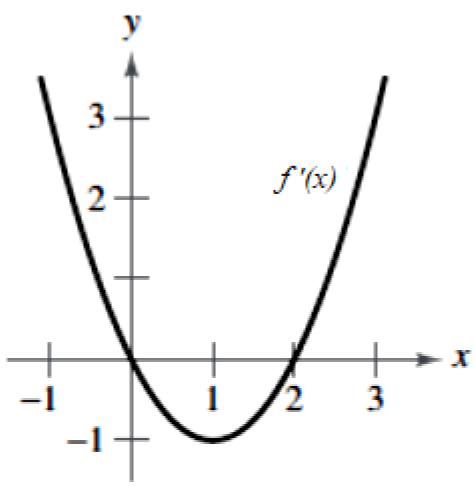
ESCUELA DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
Cálculo I CM0230
Taller semana 15

Taller: Aplicaciones de la primera derivada y la segunda derivada. Trazado de curvas.

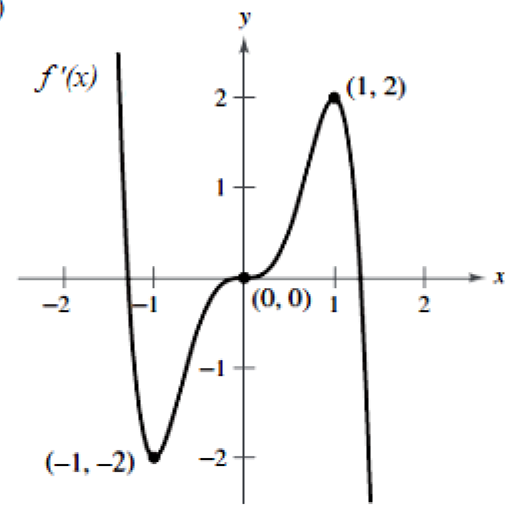
Objetivos: Utilizar la segunda derivada para estudiar el comportamiento de una función en un abierto.
Utilizar el criterio de la segunda derivada para verificar máximos y mínimos relativos.
Utilizar todos los conceptos del curso para analizar el comportamiento de una función y graficarla.

1. En los siguientes ejercicios se presenta la gráfica de la derivada de una función desconocida. A partir de la gráfica de $f'(x)$ complete la tabla, suponiendo que $f'(x)$ está definida en $(-\infty, \infty)$. Al final de la tabla, escriba un breve párrafo para justificar sus respuestas

a)



b)



Números crítcos de $f(x)$	Intervalos en el eje x en los cuales $f(x)$crece y en los cuales decrece.	Valores en x en los cuales $f(x)$ tiene extremos relativos. Determinar si hay máximo o mínimo en cada valor.	Intervalos en el eje x en los cuales $f(x)$es cóncava hacia arriba y en los cuales $f(x)$es cóncava hacia abajo.	Valores en x en los cuales $f(x)$tiene puntos de inflexión.
Gráfica a)				
Gráfica b)				

Material con fines académicos basado en los textos
Larson, R. Edwards, B. (2010) *Cálculo Tomo I*. Novena edición. Editorial Mc. Graw Hill
Stewart, J. (2012). *Cálculo de una variable. Con trascendentes tempranas*. Séptima edición. Editorial Cengage Learning.
Swokowski, E. W., Abreu, J. L., y Olivero, M. (1989). *Cálculo con geometría analítica*. Segunda Edición. Ediciones Iberoamericana

2. Determinar $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{d}$ tales que la función cúbica:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

satisfaga las condiciones que se indican.

a) Máximo relativo: (3, 3), Mínimo relativo: (5, 1), Punto de inflexión: (4, 2)

b) Máximo relativo: (2, 4), Mínimo relativo: (4, 2), Punto de inflexión: (3, 3)

3. En los siguientes ejercicios, para cada función indicar todas las intersecciones, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, extremos relativos, analizar la concavidad, los puntos de inflexión y las asíntotas. Utilizar la información para graficar la curva que representa a la función.

a) $f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x$

b) $f(x) = 2 + 3x^2 - x^3$

c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 9}$

d) $g(x) = x^2(6 - x)^3$

e) $y = x^4 - 8x^2 + 8$

f) $f(x) = 2\sqrt{x} - x$

g) $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{8}{3}x^3 + 16x$

h) $y = (4 - x^2)^5$

i) $y = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}$

j) $y = \dfrac{x - x^2}{2 - 3x + x^2}$

k) $f(x) = -3x^5 + 5x^3$

l) $g(x) = -\frac{1}{8}(x + 2)^2(x - 4)^2$

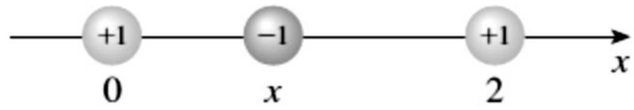
4. En la teoría de la relatividad, la masa de una partícula relativa a un observador es:

$$\boldsymbol{m} = \frac{\boldsymbol{m_0}}{\sqrt{\mathbf{1} - \frac{\boldsymbol{v}^2}{\boldsymbol{c}^2}}}$$

donde $\boldsymbol{m_0}$ es la masa en reposo de la partícula, $\boldsymbol{m}$ es la masa cuando la partícula se mueve con rapidez $\boldsymbol{v}$ relativa al observador y $\boldsymbol{c}$ es la rapidez de la luz. Considerando $\boldsymbol{m}$ como una función de $\boldsymbol{v}$ (m_0 y c son constantes):
a) Encuentre el dominio de esta función.
b) Encuentre las asíntotas de esta función.
c) Determine el comportamineto de la función (crecimiento, decrecemiento y concavidad).
d) Trace la gráfica. ¿Existe alguna condición que permita establecer que ningún cuerpo podría moverse a una velocidad superior a la velocidad de la luz? Justifique

5. La ley de Coulomb establece que la fuerza de atracción entre dos partículas cargadas es directamente proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas. La figura muestra partículas con carga 1 ubicadas en las posiciones 0 y 2 sobre una recta de coordenadas y una partícula con carga -1 en una posición $\boldsymbol{x}$ entre ellas.

