. Int. J. Control. 1982, 35(1):255 ~ 267
- 211 Dahleh M A et al. Optimal Rejection of Persistent Disturbances Robust Stability and Mixed Minimization. IEEE Trans. Automat. Contr. 1988, AC-33(6):731
- 212 Davison E J. The Robust Control of a Servomechanism Problem for Linear Time-invariant Multivariable Systems. IEEE Trans. Automat. Contr. 1976, AC-21(1):25 ~ 34
- 213 Davison E J. On Pole Assignment in Linear Multivariable Systems Using Output Feedback. IEEE Trans. Automat. Contr. 1975, AC-20(6):516 ~ 518
- 214 Davison E J. A Generalization of the Output Control of Linear Multivariable Systems with Unmeasureable Arbitrary Disturbance. IEEE Trans. Automat. Contr. 1975, AC-20(8):788 ~ 792
- 215 Davison E J et al. Robust Control of a General Servomechanism Problem: the Servo Compensator. Automatica. 1975, 11(4):461 ~ 471
- 216 Davison E J et al. Gain Margin and Time Lag Tolerance Constraints Applied to the Stabilization Problem and Robust Servomechanism Problem. IEEE Trans. Automat. Contr. 1985, AC-30(2):229 ~ 239
- 217 Davison E J et al. The Design of Controllers for the Multivariable Robust Servomechanism Problem Using Parameter Optimization Method. IEEE Trans. Automat. Contr. 1981, AC-26(2):93 ~ 110
- 218 Davison E J et al. Perfect Control of the Robust Servomechanism Problem. IEEE Trans. Automat. Contr. 1987, AC-32(6):698 ~ 702
- 219 Doyle J C et al. Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modem Synthesis. I. IEEE Trans. Automat. Contr. 1981, AC-26(1):4 ~ 6
- 220 Doyle J C et al. Feedback System Design: the Fractional Representation Approach to Analysis and Synthesis. IEEE Trans. Automat. Contr. 1980, AC-25(4):399 ~ 412
- 221 Doyle J C et al. Robustness with Observers. IEEE Trans. Automat. Contr. 1979, AC-24(6):607 ~ 611
- 222 Francis B A et al. Linear Control Theory with an H_∞ Optimizing Criterion. SIAM J. Control and Optimization. 1987, 25(5):815 ~ 844
- 223 Feliachi A. Output Feedback Control Using Reduce Order Models. Int. J. Systems Sci. 1988, 19:2169 ~ 2177
- 224 Francis B A. The Multivariable Servomechanism Problem from the Input-output Viewpoint. IEEE Trans. Automat. Contr. 1977, AC-22(3):322 ~ 328

- 225 Francis B A. The Internal Model Principle of Control Theory. *Automatica*, 1976, 12(4):457 ~ 465
- 226 Francis B A. The Optimal Linear-quadratic Time-invariant Regular with Cheap Control. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1979, AC-24(6):616 ~ 621
- 227 Fujii T et al. A Complete Optimality Condition in the Inverse Problem of Optimal Control. *SIAM J. Control and Optimization*, 1984, 22(2):327 ~ 341
- 228 Ferguson J et al. Optimal Linear Control Systems with Incomplete State Measurements. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1969, AC-14(2):135 ~ 140
- 229 Gourishankar V et al. Reduced-order Observers for Multivariable Systems with Inaccessible Disturbance Inputs. *Int. J. Control.* 1977, 25(2):311 ~ 319
- 230 Glad S T. Robustness of Nonlinear State Feedback - a Survey. *Automatica*, 1987, 23(4):425 ~ 435
- 231 Glad S T. On the Gain Margin of Nonlinear and Optimal Regulators. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1984, AC-29(6):615 ~ 620
- 232 Hyland D C et al. The Optimal Projection Equation for Fixed-order Dynamic Compensation. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1984, AC-29(10):1034 ~ 1037
- 233 Hosoe S et al. An Elementary State Space Approach to RH_∞ Optimal Control. *Systems & Control Lett.* 1988, 11(3):369 ~ 380
