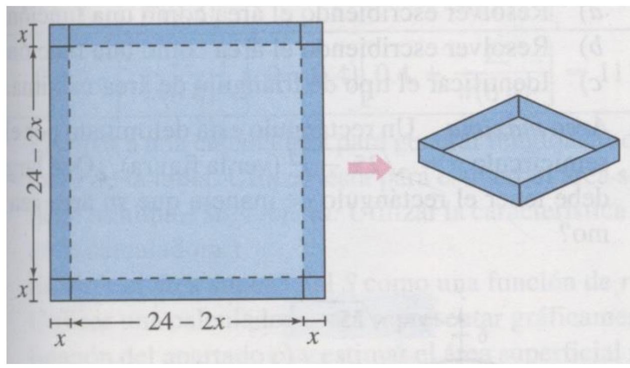
ESCUELA DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
CÁLCULO I – CM0230

FUNCIONES COMO MODELOS MATEMÁTICOS

1. Una caja abierta se va a construir a partir de una pieza cuadrada de material, de 24 pulgadas de lado, cortando cuadrados iguales a partir de las esquinas y doblando los bordes. Exprese el volumen de la caja así formada en función del lado x del cuadrado recortado. Rta. $V = 4x^3 - 96x^2 + 576x$

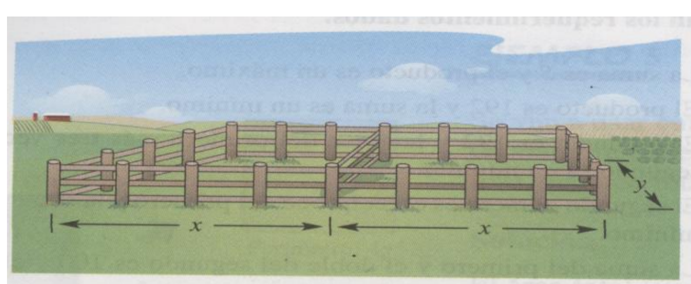


2. Sea P el producto de dos enteros. Si la suma del primero con el duplo del segundo es 100, exprese P en función de cada uno de los números. Rta. $P = 50x - \frac{x^2}{2}$

3. Sea S la suma de dos enteros. Si uno de ellos es el recíproco del otro, exprese la suma S en función de cada uno de ellos. Rta. $S = \frac{1+y^2}{y}$

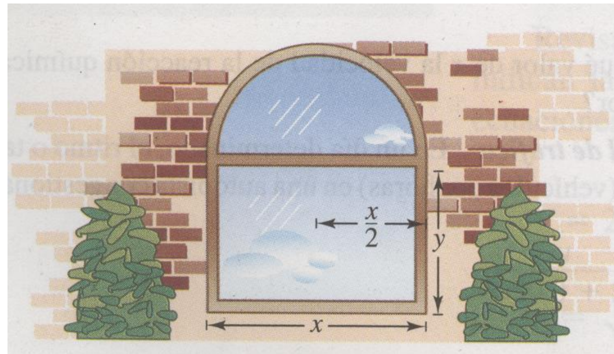
4. Un granjero planea cercar un pastizal rectangular adyacente a un río. El pastizal debe contener $180000\ m^2$ para proporcionar suficiente pastura para el rebaño. Exprese la longitud total del cercado en función del largo, si se sabe que no es necesario vallar a lo largo del río. Rta. $L = x + \frac{360000}{x}$

5. Un ganadero tiene 200 pies de cercado con los cuales delimita dos corrales rectangulares adyacentes. Exprese el área de los dos corrales en función del largo x. Rta. $A = \frac{8}{3}\left(50x - x^2\right)$

