Acerca de los números enteros, racionales e irracionales

Suposiciones

- En este texto se supone que está familiarizado con las leyes del álgebra básica, que se enumeran en el apéndice A.
- También utilizamos las tres propiedades de la igualdad: Para todos los objetos A, B y C, 1) $A = A$, 2) si $A = B$, entonces $B = A$ y 3) si $A = B$ y $B = C$, entonces $A = C$.
- Además, suponemos que no hay números enteros entre 0 y 1 y que el conjunto de todos los enteros es cerrado bajo suma, resta y multiplicación. Esto significa que las sumas, restas y productos de los números enteros son números enteros.

Un entero n es **par** si y sólo si, n es igual a dos veces un número entero. Un entero n es **impar** si y sólo si, n es igual a dos veces un número entero más 1.

Simbólicamente, si n es un entero, entonces

$$n \text{ es par} \quad \Leftrightarrow \quad \exists \text{ un entero } k \text{ tal que } n = 2k.$$

$$n \text{ es impar} \quad \Leftrightarrow \quad \exists \text{ un entero } k \text{ tal que } n = 2k + 1.$$

Un entero n es **primo** si y sólo si, $n > 1$ y para todos los enteros positivos r y s, si $n = rs$, entonces ya sea r o s es igual a n. Un entero n es **compuesto** si y sólo si, $n > 1$ y $n = rs$ para algunos enteros r y s con $1 < r < n$ y $1 < s < n$.

Simbólicamente:

$$n \text{ es primo} \quad \Leftrightarrow \quad \forall \text{ entero positivo } r \text{ y } s, \text{ si } n = rs \text{ entonces ya sea } r = 1 \text{ y } s = n \text{ o } r = n \text{ y } s = 1.$$

$$n \text{ es compuesto} \quad \Leftrightarrow \quad \exists \text{ enteros positivos } r \text{ y } s \text{ tales que } n = rs \text{ y } 1 < r < n \text{ y } 1 < s < n.$$

Refutación con un contraejemplo

Para refutar un enunciado de la forma "$\forall x \in D$, si $P(x)$, entonces $Q(x)$", determine un valor de x en D para que la hipótesis $P(x)$ es verdadera y la conclusión de $Q(x)$ es falsa. Dicha x se llama un **contraejemplo**.

Ejercicios. **4.1**: 4-13, 17, 18, 24-55, 57-62. **4.2**: 8-28, 30-32, 35-39. **4.6**: 1, 2, 5-12, 19-25, 27, 28, 30.

4.7: 3-12, 14, 15, 32-35. Texto: **Matemáticas Discretas con aplicaciones** (capítulo 4). 4ª edición. Autor: Susanna Epp.

Método de demostración directa

1. Exprese el enunciado a demostrar en la forma "$\forall x \in D$, si $P(x)$, entonces $Q(x)$". (Con frecuencia este paso se hace mentalmente.)
2. Inicie la demostración, suponiendo que x es un elemento particular pero que se elige arbitrariamente de D para que la hipótesis de $P(x)$ sea verdadera. (Este paso con frecuencia se abrevia como "Supongamos $x \in D$ y $P(x)$".)
3. Demuestre que la conclusión $Q(x)$ es verdadera usando las definiciones, previamente establecidos y las reglas de inferencia lógica.

Instanciación existencial

Si se supone la existencia de un cierto tipo de objeto o se ha deducido entonces se le puede dar un nombre, siempre y cuando ese nombre no esté siendo utilizado actualmente para designar a otra cosa.

Definición: Un entero n se llama **cuadrado perfecto** si y sólo si, $n = k^2$ para algún entero k.

Un número r es **racional** si y sólo si, se puede expresar como un cociente de dos números enteros con un denominador distinto de cero. Un número real que no es racional es **irracional**. Más formalmente, si r es un número real, entonces

$$r \text{ es racional} \Leftrightarrow \exists \text{ enteros } a \text{ y } b \text{ tales que } r = \frac{a}{b} \text{ y } b \neq 0.$$

Propiedad del producto cero

Si ninguno de dos números reales es cero, entonces su producto tampoco es cero.

