EAFIT

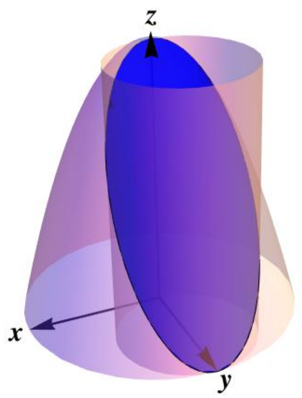
Escuela de Ciencias - Departamento de Matemáticas

Taller Cálculo en Varias Variables, Intersemestral 2019-II

Miércoles 11 de Diciembre

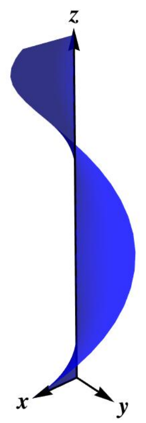
Integral de Superficie Escalar

1. Halle el área superficial de la porción del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que está debajo de $z = 4$ y en el primer octante.

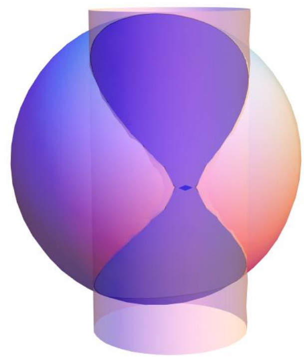


2. Parametrice la superficie S dada por
$$S = \{(x, y, z) \,|\, z = 4 - x^2 - y^2,\ x^2 + (y-1)^2 \leq 1\},$$
y plantee su área superficial como una integral doble.

3. Halle el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (-y, x, e^{x^2 z^2})$ a través de la superficie $S = \{(x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 = 4,\ 0 \leq z \leq 3\}$, orientada de tal manera que la normal apunta hacia "afuera" de S.



4. Una **helicoide** se define como $\psi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$, donde $\psi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \theta)$ y D es la región definida por $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $0 \leq r \leq 1$. Halle su área. Ahora suponga que esta superficie tiene una densidad de masa dada por $\delta(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$. Halle la masa de la helicoide.



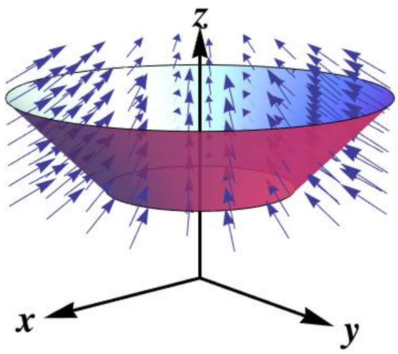
5. Halle el área de la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que se encuentra dentro del cilindro $x^2 + y^2 = ax$.

Integral de Superficie Vectorial

6. Suponga que un campo vectorial está dado por $\vec{F}(x,y,z) = (-x,-y,1)$. Calcule el flujo de $\vec{F}$ a través de la superficie

$$S = \{(x,y,z)/z = \sqrt{x^2+y^2},\, 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\},$$

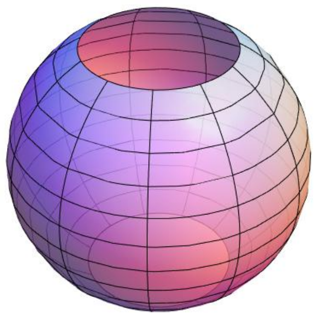
la cual está orientada con el normal apuntando hacia arriba.



7. Halle el flujo del campo $\vec{F}(x,y,z) = (y,x,1)$ a través de la superficie

$$S = \{(x,y,z)/x^2+y^2+z^2 = 4,\, 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\},$$

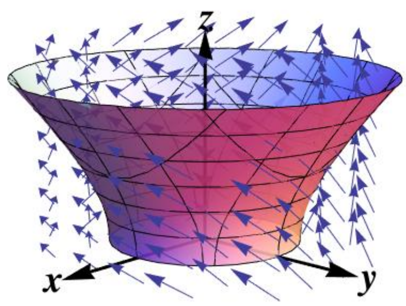
con la normal apuntado hacia afuera.



8. Considere el campo magnético definido por $\vec{F}(x,y,z) = (x,-y,1)$ y la superficie

$$S = \{(x,y,z)/x^2+y^2-z^2 = 1,\, x^2+y^2 \leq 4, 0 \leq z\},$$

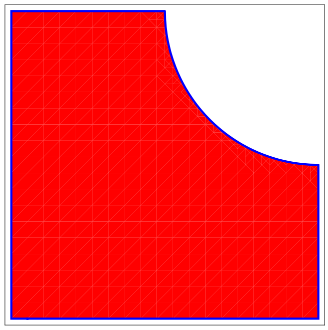
con el vector normal apuntando hacia arriba. Calcule el flujo magnético $\displaystyle\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$.



Teorema de Green

9. Sea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2,\ y \geq 0\}$ y sea $C = \partial D$ orientada positivamente. Para $\vec{F}(x, y) = \left\langle -\dfrac{y^3}{3}, \dfrac{x^3}{3} \right\rangle$, calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

10. Considere el campo vectorial $\vec{F}(x, y) = \langle y, 2x + \tan(\tan(y)) \rangle$. Sea C la frontera de la región



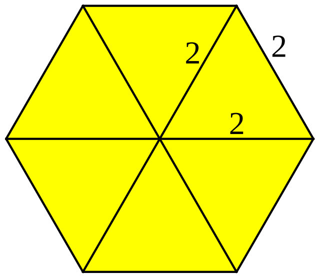
$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2,\ (x-2)^2 + (y-2)^2 \geq 1\},$$

orientada al contrario de las manecillas del reloj. Calcule la integral de línea

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

11. Sea C la frontera de la región acotada por las curvas $y = x^4$ y $y = x$ con $0 \leq x \leq 1$, orientada positivamente. Calcule $\displaystyle\int_C xy\, dx + x^2\, dy$.

12. Calcule la integral de línea del campo vectorial

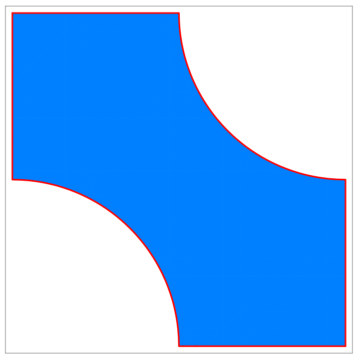


$$\vec{F}(x, y) = \left\langle 0, x + e^{\sin(e^y)} \right\rangle$$

a lo largo de la frontera de un hexágono regular con vértices $(2, 0)$, $(1, \sqrt{3})$, $(-1, \sqrt{3})$, $(-2, 0)$, $(-1, -\sqrt{3})$ y $(1, -\sqrt{3})$.
Ayuda: El hexágono en consideración es la unión de seis triángulos equiláteros de lados de longitud igual a dos.

13. Sea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2,\ x \geq 0\}$ y sea $C = \partial D$ orientada positivamente. Para $\vec{F}(x, y) = \left\langle -\dfrac{y}{2}, \dfrac{x}{2} \right\rangle$, calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

14. Considere el campo vectorial $\vec{F}(x, y) = \langle \cos(x^2) - y, x + \sin^2(y) \rangle$. Sea C la frontera de la región



$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq (x, y) \leq 2,\ (x-2)^2 + (y-2)^2 \geq 1, x^2 + y^2 \geq 1\},$$

orientada al contrario de las manecillas del reloj. Calcule la integral de línea

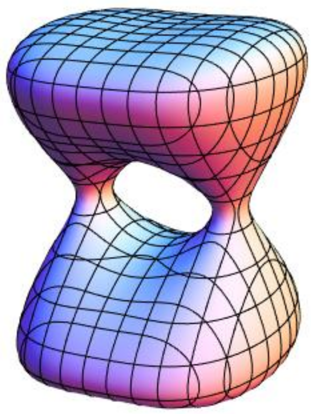
$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Teorema de la Divergencia

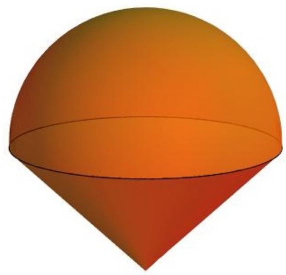
15. Sea $D = \{(x,y,z) \,|\, x^2+y^2 \leq z \leq 4-x^2-y^2\}$ y sea $S = \partial D$ con el normal apuntando hacia afuera. Para el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = (z^2, x^2, z\sqrt{x^2+y^2})$, calcule
$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS.$$

