
Notas para un curso de Cálculo en Varias Variables



Anibal Fernando Álvarez Pérez
Escuela de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional de Colombia sede Medellín

2014

Documento maquetado con TEXIS v.1.0.

Este documento está preparado para ser imprimido a doble cara.

Notas para un curso de Cálculo en Varias Variables

Escuela de Matemáticas

Facultad de Ciencias

Universidad Nacional de Colombia sede Medellín

2014

Índice

Introducción

vii

1. Derivadas Parciales	1
1.1. La noción de límite para una función escalar de dos variables	1
1.2. Reglas para el cálculo de límites	3
1.3. Continuidad	7
1.4. Derivadas parciales	12
1.5. Diferenciabilidad	17
1.6. Regla de la cadena	24
1.7. Derivación Implícita	28
1.8. Derivadas Direccionales y Vector Gradiente	30
1.9. Planos Tangentes a Superficies de Nivel	33
1.10. Derivadas de Orden Superior	37
1.11. Regla de la Cadena en Derivadas Parciales de Orden Superior	38
1.12. Valores Máximos y Mínimos de una función de Varias Variables	40
1.12.1. Criterio de las Segundas Derivadas para clasificar puntos Críticos	43
1.12.2. Valores Máximos y Mínimos Absolutos	46
1.13. Multiplicadores de Lagrange	50
2. Integración Multiple	57
2.1. Integrales Dobles sobre Rectángulos	57
2.2. Integrales Iteradas	60
2.3. Integrales sobre Regiones más Generales	62
2.3.1. Dos Interpretaciones de una Integral Doble	66
2.4. Integrales Dobles en Coordenadas Polares	68

2.5. Aplicaciones de la Integrales Dobles	73
2.6. Integrales Triples	75
2.7. Integrales Triples sobre Regiones mas Generales	76
2.8. Integrales Triples en Coordenadas Cilíndricas	81
2.9. Integrales Triples en Coordenadas Esféricas.	83
2.10. Cambio de Variable en Integrales Múltiples	85
3. Elementos de Cálculo Vectorial	93
3.1. Longitud de Curva y La Integral de Escalar de Linea	93
3.2. Campos Vectoriales en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3	98
3.3. Integral de Línea de Campos Vectoriales	100
3.4. Teorema Fundamental de las Integrales de Línea	102
3.5. Superficies Paramétricas	104
3.6. Área de una Superficie Parametrica	106
3.7. Integral de Superficie de una Función Escalar	109
3.8. Integral de Superficie de un Campo Vectorial	110
3.9. Teorema de la Divergencia de Gauss	114
3.10. Teorema de Stokes	118
3.11. Teorema de Green	123

Introducción

Wars come and go, my soldiers, stay eternal.

Tupac Amaru Shakur

Capítulo 1

Derivadas Parciales

RESUMEN:

1.1. Límites

Distancia entre dos puntos de \mathbb{R}^2 .

La distancia entre $P = (x_0, y_0)$ y $Q = (x_1, y_1)$, que denotaremos por $d(P, Q)$, es por definición:

$$d(P, Q) := \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}.$$

Por ejemplo, si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ entonces $d((x, y), (0, 0)) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Diremos que (x, y) tiende a (x_0, y_0) y escribimos $(x_0, y_0) \rightarrow (x_0, y_0)$, cuando $d((x, y), (x_0, y_0))$ tiende a 0; es decir, cuando

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \rightarrow 0.$$

Sean f y g las funciones de dos variables definidas por

$$f(x, y) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \quad \text{y} \quad g(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Notemos que $Dom(f) = Dom(g) = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

Pregunta: ¿Qué pasa con $f(x, y)$ y con $g(x, y)$ cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$?

■ **Analicemos a f :**

Cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ tenemos que $x^2 + y^2 \rightarrow 0$. Sea $u = x^2 + y^2$, entonces $u \rightarrow 0$ y del cálculo de una variable sabemos que

$$f(x, y) = \frac{\sin(u)}{u} \rightarrow 1 \quad \text{cuando } u \rightarrow 0.$$

En este caso decimos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 1.$$

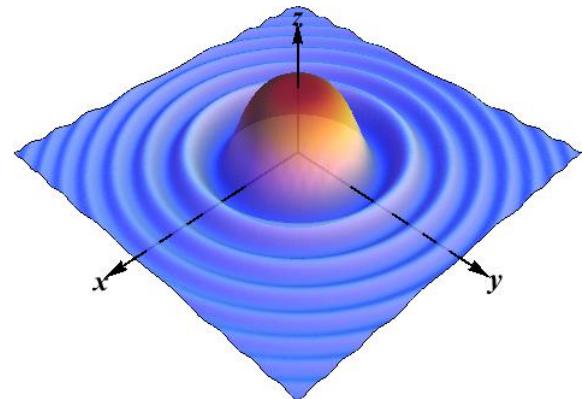


Figura 1.1: example caption

■ **Analicemos a g :**

Consideremos los trayectorias $C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = x\}$, $C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = 0\}$ y $C_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = 0\}$.

Notemos que

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in C_1}} g(x, y) = 0, \quad \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in C_2}} g(x, y) = -1 \quad \text{y} \quad \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in C_3}} g(x, y) = 1$$

Lo anterior nos permite concluir que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y)$ no existe.

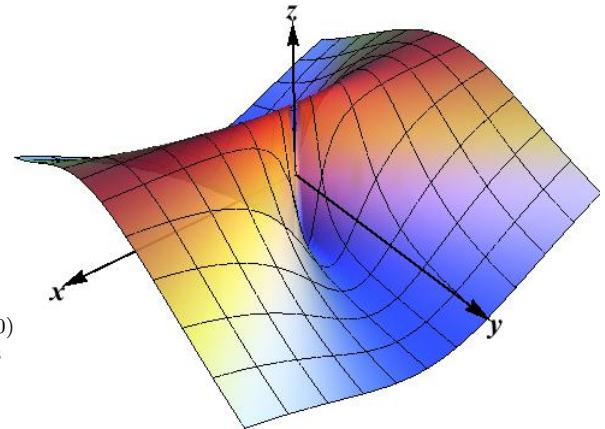


Figura 1.2: example caption

Definición 1.1.1. Decimos que el **límite** de $f(x, y)$ cuando (x, y) tiende a (x_0, y_0) es igual al número L , y escribimos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L,$$

si podemos hacer " $f(x, y)$ tan cercano a L " como queramos, tomando el punto (x, y) suficientemente cercano a (x_0, y_0) , pero $(x, y) \neq (x_0, y_0)$.

Observaciones

- El valor de L no está relacionado necesariamente con $f(x_0, y_0)$. Inclusive, puede ocurrir que f no esté definida en (x_0, y_0) .

- Para el cálculo de

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$$

sólo importan los valores de $f(x, y)$, cuando (x, y) está cercano a (x_0, y_0) pero $(x, y) \neq (x_0, y_0)$.

- Si se pueden construir dos trayectorias C_1 y C_2 que conduzcan a (x_0, y_0) , tales que

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0) \\ (x,y) \in C_1}} f(x, y) \neq \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0) \\ (x,y) \in C_2}} f(x, y),$$

entonces $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$ **no** existe.

1.2. Reglas para el cálculo de límites

Proposición 1.2.1. Sean f, g, h funciones de dos variables definida en una vecindad del punto (x_0, y_0) , tal que el límite de cada función en (x_0, y_0) existe.

$$1. \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} c = c.$$

$$2. \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} x = x_0.$$

$$3. \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} y = y_0.$$

$$4. Si \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = A \text{ y } \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} g(x, y) = B, \text{ entonces:}$$

$$\blacksquare \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} [f(x, y) + g(x, y)] = A + B,$$

$$\blacksquare \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} [f(x, y)g(x, y)] = AB.$$

$$\blacksquare Si adem\'as B \neq 0, entonces \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{A}{B}.$$

$$5. \textbf{Estricci\'on:} Si } f(x, y) \leq g(x, y) \leq h(x, y) \text{ y }$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = L \quad y \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} h(x, y) = L,$$

$$entonces \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} g(x, y) = L.$$

$$Caso particular: Si 0 \leq g(x, y) \leq h(x, y) \text{ y } \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} h(x, y) = 0, \text{ entonces}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} g(x, y) = 0.$$

$$6. Mostrar que \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = L equivale a probar que \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} |f(x, y) - L| = 0.$$

Determinar si existen los siguientes límites. En caso afirmativo calcularlos.

Ejemplo 1.2.1. ¿Existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$?

Consideremos las trayectorias $C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\}$ y

$C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$. También, definamos

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

De esta manera tenemos:

- $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in C_1}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2}.$
- $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in C_2}} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 \cdot y}{0^2 + y^2} = 0.$

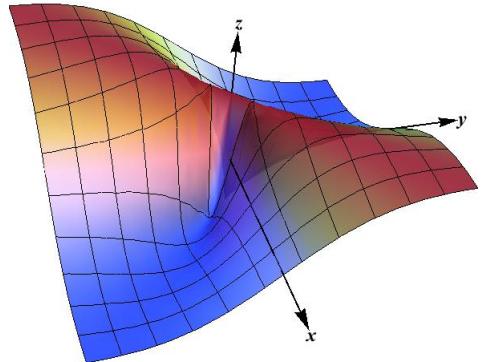


Figura 1.3: example caption

De lo anterior podemos concluir que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ **no** existe.

Ejemplo 1.2.2. ¿Existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{x^2 + y^2}$?

Sospechamos que límite es igual a 0. Definamos

$$f(x, y) = \frac{x^2y}{x^2 + y^2}$$

y probemos que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |f(x, y) - 0| = 0$. En efecto,

$$0 \leq |f(x, y) - 0| = \left| \frac{x^2y}{x^2 + y^2} \right| = \left| \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right| |y| = \underbrace{\left(\frac{x^2}{x^2 + y^2} \right)}_{\leq 1} |y| \leq |y|$$

Como $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |y| = 0$, concluimos por el teorema de *estriction* que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{x^2 + y^2} = 0.$$

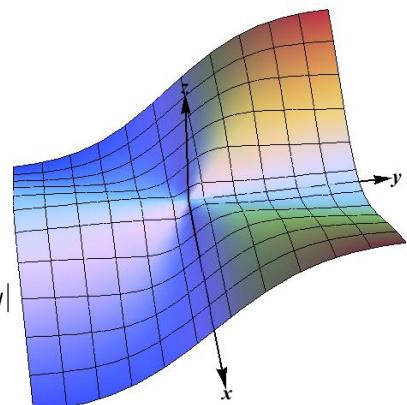


Figura 1.4: example caption

Ejemplo 1.2.3. ¿Existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{x^4 + y^2}$?

Sea $f(x, y) = \frac{x^2y}{x^4 + y^2}$, para todo $(x, y) \neq (0, 0)$. Para $m \neq 0$, consideremos la trayectoria

$$T_m = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx\}.$$

Al calcular el límite a lo largo de T_m , tenemos:

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in T_m}} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{x^2 + m^2} = 0.$$

Consideremos ahora la trayectoria $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$. Luego,

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in C}} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 x^2}{x^4 + (x^2)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Lo anterior nos permite concluir que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ **no** existe.

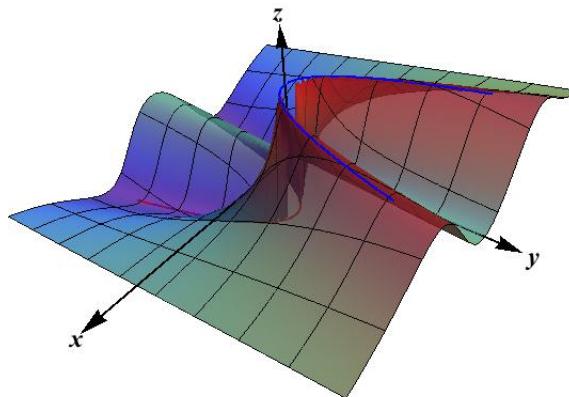


Figura 1.5: example caption

Ejemplo 1.2.4. ¿Existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x^4 - (y-1)^4}{x^2 + (y-1)^2}$?

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x^4 - (y-1)^4}{x^2 + (y-1)^2} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{[x^2 - (y-1)^2][x^2 + (y-1)^2]}{x^2 + (y-1)^2} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} [x^2 - (y-1)^2] = 0. \end{aligned}$$

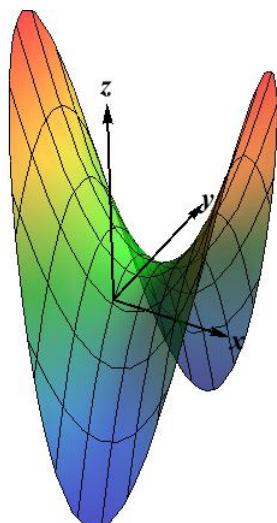


Figura 1.6: example caption

Ejemplo 1.2.5. ¿Existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y^3}{x^4+y^4}$?

Probemos que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y^3}{x^4+y^4} = 0$, es decir, probemos que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{x^2y^3}{x^4+y^4} \right| = 0$. En realidad,

$$0 \leq \left| \frac{x^2y^3}{x^4+y^4} \right| = \frac{x^2y^2}{x^4+y^4}|y| = \frac{\sqrt{x^4}\sqrt{y^4}}{x^4+y^4}|y| \leq \frac{\sqrt{x^4+y^4}\sqrt{x^4+y^4}}{x^4+y^4}|y| = |y|.$$

Como $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |y| = 0$, concluimos por el teorema de estricción que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y^3}{x^4+y^4} = 0.$$

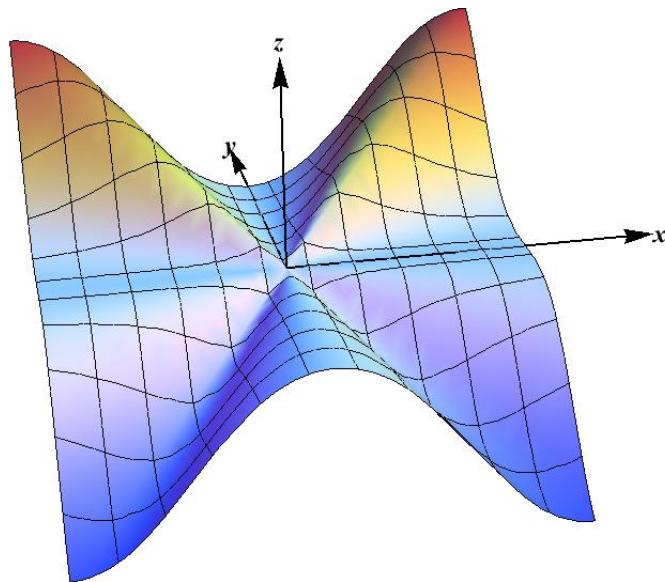


Figura 1.7: example caption

Ejercicios:

1. ¿Existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(2x) - 2x + y}{x^3 + y}$?
2. ¿Existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{(x-2)^3(y-1)^2}{(x-2)^2 + (y-1)^2}$?
3. ¿Existe $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xyz}{x^3 + y^3 + z^3}$?

1.3. Continuidad

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $z = f(x, y)$, una función de dos variables y sea $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Diremos que f es continua en (x_0, y_0) si:

- f está definida en (x_0, y_0) , es decir, $(x_0, y_0) \in Dom(f) = D$ ($f(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$).
- Existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$.
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

Sea Ω un subconjunto de \mathbb{R}^2 . Diremos que f es continua en Ω si f es continua en cada uno de los puntos de Ω .

Las nociones anteriores pueden extenderse para el caso de funciones de tres variables.

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $w = f(x, y, z)$, una función de tres variables y sea $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$. Diremos que f es continua en (x_0, y_0, z_0) si:

- f está definida en (x_0, y_0, z_0) .
- Existe $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (x_0,y_0,z_0)} f(x, y, z)$.
- $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (x_0,y_0,z_0)} f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0)$.

Análogamente, si Ω es un subconjunto de \mathbb{R}^3 , diremos que f es continua en Ω si lo es en cada punto de Ω .

Ejemplo 1.3.1. Las funciones polinómicas de dos variables son continuas en cualquier punto del plano, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto z = f(x, y) = \sum_{m=0}^k \sum_{n=0}^l c_{mn} x^m y^n, \quad c_{mn} \in \mathbb{R}.$$

- $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = \sum_{m=0}^k \sum_{n=0}^l c_{mn} x_0^m y_0^n = f(x_0, y_0)$.

Ejemplo 1.3.2. Las funciones racionales son continuas en todos los puntos de su dominio. Recordemos que una función racional es el cociente de dos funciones polinómicas, definida en aquellos puntos donde

el denominador es no nulo.

$$f(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \quad \text{donde } P \text{ y } Q \text{ son funciones polinómicas.}$$

$$Dom(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid Q(x, y) \neq 0\}.$$

Ejemplo 1.3.3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 - (x^2 + y^2) & \text{si } x^2 + y^2 < 1 \\ -2 & \text{si } x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$$

Recordemos que la gráfica de f es el conjunto de puntos en el espacio \mathbb{R}^3 ,

$$\{(x, y, z) \mid z = f(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

- $z = 2 - (x^2 + y^2)$ cuando $x^2 + y^2 < 1$ y
- $z = -2$ cuando $x^2 + y^2 \geq 1$

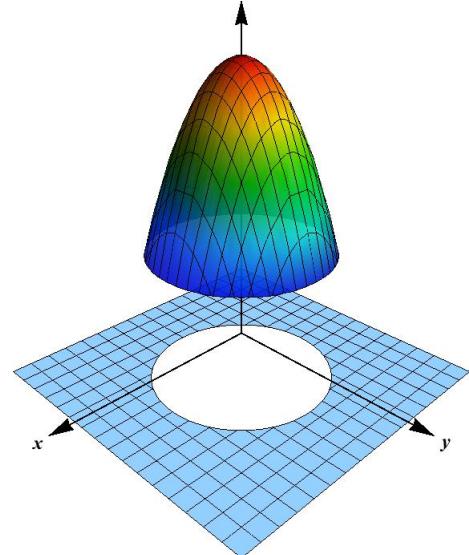


Figura 1.8: example caption

i) ¿Existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} f(x, y)$?

Consideremos las trayectorias

$$C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, 0 < y < 1\} \quad \text{y} \quad C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, y > 1\}.$$

De esta manera:

$$\diamond \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,1) \\ (x,y) \in C_1}} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} [2 - (x^2 + y^2)] = 1;$$

$$\diamond \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,1) \\ (x,y) \in C_2}} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} [-2] = -2$$

Concluimos que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} f(x, y)$ **no** existe.

ii) ¿Es f continua en $(0, 1)$?

Del numeral anterior vemos que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} f(x, y)$ no existe. Por lo tanto f no es continua en $(0, 1)$.

iii) Sea $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tal que $x_0^2 + y_0^2 = 1$. ¿Es f continua en (x_0, y_0) ?

f no es continua en (x_0, y_0) \cdots **Ejercicio.**

Sugerencia: Sea L la recta en el plano xy que pasa por los puntos $(0, 0)$ y (x_0, y_0) . Considerar las trayectorias

$$T_1 = \{(x, y) \in L \mid 0 < y < 1\} \quad \text{y} \quad T_2 \{(x, y) \in L \mid y > 1\}.$$

iv) Sea $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tal que $x_0^2 + y_0^2 > 1$. ¿Es f continua en (x_0, y_0) ?

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [-2] = -2 = f(x_0, y_0).$$

Por lo tanto, f es continua en (x_0, y_0) .

v) Sea $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tal que $x_0^2 + y_0^2 < 1$. ¿Es f continua en (x_0, y_0) ?

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [2 - (x^2 + y^2)] = 2 - (x_0^2 + y_0^2) = f(x_0, y_0).$$

Por lo tanto, f es continua en (x_0, y_0) .

vi) ¿Cuál es el conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ más grande en el cual f es continua?

Los numerales anteriores nos permiten concluir que el conjunto *más grande* en el que f es continua es

$$D = \mathbb{R}^2 - \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Ejemplo 1.3.4. Pruebe que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

es continua en \mathbb{R}^2 .

Solución:

Sea $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Si $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ entonces

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} = \frac{3x_0^2y_0}{x_0^2 + y_0^2} = f(x_0, y_0)$$

Luego, f es continua en $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$.

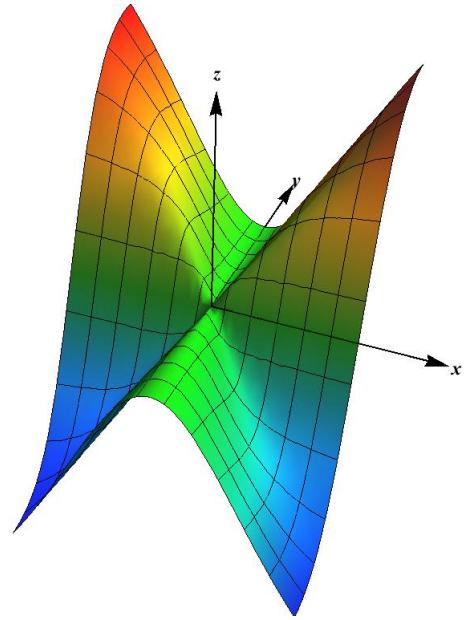


Figura 1.9: example caption

Veamos ahora si f es continua en $(0, 0)$. Sabemos que $f(0, 0) = 0$ y para $(x, y) \neq (0, 0)$ tenemos:

$$0 \leq |f(x, y) - 0| = \left| \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} \right| = 3 \underbrace{\left(\frac{x^2}{x^2 + y^2} \right)}_{\leq 1} |y| \leq 3|y|.$$

Como $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 3|y| = 0$, del teorema de restricción se sigue que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0).$$

Concluimos que f es continua en $(0, 0)$.

Por lo tanto, f es continua en \mathbb{R}^2 .

Ejemplo 1.3.5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida

por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

¿Es f continua en $(0, 0)$?

- $f(0, 0) = 0$.
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ no existe \cdots **Ejercicio.**

Por lo tanto f **no** es continua en $(0, 0)$.

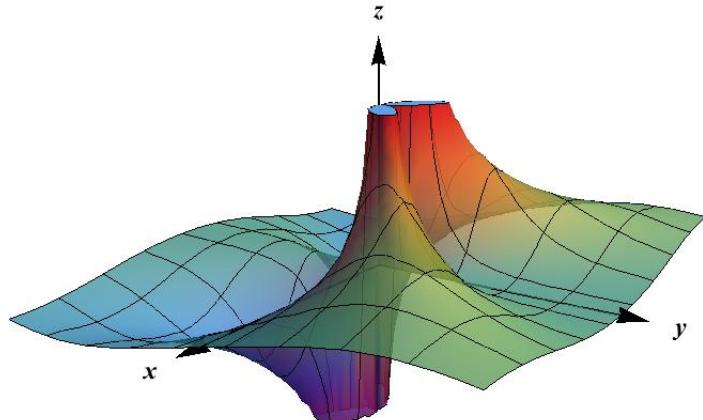


Figura 1.10: example caption

Teorema 1.3.1. Propiedades de las funciones continuas

- Sean f y g funciones continuas en (x_0, y_0) y sea $c \in \mathbb{R}$, entonces:
 1. La función cf es continua en (x_0, y_0) .
 2. Las funciones $f + g$, $f - g$ y fg también son continuas en (x_0, y_0) .
 3. Si $g(x_0, y_0) \neq 0$, entonces la función $\frac{f}{g}$ también es continua en (x_0, y_0) .
- Supongamos que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Si f es continua en (x_0, y_0) y g es continua en $f(x_0, y_0)$, entonces la función $h = g \circ f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $h(x, y) = g(f(x, y))$, es continua en (x_0, y_0) .

Ejemplo 1.3.6. Sea $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$h(x, y) = [\cos(x^2 + y^2) + 1]^{1/2}.$$

Pruebe que h es continua en \mathbb{R}^2 .

Solución: Definamos $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x, y) = x^2 + y^2$. La función f es continua (en \mathbb{R}^2) por ser una función polinómica. También, sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $g(u) = \sqrt{\cos(u) + 1}$. Notemos que g es una función continua. Del teorema anterior se sigue que la función $g \circ f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en \mathbb{R}^2 . Pero,

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x, y) &= g(f(x, y)) \\&= g(x^2 + y^2) \\&= \sqrt{\cos(x^2 + y^2) + 1} = h(x, y),\end{aligned}$$

es decir, $h = g \circ f$. Por lo tanto, h es continua en \mathbb{R}^2 .

Veamos que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} h(x, y)$ existe y es igual a 0. En efecto, para $(x, y) \neq (0, 0)$ tenemos:

$$\begin{aligned}0 \leq \left| \frac{x^2 + 2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 0 \right| &\leq \left| \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| + \left| \frac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \\&= \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{2|x||y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\&\leq \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{2\sqrt{x^2 + y^2}|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\&= \sqrt{x^2 + y^2} + 2|y|.\end{aligned}$$

Como $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} [\sqrt{x^2 + y^2} + 2|y|] = 0$, concluimos por el teorema de estricción que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} h(x, y) = 0.$$

Finalmente, para que h sea continua en $(0, 0)$ debemos tomar $c = 0$.

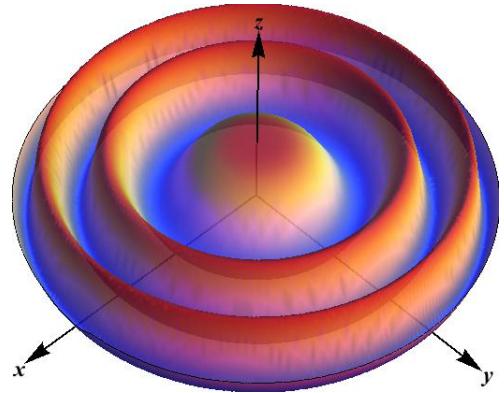


Figura 1.11: example caption

Ejemplo 1.3.7. ¿Existe un valor de c para el cual la función

$h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ c & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

sea continua en $(0, 0)$?

Solución:

Notemos que $h(0, 0) = c$. Luego, la pregunta del problema puede reformularse como sigue: ¿Existe c tal que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} h(x, y) = c ?$$

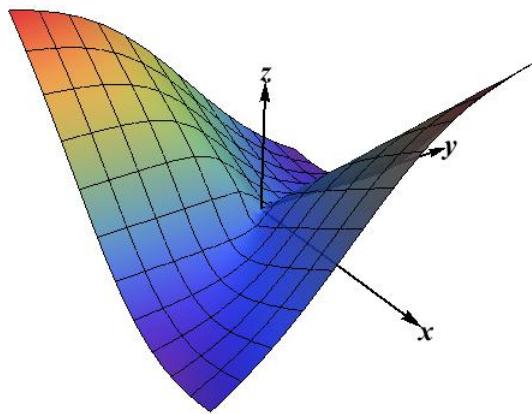


Figura 1.12: example caption

1.4. Derivadas parciales

Definición de $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$

Sean (a, b) un punto del plano y $r > 0$ un número real positivo. Definimos el disco de centro (a, b) y radio r como el conjunto

$$D_r(a, b) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x, y), (a, b)) < r\}.$$

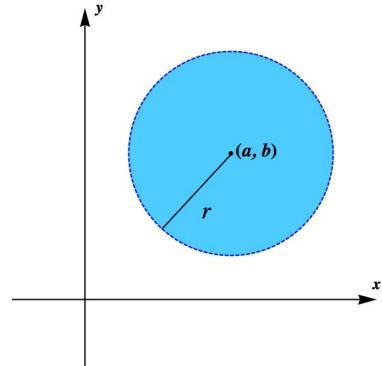


Figura 1.13: Disco con **centro** en (a, b) y **radio** r .

Definición 1.4.1. Sea f una función escalar de dos variables, definida en el disco $D_r(a, b)$. Consideremos la función f restringida a los puntos de la forma (x, b) . Denotemos por φ tal función, es decir, $\varphi(x) := f(x, b)$. Diremos que la **derivada parcial de f con respecto a la variable x en el punto (a, b)** existe si la función φ es diferenciable en $x = a$, y en tal caso definimos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) := \varphi'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a}.$$

Una definición alternativa para la anterior derivada parcial es

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}.$$

Ahora, consideremos la función f restringida a los puntos de la forma (a, y) . Denotemos por ψ tal función, es decir, $\psi(y) := f(a, y)$. Diremos que **la derivada parcial de f con respecto a la variable y en el punto (a, b)** existe si la función ψ es diferenciable en $y = b$, y en tal caso definimos

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) := \psi'(b) = \lim_{y \rightarrow b} \frac{\psi(y) - \psi(b)}{y - b} = \lim_{y \rightarrow b} \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b}.$$

Una definición alternativa para la anterior derivada parcial es

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h}.$$

Notaciones:

- $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = f_x(a, b) = D_1 f(a, b)$.
- $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = f_y(a, b) = D_2 f(a, b)$.

Si representamos la función f como $z = f(x, y)$, también es usual escribir

$$\frac{\partial z}{\partial x}(a, b) \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y}(a, b).$$

Al momento de cambiar el punto sobre el cual se estudia la existencia de las derivadas parciales de f , podemos ver a $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ como funciones de dos variables definidas, respectivamente, en aquellos puntos donde existen los siguientes límites:

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} \quad \dots \quad y \text{ permanece constante},$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h} \quad \dots \quad x \text{ permanece constante}.$

Ejemplo 1.4.1. Sea $f(x, y) = 4 - 4x^2 - 2xy^2$. Hallar $f_x(1, 1)$ y $f_y(-1, 0)$.

Solución:

$$f_x(x, y) = -8 - 2y^2, \quad f_y(x, y) = -4xy.$$

$$f_x(1, 1) = -8(1) - 2(1)^2 = -10, \quad f_y(-1, 0) = -4(-1)(0) = 0.$$

Interpretación geométrica de $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$

Sean ahora T_1 y T_2 las rectas tangentes a C_1 y C_2 , respectivamente, en el punto P . Así,

- $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ es la pendiente de T_1 en el plano $x = a$,
- $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ es la pendiente de T_2 en el plano $y = b$.

Sea (a, b) un punto en el dominio de f , en el cual existen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b).$$

Denotemos por P al punto $P = (a, b, f(a, b))$.

Sean C_1 la curva intersección de la gráfica de f con el plano $y = b$, y C_2 la curva intersección de la gráfica de f con el plano $x = a$.

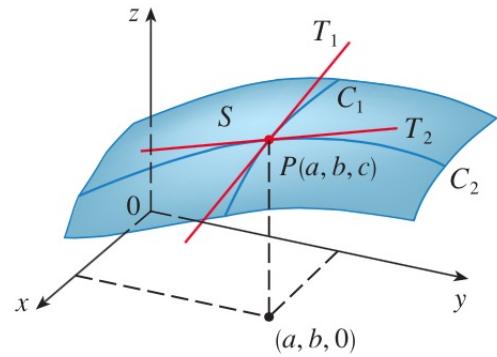


Figura 1.14: Hacer gráfica

Ejemplos complementarios

Ejemplo 1.4.2. Sea $f(x, y) = x^3y^2 - e^{xy}$. Hallar $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Solución:

- ◊ $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2y^2 - ye^{xy}$,
- ◊ $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^3y - xe^{xy}$.

Ejemplo 1.4.3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3(1+y)}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Hallar $f_x(0, 0)$ y $f_y(1, 1)$.

Solución:

- ◊ Para calcular $f_x(0, 0)$, procedemos a partir de la definición del límite.

$$\begin{aligned} f_x(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^3(1+0)}{h^2+0} - 0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1. \end{aligned}$$

- ◊ Para $(x, y) \neq (0, 0)$ tenemos que $f(x, y) = \frac{x^3(1+y)}{x^2+y^2}$. Luego,

$$\begin{aligned} f_y(x, y) &= \frac{(x^2+y^2)(x^3) - x^3(1+y)(2y)}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{x^3(x^2+y^2-2y-2y^2)}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{x^3(x^2-y^2-2y)}{(x^2+y^2)^2}. \end{aligned}$$

Evaluando $(1, 1)$ en la anterior expresión obtenemos:

$$f_y(1, 1) = \frac{(1)^3 [(1)^2 - (1)^2 - 2(1)]}{[(1)^2 + (1)^2]^2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Ejemplo 1.4.4. Si $z = f(x, y)$ está definida implícitamente por la ecuación

$$x^4 + y^3 - z^3 + 2xyz = 1, \quad \boxtimes$$

hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Solución:

- ◊ Para hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$, consideramos a y como constante en la expresión \boxtimes y aplicamos las reglas de diferenciación implícita:

$$\begin{aligned} & 4x^3 - 3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} + 2y \frac{\partial}{\partial x}(xz) = 0 \\ \implies & 4x^3 - 3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} + 2y \left(z + x \frac{\partial z}{\partial x} \right) = 0 \\ \implies & (2xy - 3z^2) \frac{\partial z}{\partial x} = -2yz - 4x^3 \\ \therefore & \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{4x^3 + 2yz}{3z^2 - 2xy}. \end{aligned}$$

- ◊ De manera similar, para hallar $\frac{\partial z}{\partial y}$ consideremos a x como constante en la ecuación \boxtimes y derivamos implícitamente con respecto a y :

$$\begin{aligned} & 3y^2 - 3z^2 \frac{\partial z}{\partial y} + 2x \frac{\partial}{\partial y}(yz) = 0 \\ \implies & 3y^2 - 3z^2 \frac{\partial z}{\partial y} + 2x \left(z + y \frac{\partial z}{\partial y} \right) = 0 \\ \implies & (2xy - 3z^2) \frac{\partial z}{\partial y} = -3y^2 - 2xz \\ \therefore & \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3y^2 + 2xz}{3z^2 - 2xy}. \end{aligned}$$

Derivadas parciales para funciones escalares de tres variables

Sea f una función de tres variables con valores reales, definida en la bola de centro (a, b, c) y radio $r > 0$:

$$B_r(a, b, c) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} < r\}.$$

Definimos las derivadas parciales de f respecto a x , y y z en el punto (a, b, c) como:

- $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b, c) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b, c) - f(a, b, c)}{h},$

- $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b, c) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b + h, c) - f(a, b, c)}{h},$
- $\frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b, c + h) - f(a, b, c)}{h},$

en el caso que los límites en cuestión existan.

1.5. Diferenciabilidad

¿Cuándo diremos que una función f de dos variables es diferenciable en (a, b) ?

Para la diferenciabilidad de f en (a, b) es **insuficiente** requerir solamente la existencia de las derivadas parciales de f en dicho punto, $f_x(a, b)$ y $f_y(a, b)$, como lo muestra el siguiente ejemplo:

- Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Cuando calculamos las derivadas parciales de f en el punto $(0, 0)$ obtenemos:

$$\begin{aligned} \diamond f_x(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h \cdot 0}{h^2 + 0} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0, \\ \diamond f_y(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0 \cdot h}{0 + h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0. \end{aligned}$$

Sin embargo, f no es continua en $(0, 0)$, ya que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ no existe.

Recordemos que si f es una función real de una variable, decimos que f es diferenciable en a si existe el límite

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

y en tal caso denotamos por $f'(a)$ al valor del límite mencionado. En esta situación, una formulación equivalente para que f sea diferenciable en a , con derivada $f'(a)$, es

$$\lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right| = 0.$$

Geométricamente, si L es la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$, es decir,

$$L = f(a) + f'(a)(x - a),$$

entonces lo anterior se puede escribir en la forma

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x) - [f(a) + f'(a)(x - a)]}{x - a} \right| &= 0, \\ \lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x) - L}{x - a} \right| &= 0. \end{aligned}$$

Definición: Sea f una función de dos variables definida en un disco de centro (a, b) . Diremos que f es **diferenciable en (a, b)** si:

- Existen $f_x(a, b)$ y $f_y(a, b)$,
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \left| \frac{f(x, y) - [f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)]}{d((x, y), (a, b))} \right| = 0,$
donde $d((x, y), (a, b)) = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$.

En el caso de dos variables, el análogo a tener recta tangente es la noción de plano tangente. Por similitud con el caso de una variable, la función lineal

$$L = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

se denomina *plano tangente* a la gráfica de $z = f(x, y)$ en el punto $P = (a, b, f(a, b))$. De esta manera, f es diferenciable en (a, b) cuando

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \left| \frac{f(x, y) - L}{d((x, y), (a, b))} \right| = 0.$$

Ejemplo 1.5.1. La función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

no es diferenciable en $(0, 0)$.

Recordemos que $f_x(0, 0) = 0$ y $f_y(0, 0) = 0$. Así, para $(x, y) \neq (0, 0)$ tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{f(x, y) - [\underbrace{f(0, 0)}_0 + \underbrace{f_x(0, 0)}_0(x - 0) + \underbrace{f_y(0, 0)}_0(y - 0)]}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \frac{\frac{xy}{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

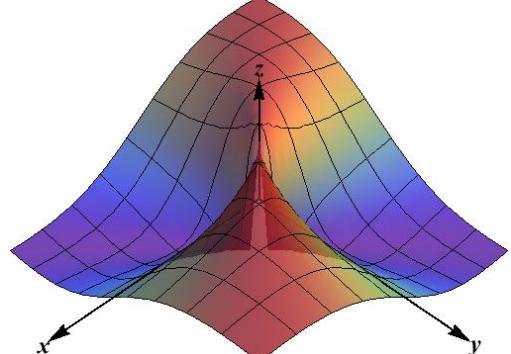


Figura 1.15

Consideremos las trayectorias

$$C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\} \quad \text{y} \quad C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x, x > 0\}.$$

Luego,

$$\diamond \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in C_1}} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 \cdot y}{(0 + y^2)^{3/2}} = 0,$$

$$\diamond \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in C_2}} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{2\sqrt{2}x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\sqrt{2}x} = +\infty.$$

Por lo tanto, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$ **no** existe.

