Parcial 2º

Rango de Matrices.

$$A = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\rho(A) = 3$$

Sea A una matriz de orden $m \times n$ que denotamos con $\rho(A)$, se define como el numero de $1's$ pivotes que aparecen en la forma escalonada reducida de A.

Sistema de Ecuaciones Lineales.

Un sistema de ecuaciones de m ecuaciones lineales con n incógnitas.

$AX = B$			$AX = 0$	
$\rho(A\|B) = \rho(A)$		$\rho(A\|B) > \rho(A)$	$\rho(A) = n$	$\rho(A) < n \quad m < n$
$\rho(A\|B) = \rho(A) < n$	$\rho(A\|B) = \rho(A) = n$	Inconsistente	Consistente Determinante	Consistente Indeterminante
Consistente Indeterminante	Consistente Determinante			

Matrices Inversas.

Sea A una matriz de orden n y existe una matriz B de orden n es la inversa de A si $AB = BA = I_n$. Si B es la inversa de A y la denotamos como $B = A^{-1}$. Si A no tiene inversa se dice que es **SINGULAR**.

$$(A^{-1})^{-1} = A$$
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$
$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

COMO HALLAR M^{-1}	
Nos dan una matriz A de orden n	$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
Escribimos la matriz ampliada $[A : I_n]$	$[A : I_2] \qquad A = \left[\begin{array}{cc:cc} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$
Resolvemos como en ***Gauss-Jordan.***	$\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & -1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \end{array}\right]$
Al ya tener la matriz resultante el orden de la matriz cambia $[I_n : A^{-1}]$	$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$
Si la matriz resultante no queda con $[I_n : A^{-1}]$ significa que la matriz ***no tiene inversa.***	**EJEMPLO NO TIENE INVERSA:** $\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & -1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right]$

Sistemas Lineales con inversas.

Sea $AX = B$ un sistema de orden n y A^{-1} . Veamos como determinar la solución del sistema $AX = B$.

$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \quad (A^{-1}A)X = A^{-1}B \quad I_n^{-1}X = A^{-1}B$

$\boxed{X = A^{-1}B}$

COMO HALLAR EL SISTEMA	
Nos dan las ecuaciones y las convertimos en matrices.	$\begin{matrix} x + y - z = 5 \\ 2x + y + z = 2 \\ x - y - 2z = 3 \end{matrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$
Hacemos el procedimiento para hallar A^{-1}	$\begin{bmatrix} -1/7 & 3/7 & 2/7 \\ 5/7 & -1/7 & -3/7 \\ -3/7 & 2/7 & -1/7 \end{bmatrix}$
Terminamos la multiplicación $X = A^{-1}B$	$\begin{bmatrix} -1/7 & 3/7 & 2/7 \\ 5/7 & -1/7 & -3/7 \\ -3/7 & 2/7 & -1/7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$
Ponemos la matriz resultante de la multiplicación anterior	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$
Identificamos los valores de x, y, z y que tipo de ecuación	$\begin{matrix} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -2 \end{matrix}$ Consistente Determinante

Determinantes.

MATRIZ DE ORDEN 2:

Sea A una matriz de orden 2. El determinante de A, denotado como $det(A)$ esta dada por:

DP DS

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$det(A) = DP + DS = a_{11}a_{22} + a_{21}a_{12}$$

MATRIZ DE ORDEN $n > 2$:

Sea A una matriz de orden $n > 2$ se pude calcular utilizando:

1. Regla de Sarrus.
2. Metodo de Cofactores.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

PROPIEDADES	
Si $det(A) \neq 0$ significa que A tiene inversa **(NO SINGULAR)**	Si $det(A) = 0$ significa que A no tiene inversa **(SINGULAR)**
$det(\lambda A) = \lambda^n \times det(A)$	$det(A^t) = det(A)$
$det(AB) = det(A) \times det(B)$	$det(A^{-1}) = 1/det(A)$
$det(A) = 0$	Si A tiene una fila o columna de $0's$.
$det(B) = -det(A)$	Si B es el intercambio de dos filas o columnas de A
$det(B) = \lambda det(A)$	Si B es la multiplicación de una fila o columna de A.
$det(A) = a_{11} \times a_{22} \times a_{33} \ldots \times a_{nn}$	Si A es una matriz triangular superior o inferior.

HALLAR CON REGLA DE SARRUS.

