EAFIT

Escuela de Ciencias - Departamento de Matemáticas

Taller 2 Cálculo en Varias Variables, 01-2020

1. Aplique la regla de la cadena para hallar dz/dt.

   a) $z = x^2 + y^2 + xy$, $x = \operatorname{sen}(t)$, $y = e^t$

   b) $z = \cos(x + 4y)$, $x = 5t^4$, $y = 1/t$

   c) $z = \tan^{-1}(y/x)$, $x = e^t$, $y = 1 - e^t$

2. Mediante la regla de la cadena encuentre $\partial z/\partial s$ y $\partial z/\partial t$.

   a) $z = \operatorname{sen}(\theta)\cos(\phi)$, $\theta = st^2$, $\phi = s^2 t$.

   b) $z = e^r \cos(\theta)$, $r = st$, $\theta = \sqrt{s^2 + t^2}$

   c) $z = \tan(u/v)$, $u = 2s + 3t$, $v = 3s - 2t$

3. Calcular $\partial w/\partial s$ y $\partial w/\partial t$ utilizando la regla de la cadena y evaluar cada derivada parcial en los valores de s y t dados.

   a) $w = x^2 + y^2$, $x = s + t$, $y = s - t$, $s = 1$ y $t = 0$.

   b) $w = x^2 - y^2$, $x = s\cos(t)$, $y = s\operatorname{sen}(t)$, $s = 3$ y $t = \dfrac{\pi}{4}$.

4. Si $z = f(x, y)$, donde f es diferenciable, y $x = g(t)$, y $y = h(t)$, se sabe que

   i. $g(3) = 2$, $h(3) = 7$

   ii. $g'(3) = 5$, $h(3) = -4$

   iii. $f_x(2, 7) = 6$ y $f_y(2, 7) = -8$,

   determine dz/dt cuando $t = 3$.

5. Sea $w(s, t) = f(u(s, t), v(s, t))$ donde:

   - $u(1, 0) = 2$, $u_s(1, 0) = 1$, $u_t(1, 0) = 3$, $v(1, 0) = 3$, $v_s(1, 0) = 2$ y $v_t(1, 0) = -4$
   - $f_u(1, 0) = 2$ $f_v(1, 0) = 0$, $f_u(2, 3) = 2$ y $f_v(2, 3) = -2$

   Encuentre $w_s(1, 0)$ y $w_t(1, 0)$.

6. Use la regla de la cadena para calcular $\dfrac{dw}{dt}$, donde $w = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z}$, $x = \sqrt{t}$, $y = \cos(2t)$ y $z = e^{-3t}$.

7. Sea $w(s, t) = f(u(s, t), v(s, t))$ donde $u(1, 0) = 2$, $u_s(1, 0) = -2$, $u_t(1, 0) = 6$, $v(1, 0) = 3$, $v_s(1, 0) = 5$, $v_t(1, 0) = 4$, $f_u(2, 3) = -1$ y $f_v(2, 3) = 10$. Encuentre $w_s(1, 0)$ y $w_t(1, 0)$.

8. Sean $z = \dfrac{x}{y}$, $x = re^{st}$, $y = rse^t$. Emplee la regla de la cadena para hallar las derivadas parciales $\dfrac{\partial z}{\partial r}, \dfrac{\partial z}{\partial s}, \dfrac{\partial z}{\partial t}$ cuando $r = 1$, $s = 2$ y $t = 0$.

9. Sea $T(x, y)$ la temperatura en el punto (x, y), medida en grados Celsius. Un gusano se arrastra de tal forma que, su posición (x, y) en cierto tiempo t (medido en segundos), viene dada por las ecuaciones paramétricas $x = \sqrt{1+t}$, $y = 2 + \frac{1}{3}t$, donde x y y son medidas en centímetros. La función de la temperatura satisface además las condiciones $T_x(2, 3) = 4$ y $T_y(2, 3) = 3$. ¿Cuán rápido aumenta la temperatura en la senda del gusano después de 3 segundos?

10. La producción de trigo en un año determinado W, depende de la temperatura promedio T y de la precipitación pluvial anual R. Los científicos estiman que la temperatura promedio aumenta a razón de 0,15C al año y que la precipitación pluvial disminuye a razón de $0{,}1cm$ al año.También estiman que para los actuales niveles de producción $\partial W/\partial T = -2$ y $\partial W/\partial R = 8$.

    a) ¿Qué significan los signos de estas derivadas parciales?

    b) Calcule la razón actual de cambio de la producción de trigo dW/dt.

11. El voltaje V en un circuito eléctrico simple disminuye con lentitud a medida que la batería se gasta. La resistencia R se incrementa lentamente cuando el resistor se calienta. Mediante la ley de Ohm, $V = IR$, determine cómo cambia la corriente I en el momento en que $R = 400\Omega$, $I = 0{,}08A$, $dV/dt = -0{,}01V/s$ y $dR/dt = 0{,}03\Omega/s$.

12. La presión P, en kilopascales, el volumen V, en litros y la temperatura T, en kelvin, de un mol de un gas ideal, están relacionados mediante la ecuación $PV = 8{,}31T$. Determine la razón de cambio del volumen cuando la presión es de $20kPa$ y la temperatura es de $320K$.

13. Determine una ecuación del plano tangente a la superficie dada en el punto específico.

    a) $z = 4x^2 - y^2 + 2y$, $(-1, 2, 4)$

    b) $z = 3(x-1)^2 + 2(y+3)^2 + 7$, $(2, -2, 12)$

    c) $z = y\cos(x-y)$, $(2, 2, 2)$

    d) $z = e^{x^2-y^2}$, $(1, -1, 1)$

14. En los siguientes ejercicios hallar la derivada direccional de la función en el punto P en la dirección de u.

    a) $f(x, y) = 3x - 4xy + 9y$, $P = (1, 2)$, $u = \langle \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \rangle$

    b) $f(x, y) = x^3 - y^3$, $P = (4, 3)$, $u = \frac{\sqrt{2}}{2}\langle 1, -1 \rangle$

    c) $f(x, y) = xy$, $P = (0, -2)$, $u = \frac{1}{2}\langle 1, \sqrt{3} \rangle$

15. En los siguientes ejercicios hallar la derivada direccional de la función en el unto P en la dirección de $u = \langle \cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta) \rangle$.

    a) $f(x, y) = x^2y^3 - y^4$, $P = (2, 1)$, $\theta = \pi/4$

    b) $f(x, y) = ye^{-x}$, $P = (0, 4)$, $\theta = 2\pi/3$

    c) $f(x, y) = x\operatorname{sen}(xy)$, $P = (2, 0)$, $\theta = \pi/3$

16. Calcule la derivada direccional de la función en el punto dado en la dirección del vector v.

a) $f(x, y) = 1 + 2x\sqrt{y}$, $P = (3, 4)$, $v = \langle 4, -3\rangle$ *b)* $f(x, y) = \ln(x^2+y^2)$, $P = (2, 1)$, $v = \langle -1, 2\rangle$

17. La superficie de una montaña se modela mediante la ecuación $h(x, y) = 5000 - 0{,}001x^2 - 0{,}004y^2$. Un montañista se encuentra en el punto $(500, 300, 4390)$. ¿En qué dirección debe moverse para ascender con la mayor rapidez?

18. La temperatura en el punto (x, y) de una placa metálica se modela mediante

$$T(x, y) = 400e^{-(x^2+y^2)/2}, x \geq 0,\ y \geq 0.$$

   a) Hallar las direcciones, sobre la placa en el punto $(3, 5)$, en las que no hay cambio en el calor.

   b) Hallar la dirección de mayor incremento de calor en el punto $(3, 5)$.

19. Deteriminar la ecuación del plano tangente y de la recta normal a la superficie dada en el punto especificado.

   a) $2(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 10$, $(3, 3, 5)$

   b) $y = x^2 - z^2$, $(4, 7, 3)$

   c) $x - z = xe^y \cos(z)$, $(1, 0, 0)$

   d) $yz = \ln(x + z)$, $(0, 0, 1)$

   e) $xyz = 10$, $(1, 2, 5)$

20. Sea S la superficie dada por la ecuación $xe^{yz} = 1$. Determine una ecuación para el plano tangente y una ecuación para la recta normal a S en el punto (1,0,5).