2.6 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, suponer que x y y son funciones derivables de t y encontrar los valores señalados de dy/dt y dx/dt.

	Ecuación	*Encontrar*	*Dado*
1.	$y = \sqrt{x}$	*a)* $\frac{dy}{dt}$ cuando $x = 4$	$\frac{dx}{dt} = 3$
		b) $\frac{dx}{dt}$ cuando $x = 25$	$\frac{dy}{dt} = 2$
2.	$y = 4(x^2 - 5x)$	*a)* $\frac{dy}{dt}$ cuando $x = 3$	$\frac{dx}{dt} = 2$
		b) $\frac{dx}{dt}$ cuando $x = 1$	$\frac{dy}{dt} = 5$
3.	$xy = 4$	*a)* $\frac{dy}{dt}$ cuando $x = 8$	$\frac{dx}{dt} = 10$
		b) $\frac{dx}{dt}$ cuando $x = 1$	$\frac{dy}{dt} = -6$
4.	$x^2 + y^2 = 25$	*a)* $\frac{dy}{dt}$ cuando $x = 3, y = 4$	$\frac{dx}{dt} = 8$
		b) $\frac{dx}{dt}$ cuando $x = 4, y = 3$	$\frac{dy}{dt} = -2$

En los ejercicios 5 a 8, un punto se está moviendo sobre la gráfica de la función, de modo que dx/dt es 2 cm/s. Calcular dy/dt para los valores de x que se indican.

5. $y = 2x^2 + 1$ *a)* $x = -1$ *b)* $x = 0$ *c)* $x = 1$

6. $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$ *a)* $x = -2$ *b)* $x = 0$ *c)* $x = 2$

7. $y = \tan x$ *a)* $x = -\frac{\pi}{3}$ *b)* $x = -\frac{\pi}{4}$ *c)* $x = 0$

8. $y = \cos x$ *a)* $x = \frac{\pi}{6}$ *b)* $x = \frac{\pi}{4}$ *c)* $x = \frac{\pi}{3}$

Desarrollo de conceptos

9. Considerando la función lineal $y = ax + b$, ¿si x cambia a razón constante, ¿y también lo hace a razón constante? De ser así, ¿lo hace con la misma razón que x? Explicar la respuesta.

10. Con las propias palabras, mencionar la estrategia para resolver problemas de razones de cambio relacionadas.

11. Encontrar la razón de cambio de la distancia entre el origen y un punto que se mueve por la gráfica de $y = x^2 + 1$, si $dx/dt = 2$ cm/s.

12. Encontrar la razón de cambio de la distancia entre el origen y un punto que se mueve sobre la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$, si $dx/dt = 2$ cm/s.

13. ***Área*** El radio r de un círculo está creciendo a razón de 4 centímetros por minuto. Calcular la razón de cambio del área cuando *a)* $r = 8$ cm y *b)* $r = 32$ cm.

14. ***Área*** Sea A el área de un círculo con un radio r variable con el tiempo. Si dr/dt es constante, ¿es constante dA/dt? Explicar la respuesta.

15. ***Área*** El ángulo entre los dos lados iguales, con longitud s, de un triángulo isósceles es θ.

a) Demostrar que el área del triángulo se obtiene mediante $A = \frac{1}{2}s^2 \operatorname{sen} \theta$.

b) Si θ está creciendo a razón de $\frac{1}{2}$ radián por minuto, encontrar la razón de cambio del área cuando $\theta = \pi/6$ y $\theta = \pi/3$.

c) Explicar por qué la razón de cambio del área del triángulo no es constante, a pesar de que $d\theta/dt$ es constante.

16. ***Volumen*** El radio r de una esfera está creciendo a razón de 3 pulgadas por minuto.

a) Calcular la razón de cambio del volumen cuando $r = 9$ y $r = 36$ pulgadas.

b) Explicar por qué la razón de cambio del volumen de la esfera no es constante, a pesar de que dr/dt es constante.

17. ***Volumen*** Se infla un globo esférico con gas a razón de 800 centímetros cúbicos por minuto. ¿A qué razón está aumentando su radio en el momento en el que éste está a *a)* 30 centímetros y *b)* 60 centímetros?

18. ***Volumen*** Todas las aristas de un cubo están creciendo a razón de 6 centímetros por segundo. ¿A qué ritmo está aumentando el volumen cuando cada arista mide *a)* 2 cm y *b)* 10 cm?

19. ***Superficie*** Bajo las condiciones del problema anterior, determinar la razón a la que cambia el *área de la superficie* cuando cada arista mide *a)* 2 cm y *b)* 10 cm.

20. ***Volumen*** La fórmula para calcular el volumen de un cono es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Encontrar el ritmo de cambio del volumen si dr/dt es de 2 pulgadas por minuto y $h = 3r$, cuando *a)* $r = 6$ pulgadas y *b)* $r = 24$ pulgadas.

21. ***Volumen*** En una planta de arena y grava, la arena cae de una cinta transportadora creando un montículo de forma cónica, a razón de 10 pies cúbicos por minuto. El diámetro de la base del montículo es de aproximadamente tres veces la altura. ¿A qué razón cambia la altura del montón cuando su altura es 15 pies?

22. ***Profundidad*** Un depósito cónico (con el vértice abajo) mide 10 pies de ancho en su parte más alta y tiene 12 pies de profundidad. Si se le vierte agua a razón de 10 pies^3 por minuto, calcular la razón de cambio de la profundidad del agua cuando ésta es de 8 pies.

23. ***Profundidad*** Una piscina tiene 12 metros de largo, 6 de ancho y una profundidad que oscila desde 1 hasta 3 m (ver la figura). Se bombea agua en ella a razón de $\frac{1}{4}$ de metro cúbico por minuto y ya hay 1 m de agua en el extremo más profundo.

a) ¿Qué porcentaje de la piscina está lleno?

b) ¿A qué razón se eleva el nivel del agua?

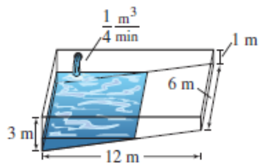


Figura para 23

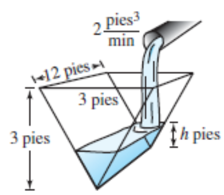


Figura para 24

24. ***Profundidad*** Una artesa tiene 12 pies de largo y 3 de ancho en su parte superior (ver la figura), sus extremos tienen forma de triángulo isósceles con una altura de 3 pies.

a) Si se vierte agua en ella a razón de 2 pies cúbicos por minuto, ¿a qué razón sube el nivel del agua cuando hay 1 pie de profundidad de agua?

b) Si el agua sube a una razón de $\frac{3}{8}$ de pulgada por minuto cuando $h = 2$, determinar una razón al que se está vertiendo agua en la artesa.

25. ***Escalera deslizante*** Una escalera de 25 pies de longitud está apoyada sobre una pared (ver la figura). Su base se desliza por la pared a razón de 2 pies por segundo.

a) ¿A qué razón está bajando su extremo superior por la pared cuando la base está a 7, 15 y 24 pies de la pared?

b) Determinar la razón a la que cambia el área del triángulo formado por la escalera, el suelo y la pared, cuando la base de la primera está a 7 pies de la pared.

c) Calcular la razón de cambio del ángulo formado por la escalera y la pared cuando la base está a 7 pies de la pared.

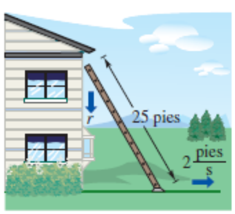


Figura para 25

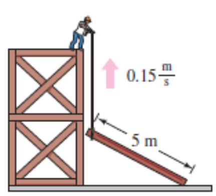


Figura para 26

PARA MAYOR INFORMACIÓN Para obtener más información sobre las matemáticas relativas a las escaleras deslizantes, ver el artículo "The Falling Ladder Paradox", de Paul Scholten y Andrew Simoson, en *The College Mathematics Journal*.

26. ***Construcción*** Un obrero levanta, con ayuda de una soga, un tablón de cinco metros hasta lo alto de un edificio en construcción (ver la figura). Suponer que el otro extremo del tablón sigue una trayectoria perpendicular a la pared y que el obrero mueve el tablón a razón de 0.15 m/s. ¿A qué ritmo desliza por el suelo el extremo cuando está a 2.5 m de la pared?

27. ***Construcción*** Una polea situada en lo alto de un edificio de 12 metros levanta un tubo de la misma longitud hasta colocarlo en posición vertical, como se muestra en la figura. La polea recoge la cuerda a razón de -0.2 m/s. Calcular las razones de cambio vertical y horizontal del extremo del tubo cuando $y = 6$.

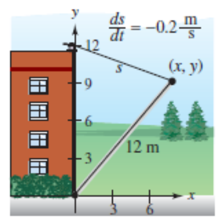


Figura para 27

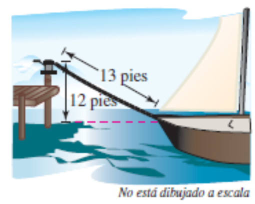


Figura para 28

28. ***Navegación*** Un velero es arrastrado hacia el muelle por medio de una polea situada a una altura de 12 pies por encima de la quilla del barco (ver la figura).

a) Si la cuerda se recoge a razón de 4 pies por segundo, determinar la velocidad del velero cuando quedan 13 pies de cuerda sin recoger. ¿Qué ocurre con la velocidad del velero a medida que el barco se acerca más al muelle?

b) Suponiendo que el bote se mueve a un ritmo constante de 4 pies por segundo, determinar la velocidad a la que la polea recoge la cuerda cuando quedan 13 pies de ella por recoger. ