Principio de inducción matemática

Sea $P(n)$ una propiedad que se define para enteros n y sea a un entero fijo. Suponga que los siguientes dos enunciados son verdaderos:

1. $P(a)$ es verdadera.
2. Para todo entero $k \geq a$, si $P(k)$ es verdadera entonces $P(k+1)$ es verdadera.

Entonces, el enunciado

$$\text{para todo entero } n \geq a, P(n)$$

es verdadero.

Principio de Inducción matemática fuerte

Sea $P(n)$ una propiedad que se define para n enteros y sean a y b enteros fijos con $a \leq b$. Suponga que los siguientes dos enunciados son verdaderas:

1. $P(a), P(a+1), \ldots$ y $P(b)$ son todas verdaderas. (**Paso básico**.)
2. Para cualquier número entero $k \geq b$, si $P(i)$ es verdadera para todo enteros i de a a k, entonces $P(k+1)$ es verdadera. (**Paso inductivo**.)

Entonces el enunciado

$$\text{para todo entero } n \geq a, P(n),$$

Principio del buen orden para los enteros

Sea S un conjunto de números enteros que contienen uno o más números enteros todos los cuales son mayores que un entero fijo. Entonces S tiene un mínimo elemento.

Conjunto definido recursivamente

I. BASE: Un enunciado de que ciertos objetos pertenecen al conjunto.

II. RECURSIÓN: Un conjunto de reglas que indican cómo formar nuevos conjuntos de objetos de un conjunto a partir de los que ya se sabe que están en el conjunto.

III. RESTRICCIÓN: Un enunciado de que no haya objetos que pertenezcan al conjunto distintas de los que provienen de I y II.

Inducción estructural para los conjuntos definidos recursivamente

Sea S un conjunto que se ha definido de forma recursiva y considere una propiedad que los objetos en S pueden o no satisfacer. Para demostrar que todos los objetos en S satisface la propiedad:

1. Demuestre que cada objeto en la BASE para S satisface la propiedad;
2. Demuestre que para cada regla en la RECURSIÓN, si la regla se aplica a objetos en S que satisfacen la propiedad, entonces, los objetos definidos por la regla también satisfacen la propiedad.

$$A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad \forall x, \text{ si } x \in A \text{ entonces } x \in B.$$

$$A \not\subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad \exists x, \text{ tal que } x \in A \text{ y } x \notin B.$$

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq B \text{ y } B \subseteq A.$$

$$A \text{ y } B \text{ son disjuntos} \quad \Leftrightarrow \quad A \cap B = \emptyset$$

Definición: Dados los conjuntos A y B, la **diferencia simétrica de A y B**, que se denota por $A \triangle B$ es

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A).$$

$$\bigcup_{i=0}^{n} A_i = \{x \in U \mid x \in A_i \text{ para al menos una } i = 0, 1, 2, \dots, n\}$$

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i = \{x \in U \mid x \in A_i \text{ para al menos un entero no negativo } i\}$$

$$\bigcap_{i=0}^{n} A_i = \{x \in U \mid x \in A_i \text{ para todo } i = 0, 1, 2, \dots, n\}$$

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i = \{x \in U \mid x \in A_i \text{ para todo enteros no negativos } i\}.$$

$$A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$$

$$B - A = \{x \in U \mid x \in B \text{ y } x \notin A\}$$

$$A^c = \{x \in U \mid x \notin A\}.$$

1. $x \in X \cup Y \quad \Leftrightarrow \quad x \in X \text{ o } x \in Y$
2. $x \in X \cap Y \quad \Leftrightarrow \quad x \in X \text{ y } x \in Y$
3. $x \in X - Y \quad \Leftrightarrow \quad x \in X \text{ o } x \notin Y$
4. $x \in X^c \quad \Leftrightarrow \quad x \notin X$
5. $(x, y) \in X \times Y \quad \Leftrightarrow \quad x \in X \text{ y } y \in Y$

Sean $A_1, A_2, A_3 \dots$ **mutuamente disjuntos** (o por **pares disjuntos** que **no se superponen**) si y sólo si, ninguno de dos conjuntos A_i y A_j con subíndices distintos tienen elementos en común. Más precisamente, para toda $i, j = 1, 2, 3, \dots$

$$A_i \cap A_j = \emptyset \text{ siempre que } i \neq j.$$

Una colección finita o infinita de conjuntos no vacíos $\{A_1, A_2, A_3 \dots\}$ es una **partición** de un conjunto A si y sólo si,

1. A es la unión de todo A_i,
2. Los conjuntos $A_1, A_2, A_3, \dots$ son mutuamente disjuntos.

Dado un conjunto A, el **conjunto potencia** de A, que se denota con $\mathscr{P}$ **(A)**, es el conjunto de todos los subconjuntos de A.

Demostrar que un conjunto X es igual al conjunto vacío $\emptyset$, equivale a demostrar que X no tiene elementos. Para esto, suponga que X tiene un elemento y se deduce una contradicción.

