TALLER DE ALGEBRA LINEAL (primer parcial)

1. Determine si existe un valor de m, para el cual el sistema tenga solución. Si es así, resolver el sistema para dicho valor de m.

$$\begin{aligned} x-y+z &= 7 \\ 2x+my-4z &= m \\ -x+y-z &= 3 \end{aligned}$$

2. Determine para que valor de k, el sistema tiene infinitas soluciones

$$\begin{aligned} x+y+z &= 0 \\ x-y+z &= 0 \\ kx+z &= 0 \end{aligned}$$

3. El cajero de una entidad bancaria sólo admite billetes de 50, de 20 y 10 dólares. Los lunes depositan en el banco 225 billetes cuyo valor total es 7000 dólares. Cuál es el numero de billetes de cada valor depositado, si la suma de los billetes de 50 más los de 10 es el doble que el numero de billetes de 20.

4. Dados los sistemas de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} (a+2)\,x+(a+1)\,y &= -6 \\ x+5y &= a \\ x+y &= -5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} ax+y &= 1 \\ x+ay &= a \\ 2ax+2y &= a+1 \end{aligned}$$

Determine los valores de $a$para los cuales el sistema tiene:

   a) Solución única.

   b) infinitas soluciones .

   c) No tenga solución.

5. La siguiente tabla da el costo en pesos de una libra de cada uno de los siguientes productos en tres supermercados

	Carne	Arroz	Papas	Maíz	Frijol
Supermercado 1	70	40	13	30	330
Supermercado 2	80	38	10	15	300
Supermercado 3	70	40	12	40	310

Si se quiere comprar 6 libras de carne, 3 libras de arroz, 1 libra de papas , 4 libras de maíz y 6 libras de frijol, en cual supermercado resulta más económico comprar estos cinco productos?

6. Sea la matriz
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$
Calcular A^2 y A^3.

7. Dadas las matrices
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & a \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & a & 1 \\ 6 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & a \\ 6 & 4+a \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$
Hallar los valores de a para los cuales el rango de cada una de ellas 1 o 2.

8. Determine si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos y justifique su respuesta.

   a) Sea A una matriz de orden $n \times n$. Si $A^2 = 0$, entonces A es singular.

   b) Si
   $$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$
   entonces $A^3 + I = 0$.

   c) Si A y Bson matrices no singulares de $n \times n$, entonces ABes no singular.

   d) Si A es una matriz antisimétrica de orden $n \times n$ y k es un entero positivo par , entonces A^k es simétrica.

   e) Sea la matriz
   $$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$$

entonces los valores de a para los cuales el rango de A es 1,2,3 son: $a = 1$, -2 y $a \in R - \{1, -2\}$ respectivamente.

f) La suma de dos matrices no singulares es no singular.

g) Si A es una matriz antisimétrica, entonces A^2 es simétrica.

h) Sean$A$ y B son matrices cuadradas del mismo orden . Si ABes simétrica, entonces A y B lo son.

i) Sea A una matriz de orden $n \times n$, entonces AA^t y A^tA son simétricas

j) Sean$A$ y B son matrices cuadradas del mismo orden. Si $AB = BA$, entonces $A^tB^t = B^tA^t$.

k) Sean$A$ y B son matrices cuadradas no singulares del mismo orden. $AB = BA$, entonces $A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

l) Sean$A$ y B son matrices simétricas cuadradas del mismo orden, entonces AB es simétrica.

9. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Despejar X de la ecuación matricial $3X - B^t = AX$

10. Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

encontrar una matriz B de tamaño 2×2 tal que

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

11. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Calcular la inversa de A

b) Calcular A^{127} y A^{128}.

c) Determine x y y tales que $AB = BA$.

12. Sean las matrices

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & a \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

Suponga que $AB = 2C - D$

   a) Determinar un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas x, y, z para un cierto valor de a desconocido.

   b) Obtener los valores de a para los cuales este sistema tiene solución única.

13. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & k \end{bmatrix}.$$

Hallar k de tal manera que exista una matriz cuadrada B no nula tal que $AB = 0$

14. Sea A una matriz de orden $n \times n$ tal que

$$A = I_n - \frac{1}{n} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Probar que

   a) A es simétrica.

   b) $A^2 = A$

   c) $Tr\ (A) = n - 1$ donde $Tr\ (A)$ es la suma de los elementos de la diagonal principal de A.

15. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x & x & x \\ 1 & y & x & x \\ 1 & y & y & x \\ 1 & y & y & 1 \end{bmatrix}$$

   a) Hallar las condiciones que deben cumplir x y y para que la matriz A sea singular.

   b) Hallar el rango de A para cada una de las condiciones encontradas en la parte a).

16. Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Determine la matriz X que satisface la ecuación matricial $XAB^t = AB^t + XC^2$.

17. Hallar los valores de k de manera que el sistema dado tenga:

   a) Solución única.

   b) No tenga solución.

   c) Tenga infinitas soluciones.

   a)

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ 2x + 3y + kz &= 3 \\ x + ky + 3z &= 2 \end{aligned}$$

   b)

$$\begin{aligned} x + y + kz &= 2 \\ 3x + 4y + 2z &= k \\ 2x + 3y - z &= 1 \end{aligned}$$

   c)

$$\begin{aligned} kx + y + z &= 1 \\ x + ky + z &= k \\ x + y + kz &= k^2 \end{aligned}$$

   d)

$$\begin{aligned} kx - y + 2z &= a + 1 \\ x + ky - z &= -1 \\ 3x + y + z &= k \end{aligned}$$

18. Una matriz A de orden $n \times n$es idempotente si $A^2 = A$ y es involutiva si $A^2 = I_n$. Probar que si A es una matriz de orden $n \times n$ idempotente, entonces $B = 2A - I_n$ es una matriz involutiva.

19. Hallar la inversa de las siguientes matrices en caso de que existan

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -4 & -8 & 12 \\ 10 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

20. Sea una matriz A de orden $n \times n$. Probar que si $AX = 0$ para todo $X \in R^n$, entonces $A = 0$.

21. Sean A, B y C matrices tales que$AB = AC$ y C de orden $n \times p$, A invertible, entonces probar que $B = C$. Es cierto esto en general cuando A singular?

22. Por medio de operaciones elementales fila. reducir las matrices dadas hasta la forma escalonada reducida y encontrar el rango de cada una de ellas

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -6 \\ 4 & 8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

23. Usando las matrices del ejercicio anterior, calcular si es posible, las operaciones que se indican

    a) $(AB)^t$
    b) $(2BA)^t$
    c)) $(E + D)\,F$
    d) FD
    e) $(DF)^t$

24. Un fabricante produce dos tipos de productos A y B. Por cada unidad que vende de A, la ganancia es de 10 dólares y por cada unidad que venda de B la ganancia es de 12 dólares. Según la experiencia se ha determinado que lo que se vende del producto A es un 25 % de lo que se vende de B. Para el año siguiente el fabricante desea una ganancia de 42000 dólares. Cuántas unidades de cada producto debe vender el fabricante ?.

25. Sea la matriz
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

    a) Calcular la matriz B tal que $BA = I_2$.

b) Despejar la matriz X en la siguiente ecuación matricial $AX - 2I - 4X = C$ donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

26. En un barco viajan 360 personas. El numero de hombres duplica al de la suma de las mujeres y los niños. El numero de adultos menos el de niños duplica al numero de hombres menos el de mujeres. Determine el numero de hombres , mujeres y niños que viaja en el barco.

27. Tres personas A, B y C juegan tres partidos de forma que cuando una de ellas pierda, entregará a cada una de las otras dos una cantidad igual a la que cada una posee en ese momento. Cada persona perdió una partida, y al final cada una tiene 24 dólares. Cuánto tiene cada jugador al comenzar?

28. Hallar el polinomio de tercer grado$P(x)$, para el cual $P(-1) = 0$, $P(1) = 4$, $P(2) = 3$ y $P(3) = 16$,

29. Una empresa vende tres clases de artículos A, B y C . El articulo A se vende a 75 pesos, el articulo B tiene un descuento de 20 %, y el articulo C un descuento de 40 % respectivamente con relación al precio de A. La venta total llega a ser 3975 pesos. Calcular el numero de artículos de cada clase si el numero de artículos de clase B es el triple del resto de los artículos.

30. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Hallar $(A - I_3)^2$.

b) Usar la parte a) para calcular A^4.

31. a) Hallar una matriz

$$A = \begin{bmatrix} x & x \\ 0 & y \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

tal que $A^2 = A$.

b) Para la matriz encontrada en la parte a), calcular $A + A^2 + A^3 + \ldots + A^{10}$.

32. Un comerciante invierte 12500 pesos en tres tipos de acciones A, B y C distintas, cuyas tasas anuales son 4 %, 5 % , 7 % respectivamente . Si recibe 70 pesos más de los intereses de las acciones tipo B que de las acciones tipo A, y si los intereses anuales totales son 800 pesos, entonces hallar la cantidad invertida en cada una de las acciones.

33. Determinar si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos y justifique

    a) Si A y B son matrices no singulares, entonces $A + B$ es no singular.

    b) Si A y B son matrices no singulares, entonces ABes no singular.

    c) Si A es no singular, entonces αA es no singular donde $\alpha \in R$.

    d) Si A es no singular, entonces A^{-3} es no singular.