Definición: Un número c que se llama un **cero** de un polinomio $p(x)$ si y sólo si, $p(c) = 0$.

Método de la demostración por contradicción

1. Supongamos que el enunciado a demostrar es falso. Es decir, supongamos que la negación del enunciado es verdadera.
2. Demuestre que esta suposición conduce lógicamente a una contradicción.
3. Concluya que el enunciado a demostrar es verdadero.

Método de demostración por contraposición

1. Exprese el enunciado a demostrar en la forma

$$\forall x \text{ en } D, \text{ si } P(x), \text{ entonces } Q(x).$$

   (Este paso se puede hacer mentalmente.)

2. Reescriba este enunciado en forma contrapositiva

$$\forall x \text{ en } D, \text{ si } Q(x) \text{ es falso, entonces } P(x) \text{ es falso.}$$

   (Este paso también se puede hacer mentalmente.)

3. Demuestre el enunciado contrapositivo con una demostración directa,
   a. Supongamos que x es un elemento (particular, pero elegido arbitrariamente) de D tal que $Q(x)$ es falso.
   b. Demuestre que $P(x)$ es falso.

Método de demostración por división en casos

Para demostrar un enunciado de la forma "Si A_1 o A_2 o . . . , o A_n, entonces C", se demuestran todos los enunciados siguientes:

Si A_1, entonces C,
Si A_2, entonces C,
⋮
Si A_n, entonces C,

Este proceso demuestra que C es verdadero independientemente de cuál de A_1, $A_2, \ldots, A_n$ sea el caso.

Axiomas de Orden para los números reales

Se supone que entre todos los números reales existen algunos, llamados **números reales positivos**, que satisfacen las propiedades Ord1-Ord3.

Ord1. Para cualesquiera números reales a y b, si a y b son positivos, entonces $a + b$ y ab también lo son.

Ord2. Para cada número real $a \neq 0$, a es positivo o $-a$ es positivo, pero no ambos.

Ord3. El número 0 no es positivo.

Los símbolos $<$, $>$, $\leq$ y $\geq$ y los números negativos se definen en términos de los números positivos.

Dados los números reales a y b,

$a < b$ significa que $b + (-a)$ es positivo. $b > a$ significa $a < b$.

$a \leq b$ significa $a < b$ o $a = b$. $b \geq a$ significa $a \leq b$.

Si $a < 0$, decimos que a es **negativo**. Si $a \geq 0$, decimos que a es **no-negativo**.

Axiomas de Campo para los números reales

F1. *Leyes conmutativas.* Para todos los números reales a y b,

$$a + b = b + a \quad \text{y} \quad a\,b = b\,a.$$

F2. *Leyes asociativas.* Para todos los números reales a, b y c,

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{y} \quad (ab)c = a(bc).$$

F3. *Leyes distributivas.* Para todos los números reales a, b y c,

$$a(b + c) = ab + ac \quad \text{y} \quad (b + c)a = ba + ca.$$

F4. *Existencia de los elementos identidad.* Existen dos números reales distintos, que se denotan por 0 y 1, tales que para cada número real a,

$$0 + a = a + 0 = a \quad \text{y} \quad 1\,a = a\,1 = a.$$

F5. *Existencia de inversos aditivos.* Para cada número real a, existe un número real, que se denota por $-a$ y se llama el **inverso aditivo** de a, tal que

$$a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

F6. *Existencia de recíprocos.* Para cada número real $a \neq 0$, existe un número real, que se denota por $1/a$ o a^{-1}, llamado el **recíproco** de a, tal que

$$a \cdot \left(\frac{1}{a}\right) = \left(\frac{1}{a}\right) \cdot a = 1.$$

Un axioma final distingue al conjunto de números reales del conjunto de números racionales, el cual es llamado el **axioma de mínima cota superior** [MCS].

MCS. Cualquier conjunto no vacío S de números reales, acotado por arriba, tiene una cota superior mínima. Es decir, si B es el conjunto de todos los números reales x tales que $x \geq s$, para todas las s en S y si B tiene al menos un elemento, entonces B tiene un elemento que es el más pequeño. Este elemento es llamado la **mínima cota superior de** S.