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n.$$

En particular,

$$(a, b) = (c, d) \quad \Leftrightarrow \quad a = c \text{ y } b = d.$$

Dados los conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$, el **producto cartesiano** de $A_1, A_2, \dots, A_n$, que se denota por $\mathbf{A_1} \times \mathbf{A_2} \times \dots \times \mathbf{A_n}$, es el conjunto de todas las n-tuplas ordenadas $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ donde $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n$.

Simbólicamente:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\}.$$

En particular,

$$A_1 \times A_2 = \{(a_1, a_2) \mid a_1 \in A_1 \text{ y } a_2 \in A_2\}$$

Recuerde que para demostrar que un enunciado universal es falso, es suficiente con encontrar un ejemplo (llamado un contraejemplo) para el cual es falso.

1. *Leyes conmutativas:* Para todos los conjuntos A y B,

$$a)\ A \cup B = B \cup A \quad \text{y} \quad b)\ A \cap B = B \cap A.$$

2. *Leyes asociativas:* Para todos los conjuntos A, B y C,

$$a)\ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad \text{y}$$
$$b)\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

3. *Leyes distributivas:* En todos los conjuntos, A, B y C,

$$a)\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad \text{y}$$
$$b)\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

4. *Leyes de identidad:* Para todos los conjuntos A,

$$a)\ A \cup \emptyset = A \quad \text{y} \quad b)\ A \cap U = A.$$

5. *Leyes de complemento:*

$$a)\ A \cup A^c = U \quad \text{y} \quad b)\ A \cap A^c = \emptyset.$$

6. *Ley de complemento doble:* Para todos los conjuntos A,

$$(A^c)^c = A.$$

7. *Leyes de idempotencia:* Para todos los conjuntos A,

$$a)\ A \cup A = A \quad \text{y} \quad b)\ A \cap A = A.$$

8. *Leyes de universos acotados:* Para todos los conjuntos A,

$$a)\ A \cup U = U \quad \text{y} \quad b)\ A \cap \emptyset = \emptyset.$$

9. *Leyes de De Morgan:* Para todos los conjuntos A y B,

$$a)\ (A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad \text{y} \quad b)\ (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

10. *Leyes de absorción:* Para todos los conjuntos A y B,

$$a)\ A \cup (A \cap B) = A \quad \text{y} \quad b)\ A \cap (A \cup B) = A.$$

11. *Complementos de U y $\emptyset$:*

$$a)\ U^c = \emptyset \quad \text{y} \quad b)\ \emptyset^c = U.$$

12. *Ley de diferencia de conjuntos:* Para todos los conjuntos A y B,

$$A - B = A \cap B^c.$$

Equivalencias lógicas	**Propiedades de conjuntos**
Para todas las variables de enunciado p, q y r:	Para todos los conjuntos A, B y C:
a. $p \vee q \equiv q \vee p$ b. $p \wedge q \equiv q \wedge p$	a. $A \cup B = B \cup A$ b. $A \cap B = B \cap A$
a. $p \wedge (q \wedge r) \equiv p \wedge (q \wedge r)$ b. $p \vee (q \vee r) \equiv p \vee (q \vee r)$	a. $A \cup (B \cup C) \equiv A \cup (B \cup C)$ b. $A \cap (B \cap C) \equiv A \cap (B \cap C)$
a. $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ b. $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	a. $A \cap (B \cup C) \equiv (A \cap B) \cup (A \cap C)$ b. $A \cup (B \cap C) \equiv (A \cup B) \cap (A \cup C)$
a. $p \vee \mathbf{c} \equiv p$ b. $p \wedge \mathbf{t} \equiv p$	a. $A \cup \emptyset = A$ b. $A \cap U = A$
a. $p \vee \sim p \equiv \mathbf{t}$ b. $p \wedge \sim p \equiv \mathbf{c}$	a. $A \cup A^c = U$ b. $A \cap A^c = \emptyset$

$\sim(\sim p) \equiv p$	$(A^c)^c = A$
a. $p \vee p \equiv p$ b. $p \wedge p \equiv p$	a. $A \cup A = A$ b. $A \cap A = A$
a. $p \vee \mathbf{t} \equiv \mathbf{t}$ b. $p \wedge \mathbf{c} \equiv \mathbf{c}$	a. $A \cup U = U$ b. $A \cap \emptyset = \emptyset$
a. $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ b. $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$	a. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ b. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
a. $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ b. $p \wedge (p \vee q) \equiv p$	a. $A \cup (A \cap B) \equiv A$ b. $A \cap (A \cup B) \equiv A$
a. $\sim \mathbf{t} \equiv \mathbf{c}$ b. $\sim \mathbf{c} \equiv \mathbf{t}$	a. $U^c = \emptyset$ b. $\emptyset^c = U$

Una **álgebra booleana** es un conjunto B junto con dos operaciones, que generalmente son denotadas con $+$ y $\cdot$, tal que para todas a y b en B tanto $a + b$ como $a \cdot b$ están en B y se cumplen las siguientes propiedades:

