



MASTER EN ACTUARIAT
PARCOURS DATA SCIENCE

Pricing des options via différents
modèles discrets et continus

Etudiants:

BEL HADJ SLIMEN Nada
FAYDI Mariem
SMARI Mariem
ACHOUR Salma

6 décembre 2020

Table des matières

1	Introduction aux Options	1
1.1	Présentation des options	1
1.2	Implémentation des options	1
1.2.1	Le package fOptions	1
2	Le modèle discret : Cox-Ross Rubinstein	2
2.1	La valeur de l'option à chaque nœud final	2
2.2	La valeur de l'option sur les nœuds antérieurs	3
2.3	Implémentation - Résultats numériques	3
2.3.1	Cas d'une option américaine	3
2.3.2	Cas d'une option européenne	6
3	Le modèle stochastique : Black and scholes	8
3.1	Les hypothèses du modèle et notations	8
3.2	Modèle de Black-Scholes pour les options européennes sans dividendes . . .	8
3.3	Modèle de Black-Scholes pour les options européennes avec dividendes . . .	9
3.4	Implémentation - Résultats numériques	10
3.4.1	Pour les options Européennes sans dividendes	10
3.4.2	Pour les options Européennes avec dividende	11
4	Convergence de Cox-Ross Rubinstein vers le modèle Black and Scholes	13
4.1	Intérêt	13
4.2	Vitesse de convergence	13
4.2.1	Cas de convergence du Call européen dans un premier exemple . . .	13
4.2.2	Correction de la convergence	14
4.2.3	Cas de convergence du Call européen dans un autre exemple	14

Chapitre 1

Introduction aux Options

1.1 Présentation des options

Une option de vente ou put (respectivement d'achat ou call) est en finance de marché un produit dérivé qui donne le droit mais pas l'obligation de vendre (respectivement d'acheter) un actif financier, appelé actif sous-jacent à un prix K fixé à l'avance (strike), pendant un temps donné ou à une date fixée T appelée maturité de l'option.

Il existe plusieurs types d'options qui diffèrent essentiellement de part la manière dont on les exerce : les options européennes, américaines et asiatiques. Les options européennes et asiatiques ne donnent le droit de vendre ou d'acheter qu'à la maturité du contrat et les options américaines donnent le droit d'exercer le contrat durant toute ou partie de la période de validité. Nous nous intéresserons dans ce projet aux options européennes et américaines.

1.2 Implémentation des options

1.2.1 Le package fOptions

Il fournit une collection de fonctions pour évaluer les options de base. Cela comprend l'option généralisée Black-Scholes et celle de Cox-Russ Rubinstein. Comme :

Binomial Tree Options

Cette section propose une collection de fonctions pour évaluer les options dans le cadre de l'approche des options d'arbre binomial.

Donc, on l'a utilisé pour modéliser le modèle de CRR avec la fonction "CRRBinomial-TreeOption()".

Chapitre 2

Le modèle discret : Cox-Ross Rubinstein

Le modèle CRR suppose que le prix de l'actif sous-jacent suit un processus binomial discret. Le prix peut augmenter ou diminuer à chaque période. Donc, il change selon un arbre binomial illustré dans le graphique suivant, où u et d sont des multiplicateurs fixes mesurant les changements de prix quand il monte et descend.

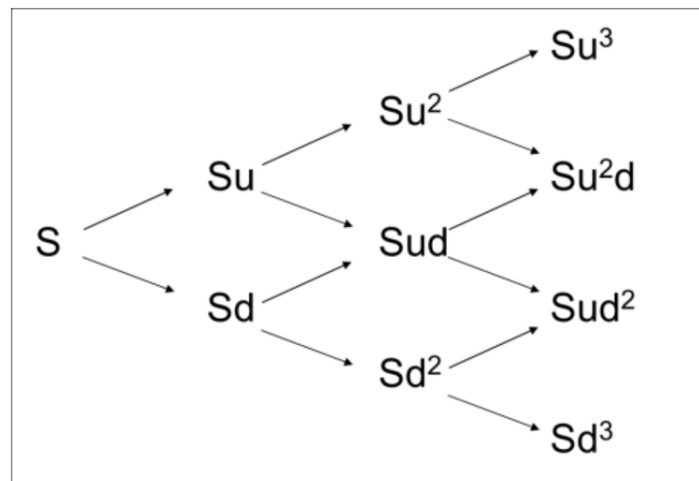


FIGURE 2.1 – Arbre binomial de CRR

2.1 La valeur de l'option à chaque nœud final

À chaque dernier nœud d'une branche de l'arbre de probabilité, la valeur de l'option est sa valeur intrinsèque.

$Max[(S_T - K), 0]$, pour un call,

$Max[(K - S_T), 0]$, pour un put,

où :

K est le strike et S_T est le spot du sous-jacent.

