Parcial 1º

Matrices.

Es un arreglo rectangular de $m \times n$ elementos reales o complejos distribuidos en m filas y n columnas por la denotación de:

Las matrices se representan en $MAYUSCULAS$ y sus componente en $minisculas$

$$A = (a_{ij}) = \left[a_{ij}\right]$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3j} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Orden	
$m \times n$	$n \times n$
Tiene una cantidad de m columnas y de n filas	**Matriz cuadrada** Tiene la misma cantidad de filas y columnas
4×3	$3 \times 3 \to 3$
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 8 \\ 9 & -1 & 10 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 8 \end{bmatrix}$

Tipos de Matrices

MATRIZ DIAGONAL

Una matriz $A = (a_{ij})$ de orden n es diagonal si $(a_{ij}) = 0$ para $i \neq j$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

MATRIZ ESCALAR

$$\begin{bmatrix} K & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

Una matriz diagonal $A = (a_{ij})$ es escalar si $(a_{ij}) = k$ para $i = j$

Esta no es escalar

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

MATRIZ IDENTIDAD

Una matriz escalar $A = (a_{ij})$ es identidad si $(a_{ij}) = 1$ para $i = j$ y la denotación por I_n

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

MATRIZ NULA

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Una matriz escalar $A = (a_{ij})$ es nula si $(a_{ij}) = 0$ para $i = j$ y la denotación por 0

MATRIZ TRIANGULO SUPERIOR

Una matriz $A = (a_{ij})$ de orden n es triangular superior, si $(a_{ij}) = 0$ para $i > j$, los elementos que están por debajo de la diagonal principal son nulos

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

MATRIZ TRIANGULAR INFERIOR

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Una matriz $A = (a_{ij})$ de orden n es triangular inferior, si $(a_{ij}) = 0$ para $i < j$, los elementos que están por encima de la diagonal principal son nulos

MATRIZ SIMÉTRICA

Una matriz $A = (a_{ij})$ de orden n es simetría, si la $A = A^t$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

MATRIZ ANTISIMETRICA

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Una matriz $A = (a_{ij})$ de orden n es antisimetría, si la $A = A^t$ pero negativa

Transpuesta de una Matriz

Si $A = (a_{ij})$ es una matriz de $m \times n$, entonces, $A^t = (a_{ij})^t$ convierte filas en columnas o columnas en filas donde $1 \leq i \leq m \quad 1 \leq j \leq n$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(A^t)^t = A$$
$$(A+B)^t = A^t + B^t$$
$$(\lambda A)^t = \lambda A^t$$
$$(AB)^t = A^t B^t$$

Igualdad de una Matriz

Dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ de orden iguales, son iguales si

$(a_{ij}) = (b_{ij})$ donde $1 \leq i \leq m \quad 1 \leq j \leq n$

$$A = \begin{bmatrix} 3+r & 5 & 6 \\ 3 & -1 & 2+s \end{bmatrix}$$
$$B = \begin{bmatrix} -5 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow$$

$$3 + r = -5 \rightarrow -8 = r \rightarrow 3 - 8 = -5$$
$$2 + s = -3 \rightarrow -5 = r \rightarrow 2 - 5 = -3$$

Operaciones con Matrices

SUMA Deben tener el mismo orden

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & -2 \end{bmatrix} \; B = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 10 & 4 \end{bmatrix}$$

PROPIEDADES				
Cerradura	Conmutativa	Asociativa	Elemento Neutro	Matriz Opuesta
$A + B$	$A + B = B + A$	$(A+B)+C = A+(B+C)$	$A + 0 = A$	$A = a_{ij} \; -A = (-a_{ij})$ $A + (-A) = 0$

PRODUCTO POR UN ESCALAR

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -1 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \xrightarrow{\lambda = 4} \quad B = \begin{bmatrix} -8 & 4 & 16 \\ 0 & -12 & -4 \\ 8 & 20 & 24 \end{bmatrix}$$

PROPIEDADES			
Cerradura	Asociativa	Distributiva	Elemento Neutro
λA	$\lambda(\beta A) = (\lambda\beta)A$	$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$ $(\lambda+\beta)A = \lambda A + \beta A$	$1A = A$

RESTA

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ -5 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad A - B = A + (-1)B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 3 \\ -5 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

MULTIPLICACIÓN

La matriz se llamara con minúsculas

Que sea una sola fila o columna

$$a = [a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n] \quad b = \begin{bmatrix} b_1, \\ b_2, \\ b_3, \\ \ldots, \\ b_n \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad a \cdot b = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \ldots + a_nb_n$$