1. *Leyes conmutativas:* Para todas a y b en B,

$$a)\ a + b = b + a \quad \text{y} \quad b)\ a \cdot b = b \cdot a.$$

2. *Leyes asociativas:* Para todas a, b y c en B,

$$a)\ (a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{y} \quad b)\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

3. *Leyes distributivas:* Para todas a, b y c en B,

$$a)\ a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c) \quad \text{y} \quad b)\ a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c).$$

4. *Leyes de identidad:* Existen elementos distintos 0 y 1 en B tal que para toda a en B,

$$a)\ a + 0 = a \quad \text{y} \quad b)\ a \cdot 1 = a.$$

5. *Leyes de complemento:* Para cada a en B, existe un elemento en B, que se denota por $\overline{a}$ y se llama el **complemento** o **negación** de a, tal que

$$a)\ a + \overline{a} = 1 \quad \text{y} \quad b)\ a \cdot \overline{a} = 0.$$

1. *Unicidad de la ley de complemento:* Para toda a y x en B, si $a + x = 1$ y $a \cdot x = 0$ entonces $x = \overline{a}$.
2. *Unicidad de* 0 *y* 1*:* Si existe x en B tal que $a + x = a$ para toda a en B, entonces, $x = 0$ y si existe y en B tal que $a \cdot y = a$ para toda a en B, entonces $y = 1$.

Para toda $a \in B$, $\overline{(\overline{a})} = a$. $a)\ a + a = a \quad \text{y} \quad b)\ a \cdot a = a.$ $a)\ a + 1 = 1 \quad \text{y} \quad b)\ a \cdot 0 = 0.$

Para todas a y $b \in B$, $a)\ \overline{a + b} = \overline{a} \cdot \overline{b} \quad \text{y} \quad b)\ \overline{a \cdot b} = \overline{a} + \overline{b}.$ $a)\ (a + b) \cdot a = a \quad \text{y} \quad b)\ (a \cdot b) + a = a.$

$a)\ \overline{0} = 1 \quad \text{y} \quad b)\ \overline{1} = 0.$

Para todo elemento a en una álgebra booleana B, $\overline{(\overline{a})} = a$.

Paradoja de Russell: $S = \{A \mid A \text{ es un conjunto y } A \notin A\}$

¿Es S un elemento de sí mismo?

En una determinada ciudad hay un barbero hombre que afeita a todos esos hombres y sólo esos hombres, que no se afeitan a sí mismos. *Pregunta*: ¿El barbero se afeita a sí mismo?

No existe un algoritmo de cómputo que acepte cualquier algoritmo X y un conjunto de datos D como entrada y que después diga “pare” o “bucles infinitos” para indicar si X termina o no en un número finito de pasos cuando se ejecuta X con el conjunto de datos D.

Una **función f de un conjunto X a un conjunto Y**, se denota por $f: X \to Y$ y es una relación del **dominio** X, al **codominio** Y, que satisface dos propiedades: 1) cada elemento en X está relacionado con algún elemento en Y y 2) ningún elemento en X está relacionado con más de un elemento en Y. Por lo que, dado cualquier

rango de f = imagen de X bajo f = $\{y \in Y \mid y = f(x), \text{ para alguna } x \text{ en } X\}$

la imagen inversa de y $= \{x \in X \mid f(x) = y\}$

Si $f(x) = y$, entonces x se llama **una pre-imagen de y**

Una **función booleana (n-lugares)** f es una función cuyo dominio es el conjunto de todas las n-tuplas ordenadas de 0 y 1 y cuyo codominio es el conjunto $\{0, 1\}$. Más formalmente, el dominio de una función booleana se puede describir como el producto cartesiano de n copias del conjunto $\{0, 1\}$, que se denota por $\{0, 1\}^n$. Por tanto, $f: \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$.

Si $f: X \to Y$ es una función y $A \subseteq X$ y $C \subseteq Y$, entonces

$$f(A) = \{y \in Y \mid y = f(x) \text{ para alguna } x \text{ en } A\}$$

y

$$f^{-1}(C) = \{x \in X \mid f(x) \in C\}.$$

$f(A)$ se llama la **imagen de A** y $f^{-1}(C)$ se llama la **imagen inversa de C**.

$F: X \to Y$ es inyectiva $\Leftrightarrow$ $\forall x_1, x_2 \in X$, si $F(x_1) = F(x_2)$ entonces $x_1 = x_2$.

Una función $F: X \to Y$ *no* es inyectiva $\Leftrightarrow$ $\exists$ elementos x_1 y x_2 en X con $F(x_1) = F(x_2)$ y $x_1 \neq x_2$.

$F: X \to Y$ es sobreyectiva $\Leftrightarrow$ $\forall y \in Y, \exists x \in X$ tal que $F(x) = y$

$F: X \to Y$ *no* es sobreyectiva $\Leftrightarrow$ $\exists y$ en Y tal que $\forall x \in X$, $F(x) \neq y$.

Una **correspondencia uno a uno** (o **biyección**) de un conjunto X a un conjunto Y es una función $F: X \to Y$ que es a la vez inyectiva y sobreyectiva.

Suponga que $F: X \to Y$ es una correspondencia inyectiva; es decir, suponga que F es uno a uno y sobreyectiva. Entonces, hay una función $F^{-1}: Y \to X$ que se define como sigue:

función inversa para F $\quad F^{-1}(y) = x \quad \Leftrightarrow \quad y = F(x)$.

$g \circ f$ se lee "g círculo f" la **composición de f y g.**

Sea $f: X \to Y'$ y $g: Y \to Z$ funciones con la propiedad de que el rango de f es un subconjunto del dominio de g. Se define una nueva función $g \circ f: X \to Z$ de la siguiente manera:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \text{para toda } x \in X,$$

Si $f: X \to Y$ y $g: Y \to Z$ ambas son funciones inyectivas, entonces $g \circ f$ es inyectiva.

Si $f: X \to Y$ y $g: Y \to Z$ son ambas funciones sobreyectivas, entonces $g \circ f$ es sobreyectiva.

Sean A y B conjuntos cualesquiera. ***A* tiene la misma cardinalidad que *B*** si y sólo si, hay una correspondencia inyectiva de A a B. En otras palabras, A tiene la misma cardinalidad que B si y sólo si, hay una función f de A a B que sea inyectiva y sobreyectiva.

Un conjunto se llama **infinito contable** si y sólo si, tiene la misma cardinalidad que el conjunto de enteros positivos $\mathbf{Z}^+$. Se llama un conjunto **contable** si y sólo si, es finito o **infinito contable**. Un conjunto que no es contable se llama **no contable**.

el conjunto $\mathbf{Z}$ de todos los enteros es contable.

el conjunto $2\mathbf{Z}$ de todos los enteros pares es contable.

el conjunto $\mathbf{Q}^+$ de todos los números racionales positivos es contable.

El conjunto de todos los números reales entre 0 y 1 es no contable.

Cualquier subconjunto de cualquier conjunto contable es contable.

Cualquier conjunto con un subconjunto no contable es no contable.

Demuestre que el conjunto de todos los números reales tiene la misma cardinalidad que el conjunto de números reales entre 0 y 1.

Demuestre que el conjunto de todos los programas de computadora en un lenguaje de programación determinado es contable.

Sea T el conjunto de todas las funciones de los enteros positivos para el conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5. 6, 7, 8, 9\}$. Demuestre, que T es no contable.

Deduzca la consecuencia que hay funciones no-computables.

Sea R una relación de A a B. Se define la relación inversa R^{-1} de B a A como sigue:

$$R^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \mid (x, y) \in R\}.$$

Para toda $x \in A$ y $y \in B$, $\quad (y, x) \in R^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad (x, y) \in R.$

Una **relación sobre un conjunto *A*** es una relación de A a A.

Dados los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, una **relación *n*-aria** R sobre $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ es un subconjunto de $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$. Los casos especiales de 2-arias, 3-arias y 4-arias se denominan relaciones **binarias**, **ternarias** y **cuaternarias,** respectivamente.

Sea R una relación sobre un conjunto A.

1. R es **reflexiva** si y sólo si, para toda $x \in A$, $x\,R\,x$.
2. R es **simétrica** si y sólo si, para toda $x, y \in A$, **si** $x\,R\,y$ entonces $y\,R\,x$.
3. R es **transitiva** si y sólo si, para toda $x, y, z \in A$, **si** $x\,R\,y$ y $y\,R\,z$ entonces $x\,R\,z$.

1. R es reflexiva $\Leftrightarrow$ para toda x en A, $(x, x) \in R$.
2. R es simétrica $\Leftrightarrow$ para toda x y y en A, **si** $(x, y) \in R$ entonces $(y, x) \in R$
3. R es transitiva $\Leftrightarrow$ para toda x, y y z en A, **si** $(x, y) \in R$ y $(y, z) \in R$ entonces $(x, z) \in R$.

Sea A un conjunto y R una relación sobre A. La **cerradura transitiva** de R es la relación R^t sobre A que satisface las tres siguientes propiedades:

1. R^t es transitiva.
2. $R \subseteq R^t$.
3. Si S es cualquier otra relación transitiva que contiene a R, entonces $R^t \subseteq S$.

Dada una partición de un conjunto A, la **relación inducida por la partición,** R, se define en A como sigue: Para toda $x, y \in A$,

$x\,R\,y \quad \Leftrightarrow \quad$ hay un subconjunto A_i de la partición tal que tanto x como y están en A_i.

Sea A un conjunto y R una relación sobre A. R es una **relación de equivalencia** si y sólo si, R es reflexiva, simétrica y transitiva.

$$[a] = \{x \in A \mid x\, R\, a\}$$

para toda $x \in A$, $\quad x \in [a] \quad \Leftrightarrow \quad x\, R\, a$.

Suponga que R es una relación de equivalencia sobre un conjunto A y S es una clase de equivalencia de R. *Un* **representativo** de la clase S es cualquier elemento a tal que $[a] = S$.

$$m \equiv n \pmod{d} \quad \Leftrightarrow \quad d \mid (m - n)$$

Sea R una relación sobre un conjunto A. R es **antisimétrica** si y sólo si,

para todos a y b en A, $\quad$ si $a\, R\, b$ y $b\, R\, a$ entonces $a = b$.

Sea R una relación definida sobre un conjunto A. R es una **relación de orden parcial** si y sólo si, R es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Suponga que $\preceq$ es una relación de orden parcial sobre un conjunto A. Se dice que los elementos a y b de A son **comparables** si y sólo si, ya sea $a \preceq b$ o $b \preceq a$. De otra manera, a y b son llamados **no comparables.**

Si R es una relación de orden parcial sobre un conjunto A y para cualesquiera dos elementos a y b en A ya sea $a\, R\, b$ o $b\, R\, a$, entonces R es una **relación de orden total** sobre A.

Sea un conjunto A parcialmente ordenado con respecto a una relación $\preceq$.

1. Un elemento a en A se llama un **elemento máximo de A** si y sólo si, para todo b en A, ya sea $b \preceq a$ o b y a son no comparables.
2. Un elemento a en A se llama un **elemento mayor de A** si y sólo si, para todo b en A, $b \preceq a$.
3. Un elemento a en A se llama un **elemento mínimo de A** si y sólo si, para todo b en A, ya sea $a \preceq b$ o b y a son no comparables.
4. Un elemento a en A se llama un **elemento menor de A** si y sólo si, para todo b en A, $a \preceq b$.

Sea A un conjunto con una partición y sea R la relación inducida por la partición. Entonces R es reflexiva, simétrica y transitiva.

Suponga que A es un conjunto, R es una relación de equivalencia sobre A y a y b son elementos de A.
Si $a\, R\, b$, entonces $[a] = [b]$.

Si A es un conjunto, R es una relación de equivalencia sobre A y a y b son elementos de A, entonces $\quad$ ya sea $\quad [a] \cap [b] = \emptyset \quad$ o $\quad [a] = [b]$.

Si A es un conjunto y R es una relación de equivalencia sobre A, entonces las clases distintas de equivalencia de R forman una partición de A; es decir, la unión de las clases de equivalencia es toda de A y la intersección de cualesquiera dos clases distintas es vacía.

Sea $\preceq$ una relación de orden parcial sobre un conjunto finito no vacío A. Para construir un ordenamiento topológico,

1. Elija cualquier elemento mínimo x en A. *[Dicho elemento existe puesto que A es no vacío.]*
2. Sea $A' := A - \{x\}$.
3. Repita los pasos *a-c* en tanto $A' \neq \emptyset$.
   a. Elija cualquier elemento mínimo y en A'.
   b. Defina $x \preceq' y$.
   c. Sea $A' := A' - \{y\}$ y $x := y$.

Sea A un conjunto que es parcialmente ordenado con respecto a una relación $\preceq$. Un subconjunto B de A se llama una **cadena** si y sólo si, los elementos en cada par de elementos en B es comparable. En otras palabras, $a \preceq b$ o $b \preceq a$ para todos a y b en A. La **longitud de una cadena** es uno menos que el número de elementos en la cadena.

Dadas las relaciones de orden parcial $\preceq$ y $\preceq'$ en un conjunto A, $\preceq'$ es **compatible** con $\preceq$ si y sólo si, para todo a y b en A, si $a \preceq b$ entonces $a \preceq' b$.

Dadas las relaciones de orden parcial $\preceq$ y $\preceq'$ sobre un conjunto A, $\preceq'$ es un **ordenamiento topológico** para $\preceq$ si y sólo si, $\preceq'$ es un orden total que es compatible con $\preceq$.

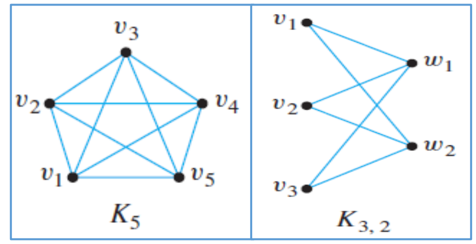
Un **grafo** G consiste de dos conjuntos finitos: un conjunto no vacío $V(G)$ de **vértices** y un conjunto de **aristas** $E(G)$, donde cada arista está asociada a un conjunto compuesto por uno o dos vértices llamados **puntos extremos**. La correspondencia de aristas a puntos finales se llama la **función de arista a punto extremo**.

Una arista con un sólo punto extremo se llama un **bucle** y dos o más aristas distintas con el mismo conjunto de puntos extremos se dicen que son **paralelas**. Se dice que una arista **conecta** sus puntos finales; dos vértices que se conectan por una arista se denominan **adyacentes**; y un vértice que es un punto final de un bucle se dice que es **adyacente a sí mismo**.

