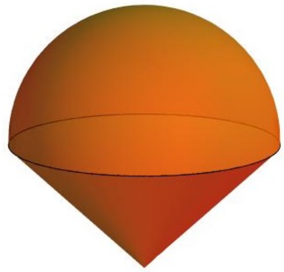
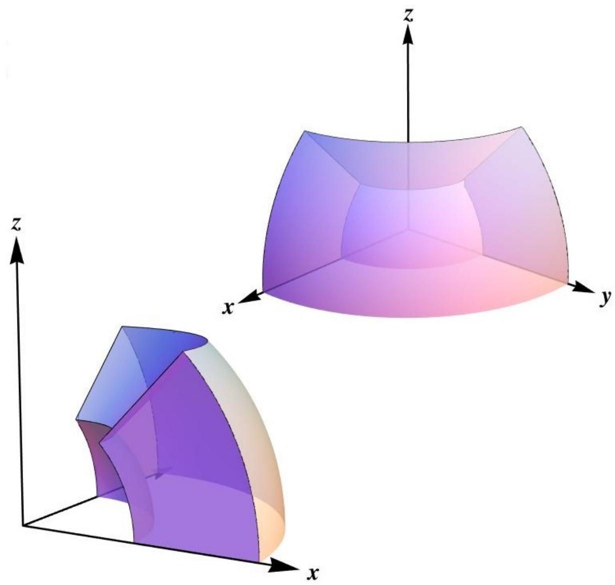
Integrales en coordenadas esféricas

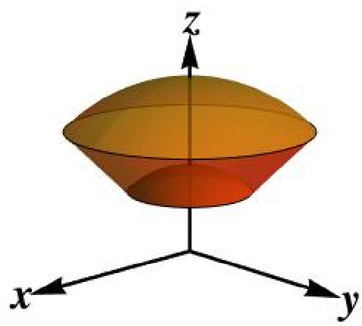
1. Determine el volumen del sólido que está encima del cono $x^2+y^2 = 3z^2$ y debajo de la esfera $x^2+y^2+z^2 = 4z$. Suponiendo que la densidad de masa es constante $\sigma(x, y, z) = C$, encuentre el centro de masa del sólido.



2. Halle el volumen del sólido en el primer octante limitado por las esferas $x^2+y^2+z^2 = 1$, $x^2+y^2+z^2 = 4$, el cono $x^2 + y^2 = z^2$ y el plano xy.



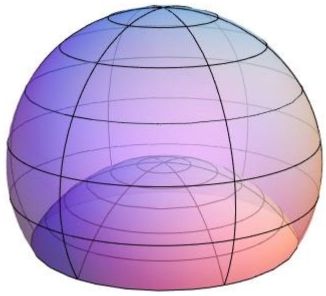
3. Evalúe
$$\iiint_E \frac{e^{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, dV,$$
donde E es la región comprendida entre las esferas $x^2+y^2+z^2 = 1$, $x^2+y^2+z^2 = 4$ y encima del cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$ (ver figura).



4. Identifique y dibuje la región de integración de la siguiente integral. Además, use coordenadas esféricas para calcular su valor.

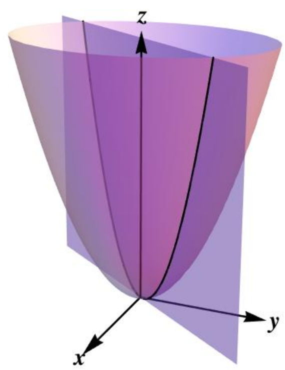
$$\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} z\,\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz\,dy\,dx.$$

5. Evalúe
$$\iiint_E \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,dV,$$
donde E es la región que está por fuera de la esfera $x^2+y^2+z^2=1$ y es interior a la esfera $x^2+y^2+z^2=2z$ (ver figura).

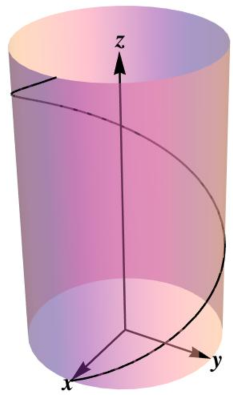


Integral de linea Escalar

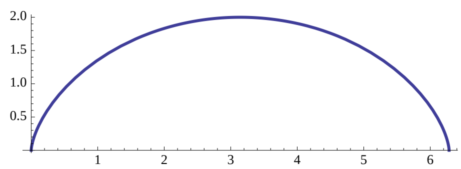
6. Sea C la curva de intersección del paraboloide $z=2x^2+y^2$ y el plano $y=\sqrt{2}x$, que se encuentra debajo de $z=4$. Halle la longitud de arco de C.



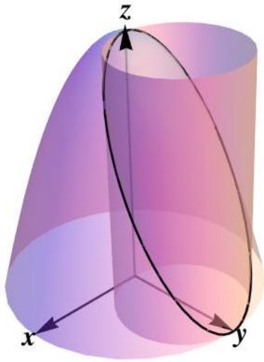
7. Un alambre se enrolla sobre el cilindro $x^2+y^2=4$ con punto inicial $(2,0,0)$, de manera que la altura z de cada punto del alambre es una función lineal del ángulo t de enrollamiento hasta el punto. Suponga que en una vuelta el alambre alcanza una altura de 2π. Calcule la masa de la primera vuelta del alambre, si en cada punto la densidad lineal de masa es igual a la altura z del punto.



8. Una circunferencia inicialmente en la posición $x^2+(y-1)^2=1$, se hace rodar sobre el eje x con velocidad angular de $1rad/seg$. El punto P que inicialmente se halla en el origen describe una curva llamada *cicloide*. Parametrice la *cicloide* tomando el tiempo t como parámetro y halle la longitud de la curva descrita en un giro de la circunferencia.



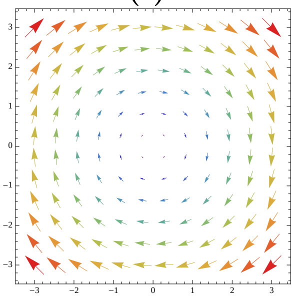
9. Escriba la integral que da la longitud de arco de la curva de intersección del cilindro $x^2 + (y-1)^2 = 1$ y el paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$.



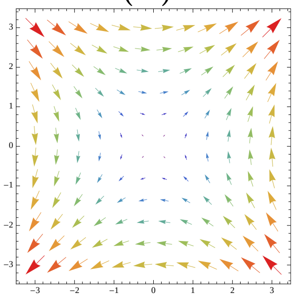
10. Empareje cada campo vectorial $\vec{F}$ en $\mathbb{R}^2$ con su diagrama respectivo (etiquetados como I-IV). Explique los motivos.

Campo Vectorial	$\vec{F}(x,y) = \langle x, y\rangle$	$\vec{F}(x,y) = \langle -x, -y\rangle$	$\vec{F}(x,y) = \langle y, -x\rangle$	$\vec{F}(x,y) = \langle y, x\rangle$
Gráfica				

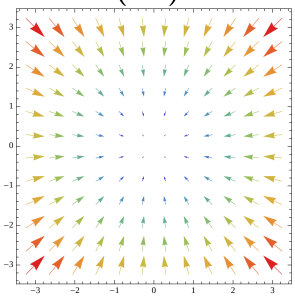
(I)



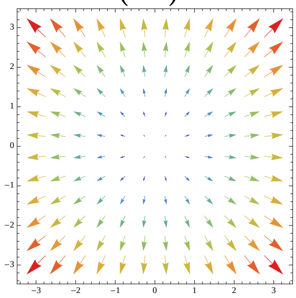
(II)



(III)



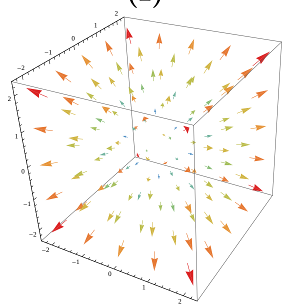
(IV)



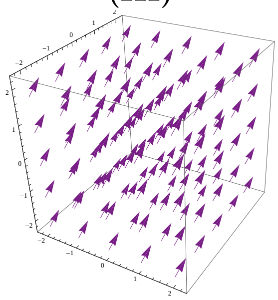
11. Empareje cada campo vectorial $\vec{F}$ en $\mathbb{R}^3$ con su diagrama correspondiente (etiquetados como I-IV). Explique los motivos.