16. Sea $S = \{(x,y,z) \,|\, z = x^2+y^2,\ z \leq 16\}$ orientada con el normal con tercera componente negativa (es decir, el vector normal apunta hacia abajo). Si $\vec{F}(x,y,z) = (x(z-4), yz, x^2)$, calcule
$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS.$$

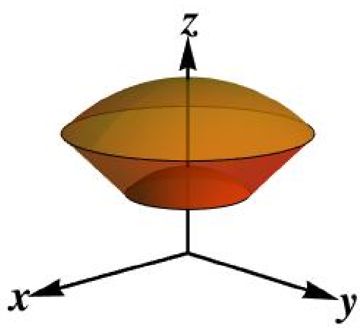
17. Calcule la integral de flujo $\iint_S \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{S}$, donde $\overrightarrow{F}$ es el campo vectorial
$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = \left(y^2 - xz + e^y, -yz + z^{3x+6z^2}, \tan(x^4+y^2)\right)$$
y donde S es la superficie cerrada dada implícitamente por
$$(x^2+y^2)^2 - (x^2-y^2) - z^2 + \frac{1}{5} + \frac{x^6+y^6+z^6}{10} = 0,$$
con orientación positiva.



18. Considere el campo vectorial $\overrightarrow{F}(x,y,z) = \left\langle -x^4, 4yx^3, z + e^{x^2+y^2}\right\rangle$. Y sea S la supeficie frontera del sólido E que está encima del cono $x^2+y^2 = 3z^2$ y debajo de la esfera $x^2+y^2+z^2 = 4z$, orientada con la normal hacia afuera. Calcular
$$\iint_S \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{S}.$$



19. Evalúe
$$\iint_S \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{S},$$
donde S es la frontera del sólido E comprendido entre las esferas $x^2+y^2+z^2 = 1$, $x^2+y^2+z^2 = 4$ y encima del cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$, orientada positivamente (ver figura). Además, el campo vectorial es $\overrightarrow{F}(x,y,z) = \left\langle \frac{x^3}{3}, yz^2, zy^2\right\rangle$.



Teorema de Stokes

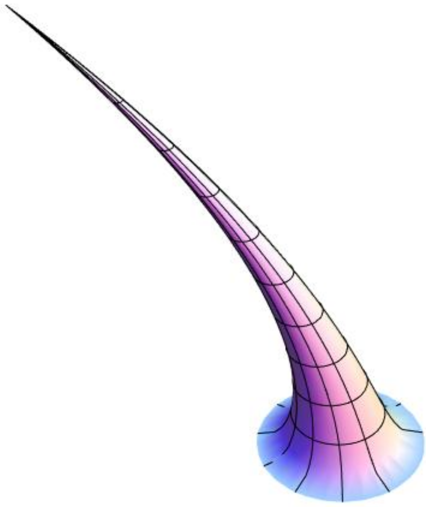
20. Encuentre la integral de flujo $\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$, donde

$\vec{F}(x, y, z) = \big(2\cos(\pi y)e^{2x} + z^2, x^2\cos(z\pi/2) - \pi\,\mathrm{sen}(\pi y)e^{2x}, 2x$

y S es la superficie púa parametrizada por

$$\vec{r}(s, t) = \Big((1 - s^{1/3})\cos(t) - 4s^2, (1 - s^{1/3})\sin(t), 5s\Big),$$

con $0 \leq t \leq 2\pi$, $0 \leq s \leq 1$, y orientada de tal forma que los vectores normales apuntan hacia afuera de la superficie.



21. Sea S la porción del cono $z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$ correspondiente a $z \geq 2$, orientada con el vector normal apuntando hacia arriba. Calcule el flujo de $\nabla \times \vec{F}$ (el rotacional de $\vec{F}$) a través de S, donde $\vec{F}(x, y, z) = xyz\vec{i} - yz^2\vec{j} + z^3\cos(xy)\,\vec{k}$.