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Por cualquiera de los dos da el mismo resultado.

Por filas (Repetimos las dos primeras filas)

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \\ \hline 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Por columnas (Repetimos las dos primeras columnas)

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 5 & 3 & -2 \end{array}\right]$$

$$det(A) = [(-2)(0)(5) + (1)(-2)(2) + (-3)(3)(4)] - [(2)(0)(-3) + (4)(-2)(-2) + (5)(3)(1)] = -71$$

HALLAR CON METODO DE COFACTORES.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Encontrar todos los cofactores solo es si lo piden.

Creamos la matriz de cofactores asociada a A

$$B = \begin{bmatrix} A11 & A12 & A13 \\ A21 & A22 & A23 \\ A31 & A32 & A33 \end{bmatrix}$$

Para hallar los cofactores se utiliza esta formula.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \times det(M_{ij})$$

El $det(M_{ij})$ consiste en encontrar el determinante en la matriz A tapando la fila i y la columna j

$$A_{11} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad A_{23} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad A_{23} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Reemplazar en el formula para cada cofactor.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} det \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = -9 \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} det \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = 14$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} det \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = -8 \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} det \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = 2$$

Reemplazar en la matriz B

$$B = \begin{bmatrix} -9 & 14 & 1 \\ 6 & -8 & 2 \\ -3 & 10 & -1 \end{bmatrix}$$

Encontrar $det(A)$, solo necesitamos los cofactores de una fila o columna cualquiera en B.

Tenemos los cofactores de la primera fila de B

$$A_{11} = -9 \qquad A_{12} = 14 \qquad A_{13} = 1$$

$$det(A) = (a_{11} \times A_{11}) + (a_{12} \times A_{12}) + (a_{13} \times A_{13})$$

Por ultimo, hacer el $det(A)$

$$det(A) = (-1) \times (-9) + (0) \times (14) + (3) \times (1)$$

$$det(A) = 9 + 0 + 3 \rightarrow \boxed{det(A) = 12}$$

PROPIEDADES COFACTORES	
Si A es una matriz de $n \times n$ y B la matriz cofactores entonces:	$adj(A) = B^t$
Si A es de $n \times n$ y $det(A) \neq 0$ entonces:	$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)} \times adj(A)$
$A \times adj(A) = adj(A) \times A = det(A) \times I_n$	
Si A es una matriz no singular (Tiene A^{-1})	$det(A) \neq 0$ **(TRIVIAL)**
Si $AX = 0$ tiene solución no trivial si y solo si	$det(A) = 0$

Regla de Cramer.

$$X_1 = \frac{det(A_1)}{det(A)} \quad X_2 = \frac{det(A_2)}{det(A)} \quad \ldots X_n = \frac{det(A_n)}{det(A)}$$

Sea $AX = B$ un sistema de n ecuaciones lineales con incógnita n si $det(A) \neq 0$ entonces el sistema tiene **única solución** ($det(A) \neq 0$)

COMO HALLAR M^{-1}	
Nos dan las ecuaciones lineales.	$2x_1 + x_2 + x_3 = 0$ $3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -2$ $x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$
Hacemos la Matriz Ampliada.	$\left[\begin{array}{ccccc} 2 & 1 & 1 & : & \boxed{0} \\ 3 & 2 & -2 & : & \boxed{-2} \\ 1 & 1 & 2 & : & \boxed{4} \end{array}\right]$
Calculamos el determinante por ***<u>Sarrus</u>***. Si $det(A) = 0$ haríamos ***<u>Gauss.</u>***	$det(A) = [(8) + (-2) + (3)] - [(2) + (-4) + (6)] = 5$
Se hará el proceso solo para x_1 pero se debe hacer para todos.	
Para sacar la matriz A_1 reemplazamos los elementos de la columna del numero de la matriz, es decir, 1 con los que están al otro lado del $=$	$\left[\begin{array}{ccc} \boxed{0} & 1 & :1 \\ \boxed{-2} & 2 & -2 \\ \boxed{4} & 1 & 2 \end{array}\right]$
Calculamos $det(A_1)$	$det(A_1) = [(0) + (-8) + (-2)] - [(8) + (0) + (-4)] = -14$
Reemplazamos en $X_1 = \frac{det(A_1)}{det(A)}$	$x_1 = \frac{-14}{5} \quad x_2 = \frac{22}{5} \quad x_3 = \frac{6}{5}$