Se dice que una arista **incide sobre** cada uno de sus puntos extremos y dos aristas que inciden en el mismo punto se llaman **adyacentes**. Un vértice en el que no incide arista alguna se llama **aislado**.

Sean m y n enteros positivos. Un **grafo completo bipartito de vértices** (m, n), que se denota por $K_{m,n}$, es un grafo simple con vértices distintos $v_1, v_2, \ldots, v_m$ y $w_1, w_2, \ldots, w_n$ que satisface las siguientes propiedades: Para todos $i, k = 1, 2, \ldots, m$ y para todos $j, l = 1, 2, \ldots, n$,

1. Hay una arista de cada vértice v_i, a cada vértice w_j.
2. No hay arista de cualquier vértice v_i a cualquier otro vértice v_k.
3. No hay arista de cualquier vértice w_j a cualquier otro vértice w_l.



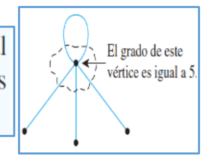
Un **grafo dirigido** o **digráfica**, consiste en dos conjuntos finitos: un conjunto no vacío $V(G)$ de vértices y un conjunto de aristas dirigidas $D(G)$, donde cada uno está asociado con un par ordenado de vértices llamado sus **puntos extremos**. Si el arista e está asociada con el par de vértices (v, w), entonces se dice que e es la arista (dirigida) de v a w.

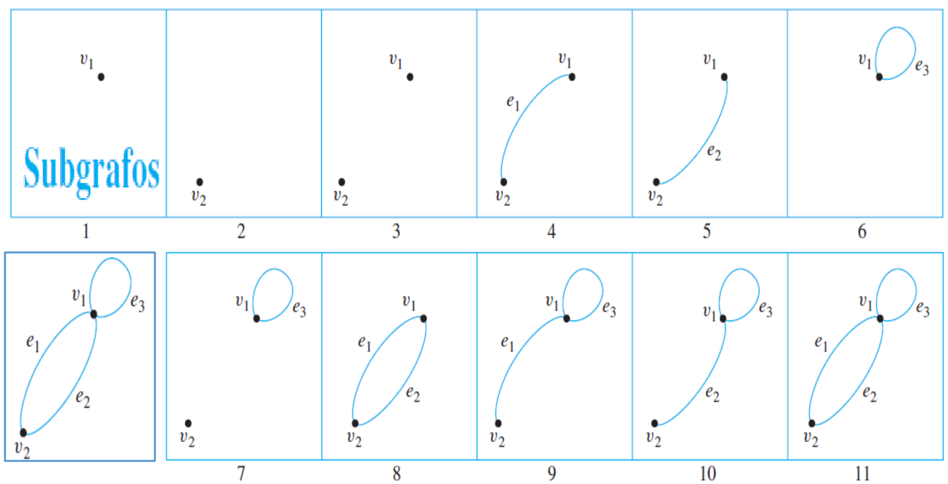
Un **grafo simple** es un grafo que no tiene ningún bucle o aristas paralelas. En un grafo simple, una arista con puntos extremos v y w se denota por $\{v, w\}$.

Sea n un entero positivo. Un **grafo completo de n vértices**, que se denota por K_n, es un grafo simple con n vértices y exactamente una arista conectando a cada par de vértices distintos.

Se dice que un grafo H es un **subgrafo** de un grafo G si y sólo si, cada vértice en H es también un vértice en G, cada arista en H es también una arista en G y cada arista en H tiene los mismos puntos extremos de G.

Sea G un grafo y v un vértice de G. El **grado de v**, que se denota por **deg(v)**, es igual al número de aristas que inciden en v, con una arista que es un bucle contado dos veces; El **grado total de G** es la suma de los grados de todos los vértices de G.





	¿Arista repetida?	¿Vértice repetido?	¿Inicia y finaliza en el mismo punto?	¿Debe contener al menos una arista?
Camino	permitido	permitido	permitido	no
Sendero	no	permitido	permitido	no
Trayectoria	no	no	no	no
Camino cerrado	permitido	permitido	sí	no
Circuito	no	permitido	sí	sí
Circuito simple	no	sólo primero y último	sí	sí

Sea G un grafo y sean v y w vértices en G.

Un **camino de v a w** es una sucesión finita alternada de vértices adyacentes y aristas de G. Por tanto un camino tiene la forma

$$v_0 e_1 v_1 e_2 \cdots v_{n-1} e_n v_n,$$

donde las v representan vértices, las e representan aristas, $v_0 = v$, $v_n = w$ y para toda $i = 1, 2, \ldots n$, v_{i-1} y v_i son los puntos extremos de e_i. **El camino trivial de v a v** consiste del único vértice v.

Un **sendero de v a w** es un camino de v a w que no contiene una arista repetida.

Una **trayectoria de v a w** es un sendero que no contienen un vértice repetido.