- 234 Hsiao F H et al. Robustness Optimization in LQG Multivariable Systems with Time-varying Nonlinear Perturbations. *Int. J. Control.* 1988, 19(10):2019 ~ 2046
- 235 Jameson A et al. Inverse Problem of Linear Optimal Control. *SIAM J. Control.* 1973, 11(1):1 ~ 19
- 236 Kailath T et al. The Asymptotic Behavior of Constant-coefficient Riccati Differential Equations. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1976, AC-21(3):385 ~ 388
- 237 Krasovskii N N et al. Game-theoretical Control Problems. Springer-verlag, 1987
- 238 Kreindler E et al. Optimality of Linear Control Systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1972, AC-17(3):349 ~ 351
- 239 Kunura H. Robust Stabilizability for a Class of Transfer Functions. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1984, AC-29(7):788 ~ 793
- 240 Kosut R L. Suboptimal Control of Linear Time-invariant Systems Subject to Control Structure Constraints. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1970, AC-15(6):557 ~ 563
- 241 Kudva P et al. Observers for Linear Systems with Unknown Inputs. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1980, AC-25(2):103 ~ 115
- 242 Kwakernaak H. Minimax Frequency Domain Performance and Robustness Optimization of Linear Feedback Systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1985, AC-30(9):994 ~ 1004
- 243 Khargonekar P P et al. Robust Stabilization of Distributed Systems. *Automatica*, 1986, 22(1):77 ~ 84
- 244 Knapp C H et al. On Optimal Output Feedback. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1972, AC-17(8):823 ~ 825
- 245 Landau I D. Adaptive Control - the Model Reference Approach. Marcel Dekker INC., 1979
- 246 Levine W S et al. On the Determination of the Optimal Constant Output Feedback Gains for Linear Multivariable Systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1970, AC-15(1):44 ~ 48
- 247 Li X J. N-person Differential Games Governed by Infinite-dimensional Systems. *JOTA*, 1986, 50(2):431 ~ 450
- 248 Lancaster P et al. Existence and Uniqueness Theorems for the Algebraic Riccati Equation. *Int. J. Contr.* 1980, 32(2):285 ~ 309
- 249 Molinari B P. The Time-invariant Linear-quadratic Optimal Control Problem. *Automatica*, 1977, 13(3):347 ~ 357
- 250 O'Reilly J. Minimal-order Observers for Linear Multivariable Systems with Unmeasurable Disturbances. *Int. J. Contr.*

- 1978, 28(7):743 ~ 751
- 251 Olibrot A W et al. Worst Case Optimal Observer Design for Linear Discrete-time Systems with Unknown Bounded Square Summable Disturbances. *Int. J. Contr.* 1988, 48(8):1937 ~ 1946
- 252 Patel R V et al. Robustness of Linear Quadratic State Feedback Designs in the Presence of System Uncertainty. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1977, AC-22(9):945 ~ 946
- 253 Petersen I R. Some New Results on Algebraic Riccati Equations Arising in Linear Quadratic Differential Games and the Stabilization of Uncertain Linear Systems. *Systems & Control Lett.* 1988, 11(3): 341 ~ 348
- 254 Pachter M. Some Properties of the Value Matrix in Infinite-time Linear Quadratic Differential Games. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1978, AC-23(6):746 ~ 748
- 255 Petersen I R. Compensator Design for Multivariable Linear Systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1969, AC-14(2):130 ~ 134
- 256 Petersen I R. Worst-case Design Subject to Linear Parameter Uncertainties. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1975, AC-20(2):167 ~ 169