Concluimos que f no es diferenciable en $(0, 0)$.

Ejemplo 1.5.2. Determinar si la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) + x & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

es diferenciable en $(0, 0)$.

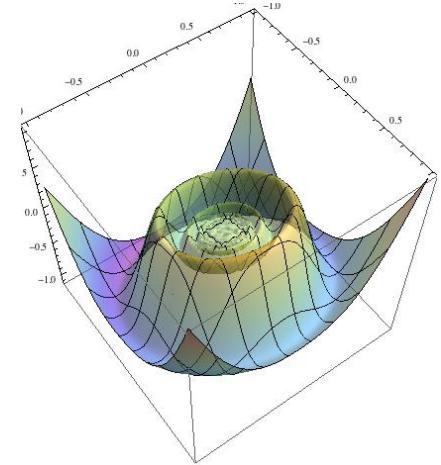


Figura 1.16

Solución: En primer lugar, calculemos las derivadas parciales de f en $(0, 0)$.

$$\diamond f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin\left(\frac{2}{\sqrt{h^2}}\right) + h - 0}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \left[h \sin\left(\frac{2}{\sqrt{h^2}}\right) + 1 \right] = 1,$$

$$\diamond f_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin\left(\frac{2}{\sqrt{h^2}}\right) - 0}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin\left(\frac{2}{\sqrt{h^2}}\right) = 0.$$

De lo anterior, para $(x, y) \neq (0, 0)$ tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{f(x, y) - [\overbrace{f(0, 0)}^0 + \overbrace{f_x(0, 0)}^1(x - 0) + \overbrace{f_y(0, 0)}^0(y - 0)]}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \frac{f(x, y) - x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \frac{\left[(x^2 + y^2) \sin\left(\frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) + x\right] - x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{(x^2 + y^2) \sin\left(\frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2} \sin\left(\frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \end{aligned}$$

y además,

$$0 \leq \left| \sqrt{x^2 + y^2} \sin \left(\frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \right| = \sqrt{x^2 + y^2} \underbrace{\left| \sin \left(\frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \right|}_{\leq 1} \leq \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Como $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} = 0$, concluimos por el teorema de estricción que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} \sin \left(\frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = 0.$$

Por lo tanto, f es diferenciable en $(0,0)$.

Formalicemos algunas definiciones dadas anteriormente.

Definición 1.5.1. Sea f una función diferenciable en (a,b) .

- El plano con ecuación

$$z = f(a,b) + f_x(a,b)(x - a) + f_y(a,b)(y - b)$$

se denomina **plano tangente** a la gráfica de f en el punto $P = (a,b, f(a,b))$.

- La función

$$L(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x - a) + f_y(a,b)(y - b)$$

se denomina **Linealización** de f en (a,b) .

Que f sea diferenciable en (a,b) indica que $f(x,y) \approx L(x,y)$, cuando (x,y) está cerca de (a,b) . En este caso, $f(x,y)$ puede aproximarse con $L(x,y)$, que por ser una expresión lineal es más *cómoda* de trabajar.

En muchas ocasiones, verificar la diferenciabilidad de una función f en un punto (a,b) involucra un procedimiento que resulta tedioso al tratar con el cociente

$$\frac{f(x,y) - [f(a,b) + f_x(a,b)(x - a) + f_y(a,b)(y - b)]}{d((x,y), (a,b))}.$$

En vista de lo anterior, el siguiente teorema nos proporciona una manera eficiente de verificar diferenciabilidad, bajo ciertas condiciones.

Teorema 1.5.2. Condición suficiente de diferenciabilidad

Sea f una función de dos variables, definida en un disco de centro (a, b) . Si las derivadas parciales f_x y f_y existen en una vecindad de (a, b) y, como funciones, son continuas en (a, b) , es decir,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f_x(x, y) = f_x(a, b) \quad y \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f_y(x, y) = f_y(a, b),$$

entonces f es diferenciable en (a, b) .

En otras palabras, toda función de clase C^1 es diferenciable.

Ejemplo 1.5.3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x, y) = x^2 e^{xy}$. Notemos que f es una función continua. Además,

- ◊ $f_x(x, y) = 2x e^{xy} + x^2 y e^{xy},$
- ◊ $f_y(x, y) = x^3 e^{xy}.$

Vemos que f_x y f_y son funciones continuas, de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R} . Por lo tanto, f es una función de clase C^1 y el teorema anterior nos permite concluir que f es diferenciable en cualquier punto (a, b) de \mathbb{R}^2 .

- i) Halle la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en $(2, 0, f(2, 0))$.

Solución:

En primer lugar, el valor de f en el punto $(2, 0)$ es

$$f(2, 0) = (2)^2 e^{(2)(0)} = 4.$$

Ahora, un cálculo de las derivadas parciales de f en $(2, 0)$ nos da:

- ◊ $f_x(2, 0) = 2(2) e^{(2)(0)} + (2)^2(0) e^{(2)(0)} = 4,$
- ◊ $f_y(2, 0) = (2)^3 e^{(2)(0)} = 8.$

De esta manera, la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto $(2, 0, f(2, 0))$ es:

$$\begin{aligned} z &= f(2, 0) + f_x(2, 0)(x - 2) + f_y(2, 0)(y - 0), \\ z &= 4 + 4(x - 2) + 8y, \\ z &= 4x + 8y - 4. \end{aligned}$$

- ii) Encuentre un valor aproximado de $(2,1)^2 e^{(2,1)(-0,2)}$.

Solución:

Notemos que $(2,1)^2 e^{(2,1)(-0,2)} = f(2,1, -0,2)$. Del numeral anterior tenemos que la linealización de f en $(2, 0)$ es

$$L(x, y) = 4x + 8y - 4.$$

Luego, un valor aproximado de $(2,1)^2 e^{(2,1)(-0,2)}$ se obtiene evaluando L en el punto $(2,1, -0,2)$ (que está cercano a $(2, 0)$), así:

$$\begin{aligned} (2,1)^2 e^{(2,1)(-0,2)} &\approx L(2,1, -2,2) = 4(2,1) + 8(-0,2) - 4 \\ &\approx 2,8 . \end{aligned}$$

En el cálculo diferencial de una variable un resultado importante afirma que toda función diferenciable en un punto es continua en ese punto. Como se mostró en el primer ejemplo de este capítulo, la existencia de las derivadas parciales no implican que una función sea **diferenciable**, ni siquiera que sea continua. Este fue uno de los hechos que motivó examinar una definición *adecuada* de **diferenciabilidad**.

El siguiente teorema rescata una de las características de las funciones diferenciables, como el que se tiene para el cálculo de una variable.

Teorema 1.5.3. Diferenciabilidad implica continuidad

Si f es una función diferenciable en el punto (a, b) , entonces f es continua en (a, b) .

Demostración:

Como f es diferenciable en (a, b) se cumple que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f(x, y) - [f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)]}{d((x, y), (a, b))} = 0.$$

$$\text{Sea } M(x, y) = \frac{f(x, y) - [f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)]}{d((x, y), (a, b))}.$$

Así, $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} M(x, y) = 0$. Despejando tenemos:

$$f(x, y) - f(a, b) = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + d((x, y), (a, b)) M(x, y).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} & \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} [f(x, y) - f(a, b)] \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} [f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + d((x, y), (a, b)) M(x, y)] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Es decir, $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$. Por lo tanto, f es continua en (a, b) .

1.6. Regla de la cadena

- Si $z = f(x, y)$ es una función diferenciable de dos variables y $x = g(t)$, $y = h(t)$ son funciones diferenciables de una variable, z termina dependiendo de una única variable [$z = f(g(t), h(t))$] por lo cual es natural preguntarse, en estas condiciones, ¿Cómo se calcula $\frac{dz}{dt}$? En este caso,

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x}(g(t), h(t)) \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(g(t), h(t)) \frac{dy}{dt} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}.\end{aligned}$$

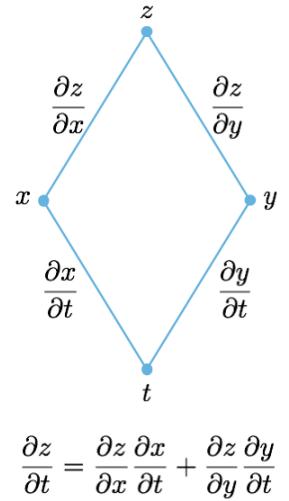


Figura 1.17

- Si $z = f(x, y)$ es una función diferenciable de dos variables y $x = g(s, t)$, $y = h(s, t)$ son funciones diferenciables de dos variables ($z = f(g(s, t), h(s, t))$), entonces

$$\frac{\partial z}{\partial s}(s, t) = \frac{\partial f}{\partial x}(g(s, t), h(s, t)) \frac{\partial x}{\partial s}(s, t) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(s, t), h(s, t)) \frac{\partial y}{\partial s}(s, t)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}(s, t) = \frac{\partial f}{\partial x}(g(s, t), h(s, t)) \frac{\partial x}{\partial t}(s, t) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(s, t), h(s, t)) \frac{\partial y}{\partial t}(s, t)$$

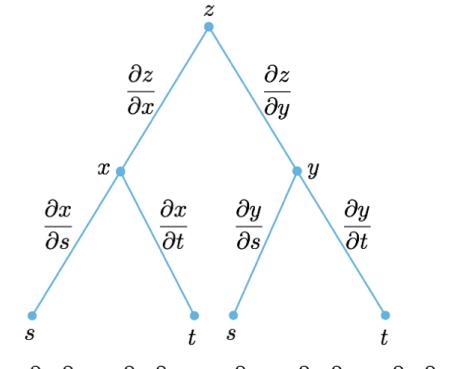


Figura 1.18

■ Regla de la cadena general.

Sea $u = f(x_1, \dots, x_n)$ y para $j = 1, \dots, n$, $x_j = g_j(t_1, \dots, t_m)$. Es decir,

$$u = f(g_1(t_1, \dots, t_m), \dots, g_n(t_1, \dots, t_m)).$$

Entonces, para $i = 1, \dots, m$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t_i} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_i} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t_i}.\end{aligned}$$

Ejemplo 1.6.1. Sean $z = x^2 + y^2$, $x = t^3$, $y = 1 + t^2$. Hallar $\frac{dz}{dt}$.

Solución:

Tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= 2x, & \frac{\partial z}{\partial y} &= 2y & \text{y} \\ \frac{dx}{dt} &= 3t^2, & \frac{dy}{dt} &= 2t.\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= (2x)(3t^2) + (2y)(2t) \\ &= 6xt^2 + 4yt \\ &= 6(t^3)t^2 + 4(1+t^2)t \\ &= 6t^5 + 4t(1+t^2).\end{aligned}$$

Ejemplo 1.6.2. Sean $z = x^2 - 3x^2y^3$, $x = e^{st}$, $y = e^{-st}$. Hallar $\frac{\partial z}{\partial s}$ y $\frac{\partial z}{\partial t}$.

Solución:

Tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= 2x - 6xy^3, & \frac{\partial z}{\partial y} &= -9x^2y^2, \\ \frac{\partial x}{\partial s} &= e^t, & \frac{\partial x}{\partial t} &= se^t & \text{y} \\ \frac{\partial y}{\partial s} &= e^{-t}, & \frac{\partial y}{\partial t} &= -se^{-t}.\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\diamond \quad \frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \\ &= (2x - 6xy^3)(e^t) + (-9x^2y^2)(e^{-t}) \\ &= [2se^t - 6(se^t)(s^3e^{-3t})]e^t + [-9(s^2e^{2t})(s^2e^{-2t})]e^{-t} \\ &= 2se^{2t} - 6s^4e^{-t} - 9s^4e^{-t} \\ &= 2se^{2t} - 15s^4e^{-t}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\diamond \quad & \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \\
& = (2x - 6xy^3)(se^t) + (-9x^2y^2)(-se^{-t}) \\
& = [2se^t - 6(se^t)(s^3e^{-3t})](se^t) + [-9(s^2e^{2t})(s^2e^{-2t})](-se^{-t}) \\
& = 2s^2e^{2t} - 6s^5e^{-t} + 9s^5e^{-t} \\
& = 2s^2e^{2t} + 3s^5e^{-t}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.6.3. Sea $w(s, t) = F(u(s, t), v(s, t))$, donde

$$\begin{aligned}
u(1, 0) &= 2, & u_s(1, 0) &= -2, & u_t(1, 0) &= 6, \\
v(1, 0) &= 3, & v_s(1, 0) &= 5, & v_t(1, 0) &= 4, \\
F_u(2, 3) &= -1, & F_v(2, 3) &= 10.
\end{aligned}$$

Encuentre $w_s(1, 0)$ y $w_t(1, 0)$.

Solución:

$$\begin{aligned}
\diamond \quad w_s(1, 0) &= F_u(u(1, 0), v(1, 0)) u_s(1, 0) + F_v(u(1, 0), v(1, 0)) v_s(1, 0) \\
&= F_u(2, 3) u_s(1, 0) + F_v(2, 3) v_s(1, 0) \\
&= (-1)(-2) + (10)(5) \\
&= 52.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\diamond \quad w_t(1, 0) &= F_u(u(1, 0), v(1, 0)) u_t(1, 0) + F_v(u(1, 0), v(1, 0)) v_t(1, 0) \\
&= F_u(2, 3) u_t(1, 0) + F_v(2, 3) v_t(1, 0) \\
&= (-1)(6) + (10)(4) \\
&= 34.
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.6.4. Sean $u = xy + xz + yz$, $x = st$, $y = e^{st}$, $z = t^2$. Hallar $\frac{\partial u}{\partial s}(0, 1)$ y $\frac{\partial u}{\partial t}(0, 1)$.

Solución:

En primer lugar, tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z) &= y + z, & \frac{\partial u}{\partial y}(x, y, z) &= x + z, & \frac{\partial u}{\partial z}(x, y, z) &= x + y, \\
\frac{\partial x}{\partial s}(s, t) &= t, & \frac{\partial x}{\partial t}(s, t) &= s, \\
\frac{\partial y}{\partial s}(s, t) &= t e^{st}, & \frac{\partial y}{\partial t}(s, t) &= s e^{st}, \\
\frac{\partial z}{\partial s}(s, t) &= 0, & \frac{\partial z}{\partial t}(s, t) &= 2t.
\end{aligned}$$

Además, por la regla de la cadena:

- $\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s},$
- $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t}.$

Luego,

$$\begin{aligned}\diamond \quad \frac{\partial u}{\partial s}(s, t) &= (y + z)(t) + (x + z)(t e^{st}) + (x + y)(0) \\ &= (e^{st} + t^2)(t) + (st + t^2)(t e^{st}) \\ &= (t^3 + t e^{st}) + (st^2 e^{st} + t^3 e^{st}) \\ &= t^3 + (t + st^2 + t^3) e^{st}. \\ \diamond \quad \frac{\partial u}{\partial t}(s, t) &= (y + z)(s) + (x + z)(s e^{st}) + (x + y)(2t) \\ &= (e^{st} + t^2)(s) + (st + t^2)(s e^{st}) + (st + e^{st})(2t) \\ &= (s e^{st} + st^2) + (s^2 t e^{st} + st^2 e^{st}) + (2st^2 + 2t e^{st}) \\ &= 3st^2 + (s + 2t + s^2 t + st^2) e^{st}.\end{aligned}$$

Finalmente, en el punto $(s, t) = (0, 1)$ obtenemos:

$$\begin{aligned}\diamond \quad \frac{\partial u}{\partial s}(0, 1) &= 1 + (1 + 0 + 1)e^0 = 1 + 2 = 3, \\ \diamond \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, 1) &= 0 + (0 + 2 + 0 + 0)e^0 = 0 + 2 = 2.\end{aligned}$$

Ejemplo 1.6.5. La temperatura en un punto (x, y) es $T(x, y)$ en grados centígrados ($^{\circ}\text{C}$). Un gusano se arrastra por el plano xy , de manera que $x = \sqrt{1+t}$, $y = 2 + \frac{1}{3}t$ (la posición medida en centímetros y el tiempo en segundos).

Si $T_x(2, 3) = 4$ y $T_y(2, 3) = 3$, ¿Qué tan rápido aumenta la temperatura en la senda del gusano después de 3 segundos?

1.7. Derivación Implícita

Si la ecuación $F(x, y) = 0$ define a y de manera implícita como una función diferenciable de x , es decir, si existe una función diferenciable f tal que

$$F(x, f(x)) = 0,$$

entonces derivando con respecto a x , por la regla de la cadena tenemos:

$$\begin{aligned} F_x(x, y) \frac{dx}{dx} + F_y(x, y) \frac{dy}{dx} &= 0 \\ \therefore \frac{dy}{dx} &= -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.7.1. Sea y definida implícitamente como función de x por la ecuación $x^2 y^3 + e^y = 0$. Calcule $\frac{dy}{dx}$ en términos de x y y .

◊ En cálculo diferencial:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dx} (x^2 y^3 + e^y) = 2x y^3 + 3x^2 y^2 \frac{dy}{dx} + e^y \frac{dy}{dx} \\ \Rightarrow (3x^2 y^2 + e^y) \frac{dy}{dx} + 2x y^3 &= 0 \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= -\frac{2x y^3}{3x^2 y^2 + e^y}. \end{aligned}$$

◊ En cálculo en varias variables: Sea $F(x, y) = x^2 y^3 + e^y$. Entonces

$$\begin{aligned} F_x(x, y) &= 2x y^3, \quad F_y(x, y) = 3x^2 y^2 + e^y. \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} = -\frac{2x y^3}{3x^2 y^2 + e^y}. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.7.2. Si la ecuación $F(x, y, z) = 0$ define a z implícitamente como una función de x y y , y $F_z \neq 0$, entonces

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}.$$

De otra manera, como $F(x, y, z) = 0$, se sigue por la regla de la cadena que:

$$\begin{aligned} \diamond \quad \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}. \\ \diamond \quad \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.7.3. Sea z definida implícitamente como función de x y y por la ecuación $xyz = \cos(x + y + z)$. Halle $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Sea $F(x, y, z) = xyz - \cos(x + y + z)$. De esta manera, z está definida implícitamente por la ecuación $F(x, y, z) = 0$. Observemos que

- $F_x(x, y, z) = yz + \sin(x + y + z)$,
- $F_y(x, y, z) = xz + \sin(x + y + z)$ y
- $F_z(x, y, z) = xy + \sin(x + y + z)$.

Por lo tanto,

$$\diamond \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} = -\frac{yz + \sin(x + y + z)}{xy + \sin(x + y + z)}.$$

$$\diamond \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} = -\frac{xz + \sin(x + y + z)}{xy + \sin(x + y + z)}.$$

Ejercicio: Suponga que la ecuación $F(x, y, z) = 0$ define implícitamente cada una de las variables x , y y z como función diferenciable de las otras dos ($z = f(x, y)$, $y = g(x, z)$, $x = h(y, z)$). Si F es diferenciable y ninguna de las derivadas parciales F_x , F_y , F_z se anula, pruebe que

$$\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} = -1.$$

1.8. Derivadas Direccionales y Vector Gradiente

Sea $z = f(x, y)$ una función de dos variables definida en un disco abierto de centro (x_0, y_0) y sea $\vec{u} = (a, b) = a\vec{i} + b\vec{j}$ un vector unitario; es decir, $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$.

Definición 1.8.1. La derivada direccional de f en (x_0, y_0) en la dirección de \vec{u} , que denotaremos por $D_{\vec{u}}f(x_0, y_0)$, es por definición

$$D_{\vec{u}}f(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h a, y_0 + h b) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Sea L la recta que pasa por (x_0, y_0) y es paralela a \vec{u} . Las ecuaciones paramétricas de L son

$$\begin{cases} x = x_0 + h a, \\ y = y_0 + h b \end{cases}$$

Si $g(h) = f(x_0 + h a, y_0 + h b)$, entonces

$$D_{\vec{u}}f(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = g'(0).$$

Sea C la curva intersección de la gráfica de f con el plano vertical que contiene a L . La pendiente de la recta tangente T a la curva C en el punto $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ es $D_{\vec{u}}f(x_0, y_0)$.

[Ver link](#)

Definición 1.8.2. Sea f una función de dos variables diferenciable en el punto (x_0, y_0) . El **gradiente** de f en (x_0, y_0) es

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)).$$

El siguiente teorema establece una manera eficiente de calcular derivadas direccionales, bajo ciertas condiciones de la función y el punto en cuestión.

Teorema 1.8.3. Sea f una función **diferenciable** en un disco de centro (x_0, y_0) y sea $\vec{u} = (a, b)$ un vector unitario. Entonces

$$D_{\vec{u}}f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{u}.$$

Demostración. Sea $g(h) = f(x_0 + h a, y_0 + h b)$. Hemos visto que $D_{\vec{u}}f(x_0, y_0) = g'(0)$.

Ahora, si $x(h) = x_0 + h a$ y $y(h) = y_0 + h b$, entonces $g(h) = f(x(h), y(h))$. Luego, por la regla de la cadena se tiene que

$$g'(h) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(h), y(h)) a + \frac{\partial f}{\partial y}(x(h), y(h)) b.$$

Cuando evaluamos lo anterior en $h = 0$ obtenemos:

$$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) a + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) b = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) \cdot (a, b) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{u}.$$

Lo anterior nos permite concluir que $D_{\vec{u}}f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{u}$. \square

Ejemplo 1.8.1. Si $f(x, y) = \sin(x + 2y)$ y \vec{u} es el vector unitario dado por el ángulo $\theta = \frac{3\pi}{4}$, hallar $D_{\vec{u}}f(4, -2)$.

Solución:

En primer lugar, el vector \vec{u} viene dado por

$$\vec{u} = \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right), \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1, 1).$$

Calculemos ahora el gradiente de f .

- $\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x + 2y)$,
- $\frac{\partial f}{\partial y} = 2\cos(x + 2y)$.

$$\nabla f(4, -2) = (\cos(x + 2y), 2\cos(x + 2y))|_{(4, -2)} = (\cos(0), 2\cos(0)) = (1, 2).$$

Por lo tanto,

$$D_{\vec{u}}f(4, -2) = \nabla f(4, -2) \cdot \vec{u} = (1, 2) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(-1, 1) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ejemplo 1.8.2. Encuentre la derivada direccional de $f(x, y) = xe^y + \cos(xy)$ en el punto $(2, 0)$ en la dirección de $\vec{v} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$.

Solución: Un vector unitario en la dirección de \vec{v} es obtenido al dividir \vec{v} por su norma:

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j}.$$

Es claro que las derivadas parciales de f son continuas en todas partes y en $(2, 0)$ toman el valor de:

$$f_x(x, y) = e^y - y\sin(xy) \quad \text{de ahí que} \quad f_x(2, 0) = 1$$

$$f_y(x, y) = e^y - x\sin(xy) \quad \text{de ahí que} \quad f_y(2, 0) = 2.$$

El gradiente de f en $(2, 0)$ es

$$\nabla f(2, 0) = (1, 2).$$

Del teorema anterior, tenemos que la derivada direccional de f en $(2, 0)$ en la dirección de \vec{v} es:

$$D_{\vec{u}}f(2, 0) = (1, 2) \cdot \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) = \frac{3}{5} - \frac{8}{5} = -1.$$

Evaluando el producto punto en la formula

$$D_{\vec{u}}f = \nabla f \cdot \vec{u} = \|\nabla f\| \|\vec{u}\| \cos(\theta) = \|\nabla f\| \cos(\theta)$$

donde θ es el ángulo entre los vectores \vec{u} y ∇f , revela las siguientes propiedades.

Proposición 1.8.4. *Propiedades de la Derivada Direccional* $D_{\vec{u}}f = \nabla f \cdot \vec{u} = \|\nabla f\| \cos(\theta)$

1. La función f crece más rápidamente cuando $\cos(\theta) = 1$ es decir, $\theta = 0$, esto es, cuando \vec{u} está en la dirección de ∇f . En cada punto P en su dominio, f crece más rápidamente en la dirección del vector gradiente ∇f . La derivada en esta dirección es

$$D_{\vec{u}}f = \|\nabla f\|.$$

2. Similarmente, f decrece más rápidamente en la dirección de $-\nabla f$. La derivada en esta dirección es $D_{\vec{u}}f = -\|\nabla f\|$.

3. Cualquier dirección \vec{u} ortogonal al vector gradiente $\nabla f \neq 0$ es una dirección de cambio nulo en f

Ejemplo 1.8.3. La temperatura T es una bola de metal es inversamente proporcional a la distancia desde el centro de la bola. La temperatura en $P (1, 2, 2)$ es $120^\circ C$ (asumiendo que el centro de la bola es el origen).

- i) Halla la razón de cambio de T en $P (1, 2, 2)$ en la dirección de P al punto $Q (2, 1, 3)$
- ii) Probar que para cualquier punto sobre la bola, el vector que señala hacia el origen proporciona la dirección en la que la temperatura aumenta más rápido.

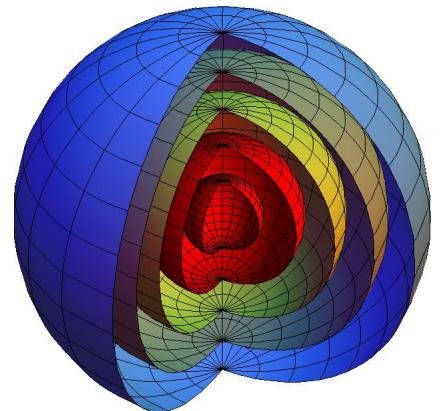


Figura 1.19: example caption

Solución: En primer lugar recordemos que la distancia de un punto (x, y, z) al origen es $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, de ahí que la expresión para la temperatura es

$$T(x, y, z) = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \text{donde } k \text{ es una constante}$$

Además, nos dicen que $T(1, 2, 2) = 120$, de donde $\frac{k}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = 120$, de hay que $k = 360$,

$$T(x, y, z) = \frac{360}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

i) Ahora, un vector unitario en la dirección de \overrightarrow{PQ} es $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{\|\overrightarrow{PQ}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)$. Ahora bien,

$$\begin{aligned} \nabla T &= \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right) \\ &= \left(\frac{-360x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{-360y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{-360z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}}T(1, 2, 2) &= \nabla T(1, 2, 2) \cdot \vec{u} \\ &= \left(\frac{-360}{27}, \frac{-360(2)}{27}, \frac{-360(2)}{27} \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \\ &= -\frac{40}{3\sqrt{3}}(1, 2, 2) \cdot (1, -1, 1) \\ &= -\frac{40\sqrt{3}}{9}. \end{aligned}$$

ii) La temperatura en el punto (x, y, z) aumenta más rápido en la dirección de

$$\nabla T(x, y, z) = \frac{-360}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x, y, z)$$

que apunta hacia el origen en dirección contraria al vector $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

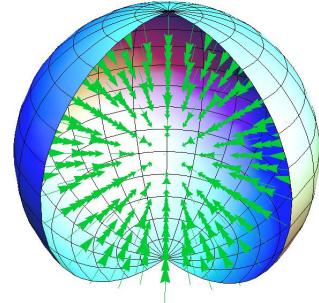


Figura 1.20: example caption

1.9. Planos Tangentes a Superficies de Nivel

Sea $F(x, y, z) = k$ la ecuación de la superficie de nivel x de la función diferenciable F de tres variables. Sea S_k dicha superficie y sea $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$

Sea $\vec{\gamma}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$, para $t \in [-a, a]$, las ecuaciones paramétricas de una curva C en S_k que pasa por P_0 cuando $t = 0$, es decir, $\langle x(0), y(0), z(0) \rangle = (x_0, y_0, z_0)$. El vector tangente a C en P_0 es el vector $\vec{\gamma}'(0) = \langle x'(0), y'(0), z'(0) \rangle$.

Como el punto $(x(t), y(t), z(t)) \in S_k$ para todo $t \in [-a, a]$, entonces $F(x(t), y(t), z(t)) = k$. Derivando la anterior ecuación con respecto a t , tenemos:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dt} = 0$$

y al evaluar en $t = 0$, obtenemos:

$$\begin{aligned} F_x(x_0, y_0, z_0)x'(0) + F_y(x_0, y_0, z_0)y'(0) + F_z(x_0, y_0, z_0)z'(0) &= 0 \\ (F_x(x_0, y_0, z_0), F_y(x_0, y_0, z_0), F_z(x_0, y_0, z_0)) \cdot (x'(0), y'(0), z'(0)) &= 0 \\ \nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot \vec{\gamma}'(0) &= 0 \end{aligned}$$

Lo cual nos dice que el vector gradiente ∇F es ortogonal al plano tangente a S_k en el punto P_0 . Sea $P(x, y, z)$ un punto en el plano tangente a S_k en el punto P_0 , entonces los vectores $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ y $\overrightarrow{P_0P}$ son vectores perpendiculares entre sí, de ahí que:

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0,$$

esto nos dice que **una ecuación para el plano tangente** a S_k en el punto P_0 es

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

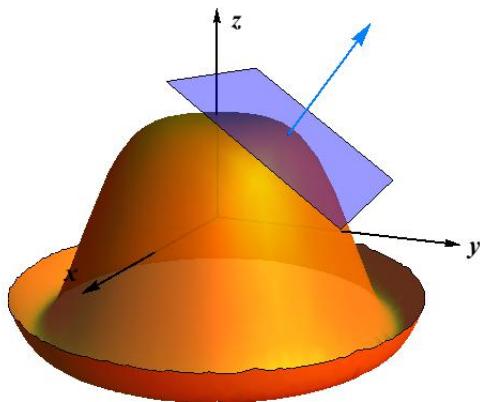


Figura 1.21: example caption

En el caso particular donde la superficie esta dada por la gráfica de una función, es decir, S es la gráfica de $z = f(x, y)$, podemos ver a S como la superficie de nivel dada por la ecuación $F(x, y, z) =$

$f(x, y) - z = 0$. Observemos que $F_x(x, y, z) = f_x(x, y)$, $F_y(x, y, z) = f_y(x, y)$, $F_z(x, y, z) = -1$ y por tanto, la ecuación del plano tangente a S en el punto (x_0, y_0, z_0) es

$$\begin{aligned} F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) &= 0 \\ f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) &= 0 \end{aligned}$$

de donde,

$$\begin{aligned} z &= z_0 + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ z &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \end{aligned}$$

Las ecuaciones paramétricas de la recta normal a S_k en (x_0, y_0, z_0) están dadas por

$$\begin{aligned} x &= x_0 + tF_x(x_0, y_0, z_0) \\ x &= y_0 + tF_y(x_0, y_0, z_0) \\ x &= z_0 + tF_z(x_0, y_0, z_0), \end{aligned}$$

para $t \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 1.9.1. Encontrar los puntos sobre el elipsoide $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$, donde el plano tangente es paralelo al plano $3x - y + 3z = 1$, y a continuación hallar las ecuaciones de los planos tangentes respectivos.

Solución: Recordemos que un vector tangente al plano $ax + by + cz + d = 0$ es $\vec{N} = (a, b, c)$. El plano tangente T es paralelo al plano $3x - y + 3z = 1$ si $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ es paralelo a $\vec{N} = (3, -1, 3)$, esto es,

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) = \lambda \vec{N} = \lambda(3, -1, 3).$$

Ahora bien, $F_x(x, y, z) = 2x$, $F_y(x, y, z) = 4y$, $F_z(x, y, z) = 6z$, así reemplazando en la ecuación anterior tenemos:

$$(2x_0, 4y_0, 6z_0) = \lambda(3, -1, 3) \text{ lo cual equivale a } x_0 = \frac{3}{2}\lambda, y_0 = -\frac{1}{4}\lambda, z_0 = \frac{1}{2}\lambda,$$

además, como $x_0^2 + 2y_0^2 + 3z_0^2 = 1$, debe ser

$$\left(\frac{3}{2}\lambda\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\lambda\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\lambda\right)^2 = 1$$

lo cual es $\frac{25}{8}\lambda^2 = 1$, es decir, $\lambda = \frac{2\sqrt{2}}{5}$ o $\lambda = -\frac{2\sqrt{2}}{5}$.

Los puntos de la superficie donde el plano tangente es paralelo al plano $3x - y + 3z = 1$ son:

Si $\lambda = \frac{2\sqrt{2}}{5}$, entonces el punto es

$$P_1 = \left(\frac{3\sqrt{2}}{5}, -\frac{\sqrt{2}}{10}, \frac{\sqrt{2}}{5} \right).$$

La ecuación del plano tangente al elipsoide $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ en el punto P_1 está dada por:

$$F_x \left(\frac{3\sqrt{2}}{5}, -\frac{\sqrt{2}}{10}, \frac{\sqrt{2}}{5} \right) \left(x - \frac{3\sqrt{2}}{5} \right) + F_y \left(\frac{3\sqrt{2}}{5}, -\frac{\sqrt{2}}{10}, \frac{\sqrt{2}}{5} \right) \left(y + \frac{\sqrt{2}}{10} \right) + F_z \left(\frac{3\sqrt{2}}{5}, -\frac{\sqrt{2}}{10}, \frac{\sqrt{2}}{5} \right) \left(z - \frac{\sqrt{2}}{5} \right) = 0$$

$$\frac{6\sqrt{2}}{5} \left(x - \frac{3\sqrt{2}}{5} \right) - \frac{4\sqrt{2}}{10} \left(y + \frac{\sqrt{2}}{10} \right) + \frac{6\sqrt{2}}{5} \left(z - \frac{\sqrt{2}}{5} \right) = 0$$

Si $\lambda = -\frac{2\sqrt{2}}{5}$, entonces el punto es

$$P_2 = \left(-\frac{3\sqrt{2}}{5}, \frac{\sqrt{2}}{10}, -\frac{\sqrt{2}}{5} \right).$$

La ecuación del plano tangente al elipsoide $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ en el punto P_2 está dada por:

$$F_x \left(-\frac{3\sqrt{2}}{5}, \frac{\sqrt{2}}{10}, -\frac{\sqrt{2}}{5} \right) \left(x + \frac{3\sqrt{2}}{5} \right) + F_y \left(-\frac{3\sqrt{2}}{5}, \frac{\sqrt{2}}{10}, -\frac{\sqrt{2}}{5} \right) \left(y - \frac{\sqrt{2}}{10} \right) + F_z \left(-\frac{3\sqrt{2}}{5}, \frac{\sqrt{2}}{10}, -\frac{\sqrt{2}}{5} \right) \left(z + \frac{\sqrt{2}}{5} \right) = 0$$

$$-\frac{6\sqrt{2}}{5} \left(x + \frac{3\sqrt{2}}{5} \right) + \frac{4\sqrt{2}}{10} \left(y - \frac{\sqrt{2}}{10} \right) - \frac{6\sqrt{2}}{5} \left(z + \frac{\sqrt{2}}{5} \right) = 0$$

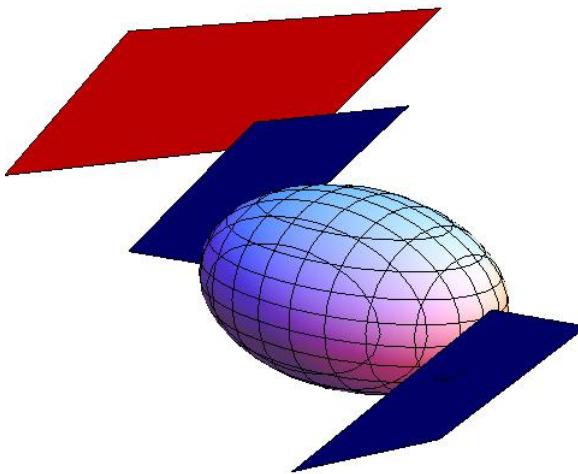


Figura 1.22

Ejemplo 1.9.2. Hallar el punto en la superficie $x^2 - 2x + y^2 + 2 - z = 0$ en el cual el plano tangente a esta superficie es paralelo al plano tangente a $x + y^2 + z = 5$ en $(2, 1, 2)$.

Hacer la solución del ejercicio

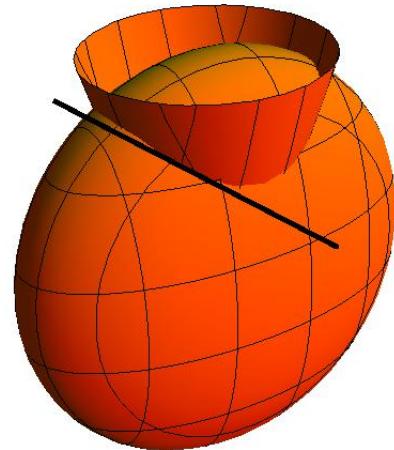


Figura 1.23

Hacer la solución del ejercicio

1.10. Derivadas de Orden Superior

Sea $z = f(x, y)$ una función de dos variables, las derivadas parciales de Segundo orden son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &:= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = f_{xx}; & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &:= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = f_{yy} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &:= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = f_{xy}; & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &:= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = f_{yx} \end{aligned}$$

Ejemplo 1.10.1. Si $f(x, y) = x^3 - 4xy^5 - 2y^3$. Entonces hallar $f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}, f_{yx}$, se convierte en un computo sencillo:

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 3x^2 - 4y^5 & f_y(x, y) &= -20xy^4 - 6y^2 \\ f_{xx}(x, y) &= 6x & f_{yy}(x, y) &= -80xy^3 - 12y \\ f_{xy}(x, y) &= -20y^4 & f_{yx}(x, y) &= -20y^4. \end{aligned}$$

En el ejemplo anterior vemos que $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$, el cual es un fenómeno que ocurre para una clase particular de funciones, el cual se enuncia en el siguiente teorema.

