TALLER DE ALGEBRA LINEAL (segundo parcial)

1. Sean
$$A = \begin{bmatrix} 1 & x & y+z \\ 1 & y & x+z \\ 1 & z & x+y \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} x & 3x & 4x \\ x & 5x & 6x \\ x & 7x & 8x \end{bmatrix}.$$
Probar que el determinante de cada una de estas matrices es cero.

2. Sabiendo que si
$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
tiene determinante igual a 5, entonces calcular el determinante de la matriz
$$B = \begin{bmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 3/2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Para que valores de a la matriz
$$A = \begin{bmatrix} 3 & a & a \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$
es singular?

4. Para que valores de x existe la inversa de
$$A = \begin{bmatrix} sen(x) & -\cos(x) & 0 \\ \cos(x) & sen(x) & 0 \\ sen(x)+\cos(x) & sen(x)-\cos(x) & 1 \end{bmatrix}.$$
Calcular la inversa de A.

5. Sea la matriz
$$A = \begin{bmatrix} a+1 & 3 & a \\ 3 & a+1 & 2 \\ a & 2 & a \end{bmatrix}.$$
Calcular los valores de a tales que A sea no singular.

6. Sea la matriz
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ x-1 & 0 & x+3 \\ 1 & x-2 & 4 \end{bmatrix}.$$
Resolver la ecuación $\det(A) = 1 - 7x$.

7. Hallar el valor de x si
$$B = \begin{bmatrix} x & 3 & 1 \\ x+1 & 4 & 2 \\ x & 2-x^2 & 1 \end{bmatrix}$$
y $\det(B) = 160$.

8. Sea la matriz
$$A = \begin{bmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$
   a) Calcule los valores de λ para los cuales la matriz $A^2 + 3A$ no tiene inversa
   b) Para $\lambda = 0$, hallar la matriz B que verifica la ecuación $AB + A = 2I$.

9. Sea la matriz
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & b \end{bmatrix}$$
   a) Determinar cuando existe la inversa de A y hallar A^{-1}.
   b) Determinar todos los pares (a, b) tales que $A^{-1} = A$.

10. Si A y B son no singulares y una de ellas es la inversa de la otra y $\det(A) = 7$ entonces calcular $\det(B)$.

11. Determine el valor de x para que el vector $(1, x, 5)$ pertenezca al subespacio generado por $(1, 2, 3)$ y $(1, 1, 1)$.

12. Demuestre que el subespacio generado por el conjunto $\{(1, 2, 1)\ ,\ (1, 3, 2)\}$ es el mismo subespacio generado por el conjunto $\{(1, 1, 0)\ ,\ (3, 8, 5)\}$.

13. Hallar un conjunto de generadores para $S \bigcap T$ si
   a) $V = R^3$, $S = \{(x, y, z) \,/\, 3x - 2y + z = 0\}$ y $T = \{(x, y, z) \,/\, x + z = 0\}$
   b) $V = R^3$, $S = \{(x, y, z) \,/\, 3x - 2y + z = 0\}$ y $T = gen\{(1, 1, 0), (5, 7, 3)\}$.

14. Hallar los valores de k para los cuales los siguientes conjuntos son linealmente independientes

    a) $\{(1,2,k),(1,1,1),(0,1,1-k)\}$

    b) $\{(k,1,0),(3,-1,2),(k,2,-2)\}$

    c) $\left\{\begin{bmatrix} 1 & k \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} k & 1 \\ 0 & 2k \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}.$

15. Sea $S = \{(1,1,0),(0,2,1),(1,3,1),(-3,1,2)\}$. Hallar el subespacio generado por S.

16. Sea la matriz
$$A = \begin{bmatrix} x & -y & -z & -w \\ y & x & w & -z \\ z & -w & x & y \\ w & z & -y & x \end{bmatrix}.$$
    Hallar $\det(A)$. Sugerencia: pruebe que $(AA^t) = (x^2+y^2+z^2+w^2)\ I_4$.

17. Determine si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos y JUSTIFIQUE su respuesta

    a) Si A y B son matrices cuadradas del mismo orden, entonces $\det(AB) = \det(BA)$.

    b) $W = \{A/\ A$ es matriz cuadrada de $n \times n$ con $\det(\mathrm{A}) = 0\}$ es un subespacio de las matrices cuadradas de orden $n \times n$.

    c) $W = \{A \in M_{n\times n}/\ Tra\ (\mathrm{A}) = 0\}$ es un subespacio de $M_{n\times n}$, donde $Tra\ (A)$ es la suma de los elementos de la diagonal principal de la matriz A.

    d) Si W_1 y W_2 son subespacios vectoriales de un espacio vectorial V, entonces $W_1 \bigcup W_2$ es un subespacio de V.

18. Sea la matriz
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
    con $a,b,c,d \in R$, Probar que si $\det(A+I_2) = 1 + \det(A)$ entonces $a+d=0$.

19. Determinar cuáles de los siguientes conjuntos es un subespacios de las matrices de orden 2×2

    a) $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} / \quad a,b \in R \right\}.$

b) $T = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \ / \ a+b=0 \right\}.$

c) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \ / \ a+b=5 \right\}.$

d) $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & c \\ 0 & b \end{bmatrix} \ / \ a+b=0 \quad a,b,c \in R \right\}.$

20. Hallar un conjunto de generadores para cada uno de los conjuntos del ejercicio anterior.

21. Determine si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos; en cada caso justifique su respuesta.

    a) Si A y B son matrices cuadradas del mismo orden entonces$\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$.

    b) Sean A y B matrices cuadradas de orden 3×3 tales que $\det(A) = -2$ y $\det(B) = 4$, entonces $\det\left((2A)(B^t)^{-1}(3A)^{-1}\right) = \frac{2}{27}$.

    c) Si A es una matriz no singular, entonces $\det\ (A^{-1}) = \ \det(A)^{-1}$.

    d) Sean A y B matrices cuadradas de orden 3×3 tales que $\det(A) = -2$ y $\det(B) = 2$, entonces $\det\left((3A)(3B^t)^{-1}\right) = 1$.

    e) Sea Vun espacio vectorial y sea$S = \{\ v_1\} \subset V$ con $v_1 \neq 0$, entonces S es un subespacio de V.

    f) Sea A una matriz no singular de orden 3×3, entonces $A\ ^3$ es no singular.

    g) Si S_1 y S_2 son subespacios de un espacio vectorial V, entonces $S_1 \bigcup S_2$ es un subespacio de V.

    h) Si S_1 y S_2 son subespacios de un espacio vectorial V, entonces $S_1 \bigcap S_2$ es un subespacio de V.

    i) $S = \{\ (x,y)\ /\ y = |x|\ \}$ es un subespacio de R^2.

    j) $S = \{\ (x,y,z)\ /\ x = y = z = 0\ \}$ es un subespacio de R^3.

    k) Sea A una matriz tal que $AA^t = I_n$, entonces $\det(A) = 1$ o $\det(A) = -1$.

    l) R^2 es un subespacio de R^3.

22. Demuestre que si Q es una matriz ortogonal , entonces $\det(Q) = \pm 1$.

23. Encuentre los valores de a del manera que

$$\det \begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+a \end{bmatrix} = 0.$$

24. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ x-4 & 1 & 1-x \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   a) Hallar x tal que A sea singular.

   b) Resuelva la ecuación $AB = O$ para $x = 3$.

25. Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -x & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2x \\ 1 & x & 2 \end{bmatrix}.$$

   Hallar los valores de x para los cuales:

   a) El rango de A sea 3.

   b) El rango de A sea 2.

26. Determine el valor de a para que la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

   sea no singular.

27. Sean las matrices

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Hallar a, b, c y d tales que $\det(A+I) = \det(A) + \det(I)$.

28. Determine el valor de c tal que la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & c & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

   sea no singular.

29. Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y } B = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

con $\alpha \neq 0$. Determine si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos y justifique su respuesta

a) $\det(A) = \alpha^4$.

b) $\det(A) = -\det(B)$.

c) $\det(A + B) = 0$.

d) La matriz $A^{-1}B$ es simétrica.

e) $\rho(A) = \rho(B)$.

30. Sean A y B matrices de tamaño 3×3 con $\det(A) = 3$ y $\det(B) = -2$. Calcular

a) $\det(AB)$.

b) $3\det(A)$.

c) $\det(-2B)$.

d) $\det(2A)\ (B^t)\ (4A^{-1}))$.

31. Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

a) Calcular determinante de A.

b) Hallar la matriz $Cof(A)$.

c) Hallar la matriz $adj\ (A)$.

d) Comprobar que $A(adj\ (A)) = \det(A)\ I_3$.

e) Calcular A^{-1}.