- 257 Petersen I R. Disturbance Attenuation and H_∞ Optimization : A Design Method Based on the Algebraic Equation. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1987, AC-32(3):427 ~ 429
- 258 Petersen I R. Linear Quadratic Differential Games with Cheap Control. *Systems & Control Lett.*, 1986, 8(2):181 ~ 188
- 259 Ragade R K et al. A Game Theoretic Approach to Optimal Control in the Presence of Uncertainty. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1967, AC-12(5):395 ~ 401
- 260 Shaked U et al. On the Stability Robustness of the Continuous-time LQG Optimal Control. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1985, AC-30(9):1039 ~ 1043
- 261 Safanov M G. Stability and Robustness of Multivariable Feedback Systems. The MIT Press, 1980
- 262 Schmitendorf W E. Minimax Control of Systems with Uncertainty in the Initial State and in the State Equations. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1977, AC-22(4):439 ~ 443
- 263 Steinberg A et al. Output Feedback Stabilization of Uncertain Dynamical Systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1985, AC-30(9):1025 ~ 1027
- 264 Samadan A et al. Eigenvector Assignment Using Output Feedback. *Int. J. Contr.* 1981, 34(11):1143 ~ 1152
- 265 Schmitendorf W E. A Sufficient Condition for Minimax Control of Systems with Uncertainty in the State Equations. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1976, AC-21(5): 512 ~ 515
- 266 Tempo R. Robust Estimation and Filtering in the Presence of Bounded Noise. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1988, AC-33(7):864 ~ 867
- 267 Tahk M et al. Modeling of Parameter Variations and Asymptotic LQG Synthesis. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1987, AC-32(7):793 ~ 801
- 268 Vidyasagar M. A State Interpretation of Simultaneous Stabilization. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1988, AC-33(4):506 ~ 508
- 269 Vidyasagar M. Control System Synthesis: A Factorization Approach. The MIT Press, 1985
- 270 Willems J C. Least Squares Stationary Optimal Control and Algebraic Riccati Equation. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1971, AC-16(7):621 ~ 634
- 271 Willems J C et al. Minimax Control of Systems with Uncertain State Measurements. *Applied Math & Optimization*, 1976, 2(3):315 ~ 334
- 272 You Y C. Closed-loop Synthesis for Quadratic Differential Game of Distributed Systems. *Chin. Ann. of Math.*, 1985,

- 6B(3):325~334
- 273 Zames G. On the Input-output Stability of Time-varying Nonlinear Feedback Systems. Part1, IEEE Trans. Automat. Contr. 1966, AC-11(3):228~236; Part2, 1966, AC-11(5):467~476
- 274 Zames G et al. Feedback, Minimax Sensitivity, and Optimal Robustness. IEEE Trans. Automat. Contr. 1983, AC-28(5):585~600
- 275 Zames G et al. Multivariable Feedback Sensitivity, and Decentralized Control. IEEE Trans. Automat. Contr. 1983, AC-28(9):1030~1035
- 276 Zheng D Z. Some New Results on Optimal and Sub-optimal Regulators of the LQ Problem with Output Feedback. IEEE Trans. Automat. Contr. 1989, AC-34(4):557~560
- 277 Zehdy M A et al. A Class of Output Feedback Controllers and Min-max Design. IEEE Trans. Automat. Contr. 1976, AC-21(6):614~615
- 278 Youla D C et al. Modern Wiener-Hopf Design of Optimal Controllers -Part 1: The Multivariable Case. IEEE Trans. Automat. Contr. 1976, AC-21(3):319~338
- 279 Mitter S K et al. An Elementary Proof of an H_∞ Optimal State Feedback Results. to appear IEEE Trans. Automat. Contr.