2.2 La valeur de l'option sur les nœuds antérieurs

Une fois que l'on a réalisé l'étape précédente, la valeur de l'option pour chaque nœud est trouvée en utilisant la valeur du nœud précédent, en remontant vers le premier nœud de l'arbre (qui est la valeur de l'option à la date à laquelle on veut la valoriser). La formule suivante est appliquée pour calculer l'espérance à chaque nœud.

$$S_T = \frac{1}{R}(qS_{T+1}^u + (1 - q)S_{T+1}^d)$$

avec :

$q = \frac{R-d}{u-d}$ qui est la probabilité risque neutre de gain et
 $1 - q$ est la probabilité de perte

Pour modéliser les options avec Cox-Ross Rubinstein, on a utilisé 2 méthodes : celle avec la fonction prédéfinie dans la package fOptions et l'autre développé par nous même à travers les formules du modèle.

2.3 Implémentation - Résultats numériques

Dans le code, la fonction CRRBinomialTreeOption calcule le prix d'une option Put et Call Américaine et Européennes selon le modèle de Cox-Ross Rubinstein (CRR).

Pour implémenter les résultats théoriques on a opté au langage R pour sa proximité du monde de la finance et sa richesse en terme de librairies destinées spécialement à ce domaine.

On initialise les paramètres du modèle comme suit :

- Le prix du strike (d'exercice) $K=50$,
- Le prix initial du sous-jacent $S=50$,
- L'horizon de temps $T=0.4167$,
- Le taux sans risque $r=0.1$,
- Le nombre de périodes $N=110$,
- La volatilité de l'actif sous-jacent $\sigma = 0.4$

2.3.1 Cas d'une option américaine

Put Américain

Maintenant on peut observer comme le montre la figure ci-dessous(en abscisse le nombre d'itération et en ordonnée la valeur de l'option) et celle ci-dessus que lorsque le nombre d'itération est grande $N \rightarrow +\infty$ et par conséquent $\Delta t \rightarrow 0$, la valeur d'une option calculée à la manière de CRR (put ou call) donnera avec les mêmes paramètres la valeur obtenue avec le modèle de BSM.

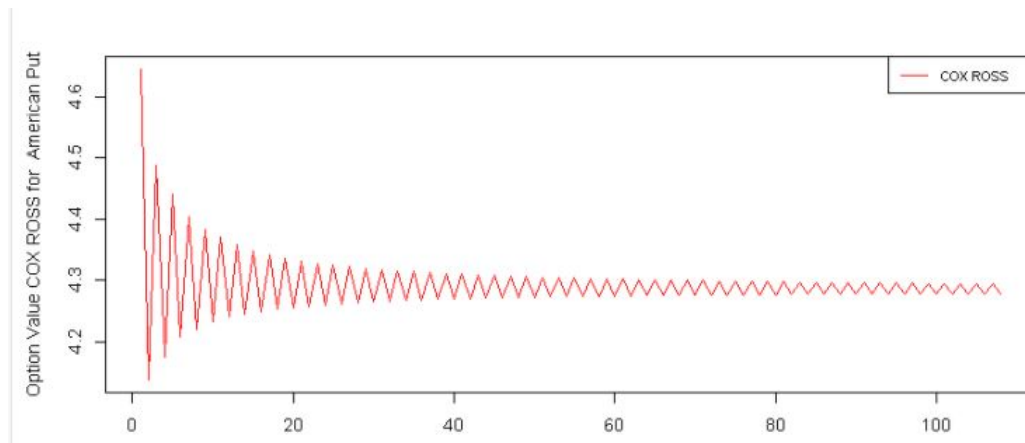


FIGURE 2.2 – Valeur de l’option pour un put américaine

Voyons maintenant avec l’arbre binomial de Cox-Ross Rubinstein.