Definición 1.10.1. Una función f definida en un disco D de \mathbb{R}^2 se llama de clase C^2 , si f tiene derivadas parciales de primer y segundo orden en D , y todas ella son continuas en D .

Teorema 1.10.2. Teorema de Clairaut

Si f está definida en un disco D que contiene al punto (a, b) y las funciones f_{xy} y f_{yx} son continuas en D , entonces

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b).$$

En particular, si f es de clase \mathcal{C}^2 se cumple que para todo $(x_0, y_0) \in D$ $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$.

Ejemplo 1.10.2. Pruebe que $u(x, y) = e^x \sin(y)$ es solución de la ecuación de Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$ (Cambiar el ejemplo o añadir algo).

1.11. Regla de la Cadena en Derivadas Parciales de Orden Superior

Ejemplo 1.11.1. Sean $z = f(x, y)$, donde $x = x(s, t)$ y $y = y(s, t)$, donde todas las funciones son de clase \mathcal{C}^2 . Hallar $\frac{\partial^2 z}{\partial t \partial s}$, usando la regla de la cadena.

Solución: Recordemos de la sección (ref) que

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

Ahora, derivamos la anterior ecuación con respecto a t , teniendo en cuenta que todas las derivadas parciales en ella dependen de t :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial s} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y}{\partial s} \right) \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \frac{\partial y}{\partial s} \right) \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial s} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \frac{\partial y}{\partial t} \right) \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial s} \end{aligned}$$

lo cual es la notación de subíndices es: $z_{st} = (f_{xx}x_t + f_{xy}y_t)x_s + f_{xx}x_{st} + (f_{yx}x_t + f_{yy}y_t)y_s + f_yy_{st}$ y dado que $f_{xy} = f_{yx}$, se sigue que, $z_{st} = f_{xx}x_sx_t + f_{yy}y_sy_t + f_{xy}(x_sy_t + y_sx_t) + f_{xx}x_{st} + f_yy_{st}$.

Ejemplo 1.11.2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, una función de clase \mathcal{C}^2 de las variables (x, y) . Definamos

$$g(r, \theta) = f(r \cos^2 \theta, r \sin \theta).$$

Calcule $g_{rr}(1, \frac{\pi}{4})$ si se tiene la siguiente información:

$$(I) \quad \nabla f(1, \frac{\pi}{4}) = (2, -1)$$

$$(II) \quad f_{xx}(1, \frac{\pi}{4}) = f_{yy}(1, \frac{\pi}{4}) = f_{xy}(1, \frac{\pi}{4}) = -2$$

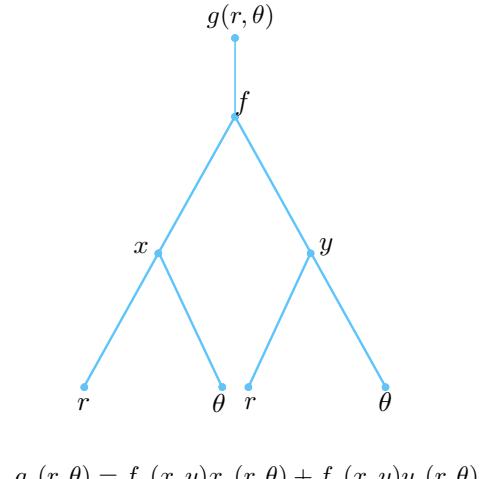
$$(III) \quad f_{xx}(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = f_{yy}(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = f_{xy}(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = 16$$

Solución: Sean $x = r \cos^2 \theta$, $y = r \sin \theta$, de esta forma podemos hallar las derivadas parciales usando la regla de la cadena, como lo sugiere la gráfica(debe ir gráfica), de ahí que

$$g_r(r, \theta) = f_x(x(r, \theta), y(r, \theta))x_r(r, \theta) + f_y(x(r, \theta), y(r, \theta))y_r(r, \theta).$$

Ahora para hallar g_{rr} derivamos la anterior ecuación con respecto a r , teniendo en cuenta que todas las funciones involucradas, son funciones que dependen de r, t :

$$\begin{aligned} g_{rr} &= (f_x x_r + f_y y_r)_r \\ &= (f_x x_r)_r + (f_y y_r)_r \\ &= (f_x)_r x_r + f_x(x_r)_r + (f_y)_r y_r + f_y(y_r)_r \\ &= (f_{xx} x_r + f_{xy} y_r)x_r + f_x x_{rr} + (f_{yx} x_r + f_{yy} y_r)y_r + f_y y_{rr} \end{aligned}$$



$$g_r(r, \theta) = f_x(x, y)x_r(r, \theta) + f_y(x, y)y_r(r, \theta)$$

Figura 1.24

Dado que $(r, \theta) = (1, \frac{\pi}{4})$, entonces, $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, de ahí que solo necesitamos la información dada por (III), además debemos calcular las derivadas parciales de x y y en el punto $(1, \frac{\pi}{4})$

$$\begin{aligned} x_r &= \cos^2 \theta \Rightarrow x_r(1, \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x_{rr} &= 0 \Rightarrow x_{rr}(1, \frac{\pi}{4}) = 0 \\ y_r &= \sin \theta \Rightarrow y_r(1, \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y_{rr} &= 0 \Rightarrow y_{rr}(1, \frac{\pi}{4}) = 0 \end{aligned}$$

además, sabemos por (III) que $f_{xx}(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = f_{yy}(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = f_{xy}(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = 16$, y como $f \in \mathcal{C}^2$, tenemos

que $f_{yx}(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = f_{xy}(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = 16$. Por tanto,

$$\begin{aligned} g_{rr}(1, \frac{\pi}{4}) &= \left((16) \frac{\sqrt{2}}{2} + (16) \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \frac{\sqrt{2}}{2} + f_x\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(0) + \left((16) \frac{\sqrt{2}}{2} + (16) \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \frac{\sqrt{2}}{2} + f_y\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(0) \\ &= 32 \end{aligned}$$

Note que no es necesario saber los valores de $f_x(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ y $f_y(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ ya que $x_{rr}(1, \frac{\pi}{4}) = y_{rr}(1, \frac{\pi}{4}) = 0$.

Tal vez es mejor hacer otro ejemplo que no tenga la particularidad del ejemplo anterior

1.12. Valores Máximos y Mínimos de una función de Varias Variables

Definición 1.12.1. Valores Extremos

Sea función f de dos variables x, y , definida en un región R la cual contiene el punto (a, b) .

- Si $f(a, b) \geq f(x, y)$ para todo (x, y) en un disco con centro en (a, b) , entonces diremos que $f(a, b)$ es un **máximo local**.
- Si $f(a, b) \leq f(x, y)$ para todo (x, y) en un disco con centro en (a, b) , entonces diremos que $f(a, b)$ es un **mínimo local**.

Si las desigualdades de las definición anterior se cumplen para todo los puntos (x, y) en el dominio de f , entonces f tiene un **máximo absoluto** o un **mínimo absoluto** en (a, b) .

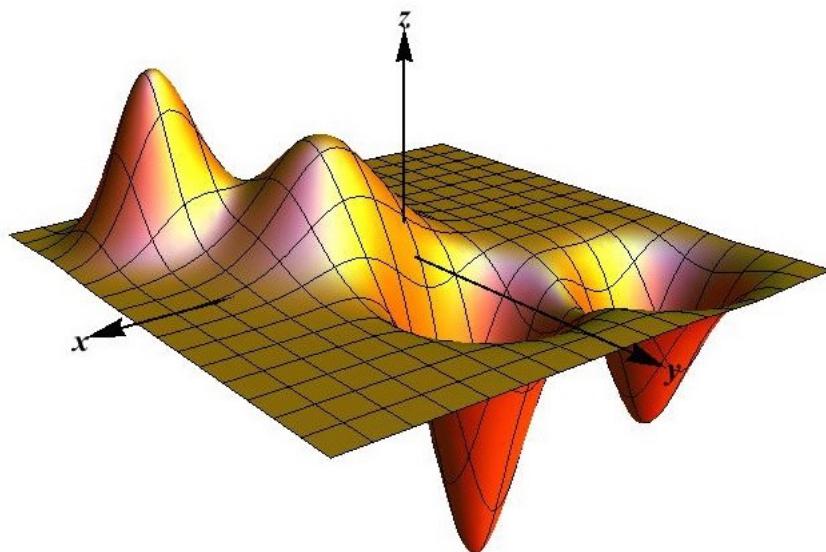


Figura 1.25: example caption

Teorema 1.12.2. Si f tiene un máximo o un mínimo local en (a, b) y allí existen las derivadas parciales de primer orden, entonces, $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$.

*Demuestra*ción. Sea $g(x) = f(x, b)$, entonces $f_x(a, b) = g'(a)$. Sin perdida de generaliza supongamos que f tiene un máximo local en (a, b) (en caso de un mínimo local la prueba es análoga). Entonces g también tiene un máximo local en a ya que $g(a) = f(a, b) \geq f(x, b) = g(x)$ y dado que $g'(a)$ existe, debe ser $g'(a) = 0$, es decir, $f_x(a, b) = 0$.

Ahora, sea $h(y) = f(a, y)$, entonces $f_y(a, b) = h'(b)$ y como f tiene un máximo local en (a, b) entonces h tiene un máximo local en b y dado que $h'(b)$ existe, debe ser $h'(b) = 0$, es decir,

$$f_y(a, b) = 0. \quad \square$$

Una interpretación geométrica de este hecho, es que en un valor extremo el plano tangente a f (de existir) deber ser horizontal, ya que, la ecuación del plano tangente a f en el punto $(a, b, f(a, b))$ es

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) = f(a, b).$$

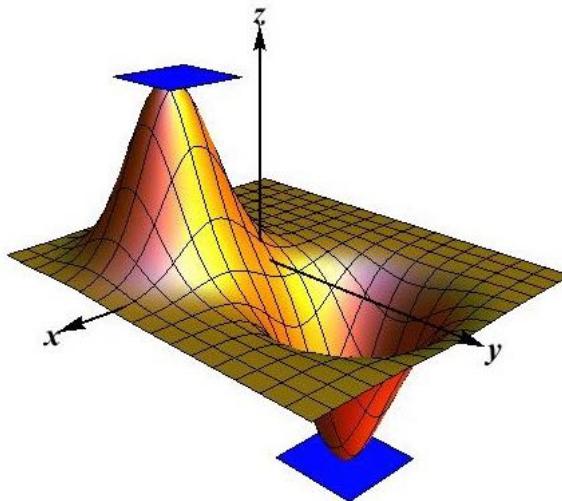


Figura 1.26: example caption

Definición 1.12.3. Un punto (a, b) en el dominio de f se llama **Punto Crítico** si $f_x(a, b) = 0 = f_y(a, b)$, esto es, un punto crítico es un punto en donde las derivadas parciales de primer orden se anulan.

De acuerdo con el teorema anterior, en los máximos y mínimos locales de f donde existen las derivadas parciales de primer orden, tenemos puntos críticos de f . Puede ocurrir que una función f presente un punto crítico que no es ni máximo local ni mínimo local, a tales punto los llamaremos **Puntos de Silla**

Ejemplo 1.12.1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x, y) = y^2 - x^2$ para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Hallemos los puntos críticos de f ,

$$\left. \begin{array}{l} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} -2x = 0 \\ 2y = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right\}$$

es decir, el único punto crítico de f es $(0, 0)$, el cual no es ni máximo, ni mínimo local, ya que, para $x \neq 0$ y $y \neq 0$, $-x^2 < 0 < y^2$, esto es, $f(x, 0) < f(0, 0) < f(0, y)$.

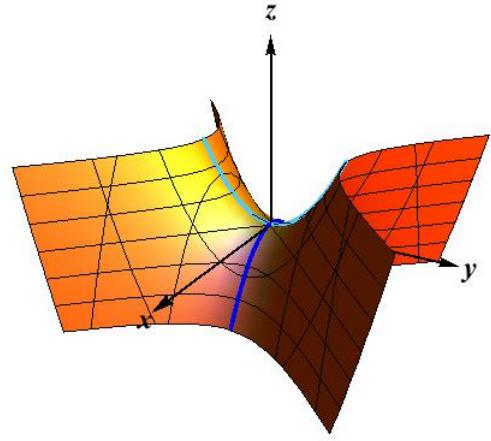


Figura 1.27: example caption

Ejemplo 1.12.2. Sea $g(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$, entonces los puntos críticos de g son:

$$\left. \begin{array}{l} g_x(x, y) = 0 \\ g_y(x, y) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 2x - 2 = 0 \\ 2y - 6 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 3 \end{array} \right\}$$

así, tenemos un único punto crítico de g , $(1, 3)$. Al completar el cuadrado en la expresión para g , podemos escribir,

$$g(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 3)^2 + 4 \geq 4 = g(1, 3),$$

lo cual nos dice que $g(1, 3)$ es un mínimo absoluto, lo cual es claro de la gráfica.

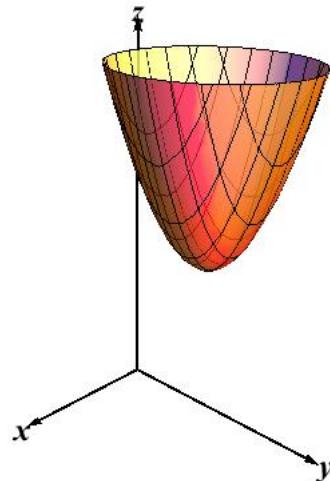


Figura 1.28: example caption

1.12.1. Criterio de las Segundas Derivadas para clasificar puntos Críticos

Si f es una función de clase \mathcal{C}^2 en un disoc que centro (a, b) y f tiene un punto crítico en (a, b) , esto es, $f_x(a, b) = 0 = f_y(a, b)$. Definimos

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{xy}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{vmatrix} = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - (f_{xy}(a, b))^2$$

Criterio:

- i. Si $\mathcal{D} > 0$ y $f_{xx}(a, b) > 0$, entonces, f tiene un mínimo local en (a, b) .
- ii. Si $\mathcal{D} > 0$ y $f_{xx}(a, b) < 0$, entonces, f tiene un máximo local en (a, b) .
- iii. Si $\mathcal{D} < 0$, entonces, f tiene un punto silla en (a, b) .

Importante: Si $\mathcal{D} = 0$, entonces el criterio no dice nada acerca del comportamiento de f en (a, b) , esto es, si $\mathcal{D} = 0$, entonces f puede tener un máximo local, un mínimo local o bien un punto silla.

Ejemplo 1.12.3. Hallemos los puntos críticos de $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$ y a continuación los clasificaremos.

$$\left. \begin{array}{l} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 2xy = 0 \\ 2y + x^2 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} (1) \quad x(1+y) = 0 \\ (2) \quad 2y + x^2 = 0 \end{array} \right\}$$

De (1) tenemos $x = 0$ o $y = -1$. Si $x = 0$, entonces de (2), $y = 0$, y si $y = -1$, entonces de (2) $x = \sqrt{2}$ o $x = -\sqrt{2}$, de donde los puntos críticos de f son: $(0, 0), (-\sqrt{2}, -1), (\sqrt{2}, -1)$. Para aplicar el criterio de las segundas derivadas debemos calcular las derivadas parciales de segundo orden, estas son: $f_{xx}(x, y) = 2 + 2y$, $f_{yy}(x, y) = 2$, $f_{xy}(x, y) = 2x$

■ En $(0, 0)$,

$\mathcal{D} = f_{xx}(0, 0)f_{yy}(0, 0) - (f_{xy}(0, 0))^2 = (2)(2) - (0)^2 = 4 > 0$ y como $f_{xx}(0, 0) = 2 > 0$, el criterio nos dice que f en $(0, 0)$ tiene un mínimo local.

■ En $(-\sqrt{2}, -1)$,

$\mathcal{D} = f_{xx}(-\sqrt{2}, -1)f_{yy}(-\sqrt{2}, -1) - (f_{xy}(-\sqrt{2}, -1))^2 = (0)(2) - (-2\sqrt{2})^2 = -8 < 0$, el criterio nos dice que f en $(-\sqrt{2}, -1)$ tiene un punto silla.

■ En $(\sqrt{2}, -1)$,

$\mathcal{D} = f_{xx}(\sqrt{2}, -1)f_{yy}(\sqrt{2}, -1) - (f_{xy}(\sqrt{2}, -1))^2 = (0)(2) - (2\sqrt{2})^2 = -8 < 0$, el criterio nos dice que f en $(\sqrt{2}, -1)$ tiene un punto silla.

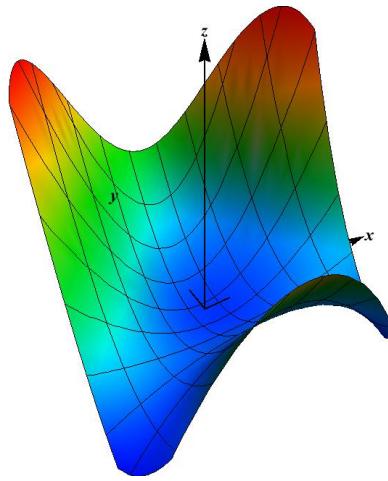


Figura 1.29: example caption

Ejemplo 1.12.4. Hallar los puntos críticos de $f(x, y) = x \sin(y)$ y clasificarlos, para ello, tenemos:

$$\left. \begin{array}{l} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \sin(y) = 0 \\ x \cos(y) = 0 \end{array} \right\}$$

de la primera ecuación tenemos que $\sin(y) = 0$, esto es, $y = n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$ y sustituyendo en la segunda ecuación, $x(-1)^n = 0$, de donde $x = 0$. De lo anterior, f tiene infinitos punto críticos de la forma $(0, n\pi)$ con $n \in \mathbb{Z}$. Ahora calculemos las segundas derivadas parciales,

$$f_{xx}(x, y) = 0, \quad f_{yy}(x, y) = -x \sin(y), \quad f_{xy}(x, y) = \cos(y)$$

de ahí que, si evaluamos en los punto $(0, n\pi)$, tenemos

$$\mathcal{D} = f_{xx}(0, n\pi)f_{yy}(0, n\pi) - (f_{xy}(0, n\pi))^2 = -(\cos(n\pi))^2 = -1 < 0$$

lo cual nos dice que todos los puntos de f , son puntos de silla.

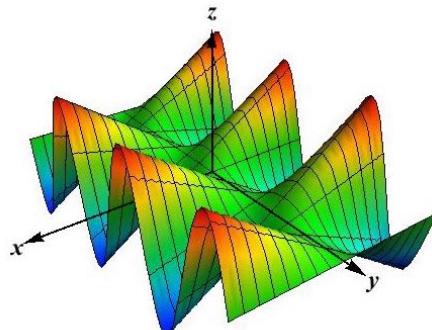


Figura 1.30: example caption

Ejemplo 1.12.5. Encuentre el punto del plano T de ecuación $2x - y + z = 1$ más cercano al punto $(-4, 1, 3)$. La distancia de cualquier punto del plano T al punto $(-4, 1, 3)$ es

$$d((x, y, 1 - 2x + y), (-4, 1, 3)) = \sqrt{(x + 4)^2 + (y - 1)^2 + (1 - 2x + y - 3)^2}$$

así lo que debemos hacer es hallar el mínimo absoluto de la función d . **Optimizar la función distancia es equivalente a optimizar la función distancia al cuadrado**, así que hallaremos el mínimo absoluto de $f(x, y) = d^2$, esto es,

$$f(x, y) = (x + 4)^2 + (y - 1)^2 + (y - 2x - 2)^2.$$

Empecemos hallando los puntos críticos de f .

$$\left. \begin{array}{l} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 2(x + 4) - 4(y - 2x - 2) = 0 \\ 2(y - 1) + 2(y - 2x - 2) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 5x - 2y = -8 \\ -2x + 2y = 3 \end{array} \right\}$$

resolviendo el sistemas de ecuaciones lineales, tenemos que, la única solución es $(x, y) = \left(-\frac{5}{3}, -\frac{1}{6}\right)$, el cual es el único punto crítico de f . Usemos el criterio de las segundas derivadas para determinar que clase de punto crítico es $\left(-\frac{5}{3}, -\frac{1}{6}\right)$.

$$f_{xx}(x, y) = 10, \quad f_{yy}(x, y) = 4, \quad f_{xy}(x, y) = -4$$

de donde

$$\mathcal{D} = f_{xx} \left(-\frac{5}{3}, -\frac{1}{6}\right) f_{yy} \left(-\frac{5}{3}, -\frac{1}{6}\right) - \left(f_{xy} \left(-\frac{5}{3}, -\frac{1}{6}\right)\right)^2 = 24 > 0$$

como además, $f_{xx} \left(-\frac{5}{3}, -\frac{1}{6}\right) = 10 > 0$, en $\left(-\frac{5}{3}, -\frac{1}{6}\right)$ f tiene un mínimo local y es absoluto por que cada vez que nos alejamos más del origen f crece, es decir, $\lim_{\|(x, y)\| \rightarrow \infty} f(x, y) = \infty$. El punto del plano T más cercano a $(-4, 1, 3)$ es

$$P = \left(-\frac{5}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{25}{6}\right).$$

Ejemplo 1.12.6. Determine el volumen de la mayor caja rectangular cuyas aristas sean paralelas a los ejes y cuyos vértice caen sobre el elipsoide $9x^2 + 36y^2 + 4z^2 = 36$ (1). El volumen de la caja inscrita en el elipsoide con vértice (x, y, z) en el primer octante, es

$$V(x, y, z) = 8xyz.$$

De (1) podemos despejar $z = \frac{\sqrt{36 - 9x^2 - 36y^2}}{2}$, de ahí que debemos maximizar $f(x, y) = 8xy \frac{\sqrt{36 - 9x^2 - 36y^2}}{2}$, esto es,

$$f(x, y) = 4xy\sqrt{36 - 9x^2 - 36y^2},$$

con $(x, y) \in D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0, 9x^2 + 36y^2 \leq 36\}$, como antes, para evitar derivar radicales, usamos el hecho que f es máximo cuando f^2 es máximo.

Maximicemos $g(x, y) = 16x^2y^2(36 - 9x^2 - 36y^2)$ con $(x, y) \in D$.

$$\left. \begin{array}{l} g_x(x, y) = 0 \\ g_y(x, y) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 16y^2 [(36 - 9x^2 - 36y^2)(2x) + x^2(-18x)] = 0 \\ 16x^2 [(36 - 9x^2 - 36y^2)(2y) + y^2(-72x)] = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 576xy^2 [2 - x^2 - 2y^2] = 0 \\ 288x^2y [4 - x^2 - 8y^2] = 0 \end{array} \right\}$$

Dado que $x = 0$ o $y = 0$ implicarían que la caja tiene volumen 0, podemos suponer que $x > 0$ y $y > 0$, de ahí que

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad 2 - x^2 - 2y^2 = 0 \\ (2) \quad 4 - x^2 - 8y^2 = 0 \end{array} \right\}$$

De (1) tenemos que $y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}$ y reemplazando en (2), $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, y por tanto $y = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $z = \sqrt{3}$. El mayor volumen de una caja inscripta en el elipsoide es $f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 16\frac{\sqrt{3}}{3}$ unid³.

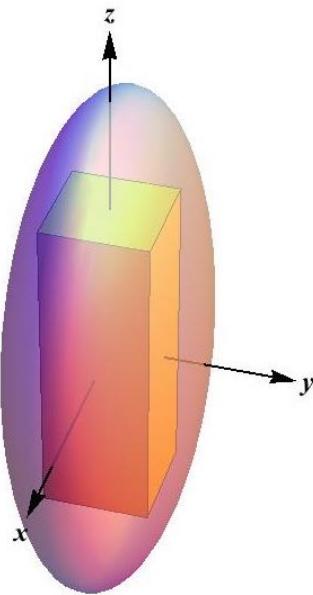


Figura 1.31: example caption

1.12.2. Valores Máximos y Mínimos Absolutos

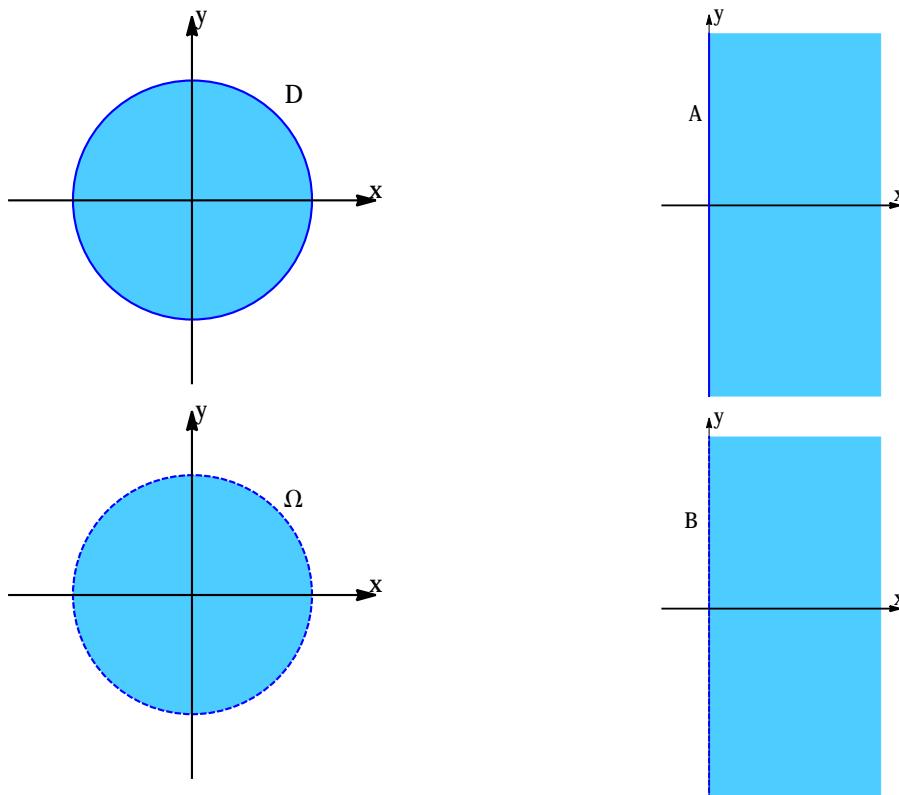
Un subconjunto E del plano \mathbb{R}^2 se denomina **cerrado** si contiene todos sus **puntos frontera**, los cuales son aquellos puntos (a, b) de D que satisfacen que cualquier disco centrado en (a, b) posee puntos

de D y puntos fuera de D diferentes a (a, b) . **Hacer dibujos que representen los conjuntos cerrados y los puntos frontera**

Ejemplos

$$D = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq 1\} \quad A = \{(x, y) / x \geq 0\}$$

$$\Omega = \{(x, y) / x^2 + y^2 < 1\} \quad B = \{(x, y) / x > 0\}$$



Un subconjunto E del plano \mathbb{R}^2 se denomina **acotado**, si se puede encontrar un disco D tal que $E \subseteq D$.

Teorema 1.12.4 (Teorema del Valor Extremo). *Sea D un subconjunto no vacío de \mathbb{R}^2 , cerrado y acotado, y sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ una función continua. Entonces f posee mínimo absoluto y máximo absoluto en D . Es decir, existen $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D$, tal que $f(x_1, y_1) \leq f(x, y) \leq f(x_2, y_2)$.*

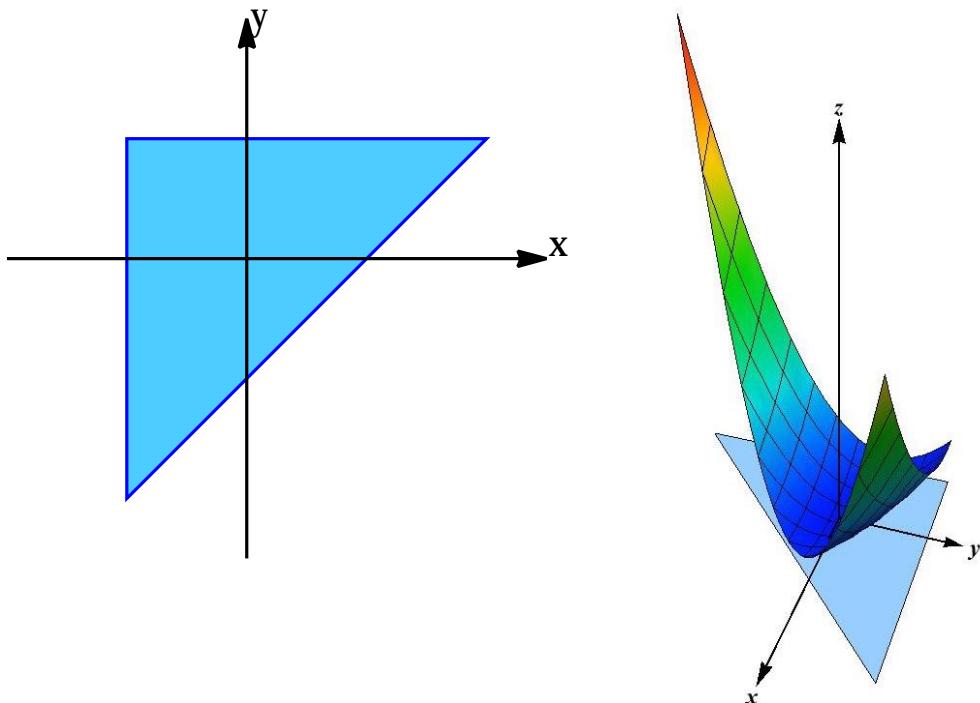
El teorema anterior nos asegura la existencia del máximo y del mínimo absoluto de una función continua definida sobre un conjunto cerrado y acotado, pero no nos da un procedimiento a seguir para hallar tales valores extremos.

MÉTODO PARA HALLAR LOS VALORES ABSOLUTOS MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Para calcular los valores absolutos máximos y mínimos de una función continua f en un conjunto cerrado y acotado D :

1. Se hallan los punto críticos de f en el interior de D y se evalúa f en dichos puntos.
2. Se determinan el valor máximo y mínimo de f en la frontera de D , denotada por ∂D .
3. Se comparan los valores hallados en los pasos 1. y 2., el mayor hallado es el máximo absoluto de f en D y el menor valor hallado es el mínimo absoluto de f en D .

Ejemplo 1.12.7. Determine los valores máximos y mínimo absolutos de $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2$ en el triángulo cerrado D con vértices $(-1, 1)$, $(2, 1)$, $(-1, -2)$.



Siguiendo el método anterior, tenemos:

1. Puntos críticos de f en el interior de D :

$$\left. \begin{array}{l} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 2y = 0 \\ 2x + 6y = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0) \in \text{int}D$$

Evaluamos a f en el único punto crítico $(0, 0)$, $f(0, 0) = 0$.

2. Valor máximo y mínimo de f en la frontera de D , para ello notamos que $\partial D = L_1 \cup L_2 \cup L_3$.

- $L_1 = \{(x, y) / y = 1, -1 \leq x \leq 2\}$. Sea $h(x) = f(x, 1) = x^2 + 2x + 3$ para $x \in [-1, 2]$. Los punto críticos de h en $[-1, 2]$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

y los puntos extremos del intervalo son $x = -1$ y $x = 2$, evaluando h en tales puntos tenemos $h(-1) = 2, h(2) = 11$, de ahí que, h tiene su mínimo en $x = -1$ y su máximo en $x = 2$ y así, el mínimo de f en L_1 es $f(-1, 1) = 2$ y su máximo es $f(2, 1) = 11$.

- $L_2 = \{(x, y) / x = -1, -2 \leq y \leq 1\}$. Sea $g(y) = f(-1, y) = 3y^2 - 2y - 1$ para $y \in [-2, 1]$, g tiene su mínimo en $y = 1/3$, y su máximo en $y = 2$, de donde $f(-1, 1/3) = \frac{2}{3}, f(-1, -2) = 17$
- L_3 es la recta $y = x - 1$ con $x \in [-1, 2]$. Sea $\varphi(x) = f(x, x - 1) = 6x^2 - 8x + 3$, con $x \in [-1, 2]$. φ tiene su máximo en $x = -1$ y su mínimo en $x = \frac{2}{3}$, así $f(-1, -2) = 17$ y $f(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$.

El valor máximo de f en la frontera de D es 17 y se toma en $(-1, -2)$. El valor mínimo de f en la frontera de D es $\frac{1}{3}$ y se toma en $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

3. El máximo absoluto de f en D es 17 y se toma en $(-1, -2)$. El mínimo absoluto de f en D es 0 y se toma en $(0, 0)$.

1.13. Multiplicadores de Lagrange

Problema

Maximizar o minimizar $f(x, y, z)$ sujeta a la restricción $g(x, y, z) = k$. Debemos maximizar o minimizar $f(x, y, z)$ en la superficie de nivel $S = \{(x, y, z) / g(x, y, z) = k\}$. Supongamos que f restringida a S toma su máximo o su mínimo en (x_0, y_0, z_0) .

Sea $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ una curva C contenida en S que pasa por (x_0, y_0, z_0) cuando $t = t_0$, esto es, $(x(t_0), y(t_0), z(t_0)) = (x_0, y_0, z_0)$. Sea $h(t) = f(x(t), y(t), z(t))$. Observemos que h en t_0 tiene un máximo o un mínimo, ósea $h'(t_0) = 0$. Por la regla de la cadena

$$h'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t), z(t)) \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t), z(t)) \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}(x(t), y(t), z(t)) \frac{dz}{dt}.$$

Cuando $t = t_0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t), z(t)) \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t), z(t)) \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}(x(t), y(t), z(t)) \frac{dz}{dt} &= 0 \\ \nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \gamma'(t_0) &= 0 \end{aligned}$$

donde $\gamma'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$, el cual es un vector tangente a la curva C en (x_0, y_0, z_0) . Lo anterior nos dice que $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ es perpendicular a cualquier vector tangente a S en (x_0, y_0, z_0) , así, $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ es normal a S en (x_0, y_0, z_0) . Por lo tanto existe $\lambda \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0).$$

Tal λ es llamado multiplicador de Lagrange.

Para encontrar los valores máximos y mínimos de $f(x, y, z)$ sujeta a la restricción $g(x, y, z) = k$ procedemos así:

i) Determinamos los valores x, y, z, λ tales que

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \\ g(x, y, z) = k \end{cases}$$

ii) Evaluamos f en todos los puntos (x, y, z) resultantes de la parte i). El mayor de estos valores es el máximo absoluto de f en S , y el menor de estos valores es el mínimo absoluto de f en S .

Ejemplo 1.13.1. Una caja rectangular sin tapa debe tener un área superficial de $16m^2$. Hallar las dimensiones que maximizan su volumen.

Sean x, y, z las dimensiones de la caja sin tapa $xy + 2xz + 2yz = 16$ restricción.

Debemos maximizar el volumen $f(x, y, z) = xyz$, sujeta a la restricción $xy + 2xz + 2yz = 16$.

Por multiplicadores de Lagrange, consideremos el sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \\ g(x, y, z) = k \end{cases}$$

esto es

$$\left. \begin{array}{l} f_x(x, y, z) = \lambda g_x(x, y, z) \\ f_y(x, y, z) = \lambda g_y(x, y, z) \\ f_z(x, y, z) = \lambda g_z(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 16 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} yz = \lambda(y + 2z) \quad (1) \\ xz = \lambda(x + 2z) \quad (2) \\ xy = \lambda(2x + 2y) \quad (3) \\ xy + 2xz + 2yz = 16 \quad (4) \end{array} \right\}$$

Dado que estamos tratando con las dimensiones de una caja, podemos suponer que $x > 0, y > 0, z > 0$ y así podemos despejar (1) y (2) a λ , para obtener, $\frac{yz}{y+2z} = \frac{xz}{x+2z}$, esto es, $xy + 2yz = xy + 2xz$, de donde $x = y$.

Despejando λ de (1) y (3) tenemos, $\frac{yz}{y+2z} = \frac{xy}{2x+2y}$, de donde $2xz + 2yz = x^2 + 2xz$, y dado que $x = y, z = \frac{1}{2}x$. Reemplazando $y = x, z = \frac{1}{2}x$ en (4) se obtiene:

$$x^2 + x^2 + x^2 = 16 \Rightarrow x^2 = \frac{16}{3}$$

como $x > 0$, debe ser $x = \frac{4}{\sqrt{3}}$ y así, $y = \frac{4}{\sqrt{3}}, z = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Las dimensiones de la caja sin tapa de volumen máximo con área superficial de $16m^2$ están dadas por $x = \frac{4}{\sqrt{3}}m, y = \frac{4}{\sqrt{3}}m, z = \frac{2}{\sqrt{3}}m$ y su volumen es $V = 32\frac{\sqrt{3}}{27}m^3$.

Problemas con Dos Restricciones

Se quiere maximizar o minimizar $f(x, y, z)$ sujeta a las restricciones $g(x, y, z) = k$ y $h(x, y, z) = c$.

Se deben determinar los valores x, y, z, λ, μ tales que

$$\left. \begin{array}{l} \nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h \\ g(x, y, z) = k \\ h(x, y, z) = c \end{array} \right\}$$

Ejemplo 1.13.2. El plano $x + y + z = 1$ corta el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ en una elipse (ver fig). Encontrar los puntos en la elipse que están más cercanos y más alejados del origen.

