Principio de inducción matemática

Sea $P(n)$ una propiedad que se define para enteros n y sea a un entero fijo. Suponga que los siguientes dos enunciados son verdaderos:

1. $P(a)$ es verdadera.
2. Para todo entero $k \geq a$, si $P(k)$ es verdadera entonces $P(k+1)$ es verdadera.

Entonces, el enunciado

$$\text{para todo entero } n \geq a, P(n)$$

es verdadero.

Principio de Inducción matemática fuerte

Sea $P(n)$ una propiedad que se define para n enteros y sean a y b enteros fijos con $a \leq b$. Suponga que los siguientes dos enunciados son verdaderas:

1. $P(a), P(a+1), \ldots$ y $P(b)$ son todas verdaderas. (**Paso básico.**)
2. Para cualquier número entero $k \geq b$, si $P(i)$ es verdadera para todo enteros i de a a k, entonces $P(k+1)$ es verdadera. (**Paso inductivo.**)

Entonces el enunciado

$$\text{para todo entero } n \geq a, P(n),$$

Principio del buen orden para los enteros

Sea S un conjunto de números enteros que contienen uno o más números enteros todos los cuales son mayores que un entero fijo. Entonces S tiene un mínimo elemento.

Conjunto definido recursivamente

I. BASE: Un enunciado de que ciertos objetos pertenecen al conjunto.

II. RECURSIÓN: Un conjunto de reglas que indican cómo formar nuevos conjuntos de objetos de un conjunto a partir de los que ya se sabe que están en el conjunto.

III. RESTRICCIÓN: Un enunciado de que no haya objetos que pertenezcan al conjunto distintas de los que provienen de I y II.

Inducción estructural para los conjuntos definidos recursivamente

Sea S un conjunto que se ha definido de forma recursiva y considere una propiedad que los objetos en S pueden o no satisfacer. Para demostrar que todos los objetos en S satisface la propiedad:

1. Demuestre que cada objeto en la BASE para S satisface la propiedad;
2. Demuestre que para cada regla en la RECURSIÓN, si la regla se aplica a objetos en S que satisfacen la propiedad, entonces, los objetos definidos por la regla también satisfacen la propiedad.

$$A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad \forall x, \text{ si } x \in A \text{ entonces } x \in B.$$

$$A \nsubseteq B \quad \Leftrightarrow \quad \exists x, \text{ tal que } x \in A \text{ y } x \notin B.$$

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq B \text{ y } B \subseteq A.$$

$$A \text{ y } B \text{ son disjuntos} \quad \Leftrightarrow \quad A \cap B = \emptyset$$

Definición: Dados los conjuntos A y B, la **diferencia simétrica de A y B**, que se denota por $A \triangle B$ es

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A).$$

$$A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$$

$$B - A = \{x \in U \mid x \in B \text{ y } x \notin A\}$$

$$A^c = \{x \in U \mid x \notin A\}.$$

$$\bigcup_{i=0}^{n} A_i = \{x \in U \mid x \in A_i \text{ para al menos una } i = 0, 1, 2, \ldots, n\}$$

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i = \{x \in U \mid x \in A_i \text{ para al menos un entero no negativo } i\}$$

$$\bigcap_{i=0}^{n} A_i = \{x \in U \mid x \in A_i \text{ para todo } i = 0, 1, 2, \ldots, n\}$$

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i = \{x \in U \mid x \in A_i \text{ para todo enteros no negativos } i\}.$$

1. $x \in X \cup Y \quad \Leftrightarrow \quad x \in X \text{ o } x \in Y$
2. $x \in X \cap Y \quad \Leftrightarrow \quad x \in X \text{ y } x \in Y$
3. $x \in X - Y \quad \Leftrightarrow \quad x \in X \text{ o } x \notin Y$
4. $x \in X^c \quad \Leftrightarrow \quad x \notin X$
5. $(x, y) \in X \times Y \quad \Leftrightarrow \quad x \in X \text{ y } y \in Y$

Sean $A_1, A_2, A_3\ldots$ **mutuamente disjuntos** (o por **pares disjuntos** que **no se superponen**) si y sólo si, ninguno de dos conjuntos A_i y A_j con subíndices distintos tienen elementos en común. Más precisamente, para toda $i, j = 1, 2, 3, \ldots$

$$A_i \cap A_j = \emptyset \text{ siempre que } i \neq j.$$

Una colección finita o infinita de conjuntos no vacíos $\{A_1, A_2, A_3 \ldots\}$ es una **partición** de un conjunto A si y sólo si,

1. A es la unión de todo A_i,
2. Los conjuntos $A_1, A_2, A_3, \ldots$ son mutuamente disjuntos.

Dado un conjunto A, el **conjunto potencia** de A, que se denota con $\mathscr{P}$ **(A)**, es el conjunto de todos los subconjuntos de A.

Demostrar que un conjunto X es igual al conjunto vacío $\emptyset$, equivale a demostrar que X no tiene elementos. Para esto, suponga que X tiene un elemento y se deduce una contradicción.

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = y_1, x_2 = y_2, \ldots, x_n = y_n.$$

En particular,

$$(a, b) = (c, d) \quad \Leftrightarrow \quad a = c \text{ y } b = d.$$

Dados los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, el **producto cartesiano** de $A_1, A_2, \ldots, A_n$, que se denota por $\mathbf{A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n}$, es el conjunto de todas las n-tuplas ordenadas $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ donde $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n$.

Simbólicamente:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\}.$$

En particular,

$$A_1 \times A_2 = \{(a_1, a_2) \mid a_1 \in A_1 \text{ y } a_2 \in A_2\}$$

Recuerde que para demostrar que un enunciado universal es falso, es suficiente con encontrar un ejemplo (llamado un contraejemplo) para el cual es falso.