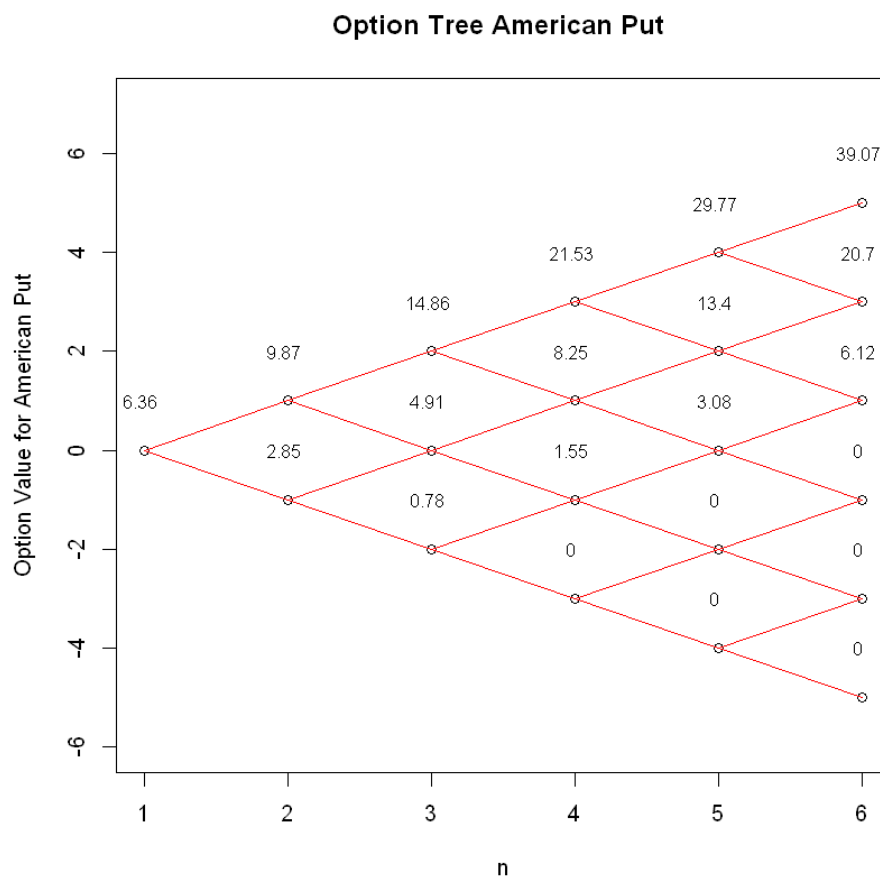


FIGURE 2.3 – L’arbre binomial de Cox-Ross-Rubinstein - Option Put Américaine

On finit à avoir une valeur de l’option put qui est égale à 6.36 à l’instant $T=1$

Call Américain

La figure ci-dessous présente le modèle Cox-Ross pour un Call Américain pour une période allant de zéro à 110 comme indiqué en abscisse le nombre d'itérations et en ordonnée la valeur de l'option :