Deseamos hallar los valores extremos de

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad (\text{el cuadrado de la distancia})$$

sujeta a las restricciones

$$\begin{aligned} g(x, y, z) &= x^2 + y^2 = 1 \\ h(x, y, z) &= x + y + z = 1. \end{aligned}$$

Usando el método de multiplicadores de Lagrange, tenemos,

$$\left. \begin{array}{lcl} f_x(x, y, z) &=& \lambda g_x(x, y, z) + \mu h_x(x, y, z) \\ f_y(x, y, z) &=& \lambda g_y(x, y, z) + \mu h_y(x, y, z) \\ f_z(x, y, z) &=& \lambda g_z(x, y, z) + \mu h_z(x, y, z) \\ g(x, y, z) &=& 1 \\ h(x, y, z) &=& 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{lcl} 2x &=& \lambda(2x) + \mu \\ 2y &=& \lambda(2y) + \mu \\ 2z &=& \mu \\ x^2 + y^2 &=& 1 \\ x + y + z &=& 1 \end{array} \right\}$$

De las dos primeras ecuaciones tenemos que $(1 - \lambda)x = z = (1 - \lambda)y$. Ahora bien, si $\lambda = 1$, entonces $z = 0$ y por tanto tenemos

$$\left. \begin{array}{lcl} x^2 + y^2 &=& 1 \\ x + y &=& 1 \end{array} \right\}$$

el cual tiene soluciones $(1, 0)$ y $(0, 1)$, por tanto si $\lambda = 1$, tenemos los puntos de la elipse $P_1 = (1, 0, 0)$ y $P_2 = (0, 1, 0)$.

Ahora si $\lambda \neq 1$, entonces $x = y = z/(1 - \lambda)$ y por tanto $x^2 + y^2 = 1$ de donde $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. Además, $x + y + z = 1$, de donde $z = 1 \mp \sqrt{2}$, los correspondientes puntos de la elipse son

$$P_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \sqrt{2} \right) \text{ y } P_4 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \sqrt{2} \right)$$

Punto	$f(x, y, z)$
$(1, 0, 0)$	1
$(0, 1, 0)$	1
$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \sqrt{2} \right)$	$4 - 2\sqrt{2}$
$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \sqrt{2} \right)$	$4 + 2\sqrt{2}$

De la tabla anterior concluimos que los puntos más cercanos al origen en la elipse son $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y el punto más lejano es $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \sqrt{2} \right)$.

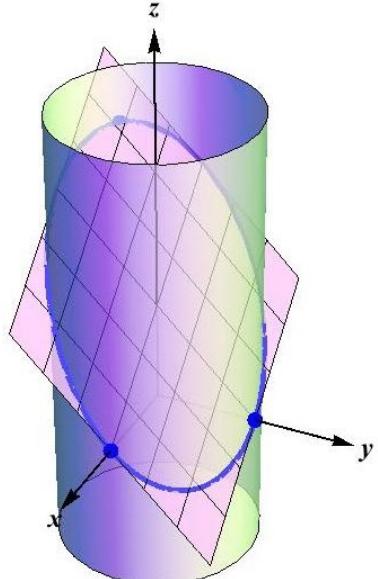


Figura 1.32: example caption

Ejemplo 1.13.3. Encuentre los valores máximos y mínimos absolutos de la función $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ en la región cerrada y acotada dada por $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 5\}$. Siguiendo los pasos descritos anteriormente, primero debemos hallar los puntos críticos de f en el interior de D , para luego hallar los valores extremos en la frontera de D y finalmente comparar los valores.

1. Puntos críticos de f en el interior de D .

Para esto derivamos parcialmente e igualamos a cero, así

$$\left. \begin{array}{l} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 2x = 0 \\ 4y = 0 \end{array} \right\}$$

Por tanto el único punto crítico de f es $(0, 0) \in \text{int}D$, y allí, $f(0, 0) = 0$.

2. Valores extremos de f en la frontera de D .

Dado que la frontera de D , es $\partial D = \{(x, y) : x^2 + 4y^2 = 5\}$, así, debemos hallar el máximo y el mínimo de $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ con la restricción $g(x, y) = x^2 + 4y^2 = 5$, para lo cual usaremos multiplicadores de Lagrange, de ahí que, debemos hallar x, y, λ tales que

$$\left. \begin{array}{l} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y, z) \\ g(x, y) = 5 \end{array} \right\}$$

esto es

$$\left. \begin{array}{l} f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y) \\ f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y) \\ x^2 + 4y^2 = 5 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 2x = \lambda(2x) \\ 4y = \lambda(8y) \\ x^2 + 4y^2 = 5 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x(1 - \lambda) = 0 \quad (1) \\ y(1 - 2\lambda) = 0 \quad (2) \\ x^2 + 4y^2 = 5 \quad (3) \end{array} \right\}$$

De la ecuación (1) tenemos que $x = 0$ o $\lambda = 1$. Si $x = 0$, entonces reemplazando en (3), $y = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$. Ahora bien, si $\lambda = 1$, entonces reemplazando en (2) $y = 0$ y así de (3) $x = \pm\sqrt{5}$.

Ahora comparemos los valores de f en dichos puntos:

Punto	$f(x, y)$
$(0, -\frac{\sqrt{5}}{2})$	10
$(0, \frac{\sqrt{5}}{2})$	10
$(-\sqrt{5}, 0)$	5
$(\sqrt{5}, 0)$	5

3. Comparamos los valores obtenido.

Es claro el máximo absoluto de f en D es 10 y se obtiene en los puntos $(0, -\frac{\sqrt{5}}{2}), (0, \frac{\sqrt{5}}{2})$.

El mínimo absoluto de f en D es 0 y se obtiene en el punto $(0, 0)$.

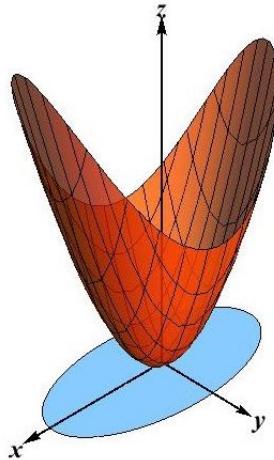


Figura 1.33: example caption

Ejemplo 1.13.4. La temperatura de una placa metálica que ocupa la región en el plano

$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$, está dada por $T(x, y) = x^4 + 2x^2y^2 + x^3$. Hallar los puntos más calientes y más fríos de la placa, además diga cual es la temperatura en dichos puntos.

Apliquemos el método de descrito en la sección anterior, esto es, primero debemos hallar los puntos críticos de T en el interior de D , para luego hallar los valores extremos en la frontera de D y finalmente comparar los valores.

1. Puntos críticos de f en el interior de D .

Derivamos parcialmente e igualamos a cero:

$$\left. \begin{array}{l} T_x(x, y) = 0 \\ T_y(x, y) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 4x^3 + 4xy^2 + 3x^2 = 0 \\ 4x^2y = 0 \end{array} \right\}$$

De la segunda ecuación tenemos que $x = 0$ o $y = 0$

- Si $x = 0$, entonces claramente se satisface todo el sistema de ecuaciones, lo cual no dice que todos los puntos en D de la forma $(0, y)$, son punto críticos.
- Si $y = 0$, reemplazando en la primera ecuación tenemos $4x^3 + 3x^2 = 0$, esto es, $x^2(4x + 3) = 0$, como el caso $x = 0$, ya fue considerado, debe ser $x = -\frac{3}{4}$, es decir, también tenemos el punto crítico $\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$

2. Valores extremos de f en la frontera de D .

Dado que la frontera de D , es $\partial D = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$, así, debemos hallar el máximo y el mínimo de $T(x, y) = x^4 + 2x^2y^2 + x^3$ con la restricción $g(x, y) = x^2 + y^2 = 1$, para lo cual

usaremos el método de los multiplicadores de Lagrange, de ahí que, debemos hallar x, y, λ tales que

$$\begin{cases} \nabla T(x, y) = \lambda \nabla g(x, y, z) \\ g(x, y) = 1 \end{cases}$$

esto es

$$\left. \begin{array}{l} T_x(x, y) = \lambda g_x(x, y) \\ T_y(x, y) = \lambda g_y(x, y) \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 4x^3 + 4xy^2 + 3x^2 = \lambda(2x) \quad (1) \\ 4x^2y = \lambda(2y) \quad (2) \\ x^2 + y^2 = 1 \quad (3) \end{array} \right\}$$

Para poder dividir en (1) por x y en (2) por y debemos descartar los casos en los cuales $x = 0$ o $y = 0$.

- Si $x = 0$, reemplazamos en (3) y tenemos $y = \pm 1$, estos son los puntos $(0, \pm 1)$.
- Si $y = 0$, reemplazamos en (3) y tenemos $x = \pm 1$, estos son los puntos $(\pm 1, 0)$.

Ahora podemos suponer que $x \neq 0$ y $y \neq 0$, para obtener de (1) y (2), la ecuación $4x^2 + 4y^2 + 3x = 4x^2$, de donde tenemos que $y^2 = -\frac{3x}{4}$, lo cual nos dice que $x < 0$, reemplazando en (3), tenemos que:

$$x^2 - \frac{3x}{4} - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 - \sqrt{73}}{8} < 0$$

y por tanto

$$\begin{aligned} y^2 &= -\frac{3x}{4} \\ y^2 &= \frac{3(\sqrt{73} - 3)}{32} \\ y &= \pm \frac{\sqrt{3\sqrt{73} - 9}}{4\sqrt{2}} \end{aligned}$$

3. Comparamos los valores obtenido.

Por últimos comparamos todos los valores obtenido, tanto en el interior de D , como en su frontera.

Para esto observamos la siguiente tabla: De la tabla vemos que, la temperatura máxima de la placa D es $2^\circ C$ y se logra en el punto $(1, 0)$ y el punto más frío es $\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$ y la temperatura allí es de $-\frac{27}{256}^\circ C \approx -0,1^\circ C$.

Punto	$f(x, y)$
$(0, y)$	0
$\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$	$-\frac{27}{256}$
$(0, -1)$	0
$(0, 1)$	0
$(-1, 0)$	0
$(1, 0)$	2
$\left(\frac{3 - \sqrt{73}}{8}, -\frac{\sqrt{3\sqrt{73} - 9}}{4\sqrt{2}}\right)$	$\approx 0,4$
$\left(\frac{3 - \sqrt{73}}{8}, \frac{\sqrt{3\sqrt{73} - 9}}{4\sqrt{2}}\right)$	$\approx 0,4$

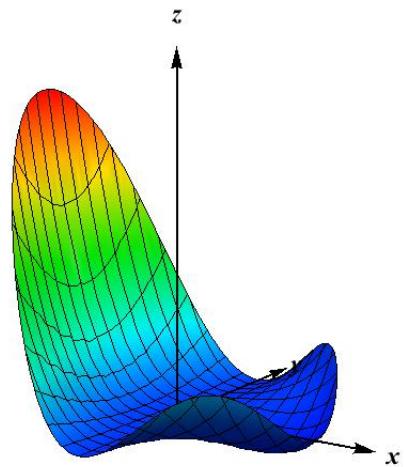


Figura 1.34: example caption

Capítulo 2

Integración Multiple

RESUMEN:

2.1. Integrales Dobles sobre Rectángulos

Rectángulo: Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ con $a < b, c < d$ entonces

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

es un rectángulo.

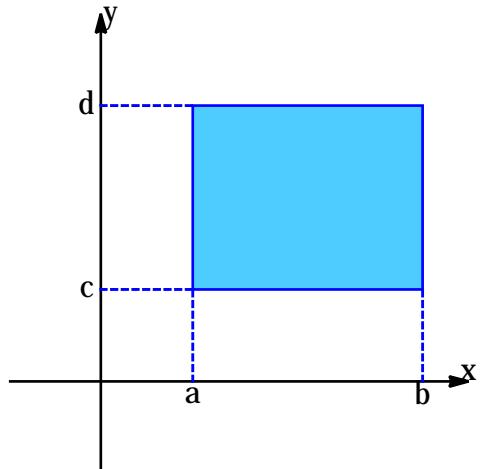


Figura 2.1: example caption

Sea $f : R = [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ una función de dos variables x, y y supongamos que $f(x, y) \geq 0$ para todo $(x, y) \in R$. Sea Ω el sólido limitado por encima por la gráfica de f y por debajo por el rectángulo R del plano xy , es decir,

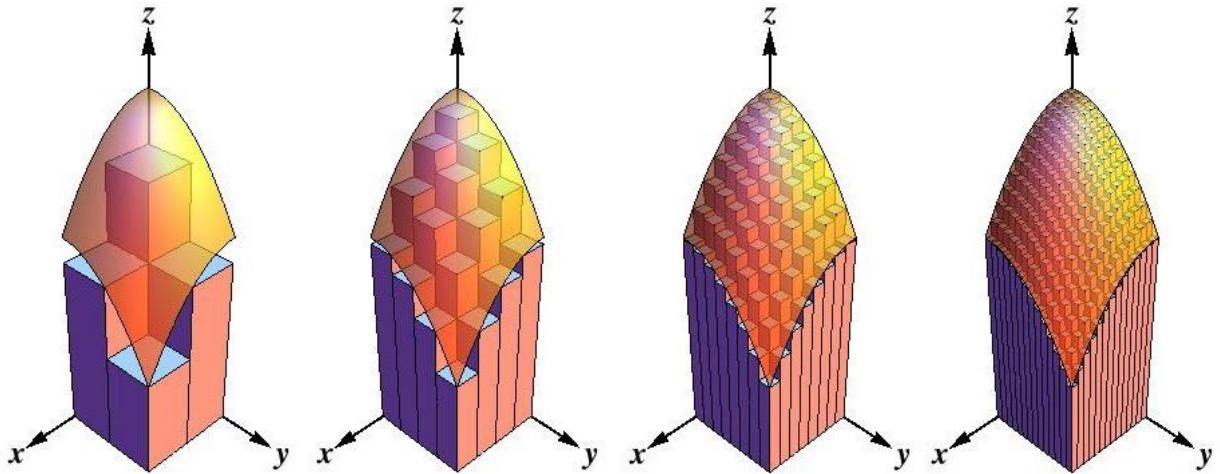
$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y) \in R, 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

Nuestro objetivo es encontrar el volumen V de Ω . Para esto:

(i) Dividimos el rectángulo R en subrectángulos $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{i-1}, y_i]$ donde

$$\Delta x = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} \quad \text{y} \quad \Delta y = y_i - y_{i-1} = \frac{d-c}{n}.$$

(ii) Sea (x_{ij}, y_{ij}) un punto en R_{ij} . Consideremos el **prisma** de base R_{ij} y con altura $f(x_{ij}, y_{ij})$



El volumen del prisma es,

$$V_{ij} = \text{Área } R_{ij} \times f(x_{ij}, y_{ij}) = f(x_{ij}, y_{ij})\Delta x \Delta y = f(x_{ij}, y_{ij})\Delta A.$$

Entonces una aproximación del volumen de Ω es

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(x_{ij}, y_{ij})\Delta x \Delta y$$

la cual llamamos **suma doble de Riemann de f** .

(iii) Definimos el volumen V de Ω como

$$V = \lim_{n,m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_{ij}, y_{ij})\Delta x \Delta y$$

siempre que este límite exista y no dependa de la elección de (x_{ij}, y_{ij}) en R_{ij} .

Definición 2.1.1. Sea $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ una función de dos variables definida en un rectángulo R . La integral Doble de f sobre R , es

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{n,m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_{ij}, y_{ij})\Delta x \Delta y \quad (2.1.1)$$

Si este límite existe y es independiente de la elección de (x_{ij}, y_{ij}) en R_{ij} . Cuando f es continua en el rectángulo, el límite en 2.1.1 siempre existe, y se denomina integral doble de f en R .

Si $f(x, y) \geq 0$, para todo $(x, y) \in R$, $\iint_R f(x, y) dA$ representa el volumen del sólido Ω .

Ejemplo 2.1.1. Sea $R = \{(x, y) / -1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2\}$.

Evaluar la integral $\iint_R \sqrt{1-x^2} dA$.

Notemos que la función a integrar es $z = f(x, y) = \sqrt{1-x^2}$, que es equivalente a $x^2 + z^2 = 1$ con $z \geq 0$, lo cual nos dice que esta integral representa el volumen del sólido

$\Omega = \{(x, y) / (x, y) \in R, 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2}\}$ De donde

$$\iint_R \sqrt{1-x^2} dA = \frac{1}{2}\pi(1)^2(4) = 2\pi.$$

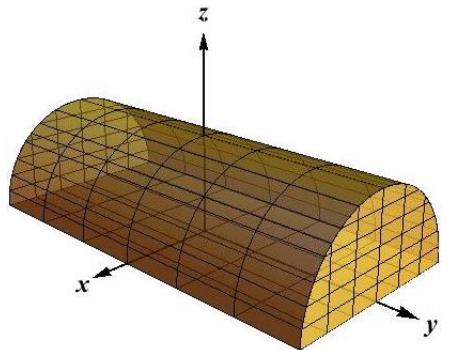


Figura 2.2: example caption

Valor Promedio de una función en un Rectángulo

Definición 2.1.2. Sea $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable sobre $R = [a, b] \times [c, d]$, definimos el valor promedio de f sobre R como

$$f_{\text{prom}} = \frac{1}{A(R)} \iint_R f(x, y) dA$$

donde $A(R)$ = Área del Rectángulo R .

De la definición anterior se sigue que $A(R)f_{\text{prom}} = \iint_R f(x, y) dA$, cuando $f(x, y) \geq 0$, para todo $(x, y) \in R$, entonces, $f_{\text{prom}} \geq 0$, en este caso el lado derecho de la ecuación anterior representa el volumen de una caja de base R y altura f_{prom} , y el lado derecho representa el volumen del sólido $\Omega = \{(x, y, z) / (x, y) \in R, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$.

Hacer una buena gráfica que represente este hecho.

Ejemplo 2.1.2. Hallar el valor promedio de $f(x, y) = \sqrt{1-x^2}$ en $R = [-1, 1] \times [-2, 2]$. Del ejemplo anterior es claro que

$$f_{\text{prom}} = \frac{1}{A(R)} \iint_R \sqrt{1-x^2} dA = \frac{\pi}{4}.$$

Propiedades de la Integral

Sean f y g dos funciones integrables en R , entonces:

1. $\iint_R [f(x, y) + g(x, y)] dA = \iint_R f(x, y) dA + \iint_R g(x, y) dA$, además, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$
 $\iint_R \lambda f(x, y) dA = \lambda \iint_R f(x, y) dA$.

2. Si $f(x, y) \leq g(x, y)$ para cada $(x, y) \in R$, entonces:

$$\iint_R f(x, y) dA \leq \iint_R g(x, y) dA.$$

3. Si $R = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n R_i$, donde los subrectángulos R_i son tales que $R_i \cap R_j$ no tiene puntos interiores si $i \neq j$, entonces

$$\iint_R f(x, y) dA = \sum_{i=1}^n \iint_{R_i} f(x, y) dA.$$

2.2. Integrales Iteradas

Sea $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Para todo $x \in [a, b]$, sea $A(x) = \int_c^d f(x, y) dy$. A continuación calculamos $\int_a^b A(x) dx$, es decir, calculamos

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

Esta última integral se denomina integral iterada.

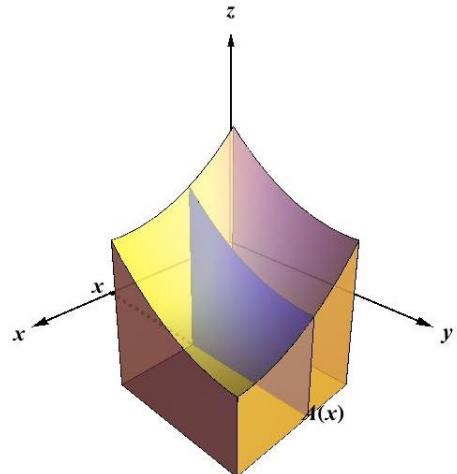


Figura 2.3: example caption

Para cada $y \in [c, d]$, sea $B(y) = \int_a^b f(x, y) dx$, y a continuación calculamos $\int_c^d B(y) dy$, es decir, calculamos

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Hasta el momento estas dos integrales representan cantidades en principio diferentes, el siguiente resultado nos asegura que tales cantidades son iguales

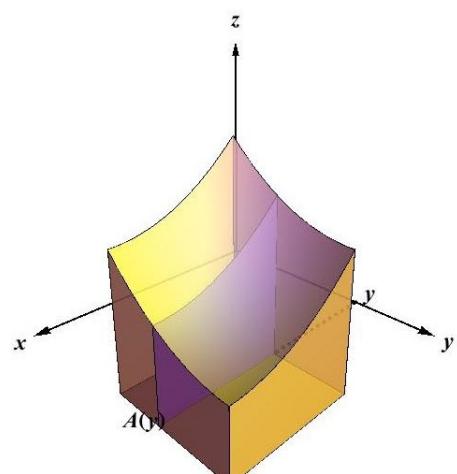


Figura 2.4: example caption

Teorema 2.2.1 (Teorema de Fubini). Si $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, entonces

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Ejemplo 2.2.1. Calculemos el volumen del sólido limitado por la superficie $z = \sin(y)$, los planos $x = 1, x = 0, y = 0, y = \frac{\pi}{2}$ y el plano xy . Para esto, notemos que nuestra región de integración es el rectángulo $R = \{(x, y) / 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$, así, aplicando el teorema de Fubini, tenemos:

$$\begin{aligned} V &= \iint_R f(x, y) dA \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(y) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(-\cos(y) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) dx \\ &= \int_0^1 dx \\ &= 1 \text{ unid}^3. \end{aligned}$$

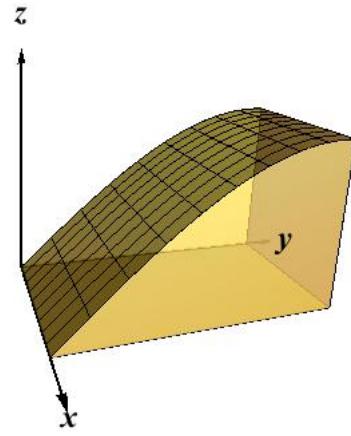


Figura 2.5: example caption

Ejemplo 2.2.2. Evaluar $\iint_R y \sin(xy) dA$ donde $R = [1, 2] \times [0, \pi]$. Usando el teorema de Fubini, tenemos:

$$\begin{aligned} \iint_R y \sin(xy) dA &= \int_0^\pi \left(\int_1^2 y \sin(xy) dx \right) dy \\ &= \int_0^\pi \left(-\cos(xy) \Big|_1^2 \right) dy \\ &= \int_0^\pi (\cos(y) - \cos(2y)) dy \\ &= \left(\sin(y) - \frac{1}{2} \sin(2y) \right) \Big|_0^\pi \\ &= 0. \end{aligned}$$

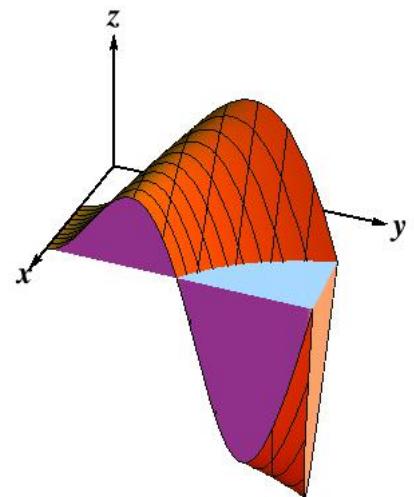


Figura 2.6: example caption

Nota: Supongamos que $f(x, y) = g(x)h(y)$. Si $R = [a, b] \times [c, d]$, entonces, tenemos:

$$\begin{aligned}\iint_R f(x, y) dA &= \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_a^b \left(\int_c^d g(x)h(y) dy \right) dx \\ &= \int_a^b g(x) \left(\int_c^d h(y) dy \right) dx \\ &= \left(\int_a^b g(x) dx \right) \left(\int_c^d h(y) dy \right)\end{aligned}$$

2.3. Integrales sobre Regiones más Generales

Sea D una región acotada de \mathbb{R}^2 y sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función de dos variables. Queremos definir

$$\iint_D f(x, y) dA.$$

Sea R un rectángulo con lados paralelos a los ejes coordenados tal que $D \subseteq R$. Sea $F : R \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida por

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } (x, y) \in D \\ 0 & \text{si } (x, y) \notin D \end{cases} \quad (*)$$

La integral doble sobre D , denotada por $\iint_D f(x, y) dA$, se define por $\iint_D f(x, y) dA = \iint_D F(x, y) dA$ siempre que esta última integral exista.

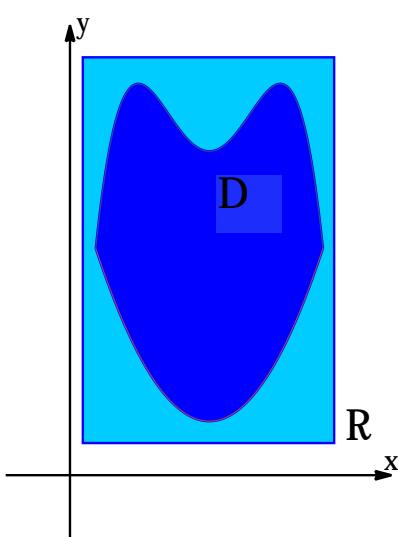


Figura 2.7: example caption

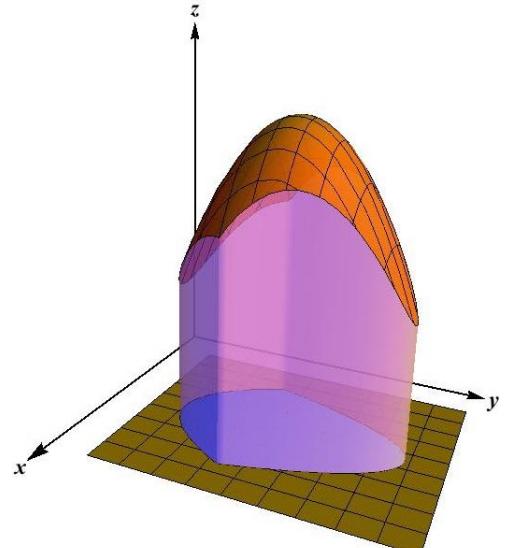


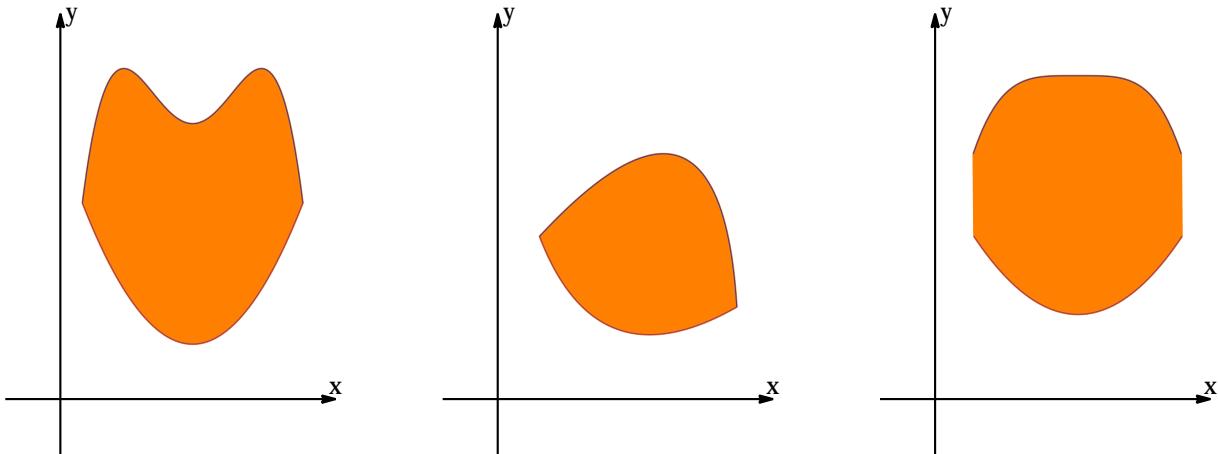
Figura 2.8: example caption

Regiones de Tipo I y Tipo II

Se dice que una región plana es de **Tipo I** si yace entre las gráficas de dos funciones continuas de x , es decir,

$$D = \{(x, y) / a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

donde g_1 y g_2 son continuas en $[a, b]$. Algunos ejemplos de regiones de tipo I se muestran a continuación:



A fin de evaluar $\iint_D f(x, y) dA$ cuando D es una región de tipo I, se elige un rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$ que contiene a D , como en la figura, y sea F la función dado por la ecuación (\star) , es decir, F coincide con f en D y F es 0 fuera de D . Entonces, por el teorema de Fibini,

$$\int_D f(x, y) dA = \int_R F(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d F(x, y) dy dx$$

Observe que $F(x, y) = 0$ si $y < g_1(x)$ o $y > g_2(x)$ porque entonces (x, y) está fuera de D . Por lo tanto

$$\int_c^d F(x, y) dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy$$

porque $F(x, y) = f(x, y)$ cuando $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$. Así, se tiene la siguiente fórmula que permite evaluar la integral doble como una integral iterada.

Si f es continua en una región D de tipo I tal que

$$D = \{(x, y) / a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

entonces

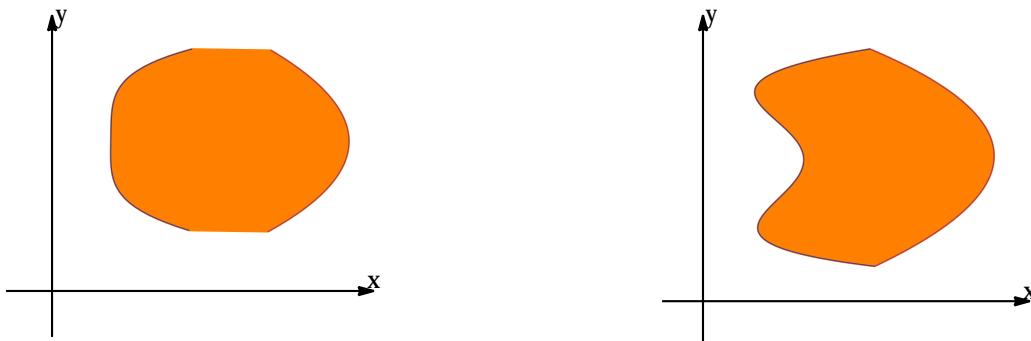
$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx \quad (2.3.1)$$

La integral del lado derecho de la ecuación anterior es una integral iterada que es similar a las consideradas en la sección anterior, excepto que en la integral interna se considera a x como una constante no sólo en $f(x, y)$ sino también en los límites de integración $g_1(x)$ y $g_2(x)$.

Se considera también las regiones planas de **Tipo II**, que se pueden expresar como

$$D = \{(x, y) / c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

donde h_1 y h_2 son continuas. En la figura ?? se ilustran dos regiones de este tipo II.



Si se usan los métodos empleados para establecer la fórmula 2.3.1, se muestra que sobre regiones de Tipo II, tenemos:

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x, y) dx dy.$$

Ejemplo 2.3.1. Encuentre el volumen del sólido Ω que está debajo del parabolóide $z = x^2 + y^2$ y encima de la región D del plano xy acotada por la recta $y = 2x$ y la parábola $y = x^2$.

Es claro de la gráfica que D se puede ver como una región de tipo I, así:

$$D = \{(x, y) / 0 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 2x\}$$

Lo cual nos dice que el sólido Ω se puede describir como

$$\Omega = \{(x, y, z) / (x, y) \in D, 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}$$

Esto es,

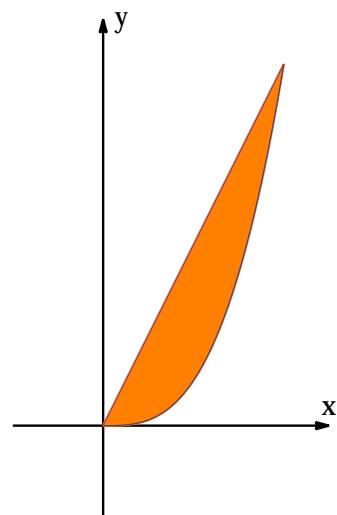


Figura 2.9: example caption

$$\begin{aligned}
 V(\Omega) &= \iint_D f(x, y) dA \\
 &= \iint_D (x^2 + y^2) dA \\
 &= \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^2 + y^2) dy dx \\
 &= \int_0^2 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{x^2}^{2x} dx \\
 &= \int_0^2 \left(2x^3 + \frac{8x^3}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3} \right) dx \\
 &= \int_0^2 \left(\frac{14x^3}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3} \right) dx \\
 &= \left(\frac{14x^3}{6} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{21} \right) \Big|_0^2 \\
 &= \frac{216}{35}.
 \end{aligned}$$

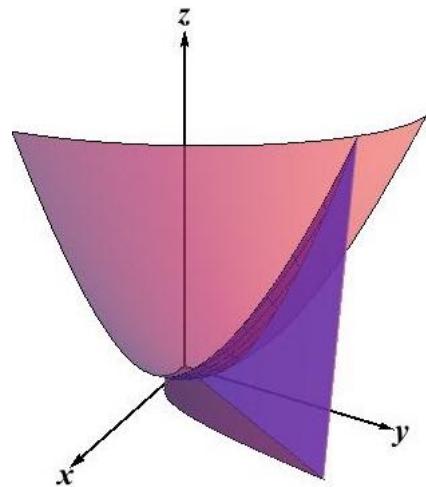
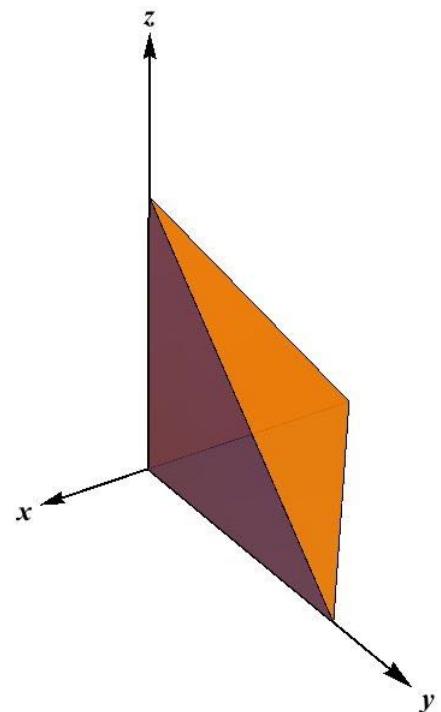
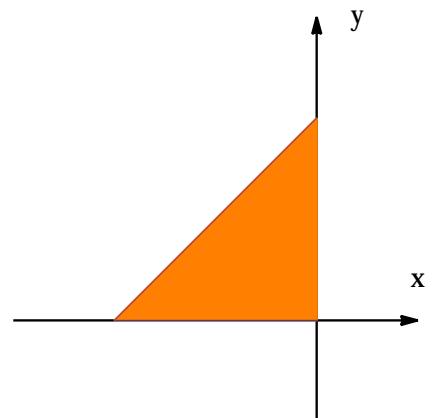


Figura 2.10: example caption

Ejemplo 2.3.2. Halle el volumen del tetraedro acotado por los planos $y = 0, z = 0, x = 0$ y el plano $y - x + z = 1$.

Como vemos de las gráficas, el sólido se puede describir como $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y) \in D, 0 \leq z \leq 1 + x - y\}$ donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -1 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq x + 1\}$, así el volumen

$$\begin{aligned}
 V(\Omega) &= \iint_D (1 + x - y) dA \\
 &= \int_{-1}^0 \int_0^{x+1} (1 + x - y) dy dx \\
 &= \int_{-1}^0 \left((1 + x)y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{x+1} dx \\
 &= \int_{-1}^0 \left((x + 1)^2 - \frac{(x + 1)^2}{2} \right) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^0 (x + 1)^2 dx \\
 &= \frac{1}{6} (x + 1)^3 \Big|_{-1}^0 \\
 &= \frac{1}{6} \text{ unid}^3
 \end{aligned}$$



Cambio en el Orden de Integración

Ejemplo 2.3.3. Evaluar la integral $\int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2) dy dx$.

Si tratamos de evaluar la integral con este orden de integración nos debemos enfrentar primero a la integral $\int_x^1 \sin(y^2)$, la cual no tiene una solución elemental. Ahora bien, si nos fijamos en la región de integración $D = \{(x, y) / 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\}$ vemos que podemos expresarla como $D = \{(x, y) / 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$ y así, tenemos:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2) dy dx &= \int_0^1 \int_0^y \sin(y^2) dx dy \\
 &= \int_0^1 x \sin(y^2) \Big|_0^y dy \\
 &= \int_0^1 y \sin(y^2) dy \\
 &= -\frac{1}{2} \cos(y^2) \Big|_0^1 dy \\
 &= \frac{1}{2}(1 - \cos(1)).
 \end{aligned}$$

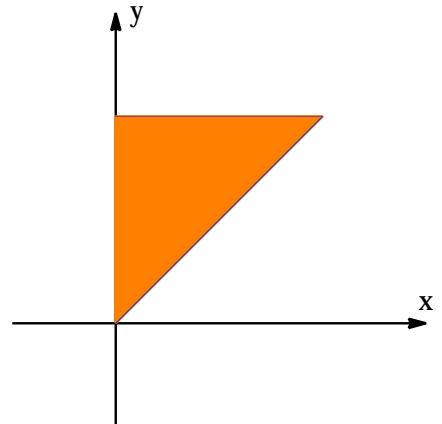


Figura 2.11: example caption

Ejercicio Evaluar la integral doble $\int_0^4 \int_{y/2}^2 e^{x^2} dx dy$.