- 280 Doyle J C. Synthesis of Robust Controllers and Filters. Proc. Conf. On Decision and Control, 1983
- 281 韩曾晋.现代控制理论和应用.北京:北京出版社,1987
- 282 柳重堪.应用泛函分析.北京:国防工业出版社,1986
- 283 须田信英等.自动控制中的矩阵理论.曹长修译.北京:科学出版社,1979
- 284 袁震东.自适应控制理论及其应用.上海:华东师大出版社,1986
- 285 于更禄,史荣昌.矩阵理论.北京:国防工业出版社,1986
- 286 张嗣瀛.微分对策.北京:科学出版社,1986
- 287 孙富春,顾文锦.最优极点域参数空间设计法及其应用.航天控制,1989,(1):1~5
- 288 Krstic M., Li Z. H. Inverse Optimal Design of Input-to State Stabilizing Nonlinear Controllers. IEEE Trans. Automat. Contr. 1998, AC-43(3):336~350
- 289 Sontag E D, Wang Y. On Characterization of Input-to-State Stability Property. Syst. Contr. Lett. 1995, 24:351~359
- 290 Baras J S, Patel N S. Robust Control of Set-Valued Discrete-Time Dynamical Systems. IEEE Trans. Automat. Contr. 1998, AC-43(1):61~75
- 291 Whittle P. A Risk-Sensitive Maximum Principle: The Case of Imperfect State Observations. IEEE Trans. Automat. Contr. 1991, AC-36(7):793~801
- 292 Charalambous C D, Elliott R J. Finite-Dimensional Nonlinear Output Feedback Dynamic Games and Bounds for Sector Nonlinearities. IEEE Trans. Automat. Contr. 1999, AC-44(9):1753~1759

作者发表的与本书相关的研究论文

- 陈善本.不确定性系统时域 maxmin 与 minmax 优化次序的等价性问题.海军航空工程学院学报, 1993, 8(4): 57~65
- 陈善本,张福恩,张铨,吴林.具不定二次项的一般代数 RICCATI 方程解的存在性问题.自动化学报, 1996, 22(3):366~369
- 陈善本,张铨,张福恩,吴林.具动态不确定性的系统的观测器-控制器设计的鲁棒性.自动化学报, 1995, 26(3):

- 353 ~ 357
- 陈善本, 张铭, 张福恩, 吴林. 一般代数 RICCATI 方程与 H_∞ 状态反馈解的存在性质. 哈尔滨工业大学学报, 1994, 26(4): 101 ~ 105
- 陈善本, 张铭, 张福恩, 吴林. H_∞ 鲁棒最优控制问题的一种时域提法. 哈尔滨工业大学学报, 1994, 26(2): 93 ~ 96
- 陈善本, 张铭, 张福恩, 吴林. 具 L_2 有界不确定性扰动系统鲁棒最优跟踪问题的时域解. 宇航学报, 1995, 16(3): 25 ~ 31
- 陈善本, 张铭, 张福恩, 吴林. 具 L_2 有界不确定性系统常值调节问题的鲁棒最优解. 宇航学报, 1994, 15(2): 35 ~ 40
- 陈善本, 张福恩, 张铭, 吴林. 具 L_2 有界不确定性系统线性二次最优控制方法. 中国控制年会论文集. 北京: 中国科学技术出版社, 1995, 1: 80 ~ 83
- 陈善本, 张福恩, 张铭, 吴林. 不确定系统 H_∞ 鲁棒最优问题的时域方法. 中国博士后首届学术大会论文集. 北京: 国防工业出版社, 1993, 七册, 437 ~ 440
- 陈阳舟, 刘家琦, 陈善本. 关于不确定性系统的保证结果控制方法. 自动化理论, 技术与应用, 1997(4)
- 陈阳舟, 陈善本. 周期微分黎卡提方程正定解的存在性. 控制理论与应用, 2001, 18(3): 341 ~ 345
- 陈阳舟, 陈善本, 刘家琦. 控制理论中的频率定理 (Kalman-Yakubovich 引理). 控制理论与应用, 1998, 15(4): 477 ~ 492
- 陈阳舟, 陈善本, 刘家琦. Kalman-Yakubovich 引理与不确定性系统的鲁棒稳定性分析. 自动化学报, 1999, 25(5): 715 ~ 718
- 范颖晖, 陈善本, 张福恩. L_2 有界不确定性对闭环极点的影响. 中国控制年会论文集. 武汉: 武汉出版社, 1997, 1: 116 ~ 118
- 范颖晖, 陈善本, 张福恩, 柴大佑. 关于鲁棒最优控制中不确定性 L_2 范数界等价估计的几点探索. 机器人, 1998, 20(增刊): 258 ~ 260.
- 范颖晖, 陈善本, 张福恩, 柴大佑. 具 L_2 界不确定性系统 M -estimator 的设计. 机器人, 1998, 20(增刊): 261 ~ 266.
- 范颖晖, 陈善本, 张福恩. 主导极点圆域约束下具 L_2 有界不确定性系统的鲁棒优化设计问题. 航天控制, 1997
- 范颖晖, 陈善本, 张福恩. 区域极点约束下的具 L_2 有界不确定性系统鲁棒优化设计问题. 信息与控制, 1999
- 何熊熊, 陈善本, 吴林. 不确定线性时滞系统鲁棒输出跟踪控制器的设计. 中国学术期刊文摘, 2000, 6: 763 ~ 764
- 何熊熊, 陈善本, 吴林. 时滞不确定性的鲁棒控制及在焊接过程中的应用. 哈尔滨工业大学学报, 2000, 7(9): 98 ~ 100
- 何熊熊, 陈善本, 吴林. 一类存在输入时滞机器人的镇定控制. 哈尔滨工业大学学报, 2000, 32(9): 139 ~ 141
- 何熊熊, 单路, 陈善本. 基于状态观测器的不确定线性时滞系统的镇定控制. 机器人, 1998, 20(增刊): 222 ~ 228.
- 何熊熊, 陈善本, 吴林. 存在时滞摄动的 LQR 系统稳定性判据. 机器人, 1998, 20(增刊): 248 ~ 250.
- Chen S B. The Robust Optimal Control of Uncertain Systems-State Space Method. IEEE Trans. Automat. Contr., 1993, AC-38(6): 951 ~ 957
- Chen S B, Fan Y H, Zang F E. Case Study Comparison of Robust Linear Quadratic Design and Mixed-sensitivity H_∞ Control. IEE Control Theory and Applications, Part D, 1997, 144(5): 476 ~ 480
- Chen S B, Zhang F E, Zhang Q, Wu L. On the Existence of Solution of the General Algebraic Riccati Equation. Int. J.

- of Systems Science, 1994, 25(11): 2023 ~ 2029
- Chen S B, Zhang F E, Zhang Q, Wu L. Robustness of Observer-controller Designs for Systems with Dynamical Uncertainty. Chinese J. of Automation, ALLETON PRESS, INC. (USA), 1995, 7(3): p263 ~ 268
- Chen S B, Zhang F E, Zhang Q, Wu L. State-space Solution to Robust Optimal Tracking Problem of Uncertain Systems. European Control Conf. ECC95 Proceedings, Sep. 5 ~ 8, 1995, Roma, Italy, 2509 ~ 2513
- Chen Y Z, Liu J Q and Chen S B. Comparison and Uniqueness Theorems for Periodic Riccati Differential Equations. Int. J. Contr., 1998, 69(3):467 ~ 473 (SCI. 1639993)
- Chen Y Z, Chen B S. Existence of Positive Definite Solution to Periodic Riccati Differential Equation. Proc. of the 3rd World Congress on Intelligent Control and Automation, WCICA'2000, 2820 ~ 2823
- Chen Y Z, Liu J Q, Chen B S. Frequency Criterion for H_∞ Riccati Equation. WAC'98 (World Automation Congress), May, 1998, Anchorage, Alaska, USA
- Fan Y H, Chen S B, Zhang F E. Minimax State Estimation of Uncertain Systems with L_2 Bounded Constraint. J. of Harbin Institute of Technology, 1999, 6(2): 94 ~ 98
- He X X, Chen S B. An Approach of Stabilizing Control Based on State Observer for Uncertain Linear Large Scale Systems with Time-delay. Systems Science & Its Applications, 1998, (1): 248 ~ 252
- He X X, Chen S B, Wu L. Design of Performance Robustness for Uncertain Linear Systems with State and Control Delays-LMI Approach. J. of Harbin Institute of Technology, 2000, 7(9)
- He X X, Chen S B, Wu L. Design of Robust Regulator for Uncertain Linear System with Delayed State. Journal of Harbin Institute of Technology, 2000, 7(6)
- He X X, Chen S B, Wu L. Stabilizing Control Based on State Observer for Uncertain Linear Systems with Time Delay. Proc. of IMACS/IEEE CSCC'99, 1999, Athens, Greece
- He X X, Chen S B, Wu L. Design of Performance Robustness for Uncertain Linear System with State and Control Delays-LMI Approach. Proc. of the 3rd World Congress on Intelligent Control and Automation, WCICA'2000, 3359 ~ 3362