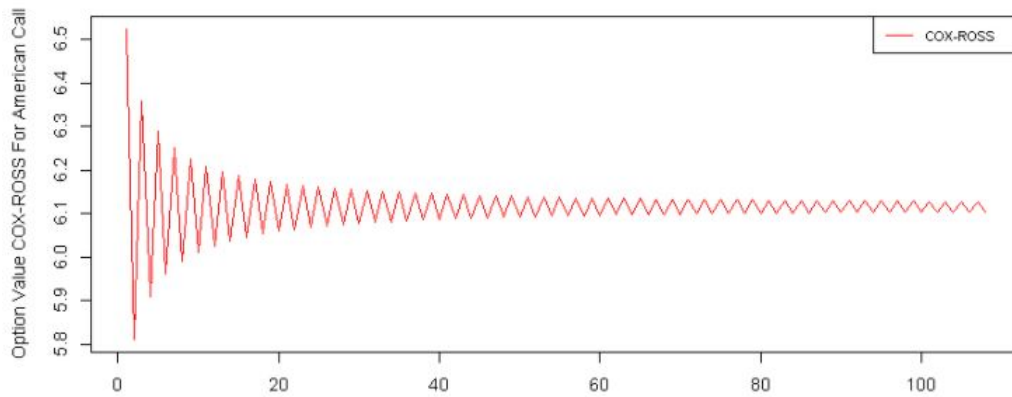


FIGURE 2.4 – Valeur de l'option pour un call américain

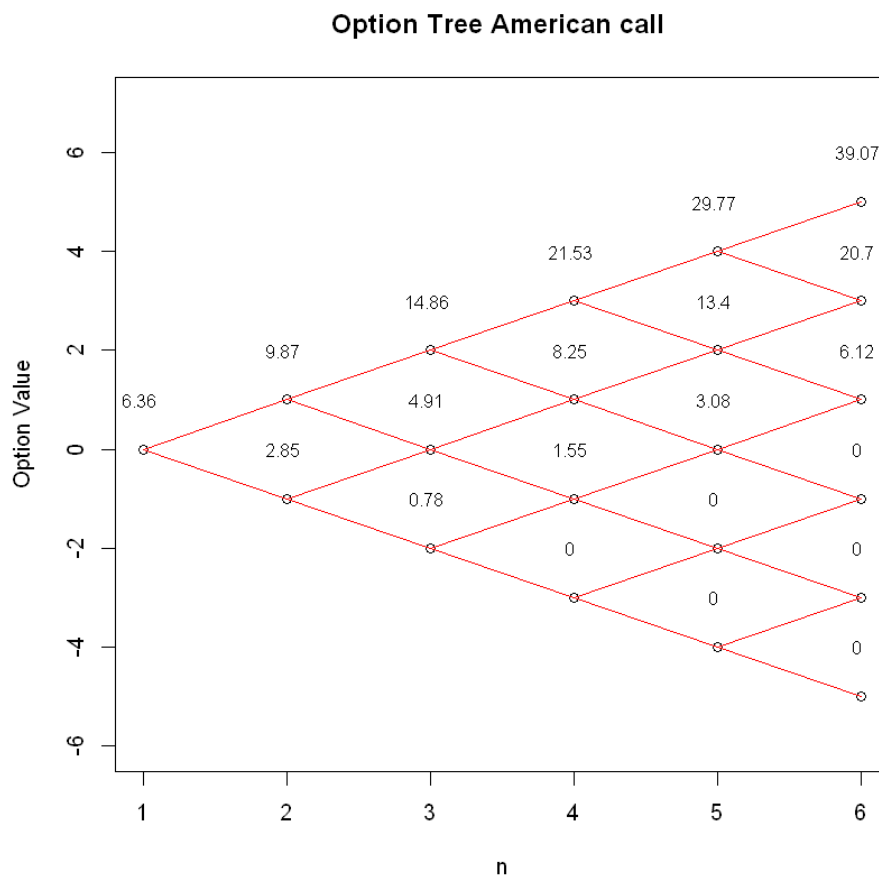


FIGURE 2.5 – L'arbre binomial de Cox-Ross-Rubinstein - Option Call Américaine

2.3.2 Cas d'une option européenne

Put européen

La figure ci-dessous montre la modélisation du modèles discrets Cox-Ross Rubinstein pour un Put Européen :

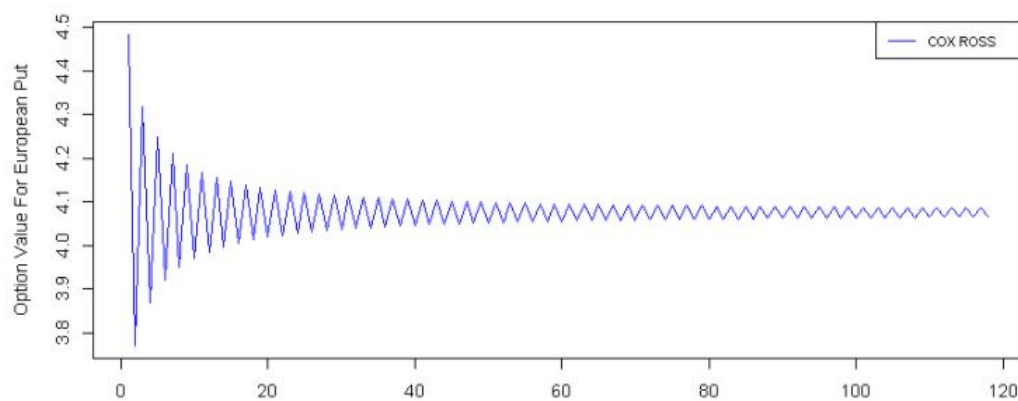


FIGURE 2.6 – Valeur de l'option pour un put européen

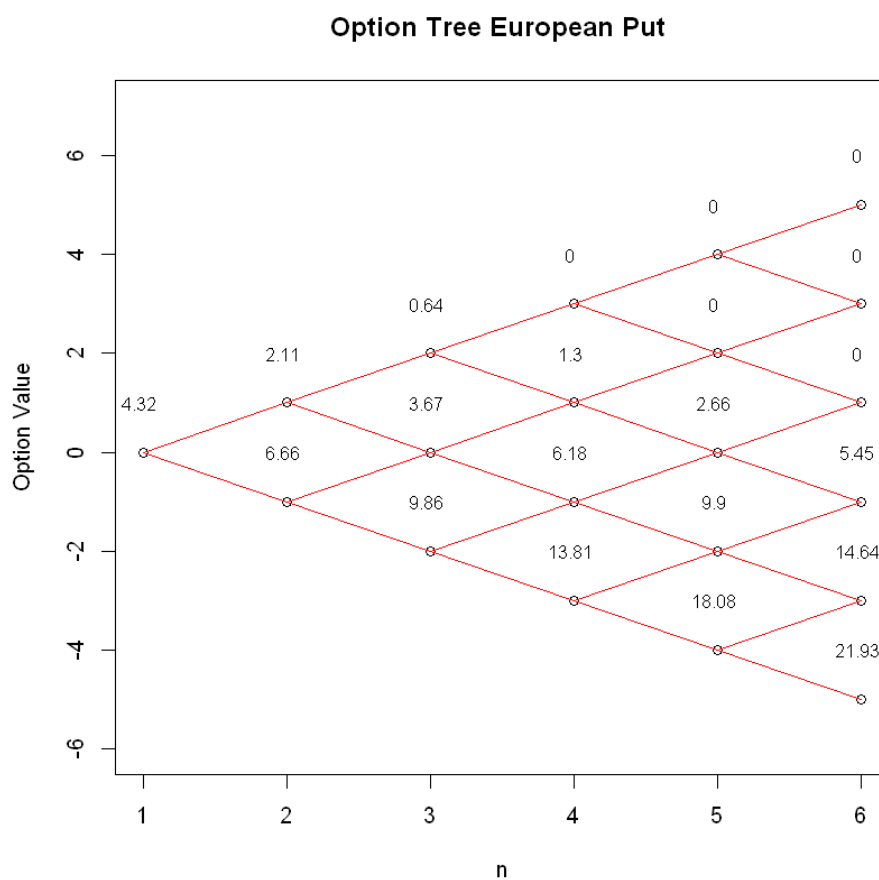


FIGURE 2.7 – L'arbre binomial de Cox-Ross-Rubinstein - Option Put Européenne

Call européen

La figure ci-dessous montre la modélisation du modèles discrets Cox-Ross Rubinstein pour un Call Européen :

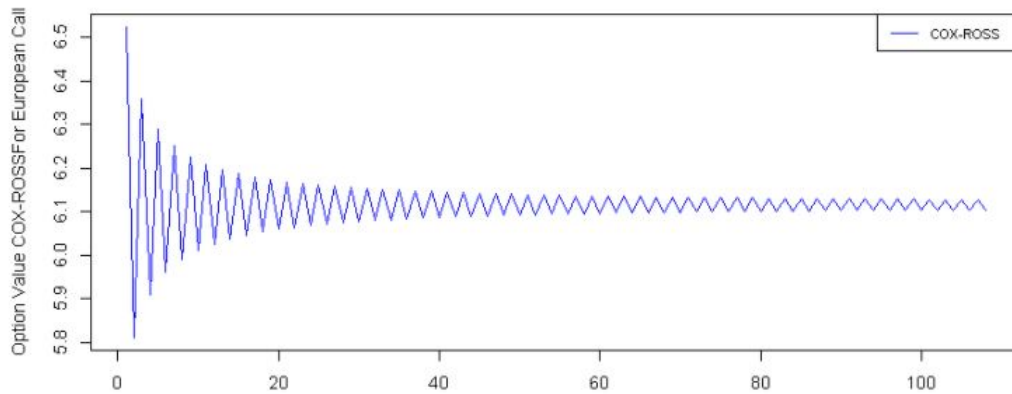


FIGURE 2.8 – Valeur de l’option pour un call européenne

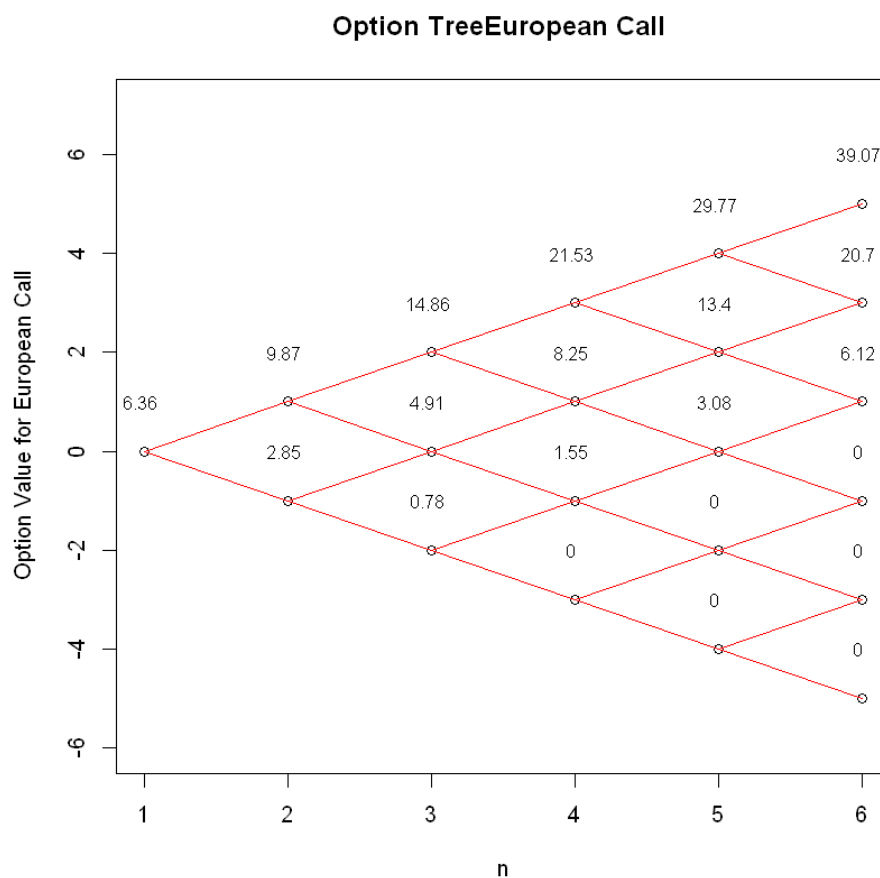


FIGURE 2.9 – L’arbre binomial de Cox-Ross-Rubinstein - Option Call Européenne

Chapitre 3

Le modèle stochastique : Black and scholes

3.1 Les hypothèses du modèle et notations

Le modèle de Black-Scholes requiert un certain nombre d'hypothèses qui sont :

- Absence d'opportunité d'arbitrage
- Le temps est une fonction continue
- Le prix $(St)_{t \in R+}$ de l'actif sous-jacent est un processus aléatoire défini sur l'espace de probabilité (Ω, A, P) et qui vérifie l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dSt = St(rdt + \sigma dWt)$$

Avec :

σ : la volatilité (constante)

r : le taux de rendement mathématique (constant), connu à l'avance, et

$(Wt)_{t \geq 0}$, un mouvement brownien standard. On dit que St est une diffusion de dérive r et de volatilité σ .

3.2 Modèle de Black-Scholes pour les options européennes sans dividendes

Pour les formules Black-Scholes, les paramètres suivants sont définis.

- S : Le prix au comptant de l'actif à l'instant t
- T : La maturité de l'option
- K : Strike de l'option
- r : Le taux d'intérêt sans risque, supposé constant entre t et T
- σ : volatilité de l'actif sous-jacent

$N(D)$ est la distribution cumulative de la variable normale standard Z

$$N(D) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^D e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

$C(S, t)$ est la valeur à l'instant t d'une option d'achat et $P(S, t)$ est la valeur à l'instant t d'une option de vente.

La formule de Black-Scholes pour une option d'achat (Call) est donnée par :

$$C(S, t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$

La formule de Black-Scholes pour une option de vente (Put) est donnée par :

$$P(S, t) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1)$$

Où :

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

3.3 Modèle de Black-Scholes pour les options européennes avec dividendes

Pour les actifs qui versent des dividendes, la formule de Black-Scholes est assez similaire à la formule d'actif sans dividende, mais un nouveau paramètre q est ajouté.

- S : Le prix au comptant de l'actif à l'instant t
- T : La maturité de l'option
- K : Strike de l'option
- r : Le taux d'intérêt sans risque, supposé constant entre t et T
- σ : volatilité de l'actif sous-jacent
- q : Taux de dividende de l'actif. Il est supposé verser des dividendes à un taux continu

Dans ce cas, le paramètre q est maintenant inclus dans $C(S, t)$ et $P(S, t)$.

La formule de Black-Scholes pour une action d'achat avec dividende est donnée par :

$$C(S, t) = Se^{-q(T-t)}N(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$

La formule de Black-Scholes pour une action de vente avec dividende est donnée par :

$$P(S, t) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - Se^{-q(T-t)}N(-d_1)$$

Ensuite, d_1 et d_2 sont légèrement modifiés pour inclure les dividendes continus :

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

3.4 Implémentation - Résultats numériques

3.4.1 Pour les options Européennes sans dividendes

Cas d'une option Call

Le modèle de B&S nous indique la valeur de **6.1167** pour les valeurs de :

- $K = 50$
- $S = 50$
- $r = 0.1$
- $t = 0.4167$
- $\sigma = 0.4$

Black & Scholes Call option

```
1 BS_call=BlackScholes(50,50,0.1,0.4167,0.4,"C")
2 BS_call
6.11678761795579
```

FIGURE 3.1 – Valeur de l'option Call

La figure ci-dessous montre la variation

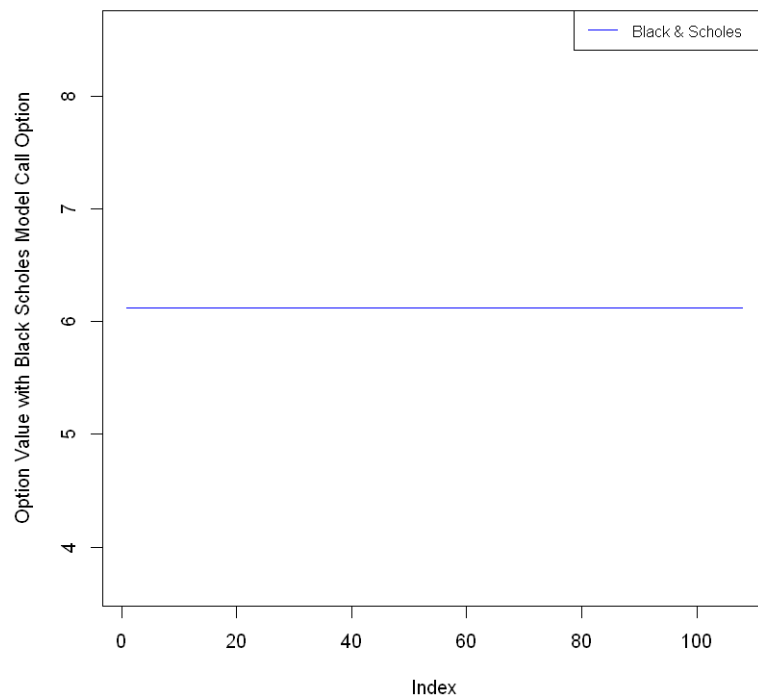


FIGURE 3.2 – Valeur de l'option Call

Cas d'une option Put

Le modèle de B&S nous indique la valeur de **4.076** :

```
10 BS_call=BlackScholes(50,50,0.1,0.4167,0.4,"P")
11 print("Black and Scholes value for put option : ")
12 BS_call

[1] "Black and Scholes value for put option : "
4.07610060876962
```