2.3.1. Dos Interpretaciones de una Integral Doble

Sea D una región de \mathbb{R}^2 y sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = 1$. Entonces $\iint_D 1 dA = \iint_D dA$ representa el volumen del sólido Ω definido por $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y) \in D, 0 \leq z \leq 1\}$.

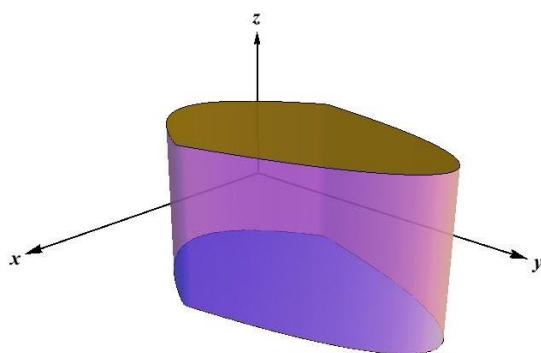


Figura 2.12: example caption

Otra interpretación de $\iint_D 1 dA$: por ejemplo, si podemos expresar la región de integración como de tipo I, así,

$$D = \{(x, y) / a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\},$$

entonces,

$$\iint_D 1 dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} 1 dy dx = \int_a^b g_2(x) - g_1(x) dx = \text{Área de } D$$

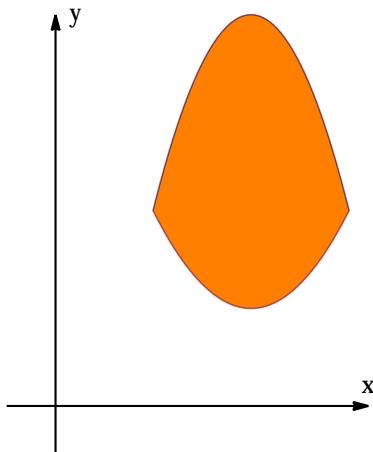


Figura 2.13: example caption

Estimación de Integrales Dobles

Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función de dos variables y supongamos que existen constantes m y M tales que, para todo $(x, y) \in D$ tenemos $m \leq f \leq M$. Entonces $\iint_D m dA \leq \iint_D f(x, y) dA \leq \iint_D M dA$. Denotando por $A(D)$ el área de la región D se tiene:

$$m A(D) \leq \iint_D f(x, y) dA \leq M A(D).$$

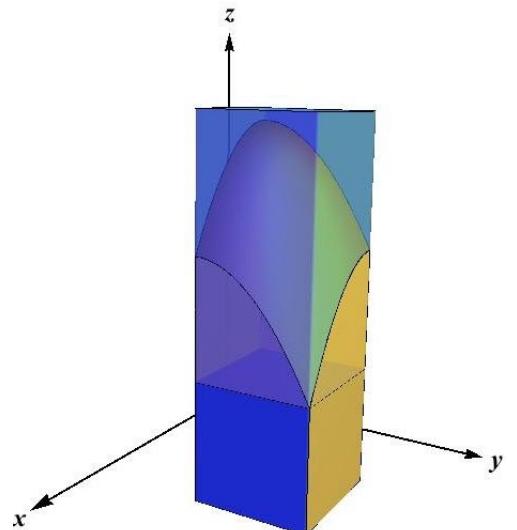


Figura 2.14: example caption

Ejemplo 2.3.4. Si D es el disco con centro en el origen y radio 2. Pruebe que

$$4\pi e^{-1} \leq \iint_D e^{\sin(x)\cos(y)} dA \leq 4\pi e.$$

Sabemos que $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ y $-1 \leq \cos(y) \leq 1$, de ahí que $-1 \leq \sin(x)\cos(y) \leq 1$, por tanto, $e^{-1} \leq e^{\sin(x)\cos(y)} \leq e$, dado que $A(D) = \pi(2)^2 = 4\pi$, tenemos que

$$e^{-1}A(D) \leq \iint_D e^{\sin(x)\cos(y)} dA \leq eA(D)$$

$$4\pi e^{-1} \leq \iint_D e^{\sin(x)\cos(y)} dA \leq 4\pi e$$

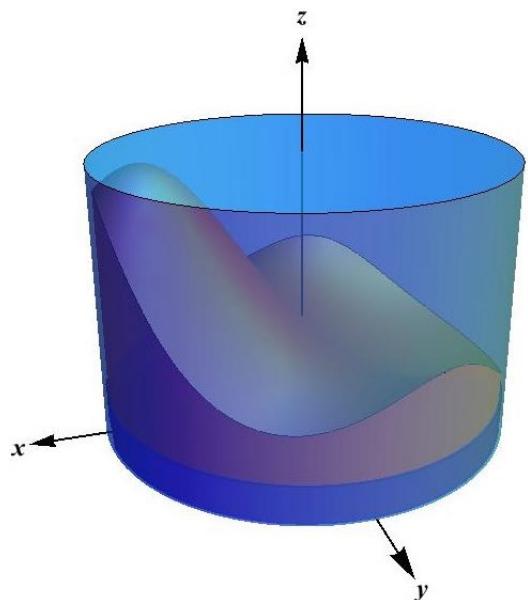


Figura 2.15: example caption

2.4. Integrales Dobles en Coordenadas Polares

Sea P un punto en \mathbb{R}^2 , diferente del origen, de coordenadas cartesianas (x, y) . Entonces las **coordenadas polares** (r, θ) del punto P son dos números $r > 0$ y $\theta \in [0, 2\pi)$ que satisfacen las siguientes condiciones:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad y \quad x = r \cos(\theta), \quad y = \sin(\theta)$$

θ es el ángulo con lado inicial el semieje positivo de x y el lado terminal el vector \overrightarrow{OP} .

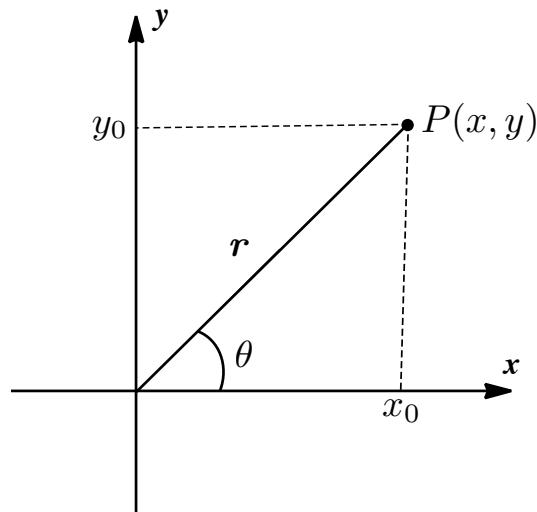


Figura 2.16: example caption

Un rectángulo polar es un conjunto R del plano, cuya descripción en coordenadas polares viene dada por

$$R = \{(r, \theta) / a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta\}, \text{ donde } 0 < a < b \text{ y } 0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi.$$

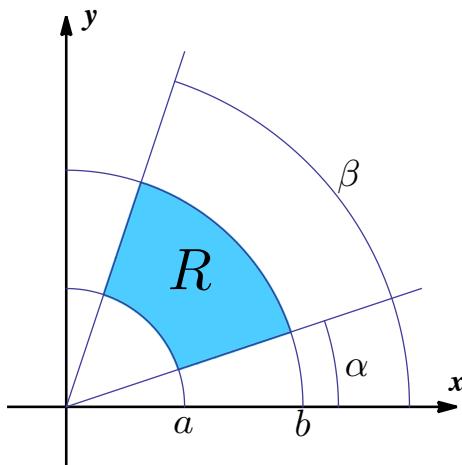


Figura 2.17: example caption

Ejemplo Dibujar el rectángulo polar $R = \{(r, \theta) / 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi\}$.

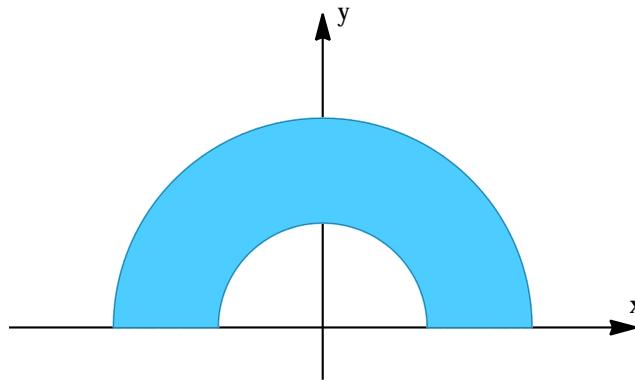


Figura 2.18: example caption

Sea $R = \{(r, \theta) / a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta\}$ un rectángulo polar y sea $f : R \rightarrow \mathbb{R}$. Queremos calcular $\iint_R f(x, y) dA$.

Sean $\Delta r = \frac{b-a}{m}$ y $\Delta\theta = \frac{\beta-\alpha}{n}$ y sean

$$R_{ij} = \{(r, \theta) / r_{i-1} \leq r \leq r_i, \theta_{j-1} \leq \theta \leq \theta_j\}, \text{ donde } r_i = a + i\Delta r, \theta_j = \alpha + j\Delta\theta.$$

Calculamos el área de R_{ij} usando el hecho que el área de un sector de un círculo con radio r y ángulo

θ es $\frac{1}{2}r^2\theta$. Al restar las áreas de dos sectores de esta clase, cada uno de los cuales tiene ángulo central $\Delta\theta = \theta_j - \theta_{j-1}$, se encuentra que el área de R_{ij} es:

$$\begin{aligned}\Delta A_i &= \frac{1}{2}r_i^2\Delta\theta - \frac{1}{2}r_{i-1}^2\Delta\theta = \frac{1}{2}(r_i^2 - r_{i-1}^2)\Delta\theta \\ \Delta A_i &= \frac{1}{2}(r_i + r_{i-1})(r_i - r_{i-1})\Delta\theta \\ \Delta A_i &= r_i^*\Delta r\Delta\theta\end{aligned}$$

Una suma de Riemann de f es

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(r_i^* \cos(\theta_j^*), r_i^* \sin(\theta_j^*)) \text{Área } R_{ij}$$

de donde

$$\begin{aligned}\iint_R f(x, y) dA &= \lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(r_i^* \cos(\theta_j^*), r_i^* \sin(\theta_j^*)) \text{Área } R_{ij} \\ &= \lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(r_i^* \cos(\theta_j^*), r_i^* \sin(\theta_j^*)) r_i^* \Delta r \Delta\theta\end{aligned}$$

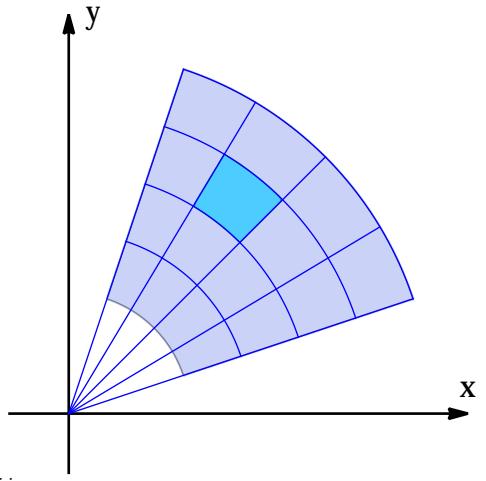


Figura 2.19: example caption

De lo anterior, vemos que **El Cambio a Coordenadas Polares en una Integral Doble**, de una función continua f , en un rectángulo polar R dado por $0 \leq a \leq r \leq b$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$, donde $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$, está dado por:

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_{\alpha}^{\beta} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) r dr d\theta.$$

Ejemplo 2.4.1. Evaluar $\iint_R (3x + 4y^2) dA$, donde R es la región del semiplano superior limitada por $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$.

La región de integración descrita en coordenadas cartesianas

es

$$R = \{(x, y) / 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$$

la cual se describe en coordenadas polares como

$$R = \{(r, \theta) / 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi\},$$

además como $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$, tenemos por la formula anterior que

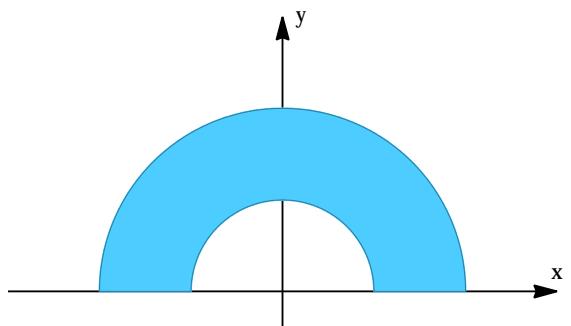


Figura 2.20: example caption

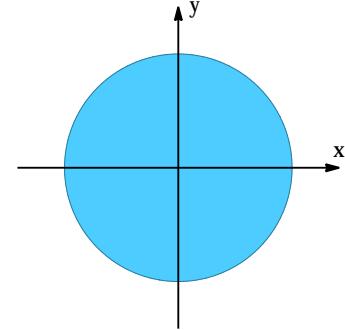
$$\begin{aligned}
 \iint_R (3x + 4y^2) dA &= \int_0^\pi \int_1^2 (3r \cos(\theta) + 2r^2 \sin^2(\theta)) r dr d\theta \\
 &= \int_0^\pi \int_1^2 (3r^2 \cos(\theta) + 4r^3 \sin^2(\theta)) dr d\theta \\
 &= \int_0^\pi (r^3 \cos(\theta) + r^4 \sin^2(\theta)) \Big|_1^2 d\theta \\
 &= \int_0^\pi (7 \cos(\theta) + 15 \sin^2(\theta)) d\theta \\
 &= \int_0^\pi \left(7 \cos(\theta) + \frac{15}{2}(1 - \cos(2\theta)) \right) d\theta \\
 &= \left(7 \sin(\theta) + \frac{15}{2}\theta - \frac{15}{4} \sin(2\theta) \right) \Big|_0^\pi \\
 &= \frac{15\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

Ejemplo 2.4.2. Encontrar el volumen del sólido Ω acotado por el paraboloide $z = 10 - 3x^2 - 3y^2$ y el plano $z = 4$.

Para los puntos del paraboloide que están en el plano $z = 4$
se cumple que

$$4 = 10 - 3x^2 - 3y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2.$$

Por tanto, la región de integración (la cual es la sombra del sólido en el plano xy) es



$$R = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq 2\} = \{(r, \theta) / 0 \leq r \leq \sqrt{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
 V(\Omega) &= \iint_R (10 - 3x^2 - 3y^2 - 4) dA \\
 &= \iint_R (6 - 3(x^2 + y^2)) dA \\
 &= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} (2 - r^2)r dr d\theta \\
 &= 6\pi \int_0^{\sqrt{2}} (2r - r^3) dr \\
 &= 6\pi.
 \end{aligned}$$

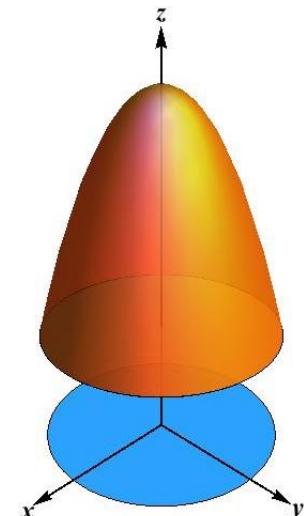


Figura 2.21: example caption

Ejemplo 2.4.3. Calcular el volumen del sólido Ω que se encuentra por encima del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y por debajo de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

En la intersección del cono y la esfera es:

$$\begin{aligned} z_{\text{cono}} &= z_{\text{esfera}} \\ \sqrt{x^2 + y^2} &= \sqrt{1 - x^2 - y^2} \\ x^2 + y^2 &= 1 - x^2 - y^2 \\ x^2 + y^2 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Por tanto la región de integración es

$$R = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}\}$$

y así el volumen del sólido Ω es:

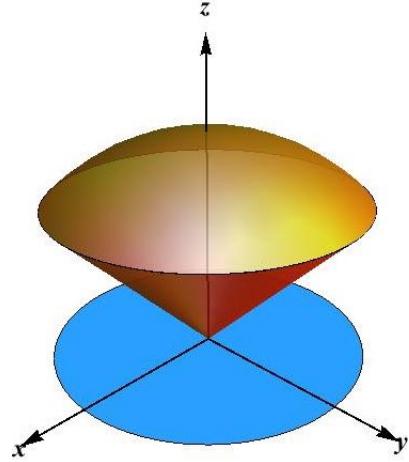


Figura 2.22: example caption

$$V(\Omega) = \iint_R (z_{\text{esfera}} - z_{\text{cono}}), dA = \iint_R (\sqrt{1 - x^2 - y^2} - \sqrt{x^2 + y^2}) dA$$

Haciendo un cambio de variables a coordenadas polares tenemos:

$$R = \left\{ (r, \theta) / 0 \leq r \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\} \text{ con } x = r \cos(\theta), y = r \sin(\theta)$$

Así,

$$\begin{aligned} V(\Omega) &= \iint_R (\sqrt{1 - r^2} - r) dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (\sqrt{1 - r^2} - r) r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (r\sqrt{1 - r^2} - r^2) dr \\ &= \frac{2\pi}{3} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \text{ unid}^3. \end{aligned}$$

Ejercicio. Sea $R = [0, 1] \times [0, 1] = \{(x, y) / 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. Calcular $\iint_R \sqrt{x^2 + y^2} dA$

2.5. Aplicaciones de la Integrales Dobles

Pensemos en una lámina metálica que ocupa una región D del plano xy . La densidad de la lámina en el punto (x, y) es $\rho(x, y)$ (en Kg/m^2). Entonces:

$$\iint_D \rho(x, y) dA$$

representa la **masa total** de la lámina.

Las coordenadas del centro de masa (\bar{x}, \bar{y}) de la lámina están dadas por:

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x \rho(x, y) dA}{\iint_D \rho(x, y) dA} \quad \bar{y} = \frac{\iint_D y \rho(x, y) dA}{\iint_D \rho(x, y) dA}$$

El momento de inercia alrededor del eje x de la lámina D es

$$\mathcal{I}_x = \iint_D y^2 \rho(x, y) dA.$$

El momento de inercia alrededor del eje y de la lámina D es

$$\mathcal{I}_y = \iint_D x^2 \rho(x, y) dA$$

El momento de inercia alrededor del origen de la lámina D es

$$\mathcal{I}_0 = \mathcal{I}_x + \mathcal{I}_y = \iint_D (x^2 + y^2) \rho(x, y) dA$$

Si $\sigma(x, y)$ representa la densidad de carga (c/m^2) entonces

$$\iint_D \sigma(x, y) dA$$

representa la **carga total** en D

Ejemplo 2.5.1. Una carga eléctrica se distribuye sobre el disco $D = \{(x, y) / (x - 1)^2 + y^2 \leq 1\}$ de manera que la densidad de carga en (x, y) es $\sigma(x, y) = 1 + x^2 + y^2$. Encuentre la carga total Q sobre el disco D .

Por definición tenemos que $Q = \iint_D (1 + x^2 + y^2) dA$. Ahora para resolver esta integral es útil usar coordenadas polares, ya que

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2x$$

que en coordenadas polares

$$r^2 = 2r \cos(\theta) \Leftrightarrow r = 2 \cos(\theta)$$

por lo tanto, el disco D se describe en coordenadas polares como

$$D = \left\{ (r, \theta) / -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2 \cos(\theta) \right\}.$$

De donde

$$\begin{aligned} Q &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2 \cos(\theta)} (1 + r^2) r dr d\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^{2 \cos(\theta)} d\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2 \cos^2(\theta) + 4 \cos^4(\theta)) d\theta \\ &= \frac{5\pi}{2}. \end{aligned}$$

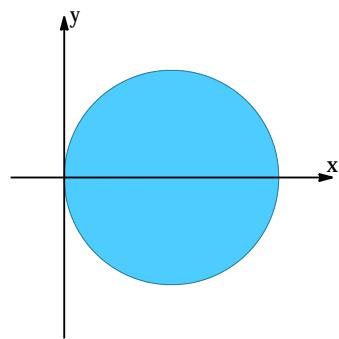


Figura 2.23: example caption

Ejemplo 2.5.2. Halle la masa y el centro de masa de una lámina que ocupa la región D limitada por la parábola $y = 9 - x^2$ y el eje x , y cuya densidad en el punto (x, y) es $\rho(x, y) = y$.

Es claro que $D = \{(x, y) / -3 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 9 - x^2\}$, de donde la masa total de la lámina es

$$m = \iint_D \rho(x, y) dA = \int_{-3}^3 \int_0^{9-x^2} y dy dx = \frac{648}{5}.$$

Ahora, el centro de masa tiene coordenadas

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{m} \iint_D x \rho(x, y) dA = \frac{5}{648} \int_{-3}^3 \int_0^{9-x^2} xy dy dx = 0 \\ \bar{y} &= \frac{1}{m} \iint_D y \rho(x, y) dA = \frac{5}{648} \int_{-3}^3 \int_0^{9-x^2} y^2 dy dx = \frac{36}{7} \approx 5,14. \end{aligned}$$

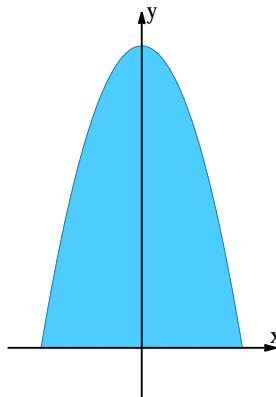


Figura 2.24: example caption

Ejercicio. Halle los momentos de inercia $\mathcal{I}_x, \mathcal{I}_y, \mathcal{I}_0$ de una lámina que ocupa la región en el primer cuadrante acotada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 1$, con una densidad de masa $\rho(x, y) = xy$.

2.6. Integrales Triples

Sea $B = \{(x, y, z) / a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq h\}$ una caja rectangular y sea $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ una función de tres variables definida en B .

Dividamos el intervalo $[a, b]$ en l subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de longitud $\Delta x = \frac{b-a}{l}$.

Dividamos el intervalo $[c, d]$ en m subintervalos $[y_{j-1}, y_j]$ de longitud $\Delta y = \frac{d-c}{m}$.

Dividamos el intervalo $[e, h]$ en n subintervalos $[z_{k-1}, z_k]$ de longitud $\Delta z = \frac{h-e}{n}$.

Así, la caja B queda dividida en $l \times m \times n$ “cajita” $B_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$. Sea $(x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk})$ un punto de B_{ijk} . Formemos el producto de $f(x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk}) \times$ Volumen B_{ijk} , esto es, $f(x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk})\Delta V$, donde, $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ y definamos la suma triple de Riemann

$$S_{lmn} = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk}) \Delta x \Delta y \Delta z.$$

La Integral Triple de f sobre B es por definición:

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \lim_{l,m,n \rightarrow \infty} S_{lmn}$$

cuando este último límite exista.

Caso Particular: Si $f(x, y, z) = 1$ para cada $(x, y, z) \in B$, entonces

$$\iiint_B 1 dV = V(B)$$

Cuando f es continua, el límite en la definición de integral triple siempre existe y se puede calcular como tres integrales iteradas:

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_c^d \int_e^h f(x, y, z) dz dy dx$$

Hay seis órdenes posibles de integración.

Ejemplo 2.6.1. Calcular $\iiint_E (x^2 + yz) dV$ donde
 $E = \{(x, y, z) / 0 \leq x \leq 2, -3 \leq y \leq 0, -1 \leq z \leq 1\}$.

Para esto calculamos la integral triple de forma iterada

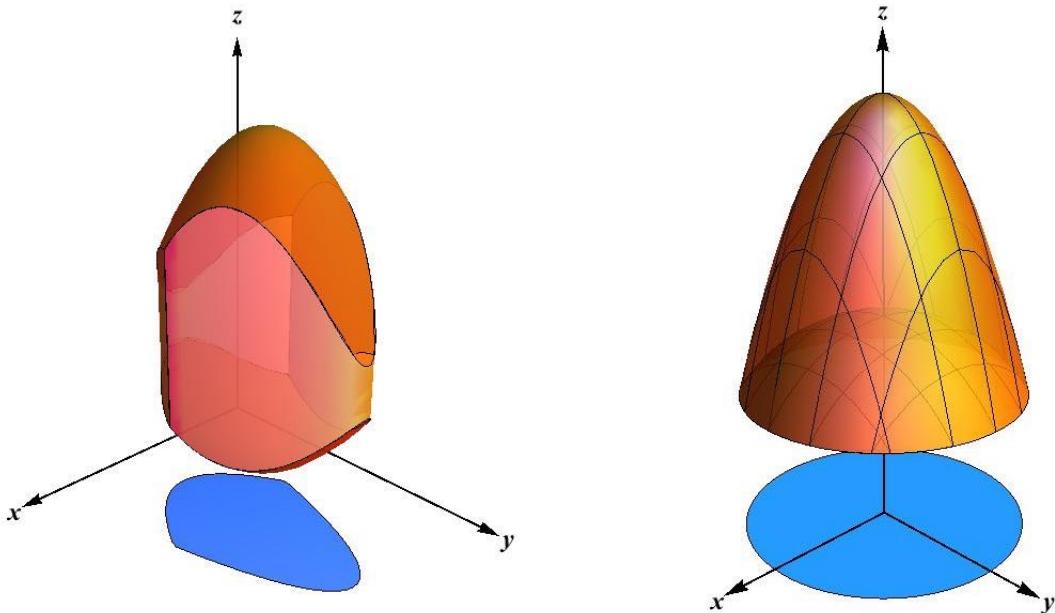
$$\begin{aligned}
 \iiint_E (x^2 + yz) dV &= \int_0^2 \int_{-3}^0 \int_{-1}^1 (x^2 + yz) dz dy dx \\
 &= \int_0^2 \int_{-3}^0 \int_{-1}^1 x^2 dz dy dx + \int_0^2 \int_{-3}^0 \int_{-1}^1 yz dz dy dx \\
 &= \int_0^2 x^2 dx \int_{-3}^0 dy \int_{-1}^1 dz + \int_0^2 dx \int_{-3}^0 y dy \int_{-1}^1 z dz \\
 &= 16.
 \end{aligned}$$

2.7. Integrales Triples sobre Regiones mas Generales

Regiones de Tipo I

Son aquellas regiones en el espacio donde la variable z se mueve entre dos funciones que depende de las variables x, y , esto es, E es una **región de Tipo I** si se describe como

$$E = \{(x, y, z) / (x, y) \in D, \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y)\}$$



Sea $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ una funciones continua, donde E es una región de tipo I, entonces, podemos evaluar la integral triple de f sobre E como la integral iterada

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iint_D \left(\int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dA$$

Ahora bien, si D es de tipo I en \mathbb{R}^2 , entonces $D = \{(x, y) / a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$, y así,

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) dz dy dx$$

De igual forma si D es de tipo II en el plano, $D = \{(x, y) / c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) dz dx dy$$

Ejemplo 2.7.1. Calcular $\iiint_E y dV$, donde E es el sólido que está debajo del plano $z = x + 2y$, y

encima de la región del plano xy acotada por la curva $y = x^2$ y las rectas $y = 0, x = 1$.

Para hallar los límites de integración primero debemos describir la región del plano xy , esto es la sombra del sólido sobre el cual estamos integrando, esta es,

$$D = \{(x, y) / 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$$

y así el sólido lo describimos como

$$E = \{(x, y, z) / (x, y) \in D, 0 \leq z \leq x + 2y\}$$

$$E = \{(x, y, z) / 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2, 0 \leq z \leq x + 2y\}$$

Por tanto podemos calcular la integral sobre E como la siguiente integral iterada

$$\begin{aligned} \iiint_E y dV &= \int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^{x+2y} y dz dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{x^2} y(x + 2y) dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{x^2} (xy + 2y^2) dy dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{xy^2}{2} + \frac{2y^3}{3} \right) \Big|_0^{x^2} dy dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x^5}{2} + \frac{2x^6}{3} \right) dy dx \\ &= \frac{5}{28} \end{aligned}$$

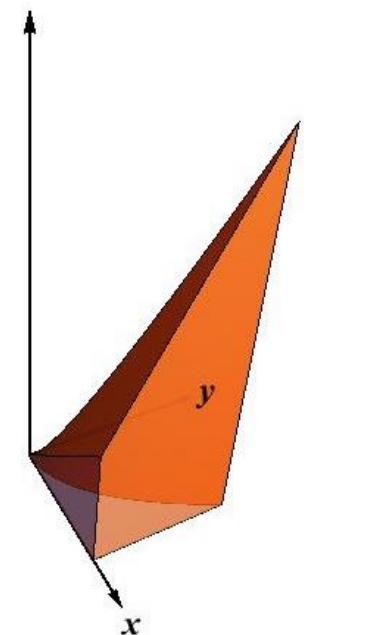
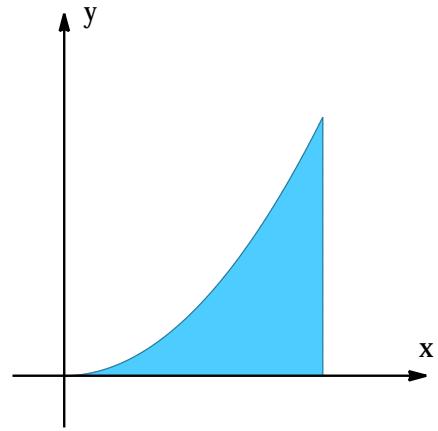


Figura 2.25: example caption

Regiones de Tipo II

Son aquellas regiones en el espacio donde la variable x se mueve entre dos funciones que depende de las variables y, z , esto es, **E es una región de Tipo II** si se describe como

$$E = \{(x, y, z) / (y, z) \in D, \varphi_1(y, z) \leq x \leq \varphi_2(y, z)\}$$

Sea $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ una funciones continua, donde E es una región de tipo II, entonces, podemos evaluar la integral triple de f sobre E como la integral iterada

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iint_D \left(\int_{\varphi_1(y, z)}^{\varphi_2(y, z)} f(x, y, z) dx \right) dA$$

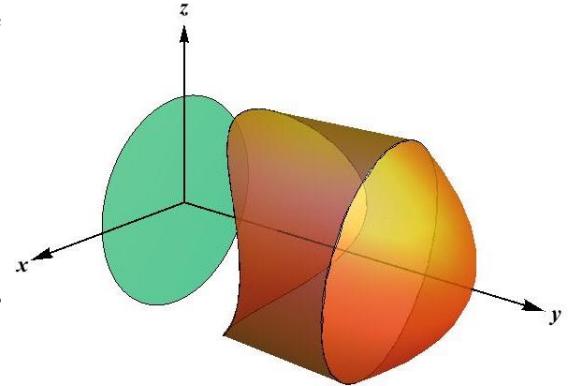


Figura 2.26: example caption

Regiones de Tipo III

Son aquellas regiones en el espacio donde la variable y se mueve entre dos funciones que depende de las variables x, z , esto es, **E es una región de Tipo III** si se describe como

$$E = \{(x, y, z) / (x, z) \in D, \varphi_1(x, z) \leq y \leq \varphi_2(x, z)\}$$

Sea $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ una funciones continua, donde E es una región de tipo III, entonces, podemos evaluar la integral triple de f sobre E como la integral iterada

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iint_D \left(\int_{\varphi_1(x, z)}^{\varphi_2(x, z)} f(x, y, z) dy \right) dA$$

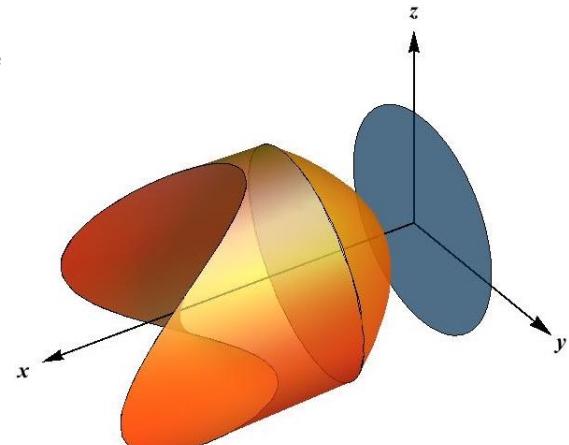


Figura 2.27: example caption

Ejemplo 2.7.2. Dibujar la región de integración correspondiente a la integral $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^{1-y} f(x, y, z) dz dy dx$ y escribir esta integral como una integral iterada equivalente en otros cinco órdenes.

En principio el orden de integración y los límites de integración, nos dicen que el sólido sobre el cual estamos integrando es Por último, proyectemos sobre el plano xz ,

$$E = \{(x, y, z) / 0 \leq x \leq 1, \sqrt{x} \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - y\}$$

de donde la región en el plano en donde el sólido se encuentra es $D = \{(x, y) / 0 \leq x \leq 1, \sqrt{x} \leq y \leq 1\}$.

Ahora, es claro de la gráfica que podemos describir a D como una region de tipo II como

$$D = \{(x, y) / 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y^2\}.$$

Por tanto

$$1) \quad \iiint_E f(x, y, z) dV = \int_0^1 \int_0^{y^2} \int_0^{1-y} f(x, y, z) dz dx dy$$

Para encontrar los demás ordenes de integración, empecemos proyectando sobre el plano yz . En esta forma podemos describir el sólido sobre el cual estamos integrando como:

$$E = \{(x, y, z) / (y, z) \in D_1, 0 \leq x \leq y^2\}$$

donde la región en el plano yz es

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(y, z) / 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - y\} \\ &= \{(y, z) / 0 \leq z \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - z\} \end{aligned}$$

$$2) \quad \iiint_E f(x, y, z) dV = \int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{y^2} f(x, y, z) dx dz dy$$

$$3) \quad \iiint_E f(x, y, z) dV = \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{y^2} f(x, y, z) dx dy dz$$

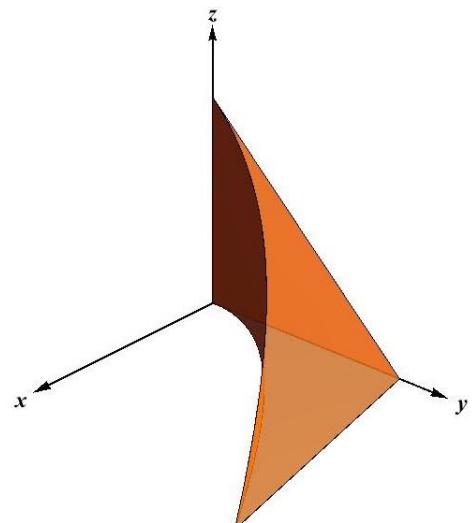
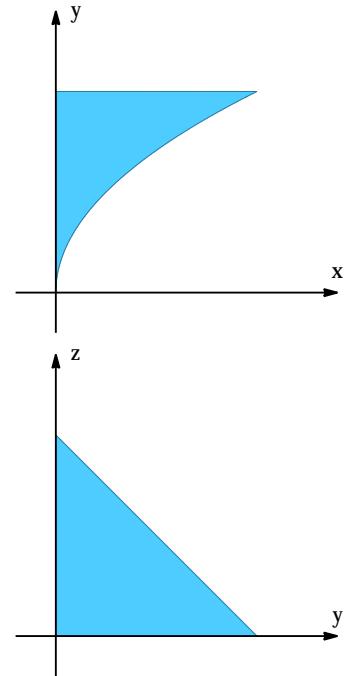


Figura 2.28: example caption

$$E = \{(x, y, z) / (x, z) \in D_2, \sqrt{x} \leq y \leq 1 - z\}$$

donde la región en el plano xz es

$$D_2 = \{(x, z) / 0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x}\} = \{(x, z) / 0 \leq z \leq 1, 0 \leq x \leq (1-z)^2\}$$

$$4) \quad \iiint_E f(x, y, z) dV = \int_0^1 \int_0^{1-\sqrt{x}} \int_{\sqrt{x}}^{1-z} f(x, y, z) dy dz dx$$

$$5) \quad \iiint_E f(x, y, z) dV = \int_0^1 \int_0^{(1-z)^2} \int_{\sqrt{x}}^{1-z} f(x, y, z) dy dx dz$$

lo cual completa las seis posibles formas de evaluar dicha integral triple.

Ejemplo 2.7.3. Exprese mediante una integral iterada el volumen del sólido E limitado por las superficies $z = x^2 + 3y^2$ y $z = 9 - 2x^2$.