Campo Vectorial	**Gráfica**
$\vec{F}(x,y,z) = \langle x, y, z\rangle$	
$\vec{F}(x,y,z) = \langle -x, -y, -z\rangle$	
$\vec{F}(x,y,z) = \langle x, 0, 0\rangle$	
$\vec{F}(x,y,z) = \langle 1, 2, 3\rangle$	

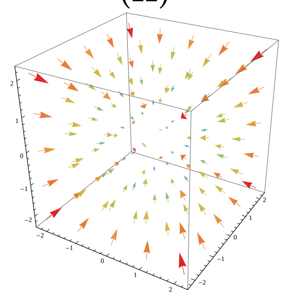
(I)



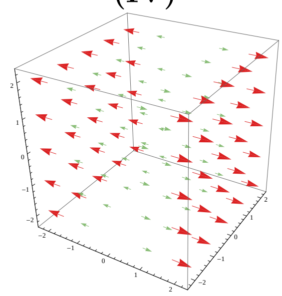
(III)



(II)



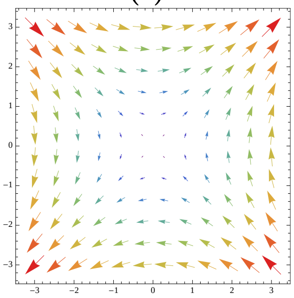
(IV)



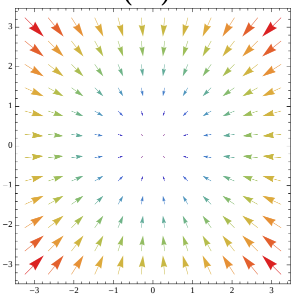
12. Empareje cada campo vectorial gradiente con su diagrama respectivo (etiquetados como I-IV). Explique los motivos.

Campo Gradiente de	$f(x,y)=-x^2-y^2$	$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$	$f(x,y)=xy$	$f(x,y)=x^2-y^2$
Gráfica				

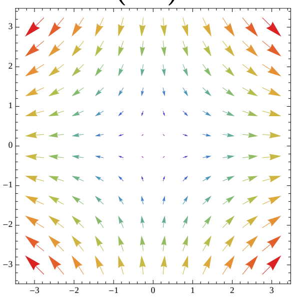
(I)



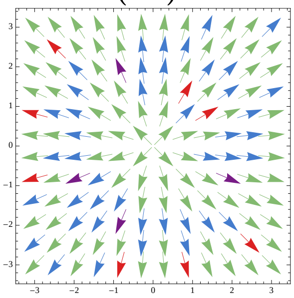
(II)



(III)



(IV)



Teorema Fundamental de las integrales de Linea

13. Sean C la recta que une a $(1,1,1)$ con $(2,3,1)$ y $\vec{F}(x,y,z)=xy\vec{i}+y^2\vec{j}+e^z\vec{k}$. Halle $\displaystyle\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$.

14. Sean $\vec{F}(x,y,z)=(2xy^2+z, 2x^2y+2y, x)$ y C la curva con parametrización

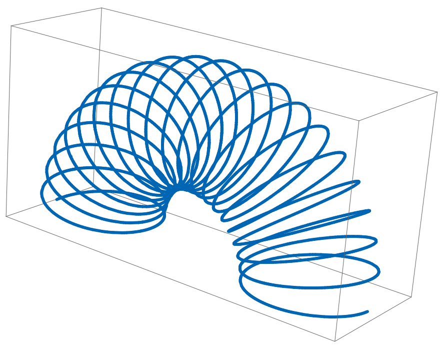
$$\vec{r}(t)=\left(\operatorname{sen}^8\left(\frac{\pi}{2}t\right)+1, t^3, t^8\right),$$

con $t\in[0,1]$. Halle $\displaystyle\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$.