FIGURE 3.3 – Valeur de l'option Put

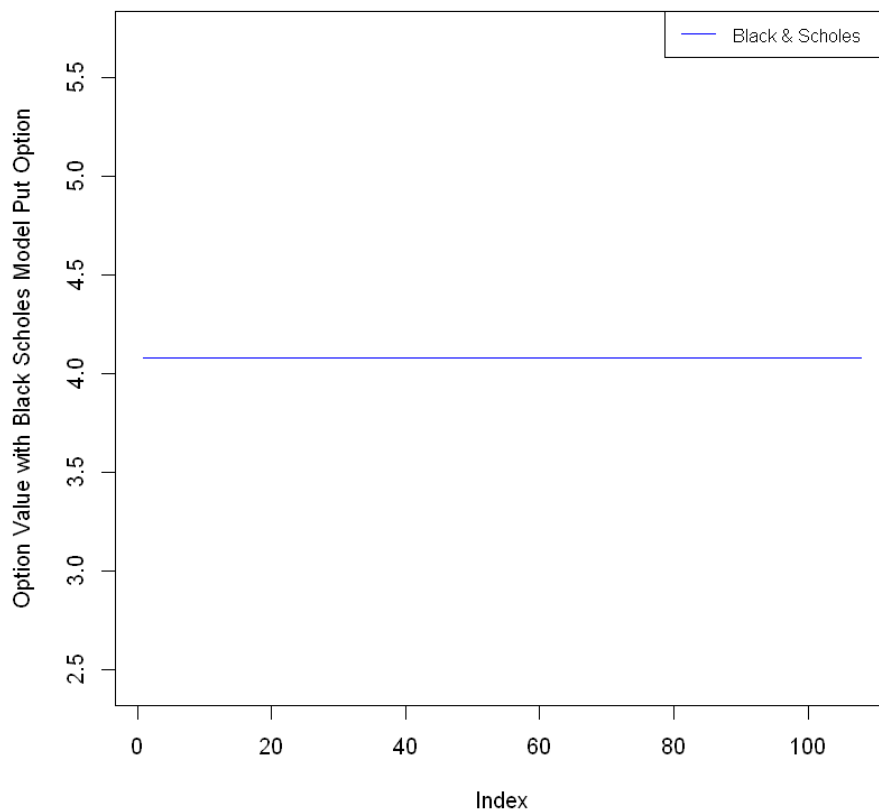


FIGURE 3.4 – Valeur de l'option Put

3.4.2 Pour les options Européennes avec dividende

On initialise les paramètres du modèle B&S comme suit :

- $K = 50$
- $S = 50$
- $r = 0.1$

- $t = 0.4167$
- $\sigma = 0.4$
- $q = 0.0205$

On obtient les résultats suivants :

Cas d'une option Call

- Cas d'un Call

```
call_div = BlackScholesDiv(S=50, K=50, r=0.1, T=0.4167, sig=0.4, type="C", q=0.0205)
print(call_div)
```

```
[1] 5.858232
```

FIGURE 3.5 – Prix d'un call européen avec dividende

Cas d'une option Put

- Cas d'un Put

```
put_div=BlackScholesDiv(S=50, K=50, r=0.1, T=0.4167, sig=0.4, type="P", q=0.0205)
print(put_div)
```

```
[1] 4.242843
```

FIGURE 3.6 – Prix d'un put européen avec dividende

Chapitre 4

Convergence de Cox-Ross Rubinstein vers le modèle Black and Scholes

Dans les sections précédentes, nous venons de voir deux modèles d'évaluations des produits dérivés, l'un mathématiquement plus solide qui permet d'évaluer l'option en tout point de la maturité et l'autre plus simple à programmer à temps discret qui permet d'évaluer une option à chaque intervalle de la maturité. Comment se comportent cette dernière lorsque l'intervalle de temps devient infiniment petit ?

4.1 Intérêt

Tout l'intérêt de la convergence de l'un des modèle vers l'autre modèle, c'est assurer la solidité (crédibilité) de ces deux modèles mathématiques. En effet sans convergence, l'un sera sûrement est erroné.

4.2 Vitesse de convergence

Nous venons de voir que pour une période suffisamment petite, le modèle binomial tend vers celui de Black Scholes. La question que l'on peut se poser maintenant c'est la forme de cette convergence ? Est-elle monotone, ou non, et surtout est-elle rapide ? Dans la figure précédente, on constate quelques oscillations au départ, et après un certain temps, d'autres oscillations se reproduisent. Ce que l'on peut déduire que la convergence n'est pas uniforme et régulière. Il ne semble pas aussi particulièrement rapide.