Primero veamos cual es la región en el plano xy en la cual se proyecta el sólido, para ello debemos ver cual es la curva de intersección entre las superficies, esto es,

$$\begin{aligned} x^2 + 3y^2 &= 9 - 2x^2 \\ 3x^2 + 3y^2 &= 9 \\ x^2 + y^2 &= 3. \end{aligned}$$

De donde la región en el plano xy es

$$\begin{aligned} D &= \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq 3\} \\ &= \{(x, y) / \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}, -\sqrt{3-x^2} \leq y \leq \sqrt{3-x^2}\} \end{aligned}$$

así, podemos describir el sólido como

$$E = \{(x, y, z) / (x, y) \in D, x^2 + 3y^2 \leq z \leq 9 - 2x^2\}.$$

De lo anterior el volumen del sólido E puede ser calculado como

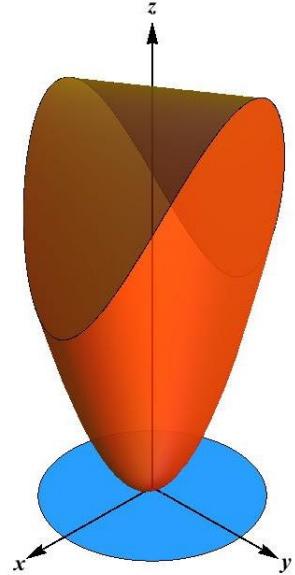


Figura 2.29: example caption

$$\begin{aligned} V(E) &= \iiint_E 1 dV \\ &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}} \int_{x^2+3y^2}^{9-2x^2} 1 dz dy dx \\ &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}} (9 - 3x^2 - 3y^2) dy dx. \end{aligned}$$

2.8. Integrales Triples en Coordenadas Cilíndricas

Dado un punto P en \mathbb{R}^3 de coordenadas cartesianas (x, y, z) que no esté sobre el eje z , es decir, $(x, y) \neq 0$, definimos las coordenadas cilíndricas (r, θ, z) de P de manera que:

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta), \quad z = z, \quad \text{donde } r > 0 \text{ y } \theta \in [0, 2\pi)$$

Observe que (r, θ) son las coordenadas polares

de $P' = (x, y, 0)$

Sea E una región de tipo I en \mathbb{R}^3 , dada por

$$E = \{(x, y, z) / (x, y) \in D, \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y)\}$$

Supongamos que D tiene una descripción en coordenadas polares como:

$$D = \{(r, \theta) / \alpha \leq \theta \leq \beta, h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}$$

Entonces la integral triple en coordenadas cartesianas se puede expresar en coordenadas cilíndricas como:

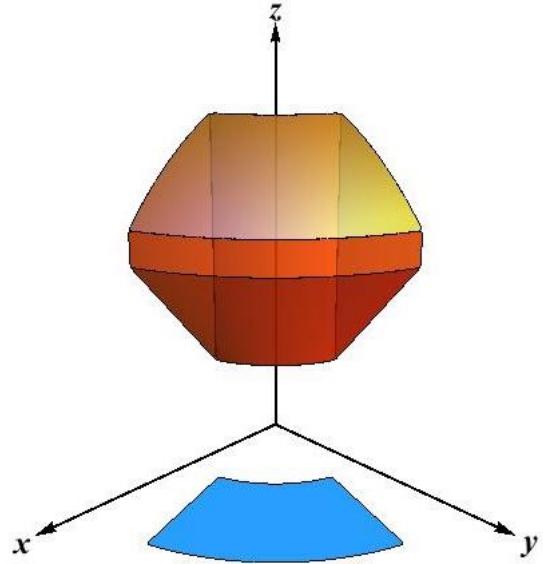


Figura 2.30: example caption

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{\varphi_1(r \cos(\theta), r \sin(\theta))}^{\varphi_2(r \cos(\theta), r \sin(\theta))} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) r dz dr d\theta$$

donde el sólido E tiene una descripción en coordenadas cilíndricas

$$E = \{(r, \theta, z) / \alpha \leq \theta \leq \beta, h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta), \varphi_1(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \leq z \leq \varphi_2(r \cos(\theta), r \sin(\theta))\}$$

Ejemplo 2.8.1. Calcule la integral triple $\iiint_E (x^2 + y^2 + z^2) dV$, donde E es el cilindro $x^2 + y^2 \leq 2$, $-2 \leq z \leq 3$.

Es claro que podemos expresar nuestra región de integración en coordenadas cilíndricas como

$$D = \{(r, \theta) / 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq \sqrt{2}\}$$

y nuestro sólido de integración como

$$\begin{aligned} E &= \{(r, \theta, z) / (r, \theta) \in D, -2 \leq z \leq 3\} \\ &= \{(r, \theta, z) / 0 \leq \theta \leq \sqrt{2}\pi, 0 \leq r \leq \sqrt{2}, -2 \leq z \leq 3\} \end{aligned}$$

Por tanto podemos expresar la anterior integral en coordenadas cilíndricas como:

$$\begin{aligned}
 \iiint_E (x^2 + y^2 + z^2) dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_{-2}^3 (r^2 + z^2)r dz dr d\theta \\
 &= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \int_{-2}^3 (r^3 + rz^2) dz dr \\
 &= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \left(zr^3 + \frac{rz^3}{3} \right) \Big|_{-2}^3 dr \\
 &= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \left(5r^3 + \frac{35r}{3} \right) dr \\
 &= 2\pi \left(\frac{5r^4}{4} + \frac{35r^2}{6} \right) \Big|_0^{\sqrt{2}} dr \\
 &= \frac{100\pi}{3}
 \end{aligned}$$

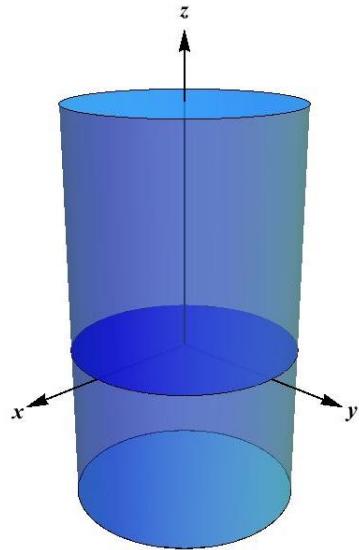


Figura 2.31: example caption

Ejemplo 2.8.2. Un sólido E está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, debajo del plano $z = 4$ y encima del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$. La densidad en cualquier punto es proporcional a su distancia al eje del cilindro. Encuentre la masa de E .

Empezamos describiendo nuestro sólido en coordenadas cilíndricas, esto es,

$$\begin{aligned}
 D &= \{(r, \theta) / 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1\} \\
 E &= \{(r, \theta, z) / (r, \theta) \in D, 1 - r^2 \leq z \leq 4\} \\
 E &= \{(r, \theta, z) / 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1, 1 - r^2 \leq z \leq 4\}
 \end{aligned}$$

Ahora bien, nos dicen que la densidad de masa en cada punto es proporcional a la distancia del punto al eje z , de ahí que, $\rho(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2}$ donde k es la constante de proporcionalidad.

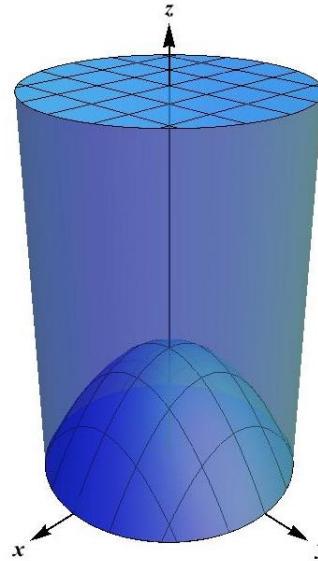


Figura 2.32: example caption

Por definición la masa total del sólido es

$$m = \iiint_E \rho(x, y, z) dV = k \iiint_E \sqrt{x^2 + y^2} dV$$

Realizando un cambio a coordenadas cilíndricas tenemos:

$$\begin{aligned}
 m &= k \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{1-r^2}^4 r \cdot r \, dz dr d\theta \\
 &= 2\pi k \int_0^1 \int_{1-r^2}^4 r^2 \, dz dr \\
 &= 2\pi k \int_0^1 r^2 (4 - 1 + r^2) \, dr \\
 &= 2\pi k \int_0^1 (3r^2 + r^4) \, dr \\
 &= 2\pi k \left(r^3 + \frac{r^5}{5} \right) \Big|_0^1 \\
 &= \frac{12\pi k}{5}
 \end{aligned}$$

2.9. Integrales Triples en Coordenadas Esféricas.

Las coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ) de un punto $P \in \mathbb{R}^3$ de coordenadas cartesianas (x, y, z) , son tales que

$$\begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos(\theta) \\ y = \rho \sin \phi \sin(\theta) \\ z = \rho \cos \phi \end{cases}$$

El triángulo OPQ es rectángulo en Q , de donde $\cos(\phi) = \frac{z}{\rho}$, así $z = \rho \cos(\phi)$. Además, $\sin(\phi) = \frac{|QP|}{\rho} = \frac{|OP'|}{\rho}$, de donde, $|OP'| = \rho \sin(\phi)$.

Ahora bien, el triángulo OAP' en el plano xy , tiene catetos x, y e hipotenusa OP' . Por tanto, $\cos(\theta) = \frac{x}{|OP'|}$, $\sin(\theta) = \frac{y}{|OP'|}$, donde $x = |OP'| \cos(\theta)$, $y = |OP'| \sin(\theta)$, esto es,

$$x = \rho \sin \phi \cos(\theta), \quad y = \rho \sin \phi \sin(\theta).$$

El diferencial de Volumen en coordenadas esféricas es

$$dV = \rho^2 \sin(\phi) \, d\rho d\phi d\theta.$$

Por tanto, si E es una región en \mathbb{R}^3 descrita en coordenadas esféricas como:

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) / \alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq \phi \leq d, g_1(\theta, \phi) \leq \rho \leq g_2(\theta, \phi)\}$$

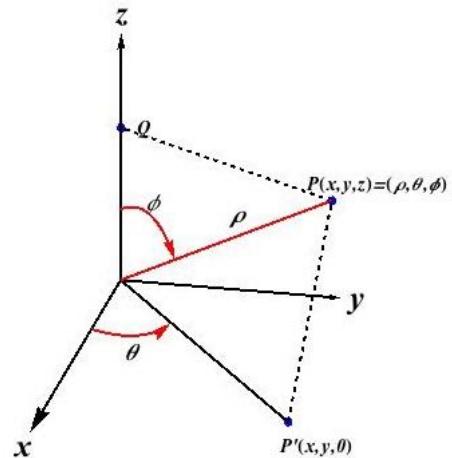


Figura 2.33: [tal vez es mejor hacer esta gráfica con Corel o Illustrator](#)

el cambio de una integral en coordenadas cartesianas a coordenadas esféricas es:

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \int_{\alpha}^{\beta} \int_c^d \int_{g_1(\theta, \phi)}^{g_2(\theta, \phi)} f(\rho \sin \phi \cos(\theta), \rho \sin \phi \sin(\theta), \rho \cos \phi) \rho^2 \sin(\phi) d\rho d\phi d\theta$$

Ejemplo 2.9.1. Calcular $\iiint_E \frac{dV}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$, donde E es el sólido limitado por las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, con $0 < a < b$.

El sólido E puede ser descrito en coordenadas esféricas fácilmente como

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) / 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi, a \leq \rho \leq b\}$$

Y la función que debemos integrar en coordenadas cilíndricas es

$$f(\rho \sin \phi \cos(\theta), \rho \sin \phi \sin(\theta), \rho \cos \phi) = \frac{1}{\rho^3}$$

Por tanto, la integral anterior se ve en coordenadas esféricas

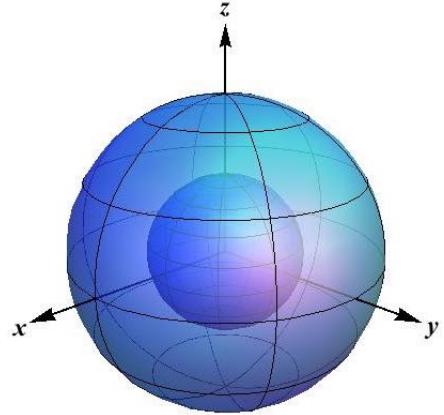


Figura 2.34: example caption

$$\begin{aligned} \iiint_E \frac{dV}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_a^b \frac{1}{\rho^3} \rho^2 \sin(\phi) d\rho d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin(\phi) d\phi \int_a^b \frac{1}{\rho} d\rho \\ &= 4\pi \ln\left(\frac{b}{a}\right). \end{aligned}$$

Ejemplo 2.9.2. Encuentre el volumen del sólido encima del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y debajo de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = z$.

Para empezar observemos que

$$x^2 + y^2 + z^2 = z \Leftrightarrow x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Ahora al pasar cada ecuación de cada superficie a coordenadas esféricas, tenemos:

La esfera es: $x^2 + y^2 + z^2 = z \Rightarrow \rho = \cos(\phi)$

El cono es: $z = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow \sin(\phi) = \cos(\phi) \Rightarrow \phi = \frac{\phi}{4}$

Por tanto nuestro sólido se describe en coordenadas esféricas como

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) / 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \rho \leq \cos(\phi)\}$$

y así, podemos expresar la integral que calcula el volumen de E en coordenadas esféricas como

$$\begin{aligned} V(E) &= \iiint_E dV \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\cos(\phi)} \rho^2 \sin(\phi) d\rho d\phi d\theta \\ &= 2\pi \int_0^{\pi/4} \int_0^{\cos(\phi)} \rho^2 \sin(\phi) d\rho d\phi \\ &= \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi/4} \sin(\phi) \cos^3(\phi) d\phi \\ &= \frac{\pi}{8} \text{ unid}^3. \end{aligned}$$

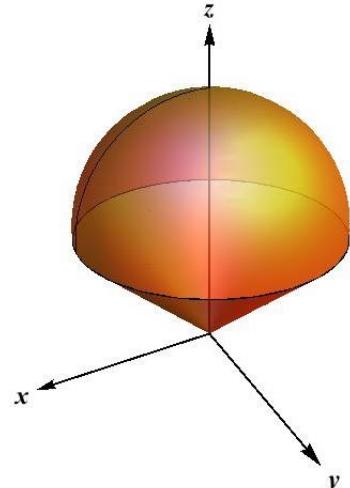


Figura 2.35: example caption

2.10. Cambio de Variable en Integrales Múltiples

Supongamos que un cambio de variables en el plano está dado por la transformación T del plano uv en el plano xy , es decir,

$$(x, y) = T(u, v) = (g(u, v), h(u, v)) \quad (1)$$

Entonces T transforma una región S del plano uv en una región R del plano xy . Supongamos que las funciones g y h son de clase \mathcal{C}^1 , entonces el **Jacobiano** de T , denotado por $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$, se define por:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}.$$

Ejemplo 2.10.1. Si $(x, y) = T(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$, calculemos el jacobiano de esta transformación correspondiente al cambio de coordenadas polares

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{vmatrix} \\ &= r \cos^2(\theta) + r \sin^2(\theta) \\ &= r \end{aligned}$$

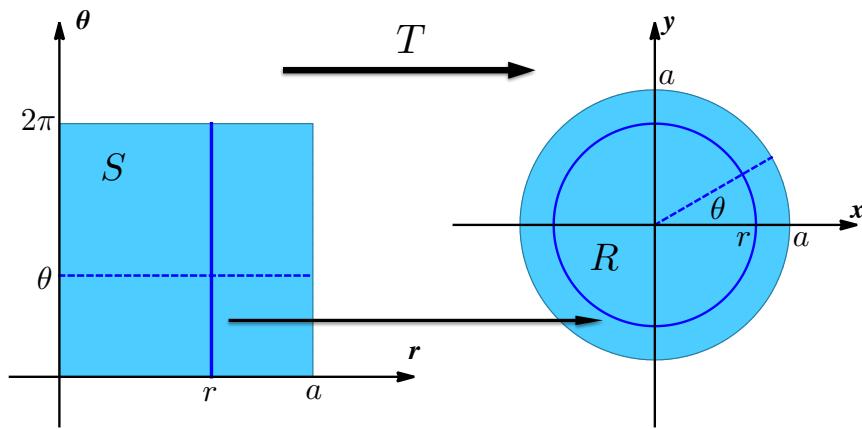


Figura 2.36: example caption

Teorema 2.10.1. Teorema Cambio de Variable

Supongamos que T es una transformación de clase C^1 , uno a uno, cuyo jacobiano es distinto de cero, y que T envía la región S del plano uv , en la región R del plano xy , es decir, $T(S) = R$. Entonces, si $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, se tiene que

$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_S f(T(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv.$$

hacer alguna comentario

Ejemplo 2.10.2. Sea R el paralelogramo acotado por las rectas $y = 3x$, $y = 3x - 2$, $y = x$, $y = x + 1$. Calcule $\iint_R xy \, dy \, dx$ haciendo un cambio de variable adecuado.

Sean $u = y - 3x$, $v = y - x$ y sea $S = \{(u, v) / -2 \leq u \leq 0, 0 \leq v \leq 1\}$. Entonces, tenemos:

$$\begin{cases} u = y - 3x & (1) \\ v = y - x & (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} (1) - (2), \quad u - v = -2x \Rightarrow x = \frac{1}{2}(v - u) \\ (1) - 3 \times (2), \quad u - 3v = -2y \Rightarrow y = \frac{1}{2}(3v - u) \end{array}$$

Por lo tanto, el jacobiano de esta transformación es:

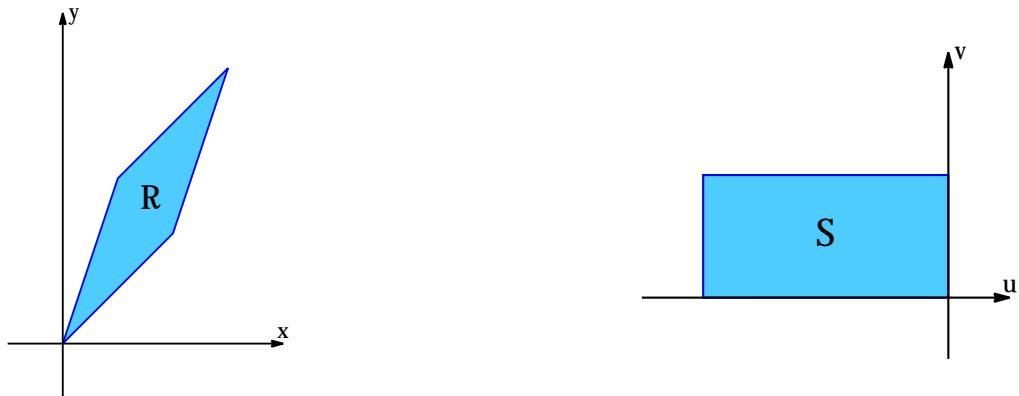


Figura 2.38: example caption

Figura 2.37: example caption

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{vmatrix} = \frac{-3}{4} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Por el Teorema de Cambio de Variable tenemos

$$\begin{aligned} \iint_R xy \, dy \, dx &= \iint_S x(u, v)y(u, v) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, du \, dv \\ &= \int_0^1 \int_{-2}^0 \frac{1}{4}(v - u)(3v - u) \cdot \frac{1}{2} \, du \, dv \\ &= \frac{13}{12}. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.10.3. Calcular $\iint_R e^{\frac{x-y}{x+y}} \, dx \, dy$, donde R es la región del primer cuadrante limitada por los ejes coordenados y la recta $x + y = 1$.

Hagamos el cambio de variable

$$\begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(u + v) \\ y = \frac{1}{2}(v - u) \end{cases}$$

Las ecuaciones de las rectas que acotan la región R , en las nuevas variables son

$$\begin{aligned}x + y = 1 &\Leftrightarrow v = 1 \\x = 0 &\Leftrightarrow \frac{u+v}{2} = 0 \Leftrightarrow v = -u \\y = 0 &\Leftrightarrow \frac{v-u}{2} = 0 \Leftrightarrow v = u\end{aligned}$$

Por tanto la nueva región integración es $S = \{(u, v) / 0 \leq v \leq 1, -v \leq u \leq v\}$. Además, el jacobiano

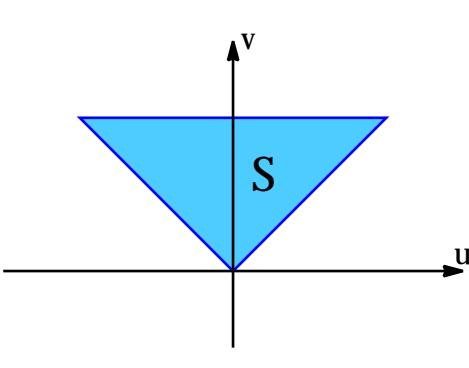


Figura 2.39: example caption

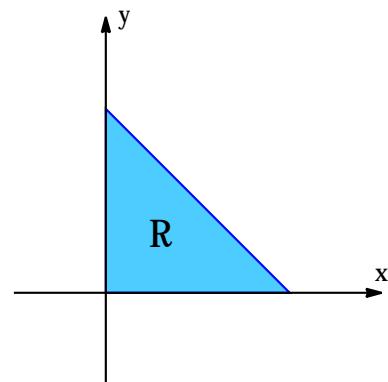


Figura 2.40: example caption

de la transformación es

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Así, por el Teorema de Cambio de Variable,

$$\begin{aligned}\iint_R e^{\frac{x-y}{x+y}} dxdy &= \iint_S e^{\frac{u}{v}} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dudv \\&= \int_0^1 \int_{-v}^v e^{\frac{u}{v}} \cdot \frac{1}{2} dudv \\&= \frac{1}{2} \int_0^1 ve^{\frac{u}{v}} \Big|_{-v}^v dv \\&= \frac{1}{2} \int_0^1 v(e - e^{-1}) dv \\&= \frac{1}{4}(e - e^{-1}).\end{aligned}$$

Ejemplo 2.10.4. Calcule $\iint_R xy dA$, donde R es la región en el primer cuadrante limitado por las rectas $y = x$, $y = 3x$ y las hipérbolas $xy = 1$, $xy = 3$.

Usemos el cambio de variable:

$$\begin{cases} u &= xy \\ v &= \frac{y}{x} \end{cases}$$

entonces la nueva región de integración es $S = \{(u, v) / 1 \leq u \leq 3, 1 \leq v \leq 3\}$.

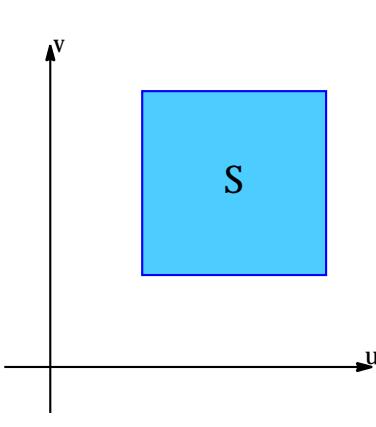


Figura 2.41: example caption

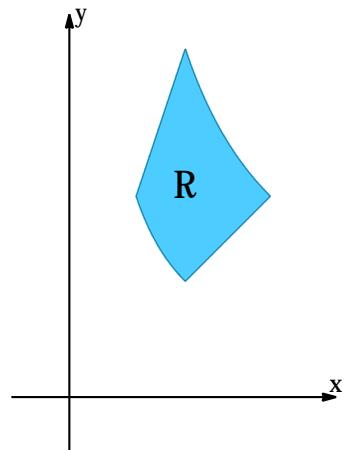


Figura 2.42: example caption

Ahora bien para calcular el jacobiano, usamos el siguiente hecho

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \left(\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right)^{-1}$$

Así no tenemos que despejar x, y en términos de u, v .

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{y}{x} + \frac{y}{x} = 2v$$

De ahí que

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{2v}.$$

Por el Teorema de Cambio de Variable se sigue que

$$\begin{aligned} \iint_R xy \, dA &= \iint_S u \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, dudv \\ &= \int_1^3 \int_1^3 u \left| \frac{1}{2v} \right| \, dudv \\ &= \frac{1}{2} \int_1^3 u \, du \int_1^3 \frac{1}{v} \, dv \\ &= 2 \ln(3). \end{aligned}$$

Formula de Cambio de Variable en Integrales Triple

Sea T una transformación que envía una región S del espacio uvw en una región R del espacio xyz , mediante las ecuaciones

$$\begin{cases} x = g(u, v, w) \\ y = h(u, v, w) \\ z = k(u, v, w) \end{cases}$$

El Jacobiano de T está definido por

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Ahora, si $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ es un función continua definida sobre R , entonces

$$\iiint_R f(x, y, z) dV = \iiint_S f(g(u, v, w), h(u, v, w), k(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| dudvdw.$$

Ejemplo 2.10.5. Sea R el sólido acotado por el elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Halle el volumen de R .

Por definición debemos calcular $\iiint_R dV$, donde $R = \{(x, y, z) / \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$. Para esto usaremos el cambio de variable

$$u = \frac{x}{a}, \quad v = \frac{y}{b}, \quad z = \frac{z}{c}$$

Entonces la nueva región de integración en el espacio uvw es $S = \{(u, v, w) / u^2 + v^2 + w^2 \leq 1\}$, esto es, la transformación $(x, y, z) = T(u, v, w)$, transforma el sólido acotado por la esfera, S , en el sólido acotado por la elipsoide, R . El jacobiano de esta transformación es

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$$

Por tanto el volumen de R , puede ser calculado usando el Teorema de Cambio de Variable, así

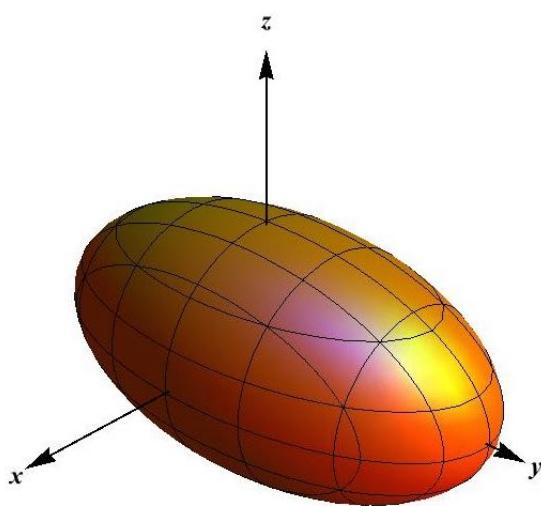


Figura 2.43: example caption

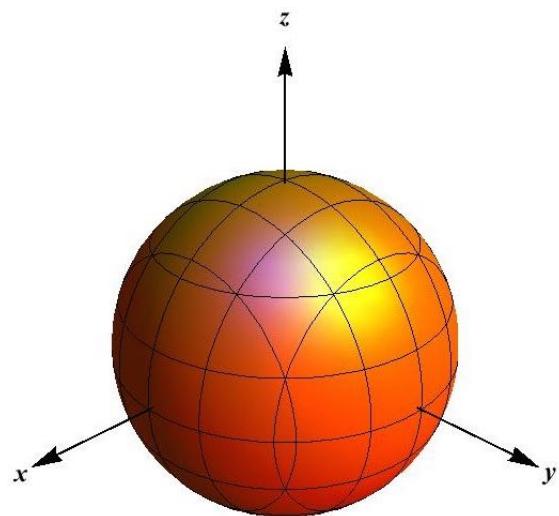


Figura 2.44: example caption

$$\begin{aligned}
 V(R) &= \iiint_R dV \\
 &= \iiint_S \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| dudvdw \\
 &= \iiint_S |abc| dudvdw \\
 &= abc \iiint_S dudvdw \\
 &= \frac{4}{3}abc\pi.
 \end{aligned}$$

Ejercicio Sean $x = \rho \sin(\phi) \cos(\theta)$, $y = \rho \sin(\phi) \sin(\theta)$, $z = \rho \cos(\phi)$. Hallar $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)}$.

Capítulo 3

Elementos de Cálculo Vectorial

RESUMEN:

3.1. Longitud de Curva y La Integral de Escalar de Linea

Sean f, g, h funciones reales definidas en un intervalo $I = [a, b]$ de \mathbb{R} , entonces, el conjunto $C = \{(x, y, z) / x = f(t), y = g(t), z = h(t), t \in I\}$ se denomina **curva en el espacio**.

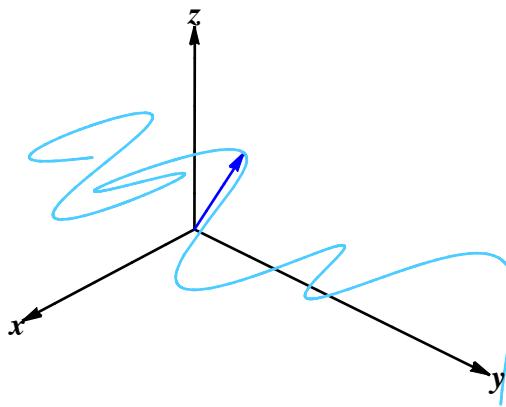


Figura 3.1: example caption

La curva C es el rango de la función vectorial $\vec{\gamma} : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\vec{\gamma}(t) = (f(t), g(t), h(t)) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}.$$

Las ecuaciones ; $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$ se denominan **ecuaciones paramétricas** de C , con $t \in I$. La variable t se denomina **parámetro**.

Supongamos que f, g y h son funciones de clase C^1 definidas en el intervalo $I = [a, b]$, entonces, la **longitud de arco de** $\vec{\gamma}$ se define por

$$\mathcal{L}(\vec{\gamma}) = \mathcal{L}(C) = \int_a^b \|\vec{\gamma}'(t)\| dt,$$

donde $\vec{\gamma}'(t) = (f'(t), g'(t), h'(t))$. El vector $\vec{\gamma}'(t)$ es un vector tangente a la curva C en el punto $P = (f(t), g(t), h(t))$. Una forma explícita de la integral anterior es la siguiente

$$\mathcal{L}(\vec{\gamma}) \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2} dt.$$

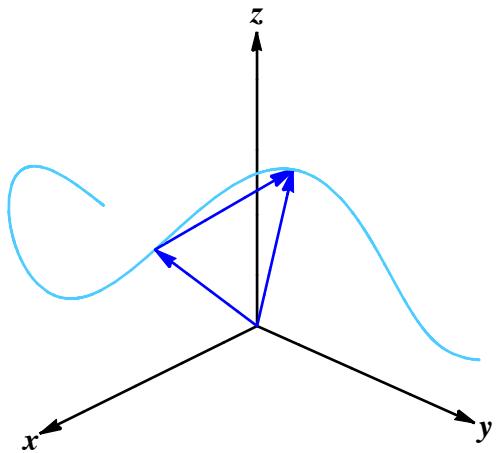


Figura 3.2: example caption

Ejemplo 3.1.1. Hallar la longitud del arco de la hélice con ecuación vectorial $\vec{\gamma}(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$, desde el punto $(1, 0, 0)$ hasta el punto $(1, 0, 4\pi)$.

Las ecuaciones paramétricas son: $x = \cos(t)$, $y = \sin(t)$, $z = t$ con $t \in [0, 4\pi]$. Observemos que $x^2 + y^2 = 1$, lo cual nos dice que la hélice es un subconjunto del cilindro. Ahora para calcular la longitud de la hélice, debemos hallar $\|\vec{\gamma}'\|$, esto es,

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}'(t) &= (f'(t), g'(t), h'(t)) \\ \vec{\gamma}'(t) &= (\sin(t), -\cos(t), 1) \\ \|\vec{\gamma}'(t)\| &= \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + 1} \\ \|\vec{\gamma}'(t)\| &= \sqrt{2}.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\vec{\gamma}) &= \int_0^{4\pi} \|\vec{\gamma}'(t)\| dt \\ &= \int_0^{4\pi} \sqrt{2} dt \\ &= 4\sqrt{2}\pi \text{ unid.}\end{aligned}$$

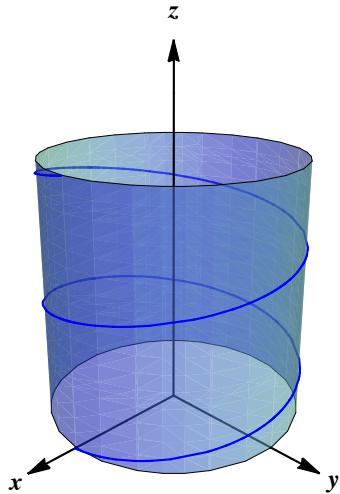


Figura 3.3: example caption

Sea C una curva plana y suave con ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$ con $a \leq t \leq b$, y sea $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ una **función escalar** definida sobre C . La integral de Línea de f a lo largo de C es por definición

$$\int_C f(x, y) dS := \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

(dS es llamado el **diferencial de longitud de arco**.)

Si $\vec{\gamma}(t) = (x(t), y(t))$, podemos reescribir la integral anterior como

$$\int_C f(x, y) dS := \int_a^b f(x(t), y(t)) \|\vec{\gamma}'(t)\| dt.$$

Observaciones:

- Si $f(x, y) = 1$ para todo $(x, y) \in C$, entonces, $\int_C f(x, y) dS$ es igual a la integral que calcula la longitud de arco de la curva C .
- Si $f(x, y) \geq 0$ para todo $(x, y) \in C$, $\int_C f(x, y) dS$ representa el **área** de una pared vertical construida sobre la curva C que en el punto (x, y) de C tiene por altura a $f(x, y)$.

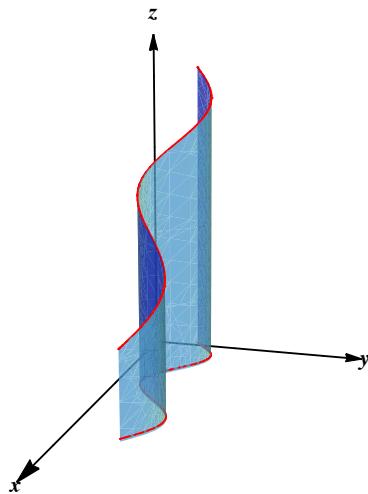


Figura 3.4: example caption

- Si C es un alambre y $f(x, y)$ representa la densidad del alambre en el punto (x, y) , esto es, $f(x, y)$ es la densidad lineal de masa, entonces, $\int_C f(x, y) dS$ representa la masa total del alambre.
- El centro de masa (\bar{x}, \bar{y}) del alambre se define por:

$$\bar{x} = \frac{\int_C x f(x, y) dS}{\int_C f(x, y) dS}, \quad \bar{y} = \frac{\int_C y f(x, y) dS}{\int_C f(x, y) dS}$$

Sea C una curva en el espacio, suave, con ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ con $a \leq t \leq b$, y sea $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ una **función escalar** definida sobre C . La integral de Línea de f a lo largo de C es por definición

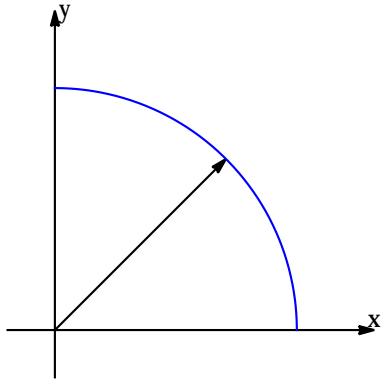
$$\int_C f(x, y, z) dS := \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt.$$

Si $\vec{\gamma}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, podemos reescribir la integral anterior como

$$\int_C f(x, y) dS := \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \|\vec{\gamma}'(t)\| dt.$$

Ejemplo 3.1.2. Hallar la masa y el centro de masa de una alambre delgado que tiene forma de un cuarto de circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$, con $x \geq 0$, $y \geq 0$, si la función de densidad es $\delta(x, y) = x + y$

Empecemos por parametrizar la curva C que representa el alambre descrito



$$\begin{cases} x = x(t) &= r \cos(t) \\ y = y(t) &= r \sin(t) \end{cases} \quad \text{con } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Así, la masa del alambre es

$$\begin{aligned} m &= \int_D \delta(x, y) dS \\ &= \int_0^{\pi/2} (r \cos(t) + r \sin(t)) \sqrt{r^2 \sin^2(t) + r^2 \cos^2(t)} dt \\ &= r^2 \int_0^{\pi/2} (\cos(t) + \sin(t)) dt \\ &= 2r^2. \end{aligned}$$

Figura 3.5: example caption

Ahora, las coordenadas del centro de masa son:

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \int_C x f(x, y) dS$$

$$\bar{x} = \frac{1}{2r^2} \int_0^{\pi/2} (r \cos(t))(r \cos(t) + r \sin(t)) r dS$$

$$\bar{x} = \frac{r}{2} \int_0^{\pi/2} (\cos^2(t) + \cos(t) \sin(t)) dS$$

$$\bar{x} = \frac{r(2 + \pi)}{8}$$

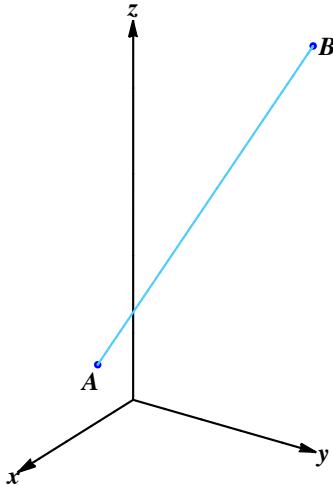
$$\bar{y} = \frac{1}{m} \int_C y f(x, y) dS$$

$$\bar{y} = \frac{1}{2r^2} \int_0^{\pi/2} (r \sin(t))(r \cos(t) + r \sin(t)) r dS$$

$$\bar{y} = \frac{r}{2} \int_0^{\pi/2} (\sin(t) \cos(t) + \sin^2(t)) dS$$

$$\bar{y} = \frac{r(2 + \pi)}{8}$$

Ejemplo 3.1.3. Calcule $\int_C xy^2 z \, dS$, donde C es el segmento de recta que va de $(1, 0, 1)$ a $(0, 3, 6)$.



Parametricemos la curva C como

$$\vec{\gamma}(t) = (1-t)A + tB, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\vec{\gamma}(t) = (1-t)(1, 0, 1) + t(0, 3, 6), \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\vec{\gamma}(t) = (1-t, 3t, 1+5t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Así, $f(x(t), y(t), z(t)) = (1-t)(3t)^2(1+5t)$, esto es
 $f(\vec{\gamma}(t)) = 9t^2 + 36t^3 - 45t^4$. Además,

$$\vec{\gamma}'(t) = (-1, 3, 5) \Rightarrow \|\vec{\gamma}'(t)\| = \sqrt{35}.$$

Figura 3.6: example caption

Por tanto, la integral de línea de $f(x, y, z) = xy^2 z$ a lo largo de la curva C es

$$\begin{aligned} \int_C xy^2 z \, dS &= \int_0^1 f(x(t), y(t), z(t)) \|\vec{\gamma}'(t)\| \, dt \\ &= \int_0^1 (9t^2 + 36t^3 - 45t^4) \sqrt{35} \, dt \\ &= 3\sqrt{35}. \end{aligned}$$

3.2. Campos Vectoriales en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3

Definición 3.2.1. Sea D un subconjunto de \mathbb{R}^2 . Un **Campo Vectorial** en D es una función \vec{F} que a cada punto de D le asigna un vector bidimensional $\vec{F}(x, y)$. Es decir, $\vec{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$.