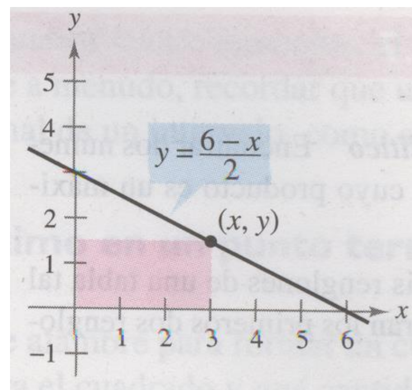


6. Exprese el volumen de un sólido rectangular (con base cuadrada) en función del lado x de la base, si su área superficial total es de $337,5cm^2$. Rta. $V = 84,375x - \frac{1}{2}x^3$

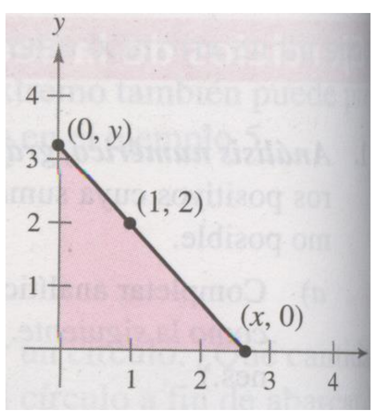
7. Una ventana normanda se construye juntando un semicírculo a la parte superior de una ventana rectangular ordinaria. Exprese el área de la ventana en función del lado x, si se sabe que su perímetro total es de $16\,pies$. Rta. $8x - \left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\right)x^2$



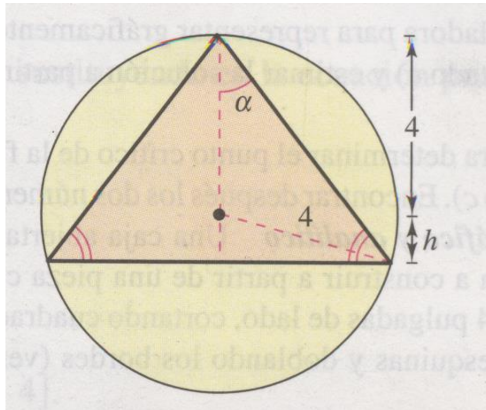
8. Un rectángulo está cortado por los ejes x y y y la gráfica de $y = \frac{6-x}{2}$. Exprese el área del rectángulo en función de x. Rta. $A = 3x - \frac{x^2}{2}$



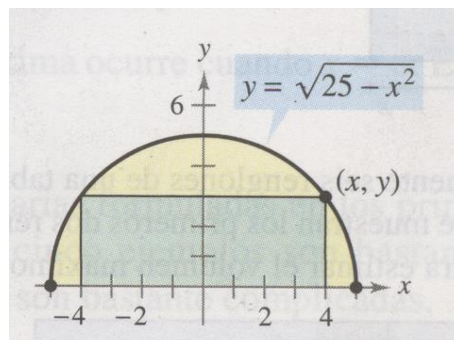
9. Un triángulo rectángulo se forma en el primer cuadrante mediante los ejes x y y y una recta que pasa por el punto $(1,2)$. Escriba la longitud L de la hipotenusa en función de x. Exprese también su área en función de x. Rta. $L = \sqrt{x^2 + 4 + \left(2 + \frac{2}{x-1}\right)^2}$, $A = x + \frac{x}{x-1}$



10. Un triángulo isósceles se inscribe en una circunferencia de radio 4. Exprese el área en función de h y luego en función de α. Rta. $A=\sqrt{16-h^2}\,(h+4)$, $A=64\cos^4\alpha\tan\alpha$



11. Un rectángulo está delimitado por el eje x y la semicircunferencia $y=\sqrt{25-x^2}$. Exprese el área en función de su largo x. Rta. $A=2x\sqrt{25-x^2}$