Sea $A = (a_{ij})$ de orden $m \times p$ y $B = (b_{ij})$ de orden $p \times n$, el producto de A y B que denotaremos por AB , es la matriz C de $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

$$C_{11} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 11 \quad C_{21} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 28$$

$$C_{12} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = 1 \quad C_{22} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = -1$$

$$C = \begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 28 & -1 \end{bmatrix}$$

PROPIEDADES			
Distributiva	Distributiva	Con Escalar	Asociación
B y $C = m \times n$ $A = r \times m$ $A(B+C) = AB + AC$	B y $C = m \times n$ $A = n \times r$ $(B+C)A = BA + CA$	$\lambda \quad A = m \times n$ $B = n \times r$ $A(B\lambda) = (\lambda A)B = \lambda(AB)$	$(AB)C = A(BC)$

Sistema de ecuaciones lineales.

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es un conjunto de relaciones de la forma $Ax = B$:

$$\begin{gathered}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m\end{gathered}$$

Si la matriz $B = 0$, el sistema $Ax = 0$ es homogéneo.
Significa que el sistema tiene solución.

FORMA MATRICIAL DE UN SISTEMA	FORMA MATRICIAL AMPLIADA
$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$	$A \mid B = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$

COMO SABER EL TIPO DE ECUACIÓN		
$[\ 0\ \ 0\ \ \ldots\ \ 0\ \ t \mid h\ ]$		
Solución Unica	Infinitas Soluciones	No tiene Solución
$t \neq 0$ tal que, $tx_n = h \to x_n = \dfrac{h}{t}$	$t = 0 \wedge h = 0$	$t = 0 \wedge h \neq 0$
Consistente Determinante	Consistente Indeterminante	Inconsistente

COMO RESOLVER EJERCICIOS	
Nos dan las ecuaciones lineales	$2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 16$ $4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24$ $2x_1 + 7x_2 + 12x_3 = 30$
Sacamos la **Matriz Ampliada** y solo si lo piden la **Formal Matricial**	$A\,\vert\,B = \left[\begin{array}{ccc\vert c} 2 & 4 & 6 & 16 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 2 & 7 & 12 & 30 \end{array}\right]$
Buscamos sí hay un 1 en la columna 1. Sí la hay y no esta en la fila 1 intercambiamos las filas. Si no hay ningún 1 multiplicamos en la fila 1 por un numero que en C_{11} de 1	$F_1 \to (1/2)F_1$ $A\,\vert\,B = \left[\begin{array}{ccc\vert c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 2 & 7 & 12 & 30 \end{array}\right]$
Todos los numero que estén en la columna 1 menos el C_{11} deben cambiar a 0. Para eso, multiplicamos esas filas por un numero que los deje como queremos.	$F_2 \to F_2 + (-4)F_1 \qquad F_3 \to F_3 + (-2)F_1$ $A\,\vert\,B = \left[\begin{array}{ccc\vert c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & 3 & 6 & 12 \end{array}\right]$
Se realiza ese mismo proceso para que cada elemento con numero repetidos, es decir, C_{11}, C_{22}, etc. tenga 1 y sus compañeros de columnas tenga 0 o hasta que no podamos sacar mas 1	$A\,\vert\,B = \left[\begin{array}{ccc\vert c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$
Nos fijamos en la ultima fila y reemplazamos en la ecuación	$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$
Identificamos según sus características el tipo de ecuación	Consistente Indeterminante

GAUSS	GAUSS-JORDAN
Nos permite suspender el proceso	Debemos hacer el proceso completo

Rango de Matrices.

$$A = \left[\begin{array}{ccc:c} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{array}\right]$$

$$\rho(A) = 3$$

Sea A una matriz de orden $m \times n$ que denotamos con $\rho(A)$, se define como el numero de $1's$ pivotes que aparecen en la forma escalonada reducida de A.

Sistema de Ecuaciones Lineales.

Un sistema de ecuaciones de m ecuaciones lineales con n incógnitas.

$AX = B$			$AX = 0$	
$\rho(A\,\vert\,B) = \rho(A)$		$\rho(A\,\vert\,B) > \rho(A)$	$\rho(A) = n$	$\rho(A) < n \quad m < n$
$\rho(A\,\vert\,B) = \rho(A) < n$	$\rho(A\,\vert\,B) = \rho(A) = n$	Inconsistente	Consistente Determinante	Consistente Indeterminante
Consistente Indeterminante	Consistente Determinante			