Un **camino cerrado** es un camino que comienza y termina en el mismo vértice.

Un **circuito** es un camino cerrado que contiene al menos una arista y no contiene una arista repetida.

Un **circuito simple** es un circuito que no tiene cualquier otro vértice repetido excepto el primero y el último.

Sea G un grafo y sean v y w dos vértices distintos de G. Un **sendero de Euler de v a w** es una sucesión de aristas adyacentes y vértices que comienza en v, termina en w, pasa a través de cada vértice de G por lo menos una vez y atraviesa cada arista de G exactamente una vez.

Una **matriz A $m \times n$** (se lee "m por n") **sobre un conjunto S** es un arreglo rectangular de elementos de S dispuestos en m renglones y n columnas:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \leftarrow i\text{-ésimo renglón de } \mathbf{A}$$

↑ j-ésima columna de **A**

Se escribe $\mathbf{A} = (a_{ij})$.

Sea G un grafo dirigido con vértices ordenados $v_1, v_2, \ldots, v_n$. La **matriz de adyacencia de G** es la matriz $n \times n$ $\mathbf{A} = (a_{ij})$ sobre el conjunto de enteros no negativos tales que

$$a_{ij} = \text{al número de flechas de } v_i \text{ a } v_j \quad \text{para toda } i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

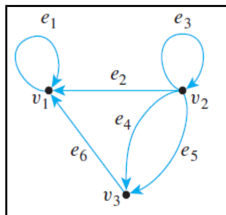
Sea G un grafo. Dos vértices **v y w de G son conexos** si y sólo si, existe un camino de v a w. El **grafo G es conexo** si y sólo si, dados *cualesquiera* dos vértices v y w en G, hay que un camino de v a w. Simbólicamente,

$$G \text{ es conexo} \quad \Leftrightarrow \quad \forall \text{ vértices } u, w \in V(G), \exists \text{ un camino de } v \text{ a } w.$$

Sea G un grafo. Un **circuito de Euler** para G es un circuito que contiene cada vértice y cada arista de G. Es decir, un circuito de Euler para G es una sucesión de vértices adyacentes y aristas en G que tiene al menos una arista, que comienza y termina en el mismo vértice, utiliza cada vértice de G por lo menos una vez y cada arista de G exactamente una vez.

Sea G un grafo. Un **circuito de Euler** para G es un circuito que contiene cada vértice y cada arista de G. Es decir, un circuito de Euler para G es una sucesión de vértices adyacentes y aristas en G que tiene al menos una arista, que comienza y termina en el mismo vértice, utiliza cada vértice de G por lo menos una vez y cada arista de G exactamente una vez.

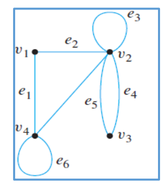
Dado un grafo G, un **circuito hamiltoniano** para G es un circuito simple que incluye todos los vértices de G. Es decir, un circuito hamiltoniano para G es una sucesión de vértices adyacentes y aristas distintas en las que aparece exactamente una vez cada vértice de G, excepto el primero y el último, que son los mismos.



Grafo dirigido G

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Matriz de adyacencia



$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Sea G un grafo no dirigido con vértices ordenados $v_1, v_2, \ldots, v_n$. La **matriz de adyacencia de G** es la matriz $n \times n$, $\mathbf{A} = (a_{ij})$ sobre el conjunto de los enteros no negativos tales que

$$a_{ij} = \text{número de aristas que conectan } v_i \text{ con } v_j$$

para todas $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Una matriz cuadrada $n \times n$, $\mathbf{A} = (a_{ij})$ se llama **simétrica**, si y sólo si, para toda i, $j = 1, 2, \ldots, n$,

$$a_{ij} = a_{ji}.$$

Suponga que todas las entradas de las matrices **A** y **B** son números reales. Si el número de elementos, n, en el i-ésimo renglón de **A** es igual el número de elementos en la j-ésima columna de **B**, entonces el **producto escalar** o **producto punto** del i-ésimo renglón de **A** y la j-ésima columna de **B** es el número real que se obtiene como:

$$[a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}] \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ik} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kj} & \cdots & b_{kn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & \boxed{c_{ij}} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

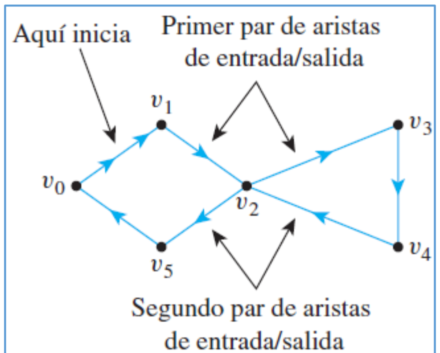
Para cada entero positivo n, la **matriz identidad $n \times n$**, que se denota por $\mathbf{I}_n = (\delta_{ij})$ o simplemente **I** (si el tamaño de la matriz es obvio del contexto), es la matriz de $n \times n$ en la que todas las entradas de la diagonal principal son 1 y todas las demás entradas son 0. En otras palabras,