Las funciones P y Q son funciones escalares de dos variables definidas en D .

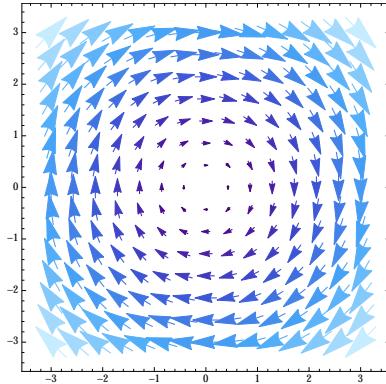


Figura 3.7: example caption

Definición 3.2.2. Sea E un subconjunto de \mathbb{R}^3 . Un **Campo Vectorial** en E es una función \vec{F} que a cada punto de E le asigna un vector tridimensional $\vec{F}(x, y, z)$. Es decir, $\vec{F} : E \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$. Las funciones P , Q y R son funciones escalares de tres variables definidas en E .

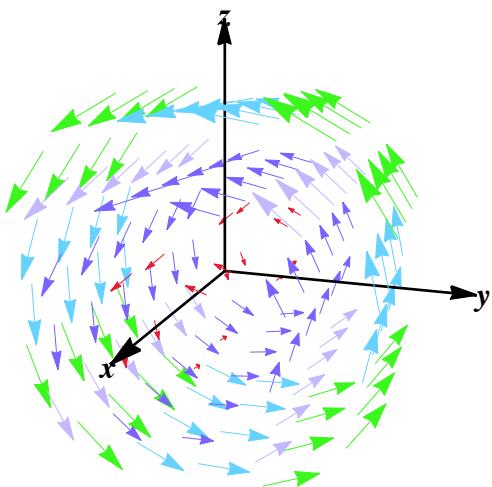


Figura 3.8: example caption

Ejemplo 3.2.1. El campo de velocidades de un fluido es un campo vectorial en \mathbb{R}^3 .

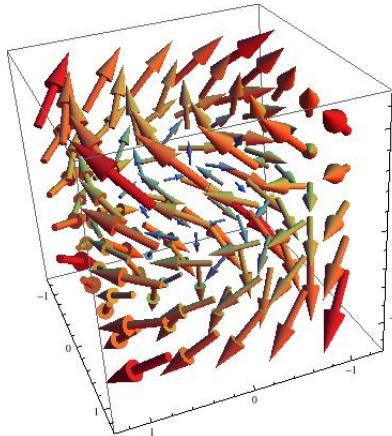


Figura 3.9: example caption

Ejemplo 3.2.2. El Campo Gravitacional generado por una partícula de masa M situada en $(0, 0, 0)$.

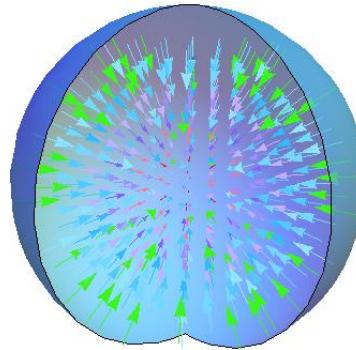


Figura 3.10: example caption

De acuerdo con la ley de la gravitación universal, $\|\vec{F}\| = \frac{GMm}{x^2 + y^2 + z^2}$.

Llamemos $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, entonces $\vec{F} = \|\vec{F}\|\vec{u}$, donde

$$\vec{u} = \frac{(-x, -y, -z)}{\|(-x, -y, -z)\|} = -\frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{\vec{r}}{r}$$

Por tanto

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^3}\vec{r}$$

Esto es

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(-\frac{GMmx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, -\frac{GMy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, -\frac{GMz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right)$$

Ejemplo 3.2.3. El Campo Gradiente es un campo Vectorial. Si f es una función escalar de dos variables de clase \mathcal{C}^1 , entonces $\nabla f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y))$ es un campo vectorial en \mathbb{R}^2 . Si f es

una función escalar de tres variables de clase \mathcal{C}^1 , $\nabla f(x, y, z) = (f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z))$ es un campo vectorial en \mathbb{R}^3 .

Definición 3.2.3. Un campo vectorial \vec{F} se denomina **conservativo** si existe una función escalar f tal que $\nabla f = \vec{F}$.

Ejemplo 3.2.4. El campo vectorial del ejemplo 3.2.2 es un campo conservativo, ya que si tomamos la función escalar $f(x, y, z) = \frac{GMm}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, tenemos que $\nabla f = \vec{F}$ para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

3.3. Integral de Línea de Campos Vectoriales

Sea \vec{F} un campo vectorial continuo definido sobre la curva C , dada por la función vectorial $\vec{\gamma}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, con $a \leq t \leq b$.

La integral de línea de \vec{F} a lo largo de C es

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} = \int_a^b \vec{F}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t) dt.$$

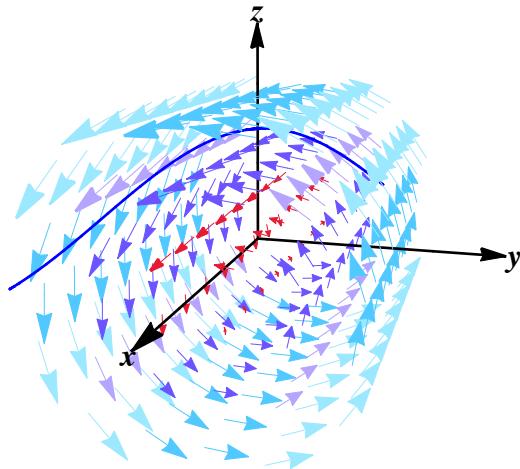


Figura 3.11: example caption

Observación:

- Sea $\vec{T}(t) = \frac{\vec{\gamma}'(t)}{\|\vec{\gamma}'(t)\|}$, es un vector unitario tangente a la curva C en el punto $\vec{\gamma}(t)$. Entonces

reescribiendo tenemos

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} &= \int_a^b \vec{F}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \frac{\vec{\gamma}'(t)}{\|\vec{\gamma}'(t)\|} \|\vec{\gamma}'(t)\| dt \\ &= \int_a^b \vec{F}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{T}(t) dS\end{aligned}$$

De donde podemos concluir que $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\gamma}$ es la integral de línea de la componente tangencial $\vec{F}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{T}(t)$ del campo vectorial \vec{F} .

- Podemos interpretar la integral de línea de un campo vectorial $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\gamma}$ como el trabajo realizado por el campo vectorial \vec{F} sobre una partícula de prueba que se mueve según la trayectoria $\vec{\gamma}$.

Si $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ y $\vec{\gamma}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, entonces se suele escribir la integral de línea de \vec{F} a lo largo de C como

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} &= \int_C P dx + Q dy + R dz \\ &= \int_a^b [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)] dt\end{aligned}$$

Ejemplo 3.3.1. Evalué la integral de línea $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\gamma}$ si $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, xy, z^2)$ y C es la curva imagen de $\vec{\gamma}(t) = (\sin(t), \cos(t), t^2)$ con $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

Dado que $\vec{\gamma}(t) = (\sin(t), \cos(t), t^2)$, tenemos que

$\vec{\gamma}'(t) = (-\cos(t), \sin(t), 2t)$. Por definición,

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} &= \int_0^{\pi/2} \vec{F}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} (\sin^2(t), \sin(t)\cos(t), t^4) \cdot ((-\cos(t), \sin(t), 2t) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} (-\cos(t)\sin^2(t) + \sin^2(t)\cos(t) + 2t^5) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} 2t^5 dt \\ &= \frac{\pi^6}{192}\end{aligned}$$

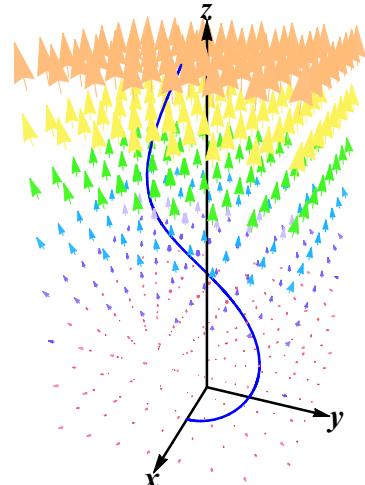


Figura 3.12: example caption

Ejemplo 3.3.2. Halle el trabajo que efectúa el campo de fuerzas $\vec{F}(x, y) = x \sin(y) \vec{i} + y \vec{j}$ sobre una partícula que se mueve a lo largo de la parábola $y = x^2$ de $(-1, 1)$ a $(2, 4)$.

En primer lugar, debemos parametrizar la curva C , esto es,

$$\begin{cases} x = t \\ y = x^2 = t^2 \end{cases} \quad \text{con } -1 \leq t \leq 2.$$

De donde $\vec{\gamma}(t) = (t, t^2)$ con $-1 \leq t \leq 2$. Así por definición tenemos que

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} &= \int_{-1}^2 \vec{F}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t) dt \\ &= \int_{-1}^2 (t \sin(t^2), t^2) \cdot (1, 2t) dt \\ &= \int_{-1}^2 (t \sin(t^2) + 2t^3) dt \\ &= \frac{1}{2}(15 + \cos(1) - \cos(4)). \end{aligned}$$

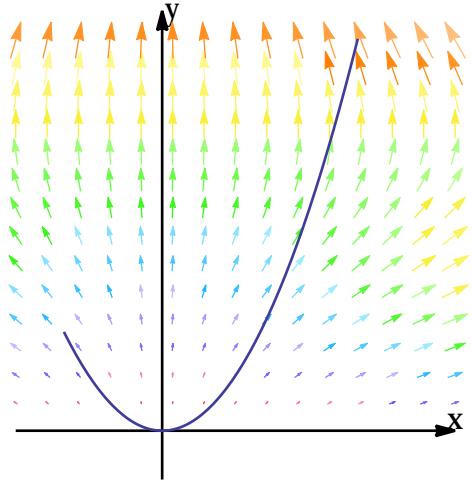


Figura 3.13: example caption

3.4. Teorema Fundamental de las Integrales de Línea

Teorema 3.4.1. Sea C una curva suave dada por la función vectorial $\vec{\gamma}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ con $a \leq t \leq b$, y sea $\vec{F}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$ un campo conservativo continuo en C . Entonces,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} = \int_C \nabla f \cdot d\vec{\gamma} = f(\vec{\gamma}(b)) - f(\vec{\gamma}(a)).$$

Nota:

1. Si C_1 y C_2 son dos curvas suaves que tienen el mismo punto inicial A y el mismo punto final B , entonces,

$$\int_{C_1} \nabla f \cdot d\vec{\gamma} = \int_{C_2} \nabla f \cdot d\vec{\gamma} = f(B) - f(A).$$

2. Si C es una **curva cerrada suave**, esto es, $\vec{\gamma}(a) = \vec{\gamma}(b)$, entonces

$$\int_C \nabla f \cdot d\vec{\gamma} = 0$$

Ejemplo 3.4.1. Sea $\vec{F}(x, y) = (3 + 2xy)\vec{i} + (x^2 - 3y^2)\vec{j}$. Evaluar $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\gamma}$, si C es la curva dada por $\vec{\gamma}(t) = (e^t \sin(t), e^t \cos(t))$, $0 \leq t \leq \pi$.

Poder usar el Teorema Fundamental de las Integrales de Línea debemos saber si existe una función escalar f , tal que, $\nabla f = \vec{F}$, esto es,

$$\begin{cases} f_x(x, y) &= P(x, y) = 3 + 2xy \quad (1) \\ f_y(x, y) &= Q(x, y) = x^2 - 3y^2 \quad (2) \end{cases}$$

Para esto, integramos la ecuación (1) con respecto a x , para obtener

$$f(x, y) = 3x + x^2y + h(y) \quad (\star)$$

Derivando (\star) con respecto a y e igualando a (2), tenemos

$$x^2 + h'(y) = x^2 - 3y^2 \Rightarrow h'(y) = -3y^2 \Rightarrow h(y) = -y^3 + c$$

Tomando $c = 0$, tenemos que $f(x, y) = 3x + x^2y - y^3$, es tal que, $\nabla f = \vec{F}$. Ahora bien, aplicando el Teorema 3.4.1

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} &= \int_C \nabla f \cdot d\vec{\gamma} \\ &= f(\vec{\gamma}(\pi)) - f(\vec{\gamma}(0)) \\ &= f(0, -e^\pi) - f(0, 1) \\ &= e^{3\pi} + 1. \end{aligned}$$

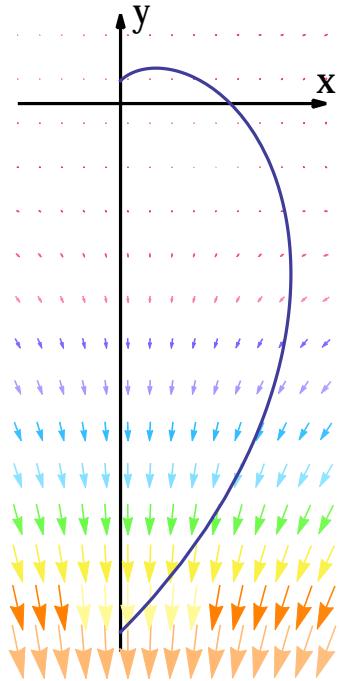


Figura 3.14: example caption

Ejercicio. Sea $\vec{F}(x, y, z) = \frac{c\vec{\gamma}}{\|\vec{\gamma}\|^3}$, donde $\vec{\gamma} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Halle el trabajo realizado por \vec{F} al mover un objeto desde un punto P_1 hasta un punto P_2 , a lo largo de una trayectoria C arbitraria.

3.5. Superficies Paramétricas

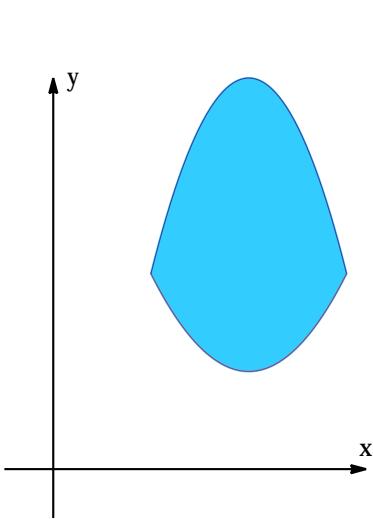


Figura 3.15: example caption

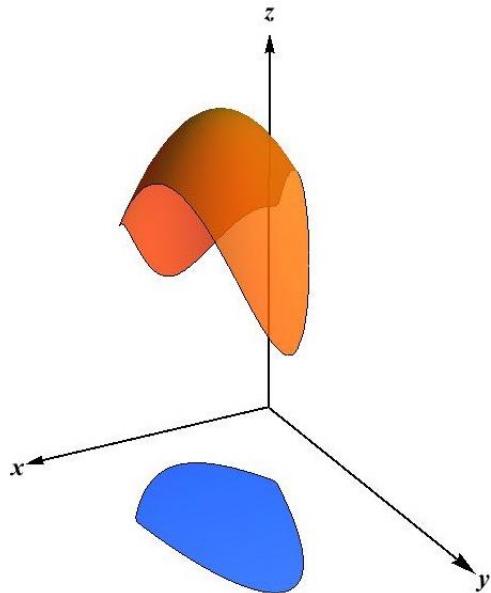


Figura 3.16: example caption

Supongamos que

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k} \quad (*)$$

es una función con valor vectorial definida en una región D en el plano uv . De este modo, el rango de \mathbf{r} se llamará **Superficie S** definida o trazada por \mathbf{r} . Las ecuaciones (*) junto con el dominio de \mathbf{r} constituyen una parametrización de la superficie. Las variables u, v son **los parámetros**. Es decir, si $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ entonces, unas ecuaciones paramétricas para S son

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) & \text{con } (u, v) \in D. \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

Ejemplo 3.5.1. Parametrizar la esfera S de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, haciendo uso de las coordenadas esféricas. Si (x, y, z) es un punto arbitrario sobre la esfera, él se puede expresar como

$$\begin{cases} x = a \sin(\phi) \cos(\theta) \\ y = a \sin(\phi) \sin(\theta) & \text{con } (\theta, \phi) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi] = D. \\ z = a \cos(\phi) \end{cases}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{r} : [0, 2\pi] \times [0, \pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta, \phi) &\longmapsto \mathbf{r}(\theta, \phi) = a \sin(\phi) \cos(\theta)\mathbf{i} + a \sin(\phi) \sin(\theta)\mathbf{j} + a \cos(\phi)\mathbf{k} \end{aligned}$$

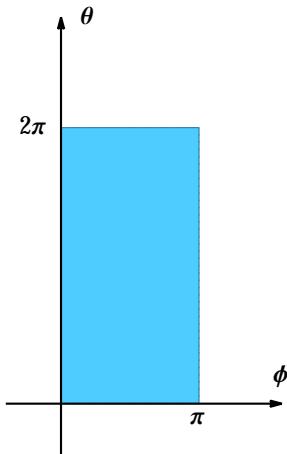


Figura 3.17: example caption

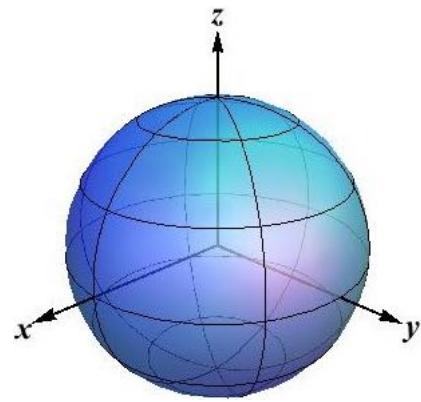


Figura 3.18: example caption

Ejemplo 3.5.2. Dado el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, podemos parametrizarlo como

$$\begin{aligned}\mathbf{R} : [0, \infty] \times [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r, 2\theta) &\longmapsto \mathbf{R}(r, \theta) = r \cos(\theta)\mathbf{i} + r \sin(\theta)\mathbf{j} + r\mathbf{k}\end{aligned}$$

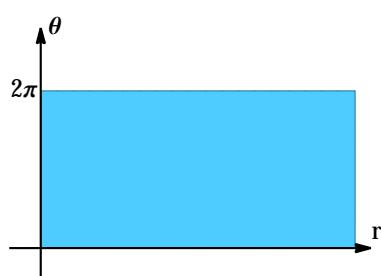


Figura 3.19: example caption

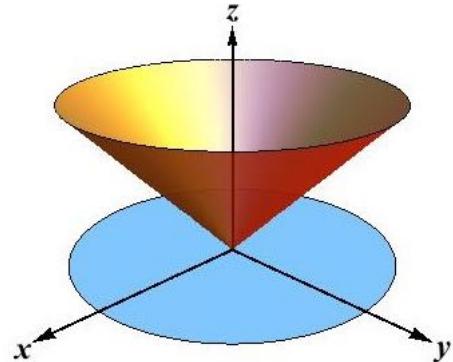


Figura 3.20: example caption

3.6. Área de una Superficie Paramétrica

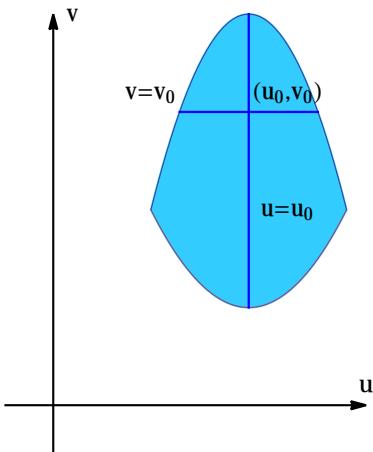


Figura 3.21: example caption

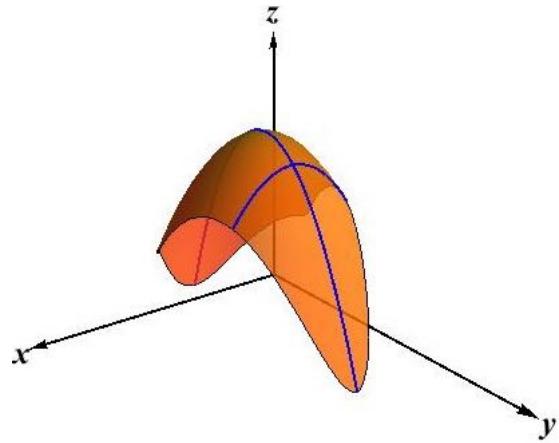


Figura 3.22: example caption

Sea

$$\begin{aligned} \mathbf{r} : D &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto \mathbf{r}(u, v) \end{aligned}$$

la parametrización de una superficie S . Sea $P_0 = \mathbf{r}(u_0, v_0) = x(u_0, v_0)\mathbf{i} + y(u_0, v_0)\mathbf{j} + z(u_0, v_0)\mathbf{k}$.

Sea C_1 la curva en S dada por $\mathbf{r}(u, v_0) = x(u, v_0)\mathbf{i} + y(u, v_0)\mathbf{j} + z(u, v_0)\mathbf{k}$. Sea C_2 la curva en S dada por $\mathbf{r}(u_0, v) = x(u_0, v)\mathbf{i} + y(u_0, v)\mathbf{j} + z(u_0, v)\mathbf{k}$.

Un vector tangente a C_1 en P_0 es:

$$\mathbf{r}_u(u, v_0) = \frac{\partial x}{\partial u}(u, v_0)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u, v_0)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u, v_0)\mathbf{k}$$

Un vector tangente a C_2 en P_0 es:

$$\mathbf{r}_v(u, v_0) = \frac{\partial x}{\partial v}(u, v_0)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u, v_0)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u, v_0)\mathbf{k}$$

El vector $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ es un vector normal a S en P_0 . Además, sabes que, $\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|$ representa el área del paralelogramo generado por los vectores \mathbf{r}_u y \mathbf{r}_v . Por tanto $\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| dudv$, representa el área de un paralelogramo infinitesimal tangente a S en P_0 .

Definimos **El Área de la Superficie S** por

$$A(S) = \iint_D \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| dudv$$

Ejemplo 3.6.1. Calculemos el área de una esfera S de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Por un ejemplo anterior sabemos que unas ecuaciones parametricas para S en coordenadas esféricas son:

$$\begin{cases} x &= a \sin(\phi) \cos(\theta) \\ y &= a \sin(\phi) \sin(\theta) \quad \text{con } (\theta, \phi) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi] = D. \\ z &= a \cos(\phi) \end{cases}$$

Así, $\mathbf{r}(\theta, \phi) = a \sin(\phi) \cos(\theta)\mathbf{i} + a \sin(\phi) \sin(\theta)\mathbf{j} + a \cos(\phi)\mathbf{k}$ y derivando parcialmente con respecto a θ y a ϕ , tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_\theta(\theta, \phi) &= -a \sin(\phi) \sin(\theta)\mathbf{i} + a \sin(\phi) \cos(\theta)\mathbf{j} \\ \mathbf{r}_\phi(\theta, \phi) &= a \cos(\phi) \cos(\theta)\mathbf{i} - a \cos(\phi) \sin(\theta)\mathbf{j} - a \sin(\phi)\mathbf{k} \end{aligned}$$

Al hacer el producto cruz entre estos dos vectores tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\phi &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a \sin(\phi) \sin(\theta) & a \sin(\phi) \cos(\theta) & 0 \\ a \cos(\phi) \cos(\theta) & -a \cos(\phi) \sin(\theta) & -a \sin(\phi) \end{vmatrix} \\ &= a^2 \sin(\phi) [-\sin(\phi) \cos(\theta)\mathbf{i} - \sin(\phi) \sin(\theta)\mathbf{j} - \cos(\phi)\mathbf{k}] \\ \|\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\phi\| &= a^2 \sin(\phi). \end{aligned}$$

Así, aplicando la definición de área superficial tenemos que

$$\begin{aligned} A(s) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi a^2 \sin(\phi) d\phi d\theta \\ &= 2\pi a^2 \int_0^\pi \sin(\phi) d\phi \\ &= 4\pi a^2. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.6.2. Sea S la superficie con ecuación $z = f(x, y)$, con $(x, y) \in D$, es decir, S es la gráfica de una función de dos variables. Encuentre una expresión para el área de S .

Una posible parametrización para S es

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f(x, y) \end{cases} \quad \text{con } (x, y) \in D.$$

esto es, $\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x, y)\mathbf{k}$ con $(x, y) \in D$. Ahora, derivando parcialmente con respecto a x y a y , tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_x(x, y) &= \mathbf{i} + f_x(x, y)\mathbf{k} \\ \mathbf{r}_y(x, y) &= \mathbf{j} + f_y(x, y)\mathbf{k} \end{aligned}$$

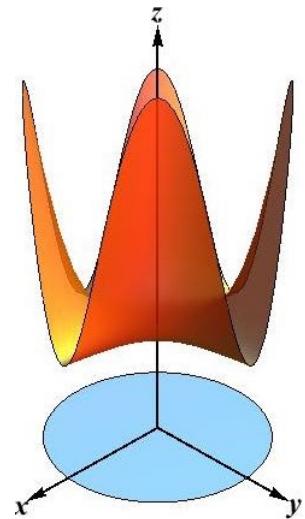


Figura 3.23: example caption

Al hacer el producto cruz, obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & f_x(x, y) \\ 0 & 1 & f_y(x, y) \end{vmatrix} \\ &= -f_x(x, y)\mathbf{i} - f_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k} \\ \|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y\| &= \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}. \end{aligned}$$

Por tanto una formula para el área de una superficie S determinada por una función $z = f(x, y)$ es:

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dxdy.$$

Ejemplo 3.6.3. Halle el área del paraboloide $z = x^2 + y^2$, que está por debajo del plano $z = 4$

Para esto vemos que la proyección de la superficie en el plano xy es

$$D = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq 4\}$$

Así, el área de la superficie es

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy = \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy.$$

Haciendo un cambio a coordenadas polares:

$$A(S) = \int_0^{2\pi} \int_0^2 r \sqrt{1 + 4r^2} dr d\theta = 2\pi \int_0^2 r \sqrt{1 + 4r^2} dr = \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 1).$$

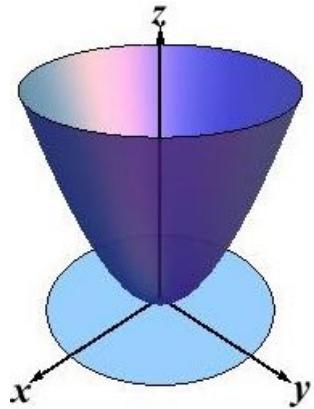


Figura 3.24: example caption

3.7. Integral de Superficie de una Función Escalar

Sean $S = \{(x, y, z) / x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) \in D\}$ una superficie paramétrica suave y $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ una función escalar definida en S .

Definimos **La Integral de Superficie de f sobre S** por

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u, v)) \|\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)\| du dv$$

donde $\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$.

Notas:

- (i) Si $f(x, y, z) = 1$ para todo $(x, y, z) \in S$,

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_S dS = \iint_D \|\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)\| du dv = A(S)$$

- (ii) Si $f(x, y, z)$ representa la densidad de masa por unidad de superficie de una superficie metálica S , entonces $m = \iint_S f(x, y, z) dS$ representa la masa de la superficie metálica.

En este caso el centro de masa $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ de la superficie metálica S está dado por

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \iint_S x f(x, y, z) dS, \quad \bar{y} = \frac{1}{m} \iint_S y f(x, y, z) dS, \quad \bar{z} = \frac{1}{m} \iint_S z f(x, y, z) dS.$$

Ejemplo 3.7.1. Evalúe la integral de superficie $\iint_S xy dS$, donde S es la frontera de la región encerrada por el cilindro $x^2 + z^2 = 1$ y los planos $y = 0$, $x + y = 2$.

3.8. Integral de Superficie de un Campo Vectorial

Una superficie **orientable** S es una superficie de dos lados $\tilde{\mathbf{n}}_2 = -\tilde{\mathbf{n}}_1$

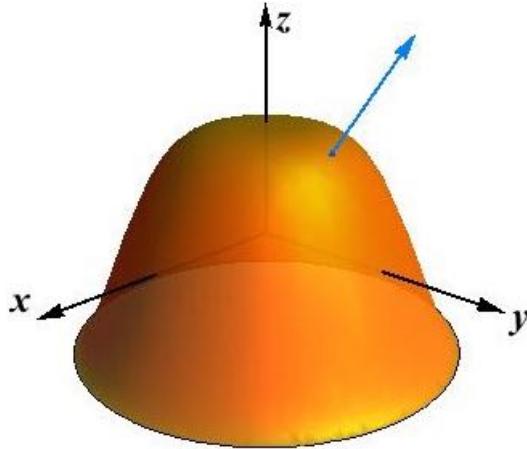


Figura 3.25: example caption

Una superficie orientable puede ser orientada de dos maneras: una forma la determina un **vector normal unitario** $\tilde{\mathbf{n}}_1$ que apunta a un lado y que varía de manera continua sobre S , y la otra forma la determina el **vector norma unitario** $-\tilde{\mathbf{n}}_1$ que apunta hacia el otro lado.

Ejemplo 3.8.1. Sea S la gráfica de una función de dos variables $S = \{(x, y, z) / z = g(x, y), (x, y) \in D\}$. Como vimos antes, S admite la parametrización

$$\begin{cases} x = x \\ y = y & \text{con } (x, y) \in D. \\ z = g(x, y) \end{cases}$$

La función vectorial que determina a S es $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, g(x, y))$, de donde

$$\mathbf{r}_x = (1, 0, g_x(x, y)), \quad \mathbf{r}_y = (0, 1, g_y(x, y))$$

por tanto $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = (-g_x(x, y), -g_y(x, y), 1)$. Para cada $(x, y, z) \in S$, el vector normal unitario \vec{n} que apunta hacia arriba esta dado por

$$\vec{n} = \frac{\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y}{\|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (g_x)^2 + (g_y)^2}}(-g_x, -g_y, 1)$$

Sea S una superficie orientable con un vector normal unitario \vec{n} y sea \overrightarrow{F} un campo vectorial continuo definido en S .

La Integral de Superficie de \vec{F} sobre S (o flujo de \vec{F} a través de S) se define por

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS$$

Si $\mathbf{r}(u, v)$ con $(u, v) \in D$ es una función vectorial que determinan a S , entonces la integral anterior es

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D \vec{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) dudv.$$

Interpretación: Cuando \vec{F} es el campo de velocidades de un flujo, la integral $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ es igual a la cantidad de fluido que pasa a través de S , en la dirección de \vec{n} .

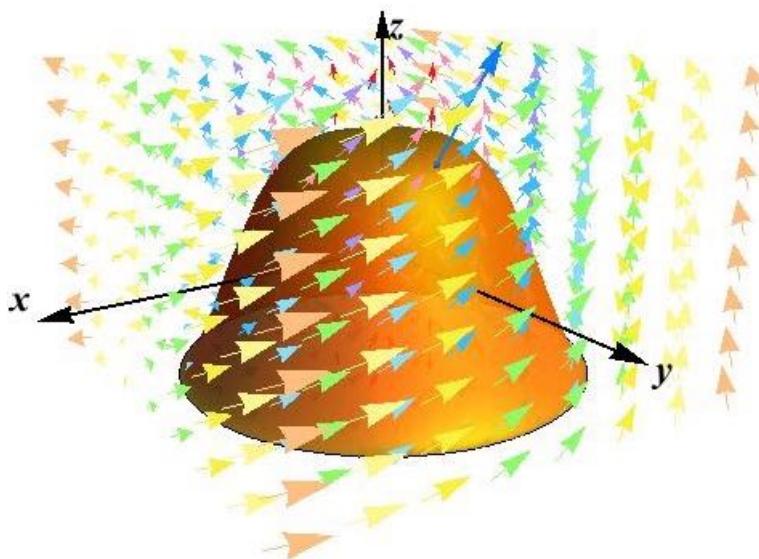


Figura 3.26: example caption

Ejemplo 3.8.2. Si $S = \{(x, y, z) / z = g(x, y), (x, y) \in D\}$ con vector normal unitario \vec{n} apuntando hacia arriba y $\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$. Entonces, una función vectorial que determina a S es $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, g(x, y))$ y así, $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = (-g_x(x, y), -g_y(x, y), 1)$. La integral de Superficie de \vec{F} sobre S en este caso es

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_D \vec{F}(\mathbf{r}(x, y)) \cdot (\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y) dxdy \\ &= \iint_D \vec{F}(x, y, g(x, y)) \cdot (-g_x(x, y), -g_y(x, y), 1) dxdy \\ &= \iint_D [-P(x, y, g(x, y))g_x(x, y) - Q(x, y, g(x, y))g_y(x, y) + R(x, y, g(x, y))] dxdy \end{aligned}$$

Ejemplo 3.8.3. Evalúe la integral de superficie $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, donde $\vec{F}(x, y, z) = (-x, -y, z^2)$ y S es la parte del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ que está entre los planos $z = 1$ y $z = 2$ con orientación con el vector normal hacia arriba.

Es claro que la superficie $S = \{(x, y, z) / z = \sqrt{x^2 + y^2}, (x, y) \in D\}$, donde $D = \{(x, y) / 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. Una forma de parametrizar a S , es,

$$\begin{cases} x &= x \\ y &= y \\ z &= \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \quad \text{con } (x, y) \in D.$$

La función vectorial que determina a S es $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2})$. De donde

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = (-g_x(x, y), -g_y(x, y), 1) = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right)$$

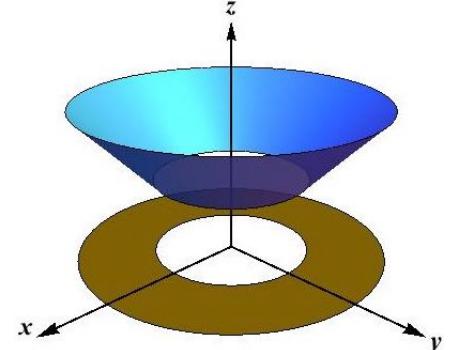


Figura 3.27: example caption

es un vector normal que apunta hacia arriba, por el ejemplo anterior

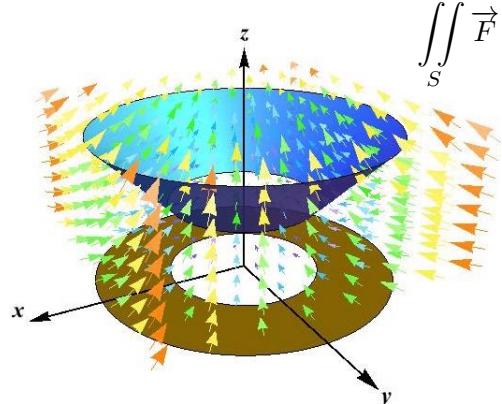


Figura 3.28: example caption

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_D \vec{F}(x, y, \sqrt{x^2 + y^2}) \cdot (\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y) dx dy \\ &= \iint_D (-x, -y, x^2 + y^2) \cdot \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right) dx dy \\ &= \iint_D \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + x^2 + y^2 \right) dx dy \\ &= \iint_D \left(\sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + y^2 \right) dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_1^2 (r + r^2) r dr d\theta \\ &= \frac{75\pi}{6}. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.8.4. Determine el flujo hacia afuera del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (-y, x, 2z)$ a través de la esfera S con ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

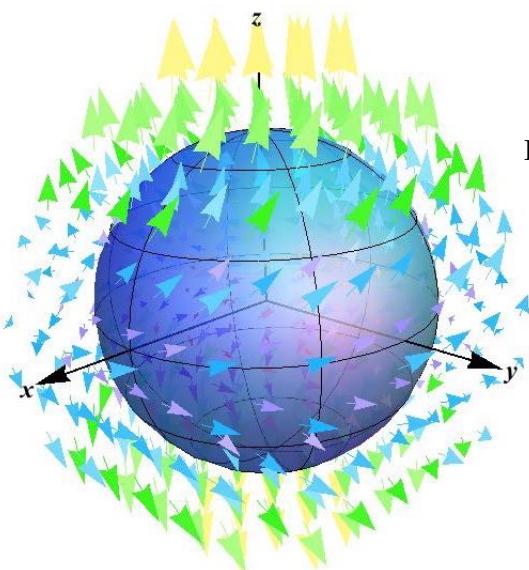
Empecemos por parametrizar la esfera de la siguiente forma:

$$\begin{cases} x &= 5 \sin(\phi) \cos(\theta) \\ y &= 5 \sin(\phi) \sin(\theta) \quad \text{con } (\theta, \phi) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi] = D. \\ z &= 5 \cos(\phi) \end{cases}$$

Así, $\mathbf{r}(\theta, \phi) = 5 \sin(\phi) \cos(\theta) \mathbf{i} + 5 \sin(\phi) \sin(\theta) \mathbf{j} + 5 \cos(\phi) \mathbf{k}$. De donde, el vector normal $\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta$ apunta hacia afuera y el vector normal $\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\phi$ apunta hacia adentro.