Material con fines académicos basado en los textos
Larson, R. Edwards, B. (2010) *Cálculo Tomo I*. Novena edición. Editorial Mc. Graw Hill
Stewart, J. (2012). *Cálculo de una variable. Con trascendentes tempranas*. Séptima edición. Editorial Cengage Learning.
Tan, S.T. (2010). *Matemáticas aplicadas a los negocios, las ciencias sociales y de la vida.* Quinta edición.. Segunda Edición. Editorial Cengage Learning



De la ley del Coulomb se deduce que la fuerza neta que actúa sobre la partícula ubicada en el intermedio es:

$$\boldsymbol{F_{Neta} = \frac{k}{(x-2)^2} - \frac{k}{x^2} \quad \text{con } \ 0 < x < 2; \ \ k > 0 \text{ una constante}}$$

Trace la gráfica de la función fuerza neta, analizando crecimiento, decrecimiento, concavidad y asíntotas. ¿Qué indica la gráfica acerca de la fuerza?

6. La altitud (en pies) de un cohete t seg dentro del vuelo está dada por

$$\boldsymbol{s(t) = -t^3 + 54t^2 + 480t + 6\,; \qquad (t > \ 0)}$$

Determine el punto de inflexión de la función $s(t)$ e interprete sus resultados. ¿Cuál es la velocidad máxima alcanzada por el cohete y en qué posición alcanza esta velocidad?

7. En los ejercicios siguientes ejercicios, dibujar la gráfica de una función f que tenga las características indicadas.

a) Dominio: $(-\infty, \infty)$ Intersecciones con los ejes: $Con\ x: en\ x = 0\ y\ x = 4;\quad con\ y: en\ y = 0$
Asíntotas: ninguna
Intervalos donde f es creciente $(3, \infty)$; Intervalos donde f es decreciente $(-\infty, 0) \cup (0,3)$;
Extremos relativos: No tiene máximo relativo; mínimo relativo en $(3, -3)$
Intervalos donde f es cóncava hacia arriba $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$;; Intervalos donde f es cóncava hacia abajo $(0,2)$;
Puntos de inflexión: $(0, 0)\ y\ \left(2, -\frac{16}{9}\right)$
–

b) Dominio: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ Intersecciones con los ejes: $Con\ x: en\ x = 1$
Asíntotas: las rectas $x = 0$ y $y = 0$
Intervalos donde f es creciente $(0,2)$; Intervalos donde f es decreciente $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$;
Extremos relativos: No tiene mínimo relativo; máximo relativo en $(2,1)$
Intervalos donde f es cóncava hacia abajo $(-\infty, 0) \cup (0,3)$;; Intervalos donde f es cóncava hacia arriba $(3, \infty)$;
Punto de inflexión: $\left(3, \frac{8}{9}\right)$

8. En cada uno de los siguientes enunciados determinar si la afirmación es falsa o verdadera. En todos los casos justifique su elección.

a) Si la gráfica de f es cóncava hacia arriba en (a, b), entonces la gráfica de –f es cóncava hacia abajo en (a, b).
b) Si la gráfica de f es cóncava hacia arriba en (a, cb) y cóncava hacia abajo en (c, b), donde $a < \ c < \ b$, entonces f tiene un punto de inflexión en $(c, f(c))$.

Material con fines académicos basado en los textos
Larson, R. Edwards, B. (2010) *Cálculo Tomo I*. Novena edición. Editorial Mc. Graw Hill
Stewart, J. (2012). *Cálculo de una variable. Con trascendentes tempranas*. Séptima edición. Editorial Cengage Learning.
Tan, S.T. (2010). *Matemáticas aplicadas a los negocios, las ciencias sociales y de la vida.* Quinta edición.. Segunda Edición. Editorial Cengage Learning

c) Si c es un valor crítico de f donde $a < c < b$ y $f''(x) < 0$ sobre (a, b), entonces f tiene un máximo relativo en $x = c$.
d) La función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ es cóncava hacia arriba si $a > 0$ y cóncava hacia abajo si $a < 0$.
e) Si $\boldsymbol{f}$ es positiva y cóncava hacia arriba sobre I, la función $g(x) = [f(x)]^2$ es cóncava hacia arriba sobre I.
f) La gráfica de todo polinomio cúbico tiene exactamente un punto de inflexión.
g) La gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}$ tiene punto de inflexión en $x = 0$, dado que es cóncava hacia arriba si $x > 0$ y cóncava hacia abajo en $x < 0$.

Material con fines académicos basado en los textos
Larson, R. Edwards, B. (2010) *Cálculo Tomo I*. Novena edición. Editorial Mc. Graw Hill
Stewart, J. (2012). *Cálculo de una variable. Con trascendentes tempranas*. Séptima edición. Editorial Cengage Learning.
Tan, S.T. (2010). *Matemáticas aplicadas a los negocios, las ciencias sociales y de la vida.* Quinta edición.. Segunda Edición. Editorial Cengage Learning