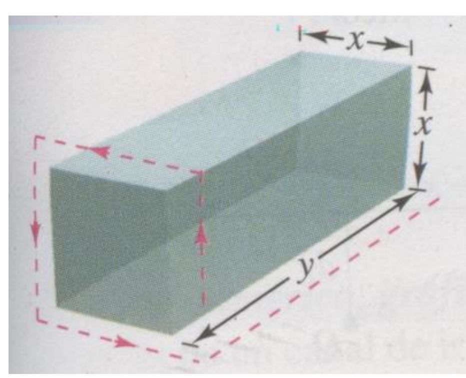


12. Un rectángulo se inscribe en un círculo de radio R. Halle su área en función de su largo x. Rta. $A=2x\sqrt{R^2-x^2}$

13. Una página rectangular contendrá 30 pulgadas cuadradas de texto impreso. Los márgenes de cada lado son de 1 pulgada. Encuentre el área de la página en función del largo x de texto impreso. Rta. $A=(x+2)\left(\dfrac{30}{x}+2\right)$

14. Una página rectangular contendrá 36 pulgadas cuadradas de área impresa. Los márgenes de cada lado serán de $1\frac{1}{2}$ pulgadas. Encuentre el área de la página en función del largo x de texto impreso. Rta. $A=(x+3)\left(\dfrac{36}{x}+3\right)$

15. Un paquete rectangular que se va a enviar por un servicio postal puede tener una longitud y un perímetro que tiene un máximo de 108 pulgadas.

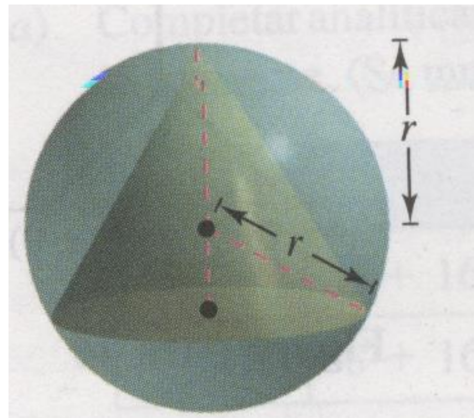


Determine el volumen en función de su arista x. Rta. $V = 108x^2 - 4x^3$

16. Resuelva el ejercicio anterior, pero ahora para un paquete cilíndrico. Rta. $V = \pi r^2 (108 - 2\pi r)$

17. Un cono circular recto se inscribe en una esfera de radio R. Encuentre su volumen en función de su radio x. Rta. $V = \frac{1}{3}\pi x^2 \left(R + \sqrt{R^2 - x^2} \right)$

18. Un cilindro circular recto se inscribe en una esfera de radio R. Encuentre el volumen en función de su radio x. Rta. $V = 2\pi x^2 \sqrt{R^2 - x^2}$



19. Un cono circular recto de radio r se inscribe en otro cono circular recto invertido de altura H y radio R. Encuentre el volumen del primero en función de su altura h. Rta. $V = \frac{\pi R^2}{3H^2}\left(H^2 h - 2Hh^2 + h^3 \right)$

20. Un cilindro circular recto de radio r y altura h se inscribe en un cono circular recto de radio R y altura H. Halle el volumen del primero en función de su altura h. $V = \pi r^2 \frac{RH - rH}{R}$

21. Un sólido se forma juntando dos hemisferios a los extremos de un cilindro circular recto. El volumen total del sólido es de $12\ cm^3$. Encontrar área superficial en función del radio del cilindro. $S = \frac{4}{3}\pi r^2 + \frac{24}{r}$

22. Un tanque industrial de la forma que se describe en el ejercicio anterior debe tener un volumen de 3000 pies. Si el costo de fabricación de los hemisferios es, por pie cuadrado, el doble que el del lateral, encuentre el costo en función del radio r del cilindro. Rta. $C = k\left[\frac{16}{3}\pi r^2 + \frac{6000}{r} \right]$

23. La suma de los perímetros de un triángulo equilátero y un cuadrado es igual a 10. Encuentre el área total de las dos superficies en función del lado del triángulo. Rta. $A=\frac{(10-3y)^2}{16}+\frac{\sqrt{3}}{4}y^2$

24. 20 pies de alambre se usarán para formar dos figuras. En cada uno de los siguientes casos, encuentre el área total de las dos figuras en función del lado de la primera figura.