4.2.1 Cas de convergence du Call européen dans un premier exemple

Dans ce premier cas, on remarque la convergence avec des oscillations monotones pour le cas d'un call européen.

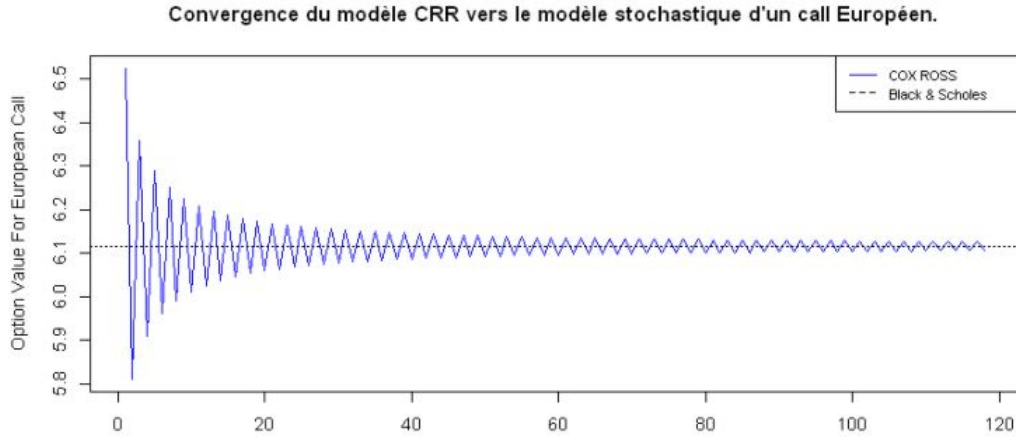


FIGURE 4.1 – Convergence du Call européen

4.2.2 Correction de la convergence

Nous avons constaté une convergence lente et quelques oscillations au départ. Nous pourrions améliorer cela par un certain choix judicieux de u et d^2 .

$$u = e^{\sigma\sqrt{\tau/n} + (1/n)\ln(X/S)}, \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\tau/n} + (1/n)\ln(X/S)}$$

FIGURE 4.2 – Choix de u et d

4.2.3 Cas de convergence du Call européen dans un autre exemple

Après correction de la convergence afin d'améliorer la convergence et que notre modèle converge vers le modèle Black and Scholes plus rapidement, nous avons une meilleure convergence dans le terme plus rapide mais pas uniforme comme le montre la figure 4.3.

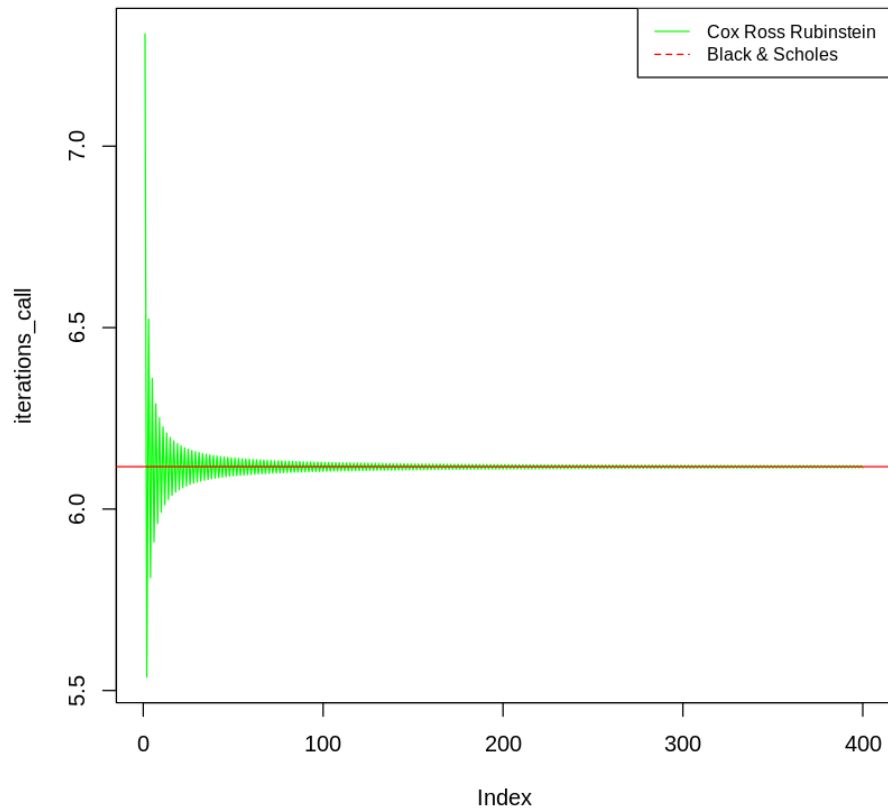


FIGURE 4.3 – Convergence du Call européen

Nous concluons que le modèle binomial converge vers le modèle de Black-Scholes. De plus, cette convergence est d'une importance capitale : Toute la crédibilité de ces deux modèles en dépend.