15. Calcule la integral de línea $\displaystyle\int_C (3+2xy)\,dx+(x^2-3y^2)\,dy$, donde C es cualquier curva suave que va de $(0,1)$ a $(0,-e^{\pi})$.

16. Sea C la curva con parametrización $\vec{r}(t)=\left(t, \operatorname{sen} t, t^2\cos t\right)$, para $0\leq t\leq\pi$. Sean $f(x,y,z)=z^2e^{x^2y}+x^2$ y $\vec{F}=\nabla f$. Halle $\displaystyle\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$.

17. Encuentre la integral de línea del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z)=\left(\cos(x+y), 2yze^{y^2z}+\cos(x+y), y^2e^{y^2z}\right)$ a lo largo de la curva slinky $\vec{r}(t)=(\operatorname{sen}(40t),(2+\cos(40t))\cos(t),(2+\cos(40t))\operatorname{sen}(t))$, con $0\leq t\leq\pi$.



18. ¿Cuál de los siguientes es un campo vectorial conservativo?

(a) $\overrightarrow{F}(x,y)=\left(e^x\operatorname{sen} y-\frac{1}{x^2+1}+y,\ e^x\cos y+2x-3y^2\right)$

(*b*) $\overrightarrow{F}(x,y) = \left(e^x \operatorname{sen} y - \frac{1}{x^2+1} + y,\ e^x \cos y - 3y^2\right)$

(*c*) $\overrightarrow{F}(x,y) = (e^x \operatorname{sen} y + y,\ e^x \cos y + 2x)$

(*d*) $\overrightarrow{F}(x,y) = \left(e^x \operatorname{sen} y - \frac{1}{x^2+1},\ e^x \cos y - 3y^2\right)$.

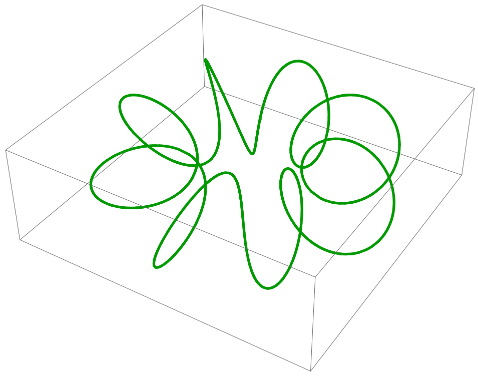
19. Considere el campo vectorial

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{ye^{xy}}{1+e^{2xy}}, \frac{xe^{xy}}{1+e^{2xy}} + z^3, 3yz^2\right)$$

y la curva C con parametrización

$$\vec{r}(t) = ((2+\cos(8t))\cos t, (2+\cos(8t))\operatorname{sen} t, \operatorname{sen}(8t)),$$

con $0 \le t \le 2\pi$. Halle la integral de línea $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.



20. Halle el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\overrightarrow{F}(x,y) = \frac{y^2}{1+x^2}\overrightarrow{i} + 2y\tan^{-1}x\,\overrightarrow{j}$, al mover una partícula a lo largo de la curva C dada por $\overrightarrow{r}(t) = 2t\,\overrightarrow{i} + t^2\,\overrightarrow{j}$, $0 \le t \le 1$.

21. Sea $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4y^2 = x;\ x \le 4\right\}$ orientada en sentido horario. Calcule la integral de línea

$$\int_C \left(\tan^{-1} y\right) dx + \left(\frac{x}{1+y^2} + 2ye^{y^2}\right) dy.$$

22. Halle el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\overrightarrow{F}(x,y) = x^2y\vec{i} + (x^4+y^2)\vec{j}$, al mover una partícula a lo largo del arco de parábola $y = x^2$ que va de $(0,0)$ a $(1,1)$.