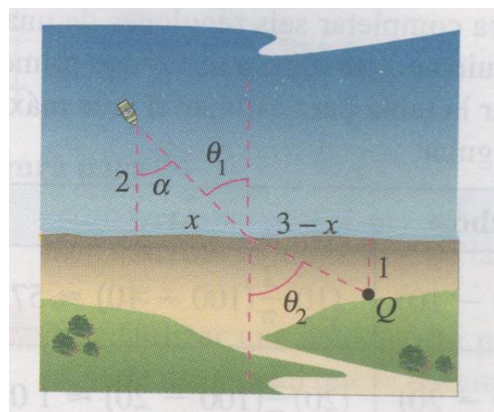
a) Triángulo equilátero y cuadrado. Rta. $A=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2+\left(5-\frac{3}{4}x\right)^2$

b) Cuadrado y pentágono regular. Rta. $A=x^2+1{,}72044774\left(4-\frac{4}{5}x\right)^2$

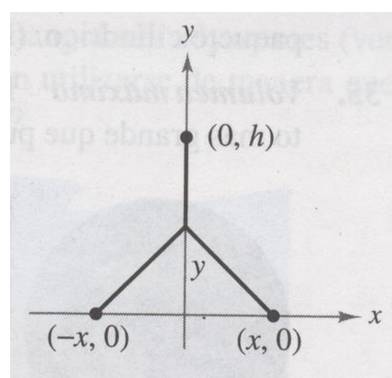
c) Pentágono regular y hexágono regular. Rta. $A=\frac{5}{4}(\cot\frac{\pi}{5})x^2+\frac{3}{2}\sqrt{3}\left(\frac{20-5x}{6}\right)^2$

d) Hexágono regular y círculo. Rta. $A=\frac{3}{2}\sqrt{3}x^2+\pi\left(\frac{10}{\pi}-\frac{3x}{\pi}\right)^2$

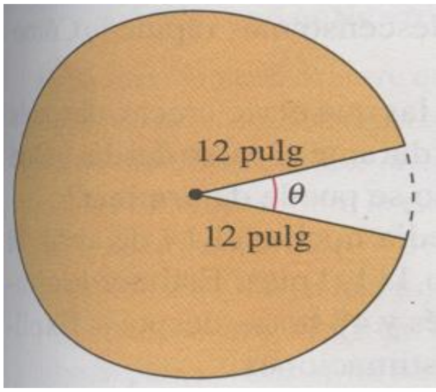
25. Un hombre se encuentra en un bote a 2 millas del punto más cercano a la costa. Se dirige al punto Q, localizado a 3 millas por la costa y a 1 milla tierra adentro. El hombre puede remar a 2 millas por hora y caminar a 4 millas por hora. Encuentre el tiempo que tarda en función de x.
Rta. $t=\frac{\sqrt{x^2+4}}{2}+\frac{\sqrt{x^2-6x+10}}{4}$



26. Dos fábricas se localizan en las coordenadas $(-x,0)$ y $(x,0)$ con suministro eléctrico ubicado en $(0,h)$. Determine la longitud total de la línea de transmisión eléctrica desde el suministro eléctrico hasta las fábricas en función de y. Rta. $A=h-y+2\sqrt{x^2+y^2}$



27. Un sector con ángulo central θ se corta de un círculo de 12 pulgadas de radio, y los bordes del sector se juntan para formar un cono. Exprese el volumen del cono así formado en función de radio r. Rta. $V=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{144-r^2}$



Bibliografía

Larson, R. E., Hostetler, R. P., Edwards, B. H. (2010).*Cálculo*. Novena Edición. McGraw-Hill.