EAFIT
Escuela de Ciencias - Departamento de Matemáticas
Taller Cálculo en Varias Variables, 01-2020

Máximos y Mínimos

1. Halle los puntos críticos de la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = (x + y)(xy + 1)$, y determine cuales son puntos de máximo, mínimo o puntos silla.

2. Calcule los valores máximo y mínimo locales, y punto o puntos sillas de la función. Grafique la función (usando wolfram alpha) para revelar todos los aspectos importantes de la función.

   a) $f(x, y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$
   b) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2$
   c) $f(x, y) = x^2 - 3xy - y^2$
   d) $f(x, y) = x^3 - 6xy + 8y^3$
   e) $f(x, y) = 3xy - x^2y - xy^2$
   f) $f(x, y) = e^{2y-x^2-y^2}$
   g) $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{y^2-x^2}$
   h) $f(x, y) = y\cos(x)$

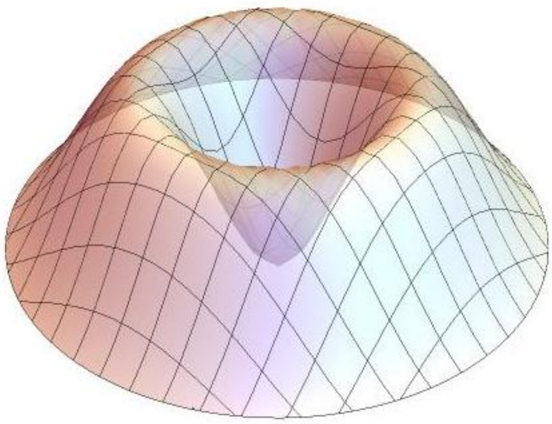
3. En los siguientes ejercicios determinar si hay un máximo local, mínimo local, un punto silla o si la información es insuficiente para determinar la naturaleza de la función $f(x, y)$ en el punto crítico (x_0, y_0)

   a) $f_{xx}(x_0, y_0) = 9,\ f_{yy}(x_0, y_0) = 4,\ f_{xy}(x_0, y_0) = 6$
   b) $f_{xx}(x_0, y_0) = 3,\ f_{yy}(x_0, y_0) = -8,\ f_{xy}(x_0, y_0) = 2$
   c) $f_{xx}(x_0, y_0) = -9,\ f_{yy}(x_0, y_0) = 6,\ f_{xy}(x_0, y_0) = 10$
   d) $f_{xx}(x_0, y_0) = 25,\ f_{yy}(x_0, y_0) = 8,\ f_{xy}(x_0, y_0) = 10$

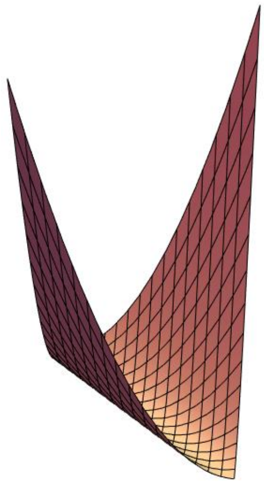
4. Hallar el máximo y el mínimo valor de

$$f(x, y) = e^{-x^2-y^2}(x^2 + y^2)$$

   en $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$. Para comparar valores al final, recuerde que $e > 2$.



5. Sea $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2$. Decida cuáles puntos críticos son de máximo, de mínimo o puntos de silla.(En este caso $D = 0$, por tanto el criterio de la segunda derivada **no** es concluyente).



6. Un contratista de mejorías caseras está pintando las paredes y el techo de una habitación rectangular. El volumen de la habitación es de 668,25 pies cúbicos. EL costo de pintura de pared es de \$0,06 por pie cuadrado y el costo de pintura de techo es de \$0,11 por pie cuadrado. Encontrar las dimensiones de la habitación que den por resultado un mínimo costo para la pintura. ¿Cuál es el mínimo costo por la pintura?

7. Una caja de cartón sin tapa debe tener $32000cm^3$. Calcule las dimensiones que minimicen la cantidad de cartón utilizado.

8. La cadena de café **Juancho Valdé**[1] tiene sucursales en $(0,0), (0,3)$ y $(3,3)$ Un estudiante adicto al café (politicamente correcto: amante) desea rentar un apartamento en un locación, donde la suma de los cuadrados de las distancias $f(x,y)$ a todos estas tiendas sea un mínimo local. La función es:

$$f(x,y) = (x-0)^2 + (y-0)^2 + (x-0)^2 + (y-3)^2 + (x-3)^2 + (y-3)^2 = 27 - 6x + 3x^2 - 12y + 3y^2.$$

   a) Donde debe vivir el estudiante para minimizar localmente $f(x,y)$?

   b) Para cada mínimo local responda: Es este mínimo local un **mínimo global**?

   c) Existe un máximo global para este problema? si sí, hallarlo. Si no, explique por qué?

Juancho Valde

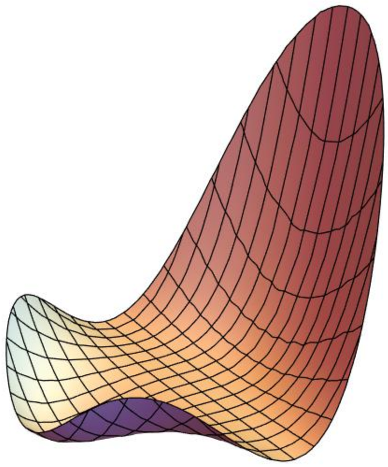
9. Un contenedor de carga en forma de un sólido rectangular debe tener un volumen de 480 pies cúbicos. La parte inferior costará \$5 por pie cuadrado para construir, y los lados y la parte superior costarán \$3 por pie cuadrado para construcción. Usar los multiplicadores de Lagrange para encontrar las dimensiones del contenedor de este tamaño que tiene costo mínimo.

[1] Este problema fue patrocinado por *Juancho Valdé*©

10. Hallar el máximo y el mínimo valor de

$$f(x,y) = x^4 + 2x^2y^2 + x^3$$

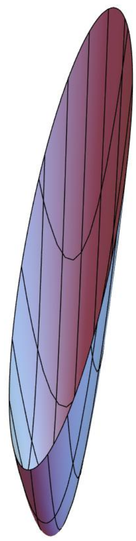
en $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.



11. Hallar el máximo y el mínimo valor de

$$f(x,y) = x^2 - 2x + y^2 - 2\sqrt{3}y$$

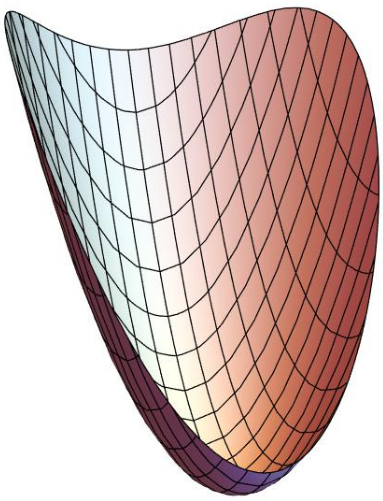
en $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 25\}$.



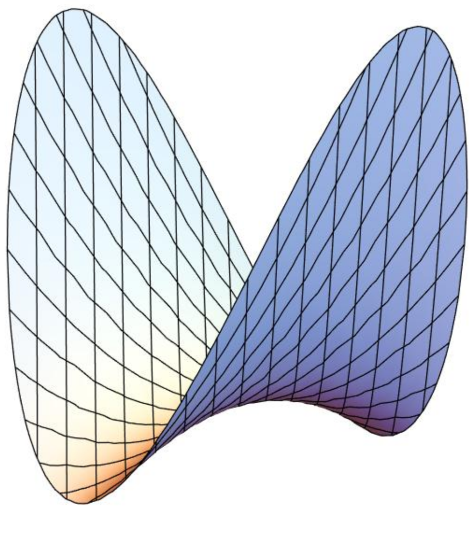
12. Hallar el máximo y el mínimo valor de

$$f(x,y) = 2x^2 + y^2 - y$$

en $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.



13. Hallar el máximo y el mínimo valor de $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 4xy$ en $D = \{(x,y) \mid x^2 + 2y^2 \leq 1\}$[2].



[2] Nota. Para hallar los puntos críticos de esta función en la frontera usando Lagrange, tal vez sea necesario usar algo de álgebra lineal (valores propios) o usar algún software como MatLab o Mathematica para solucionar los sistemas de ecuaciones.