Así

$$\begin{aligned} &\vec{F}(\mathbf{r}(\theta, \phi)) \cdot (\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta) \\ &= (-5 \sin(\phi) \sin(\theta), 5 \sin(\phi) \cos(\theta), 10 \cos(\phi)) \cdot 25 \sin(\phi) (\sin(\phi) \cos(\theta), \sin(\phi) \sin(\theta), \cos(\phi)) \\ &= 250 \cos^2(\phi) \sin(\phi) \end{aligned}$$



Por tanto la integral de superficie que debemos calcular es

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \vec{F}(\mathbf{r}(\theta, \phi)) \cdot (\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta) d\phi d\theta \\ &= 250 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos^2(\phi) \sin(\phi) d\phi d\theta \\ &= 500\pi \int_0^\pi \cos^2(\phi) \sin(\phi) d\phi \\ &= \frac{1000\pi}{3}. \end{aligned}$$

Figura 3.29: example caption

3.9. Teorema de la Divergencia de Gauss

Definición 3.9.1. Si $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ es un campo vectorial en \mathbb{R}^3 y existen $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$, la **Divergencia de \vec{F}** es la función escalar de tres variables definida por

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{F} &= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (P, Q, R) \\ &= \nabla \cdot \vec{F}\end{aligned}$$

Teorema 3.9.2. Teorema de la Divergencia

Sea E una región simple sólido en \mathbb{R}^3 con **frontera** $S = \partial E$, orientable con vector normal \vec{n} apuntando hacia afuera de E . Sea \vec{F} un campo vectorial cuyas componentes P, Q y R poseen derivadas parciales continuas de primer orden en una región que contiene al sólido E . Entonces

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_E \operatorname{div} \vec{F} dV \quad (3.9.1)$$

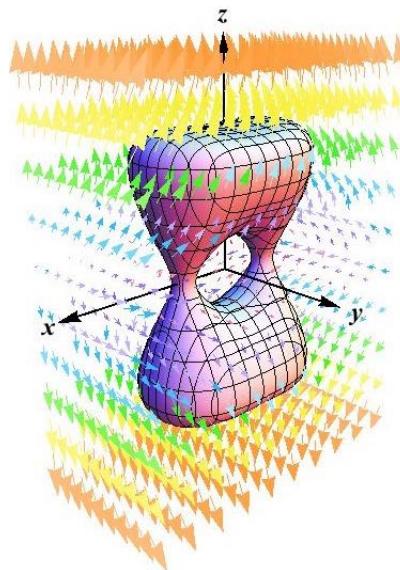


Figura 3.30: example caption

Interpretación del campo escalar $\operatorname{div} \vec{F}$:

Sea B_a una bola de centro $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y radio a . Sea ∂B_a la frontera de B_a . De acuerdo con 3.9.1

$$\iint_{\partial B_a} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_{B_a} \operatorname{div} \vec{F} dV \quad (3.9.2)$$

Cuando $a > 0$ es suficientemente pequeño y $(x, y, z) \in B_a$, entonces: $\operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) = \operatorname{div} \vec{F}(x_0, y_0, z_0)$.

De ahí que

$$\iiint_{B_a} \operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) dV = \iiint_{B_a} \operatorname{div} \vec{F}(x_0, y_0, z_0) dV = \operatorname{div} \vec{F}(x_0, y_0, z_0) V(B_a) \quad (3.9.3)$$

De la ecuación anterior y 3.9.2 se obtiene

$$\operatorname{div} \vec{F}(x_0, y_0, z_0) \approx \frac{1}{V(B_a)} \iint_{\partial B_a} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Tomando el límite cuando $a \rightarrow 0^+$, tenemos que

$$\operatorname{div} \vec{F}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{1}{V(B_a)} \iint_{\partial B_a} \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad \text{Flujo por unidad de Volumen}$$

Si \vec{F} es un campo de velocidades de un fluido y se tiene que $\operatorname{div} \vec{F}(x_0, y_0, z_0) > 0$, el flujo hacia afuera en (x_0, y_0, z_0) por unidad de volumen es positivo, el punto (x_0, y_0, z_0) es una **Fuente**.

Ejemplo 3.9.1. Evalúe $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, donde $\vec{F}(x, y, z) = (xy, y^2 + e^{xz^2}, \sin(xy))$ y S es la frontera de la región E acotada por el cilindro parabólico $z = 1 - x^2$, y los planos $z = 0, y = 0, y + z = 2$.

Por el teorema de la divergencia de Gauss tenemos que

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_E \operatorname{div} \vec{F} dV$$

En este caso $\operatorname{div} \vec{F}$ es

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{F} &= \nabla \cdot \vec{F} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (xy, y^2 + e^{xz^2}, \sin(xy)) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2 + e^{xz^2}) + \frac{\partial}{\partial z}(\sin(xy)) \\ &= 3y \end{aligned}$$

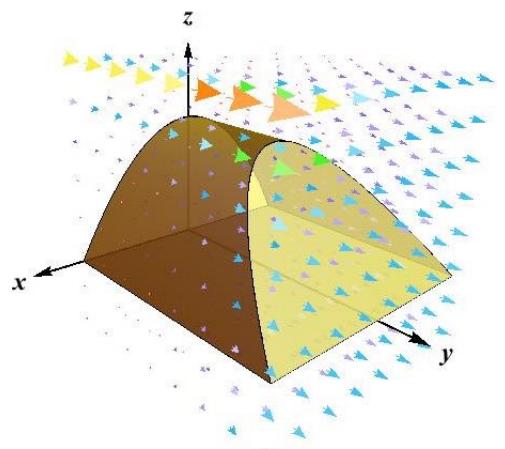


Figura 3.31: example caption

El sólido E lo podemos describir como $E = \{(x, y, z) / -1 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - x^2, 0 \leq y \leq 2 - z\}$.

Luego

$$\begin{aligned}
 \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{2-z} 3y \, dy \, dz \, dx \\
 &= \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} \frac{3}{2}(2-z)^2 \, dy \, dz \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 [8 - (1+x^2)^3] \, dx \\
 &= \frac{184}{35}.
 \end{aligned}$$

Ejemplo 3.9.2. Use el teorema de la divergencia de Gauss para evaluar $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ donde $\vec{F}(x, y, z) = (xz^2, \frac{1}{3}y^3 + \tan(z), x^2z + y^2)$ y S es la mitad superior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, orientada con el vector normal apuntando hacia arriba.

Consideremos la superficie $S_1 = \{(x, y, z) / x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$, entonces, dado que $S = \{(x, y, z) / x^2 + y^2 + z^2 = 1, z = 0\}$, se sigue que, $S \cup S_1$ es una superficie cerrada, esto es, si $E = \{(x, y, z) / x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$ entonces $S \cup S_1 = \partial E$ es la frontera de E . Empecemos Por el teorema de la divergencia de Gauss

$$\begin{aligned}
 \iiint_E \operatorname{div} \vec{F} \, dV &= \iint_{\partial E} \vec{F} \cdot d\vec{S} \\
 &= \iint_{S \cup S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} \\
 &= \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S}
 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_E \operatorname{div} \vec{F} \, dV - \iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad (\star)$$

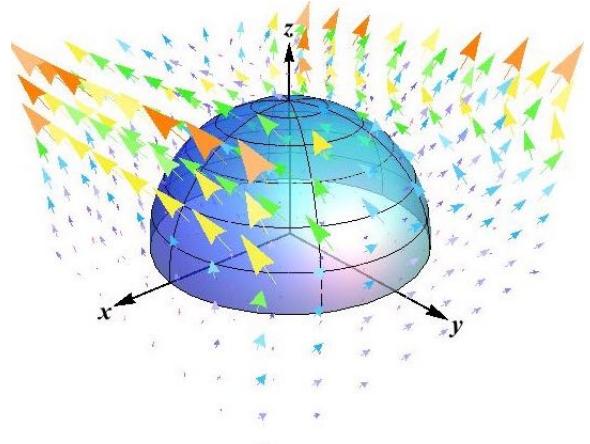


Figura 3.32: example caption

calculando la integral triple sobre E . Para esto, vemos que

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \vec{F} &= \nabla \cdot \vec{F} \\
 &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (xz^2, \frac{1}{3}y^3 + \tan(z), x^2z + y^2) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x}(xz^2) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{3}y^3 + \tan(z) \right) + \frac{\partial}{\partial z}(x^2z + y^2) \\
 &= x^2 + y^2 + z^2.
 \end{aligned}$$

De ahí que $\iiint_E \operatorname{div} \vec{F} \, dV = \iiint_E (x^2 + y^2 + z^2) \, dV$. Ahora bien, para calcular la integral de superficie

Haciendo un cambio de coordenadas a coordenadas esféricas,

$E = \{(x, y, z) / 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}\}$, tenemos que

$$\begin{aligned} \iiint_E (x^2 + y^2 + z^2) dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \rho^2 \cdot \rho^2 \sin(\phi) d\rho d\phi d\theta \\ &= 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin(\phi) d\phi \int_0^1 \rho^4 d\rho \\ &= \frac{2\pi}{5}. \end{aligned}$$

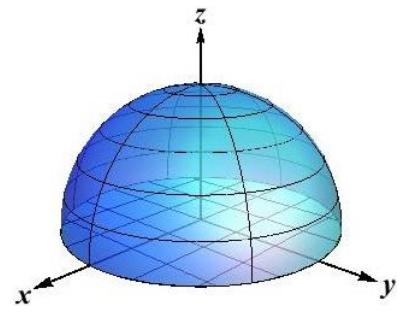


Figura 3.33: example caption

sobre S_1 , notemos que $S_1 = \{(x, y, z) / (x, y) \in D, z = 0\}$, donde $D = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq 1\}$, por tanto, podemos ver a S_1 como la gráfica de la función $z = g(x, y)$ y como el vector normal debe apuntar hacia abajo (para preservar la orientación de E), $\vec{n} = (g_x, g_y, -1) = (0, 0, -1)$ y por tanto

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_D ((xz^2, \frac{1}{3}y^3 + \tan(z), x^2z + y^2)) \cdot (0, 0, -1) dx dy \\ &= \iint_D (-y^2) dx dy \\ &= - \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \sin^2(\theta) \cdot r dr d\theta \\ &= - \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta \int_0^1 r^3 dr \\ &= -\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

De la ecuación $(*)$, tenemos que:

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \frac{2\pi}{5} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{13\pi}{20}.$$

Ejemplo 3.9.3. Sean $E = \{(x, y, z) / x^2 + y^2 \leq 1, x \leq y \leq \sqrt{3}x, 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2, x \geq 0, y \geq 0\}$ y $S = \partial E$ la frontera de E con vector normal hacia arriba. Halle $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ para $\vec{F}(x, y, z) = (y^3, z^3, z\sqrt{x^2 + y^2})$.

Consideremos la proyección en el plano xy , del sólido E , esto es, $D = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq 1, x \leq y \leq \sqrt{3}x\}$, de esta forma $E = \{(x, y, z) / (x, y) \in D, 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2\}$, el cual se puede expresar en coordenadas cilíndricas como $E = \{(r, \theta, z) / 0 \leq r \leq 1, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}, 0 \leq z \leq 4 - r^2\}$.

Por el teorema de la divergencia de Gauss

$$\begin{aligned}
 \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iiint_E \nabla \cdot \vec{F} dV \\
 &= \iiint_E \sqrt{x^2 + y^2} dV \\
 &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \int_0^1 \int_0^{4-r^2} r \cdot r dz dr d\theta \\
 &= \frac{\pi}{12} \int_0^1 (4 - r^2) dr \\
 &= \frac{17\pi}{180}.
 \end{aligned}$$

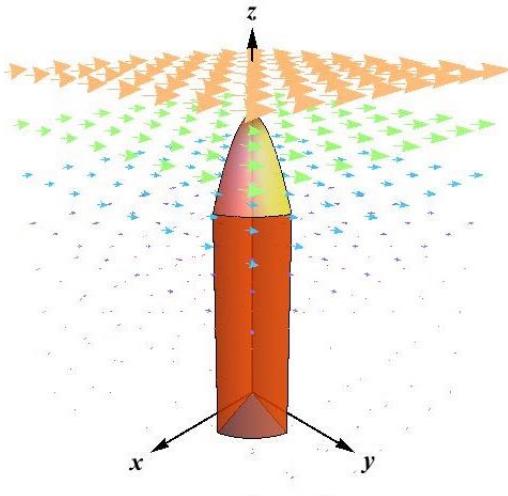


Figura 3.34: example caption

3.10. Teorema de Stokes

Definición 3.10.1. Sea $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ es un campo vectorial en \mathbb{R}^3 de clase C^1 . El Rotacional de \vec{F} , denotado por $\text{rot } \vec{F}$, o también por $\nabla \times \vec{F}$, el campo vectorial en \mathbb{R}^3 definido por

$$\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

Ejemplo 3.10.1. Si f es una función escalar de clase C^2 , veamos que $\text{rot}(\nabla f) = \vec{0}$

$$\begin{aligned}
 \text{rot } \vec{F} &= \nabla \times \vec{F} \\
 &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} \\
 &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) \mathbf{k} \\
 &= \vec{0}
 \end{aligned}$$

Del ejemplo anterior se sigue la siguiente afirmación

Proposición 3.10.2. Si \vec{F} es un campo vectorial conservativo, entonces, $\text{rot } \vec{F} = 0$.

Teorema 3.10.3. Teorema de Stokes

Sea S una superficie en \mathbb{R}^3 orientada con el vector normal \vec{n} , limitada por una curva suave C , cerrada y simple, cuya orientación es compatible con \vec{n} , esto es, $C = \partial S$.

Sea \vec{F} un campo vectorial de clase \mathcal{C}^1 definido en una región del espacio que contiene a S . Entonces:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$$

Observación: El teorema de Stokes nos dice que la circulación de \vec{F} a lo largo de la curva $C = \partial S$, es igual, al flujo de $\nabla \times \vec{F}$ a través de la superficie S .

Interpretación del rotacional $\nabla \times \vec{F}$:

Si \vec{F} es el campo de velocidades de un fluido, entonces $\text{rot} \vec{F}(x, y, z)$ determina un eje alrededor del cual los puntos del fluido cercanos a (x, y, z) tienden a rotar alrededor de él con velocidad igual a $\|\text{rot} \vec{F}(x, y, z)\|$.

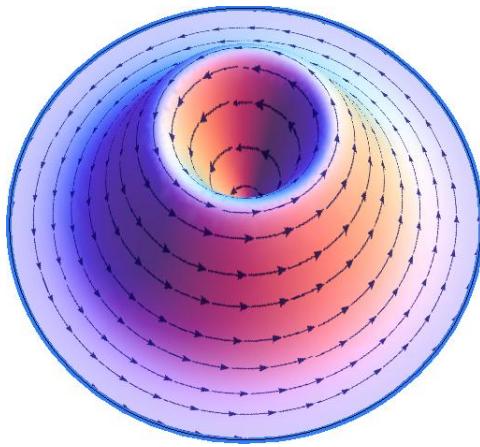


Figura 3.35: example caption

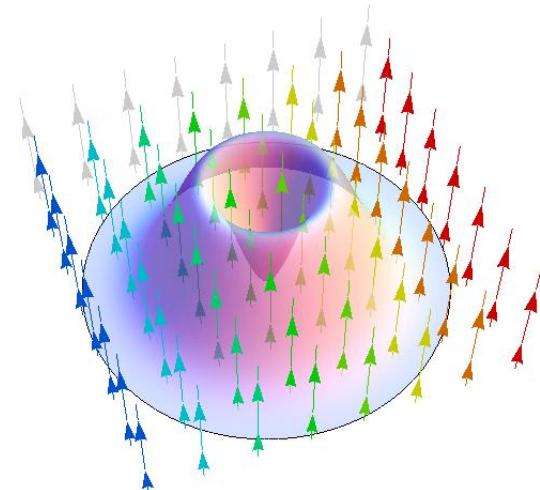


Figura 3.36: example caption

Ejemplo 3.10.2. Evalúe $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ si $\vec{F}(x, y, z) = (-y^2, x, z^2)$ y C es la curva intersección del plano $y + z = 2$ con el cilindro $x^2 + y^2 = 1$, donde C está orientada de manera antihorario cuando se mira desde arriba.

Consideremos a $S = \{(x, y, z) / x^2 + y^2 \leq 1, z = 2 - y\}$, entonces es claro que $C = \partial S$ y para que las orientaciones sean compatibles S debe tener vector normal \vec{n} apuntando hacia arriba. En estas condiciones podemos usar el Teorema de Stokes, para esto calculemos el rotacional de \vec{F} ,

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & x & z^2 \end{vmatrix} = (1 + 2y)\mathbf{k}$$

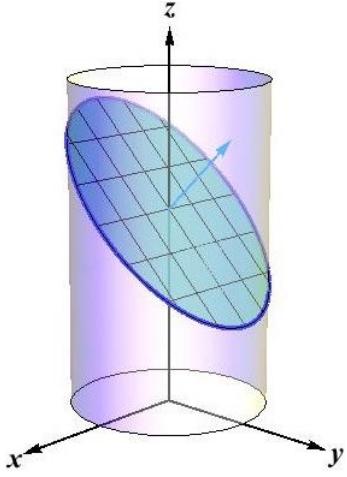
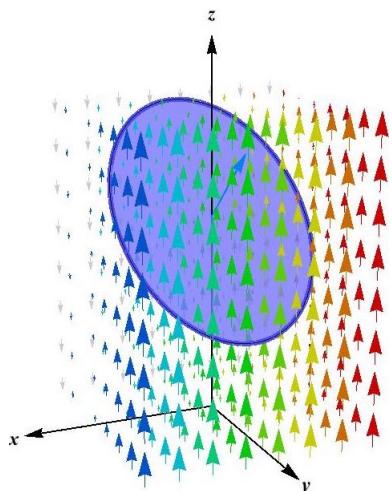


Figura 3.37: example caption

Notemos que S es la gráfica de la función $z = g(x, y) = 2 - y$ definida en la región del plano xy , $D = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq 1\}$, por tanto podemos parametrizar a S como

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 2 - y \end{cases} \quad \text{con } (x, y) \in D.$$



Por tanto;

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} \\ &= \iint_D (\nabla \times \vec{F}) \cdot (-g_x, -g_y, 1) dx dy \\ &= \iint_D (0, 0, 1 + 2y) \cdot (0, 1, 1) dx dy \\ &= \iint_D (1 + 2y) dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + 2r \sin(\theta)) r dr d\theta \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Figura 3.38: example caption

Ejemplo 3.10.3. Utilice el Teorema de Stokes para evaluar $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, donde $\vec{F}(x, y, z) = (x^2y, \frac{1}{3}x^3, xy)$ y C es la curva intersección del paraboloide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$, con orientación antihoraria vista desde arriba. Consideremos la superficie S que es la gráfica de la función

$z = g(x, y) = y^2 - x^2$ definida sobre la región del plano xy ,

$D = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq 1\}$, esto es, $S = \{(x, y, z) / x^2 + y^2 \leq 1, z = y^2 - x^2\}$. Parametrizamos a S como

$$\begin{cases} x &= x \\ y &= y \\ z &= y^2 - x^2 \end{cases} \quad \text{con } (x, y) \in D.$$

La función vectorial que determina a S es

$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, y^2 - x^2)$. El rotacional de \vec{F} es

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y & \frac{1}{3}x^3 & xy \end{vmatrix} = (x, -y, 0)$$

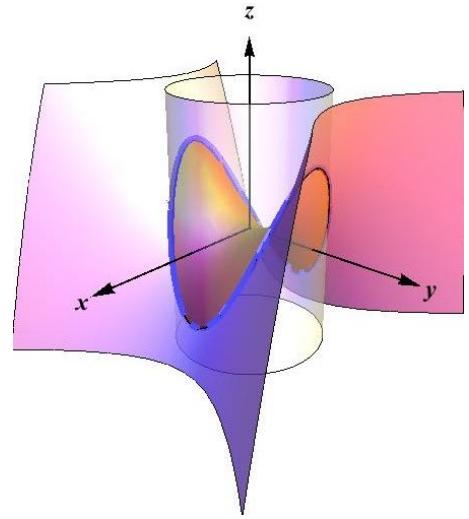


Figura 3.39: example caption

Por el Teorema de Stokes, tenemos:

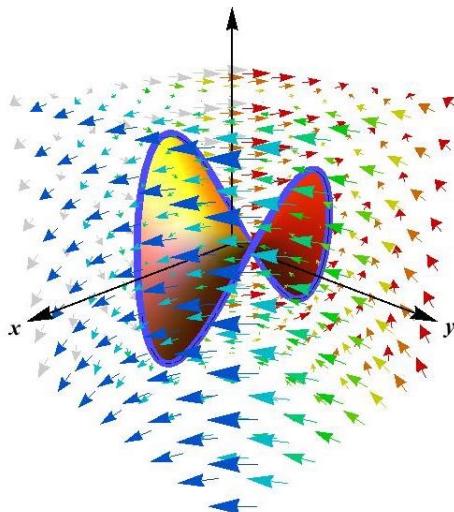
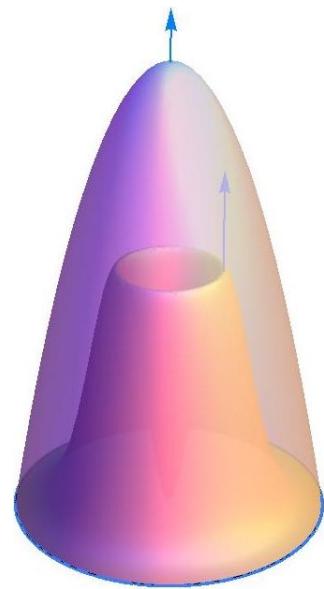


Figura 3.40: example caption

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} \\ &= \iint_D (\nabla \times \vec{F}(\mathbf{r}(x, y))) \cdot (\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y) dx dy \\ &= \iint_D (\nabla \times \vec{F}(\mathbf{r}(x, y))) \cdot (-g_x, -g_y, 1) dx dy \\ &= \iint_D (x, -y, 0) \cdot (2x, -2y, 1) dx dy \\ &= \iint_D (2x^2 + 2y^2) dx dy \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \cdot r dr d\theta \\ &= \pi. \end{aligned}$$



Nota: Sean S_1 y S_2 dos superficies orientadas en \mathbb{R}^3 que comparten la misma curva frontera C , es decir, $\partial S_1 = C = \partial S_2$, con la misma orientación. Entonces el Teorema de Stokes nos dice que

$$\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{S_2} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$$

Figura 3.41: example caption

Ejemplo 3.10.4. Sea $S = \{(x, y, z) / x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \leq 0\}$ con vector normal hacia abajo y sea $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 e^x z, yz + 1, e^{-x^2})$. Calcule

$$\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$$

La curva frontera de S es $C = \{(x, y, z) / x^2 + y^2 = 4, z = 0\}$, orientada en sentido horario. C también es la curva frontera de la superficie $S_1 = \{(x, y, z) / x^2 + y^2 \leq 4, z = 0\}$ orientada con el vector normal hacia abajo $\vec{n} = (0, 0, -1)$. La cual podemos parametrizar como

$$\begin{cases} x = x \\ y = y & \text{con } (x, y) \in D. \\ z = 0 \end{cases}$$

La función vectorial que determina a S es $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, 0)$. El rotacional de \vec{F} es

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 e^x z & yz + 1 & e^{-x^2} \end{vmatrix} = (-y, x^2 e^x + 2x e^{x^2}, 0)$$

Por la observación anterior tenemos que:

$$\begin{aligned} \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} &= \iint_{S_1} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} \\ &= \iint_D (-y, x^2 e^x + 2x e^{x^2}, 0) \cdot (0, 0, -1) dx dy \\ &= 0 \end{aligned}$$

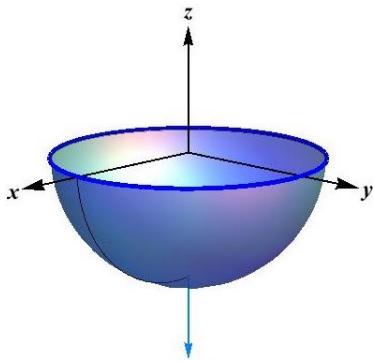


Figura 3.42: example caption

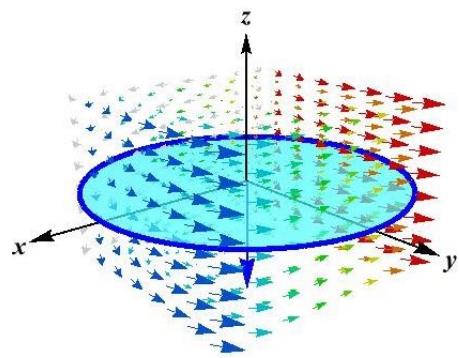


Figura 3.43: example caption

3.11. Teorema de Green

Definición 3.11.1. Una curva C en el plano con ecuación vectorial $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} = (x(t), y(t))$ con $a \leq t \leq b$ es **cerrada** si $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$, Además, la curva cerrada C se dice es **simple** si para todo $a \leq t_1 < t_2 \leq b$ se tiene $\mathbf{r}(t_1) \neq \mathbf{r}(t_2)$

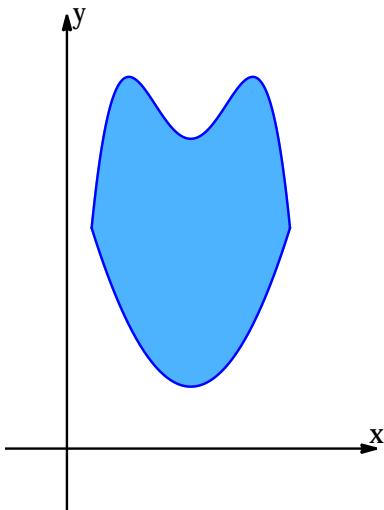


Figura 3.44: example caption

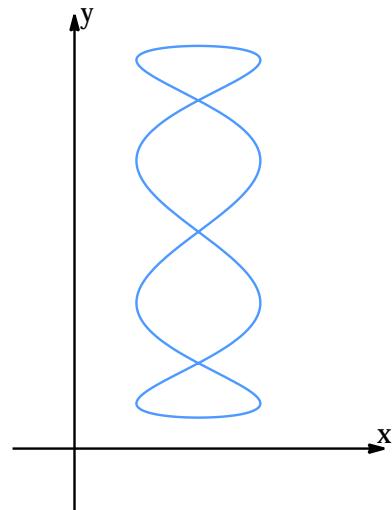


Figura 3.45: example caption

Sea C una curva **cerrada simple** que limita a una región D del pano \mathbb{R}^2 , esto es, $\partial D = C$. Diremos que C está **positivamente orientada** por la función vectorial $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} = (x(t), y(t))$ con $a \leq t \leq b$, si al recorrer C con $\mathbf{r}(t)$, conforme t avanza desde a hasta b la región D siempre está a la izquierda (sentido antihorario).

Teorema 3.11.2. Teorema de Green

Sea C curva cerrada simple, suave a trozos, positivamente orientada, y sea D la región plana acotada por C . Sea $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ un campo vectorial de clase C^1 definido en una región abierta que contiene a D . Entonces

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ \int_C (P(x, y) dx + Q(x, y) dy) &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy\end{aligned}$$

El Teorema de Green es el caso particular del Teorema de Stokes cuando la superficie S está en el plano.

Ejemplo 3.11.1. Utilice el Teorema de Green para calcular la integral de línea $\int_C x^2y dx - 3y^2 dy$, donde C es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ orientada en sentido antihorario.

El campo vectorial el cual debemos integrar es

$\vec{F}(x, y) = (x^2y, -3y^2)$. La región que encierra C es,

$$D = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq 1\} = \{(r, \theta) / 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Usando el Teorema de Green tenemos que

$$\begin{aligned}\int_C x^2y dx - 3y^2 dy &= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(-3y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2y) \right) dx dy \\ &= \iint_D (-x^2) dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (-r^2 \cos^2(\theta)) r dr d\theta \\ &= -\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

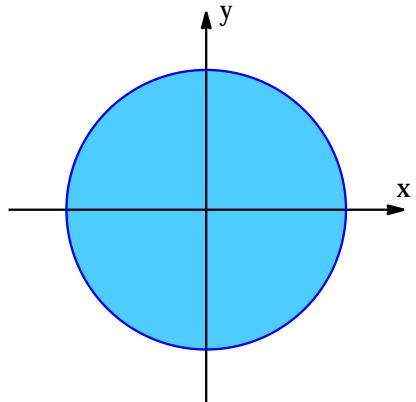
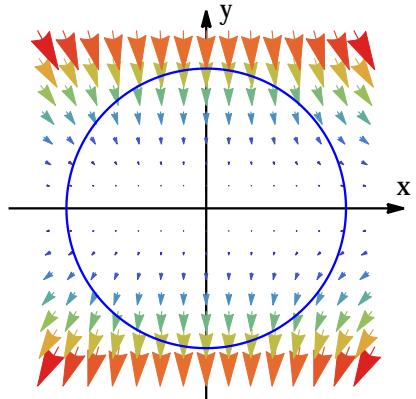


Figura 3.46: example caption

Ejemplo 3.11.2. Sea C la frontera de la región acotada por las curvas $y = x^4$ y $y = x$ con $0 \leq x \leq 1$, orientada positivamente. Calcule $\int_C xy \, dx + x^2 \, dy$

La región que encierra la curva C la podemos describir como una región de tipo I en el plano xy ,

$D = \{(x, y) / 0 \leq x \leq 1, x^4 \leq y \leq x\}$. Por el Teorema de Green, tenemos:

$$\begin{aligned} \int_C xy \, dx + x^2 \, dy &= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(x^2) - \frac{\partial}{\partial y}(xy) \right) dxdy \\ &= \iint_D (2x - x) dxdy \\ &= \iint_D x dxdy \\ &= \int_0^1 \int_{x^4}^x x \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 x(x - x^4) \, dy \, dx \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

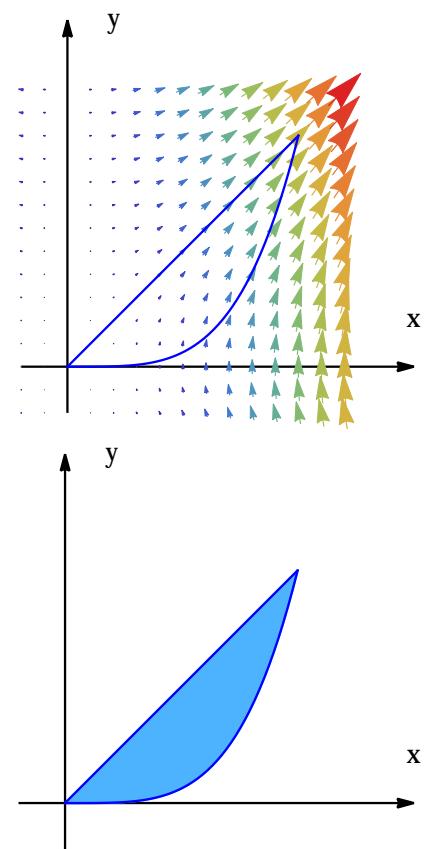


Figura 3.47: example caption

Observación: Con escogencias adecuadas de P y Q podemos calcular el área de D como una integral del líneas.

(i) Si $P = 0$ y $Q = x$, entonces $\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 1 - 0 = 1$. De donde

$$\begin{aligned} A(D) &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int_C P \, dx + Q \, dy \\ A(D) &= \int_C x \, dy \end{aligned}$$

(ii) Similarmente, si $P = -y$ y $Q = 0$, entonces $\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 0 - (-1) = 1$. De donde

$$A(D) = \int_C -y \, dx$$

De (i) y (ii), podemos concluir que

$$A(D) = \frac{1}{2} \int_C -y \, dx + x \, dy.$$

Ejemplo 3.11.3. Encuentre el área de la región limitada por la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

La región $D = \{(x, y) / \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$ tiene como frontera la elipse $C = \{(x, y) / \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$, la cual podemos parametrizar como

$$\begin{cases} x(t) &= a \cos(t) \\ y(t) &= b \sin(t) \end{cases} \quad \text{con } t \in [0, 2\pi].$$

De la observación podemos calcular el área de D como una integral de línea:

$$\begin{aligned} A(D) &= \frac{1}{2} \int_C -y \, dx + x \, dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (-y(y) x'(t) + x(t) y'(t)) \, dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (ab \sin^2(t) + ab \cos^2(t)) \, dt \\ &= ab\pi \text{ unid}^2 \end{aligned}$$

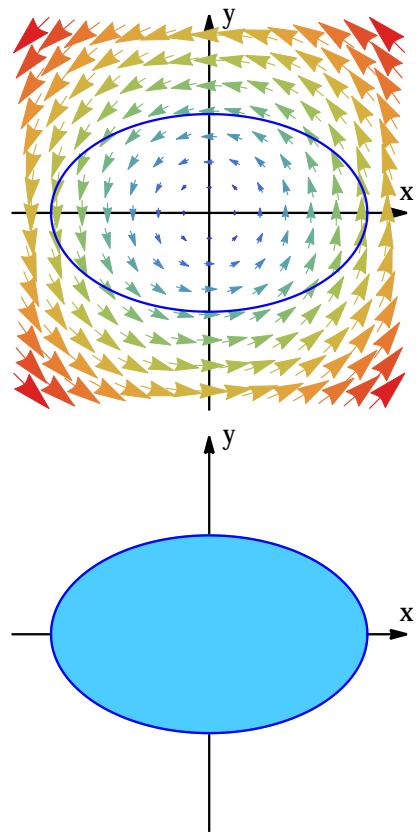


Figura 3.48: example caption

Observación: El teorema de Green puede ser extendido a regiones que son uniones finitas de **regiones simples**.

Como vemos en la gráfica $D = D_1 \cup D_2$. Sea ∂D_1 y ∂D_2 orientadas positivamente, entonces a cada región D_i , le podemos aplicar el Teorema de Green para obtener

$$\begin{aligned} \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dxdy &= \iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dxdy + \iint_{D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dxdy \\ &= \int_{\partial D_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\partial D_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_{C_{1+}} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_{2-}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_{C_{1+}} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{C_{2+}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

Ejemplo 3.11.4. Utilice el Teorema de Green para calcular la integral de línea $\int_C (x^3 - y^3) dx + (x^3 + y^3) dy$, donde C es la frontera de la región entre los círculos $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 9$.

La curva frontera C la ver como la unión de dos curvas $C_1 = \{(x, y) / x^2 + y^2 = 1\}$ y $C_2 = \{(x, y) / x^2 + y^2 = 9\}$ donde C_1 está orientada en sentido horario y C_1 está orientada en sentido antihorario, esto con el fin que al recorrer C_1 o C_2 la región D siempre que a la izquierda. Por la observación anterior tenemos:

$$\begin{aligned}
 \int_C (x^3 - y^3) dx + (x^3 + y^3) dy &= \int_{C_{1+}} (x^3 - y^3) dx + (x^3 + y^3) dy + \int_{C_{2-}} (x^3 - y^3) dx + (x^3 + y^3) dy \\
 &= \int_{C_{1+}} (x^3 - y^3) dx + (x^3 + y^3) dy - \int_{C_{2+}} (x^3 - y^3) dx + (x^3 + y^3) dy \\
 &= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} (x^3 + y^3) - \frac{\partial}{\partial y} (x^3 - y^3) \right) dxdy \\
 &= \iint_D (3x^2 + 3y^2) dxdy \\
 &= 3 \iint_D (x^2 + y^2) dxdy \\
 &= 3 \int_0^{2\pi} \int_1^3 r^2 \cdot r dr d\theta \\
 &= 120\pi
 \end{aligned}$$

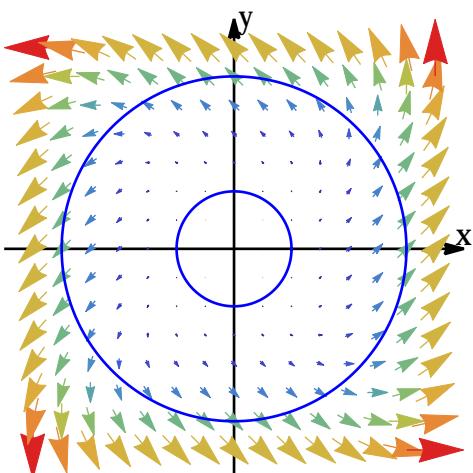


Figura 3.49: example caption

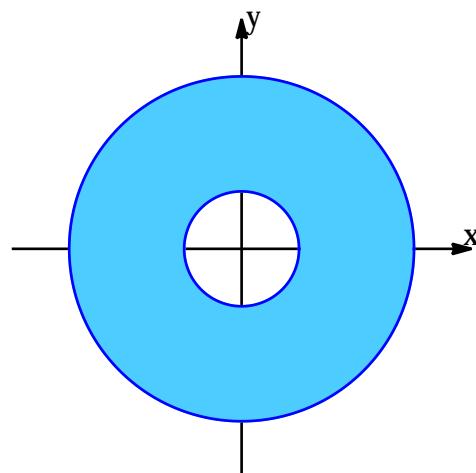


Figura 3.50: example caption

*-¿Qué te parece desto, Sancho? – Dijo Don Quijote –
Bien podrán los encantadores quitarme la ventura,
pero el esfuerzo y el ánimo, será imposible.*

*Segunda parte del Ingenioso Caballero
Don Quijote de la Mancha
Miguel de Cervantes*

*-Buena está – dijo Sancho –; fírmela vuestra merced.
–No es menester firmarla – dijo Don Quijote–,
sino solamente poner mi rúbrica.*

*Primera parte del Ingenioso Caballero
Don Quijote de la Mancha
Miguel de Cervantes*