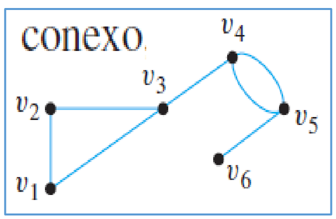
$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}, \quad \text{para toda } i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

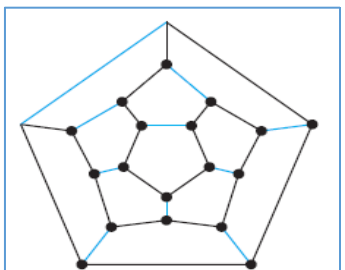
Para cualquier matriz $n \times n$, las **potencias de A** se definen como:

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{I} \quad \text{donde } \mathbf{I} \text{ es la matriz identidad } n \times n$$

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{A}\mathbf{A}^{n-1} \quad \text{para todos los enteros } n \geq 1$$

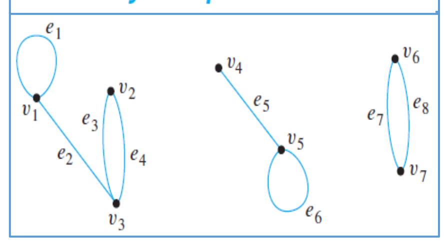






circuito hamiltoniano

Matrices y componentes conexos



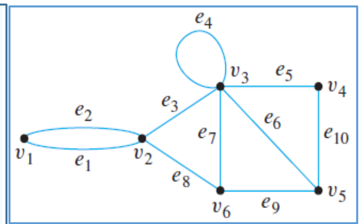
$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc:cc:cc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

Sea G un grafo.

a. Si G es conexa, entonces cualesquiera dos vértices distintos de G pueden conectarse con una trayectoria.

b. Si los vértices v y w forman parte de un circuito en G y se quita una arista del circuito, entonces aún existe un sendero de v a w en G.

c. Si G es conexa y G contiene un circuito, entonces se puede eliminar una arista del circuito sin desconectar a G.



$v_1e_1v_2e_3v_3e_4v_3e_5v_4$ sendero de v_1 a v_4, pero no una trayectoria.

$e_1e_3e_5e_5e_6$ No es un sendero

$v_2v_3v_4v_5v_3v_6v_2$ circuito. no es un circuito simple.

$v_2v_3v_4v_5v_6v_2$ circuito simple.

$v_1e_1v_2e_1v_1$ camino cerrado No es un circuito

v_1 no es un circuito. camino cerrado es un sendero

el grado total de $G = \deg(v_1) + \deg(v_2) + \cdots + \deg(v_n)$

teorema del saludo de mano $= 2 \cdot$ (el número de aristas de G).

El grado total de un grafo es par.

En cualquier grafo hay un número par de vértices de grado impar.

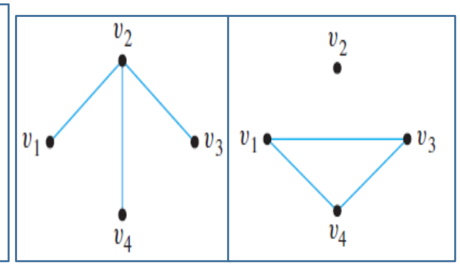
Si un grafo G tiene un circuito hamiltoniano, entonces G tiene un subgrafo H con las propiedades siguientes:

1. H contiene todos los vértices de G.
2. H es conexo.
3. H tiene el mismo número de aristas que de vértices.
4. Cada vértice de H tiene grado 2.

Si G es un grafo con vértices $v_1, v_2, \ldots, v_m$ y $\mathbf{A}$ es la matriz de adyacencia de G, entonces para cada entero positivo n y para todos los enteros $i, j = 1, 2, \ldots, m,$

la ij-ésima entrada de $\mathbf{A}^n =$ número de caminos de longitud n de v_i a v_j.

Definición: Si G es un grafo simple, el **complemento de** G, se denota G', se obtiene como sigue: El conjunto de vértices de G' es idéntico al conjunto de vértices G. Sin embargo, dos vértices distintos v y w de G' están conectados por una arista si y sólo si, v y w no están conectados por una arista en G. Por ejemplo, si G es el grafo



Sea G un grafo y sea v y w dos vértices distintos de G. Existe una trayectoria de Euler de v a w si y sólo si G es conexo, u y w tienen grado impar y todos los otros vértices de G tienen grado par positivo.

Si un grafo tiene un circuito de Euler, entonces todos los vértices del grafo tienen grado positivo par.

Si algún vértice de un grafo tiene grado impar, entonces el grafo no tiene un circuito de Euler.

Si un grafo G es conexo y el grado de cada vértice de G es un entero positivo par, G tiene un circuito de Euler.

Un grafo G tiene un circuito de Euler si y sólo si, G es conexo y cada vértice de G tiene grado par positivo.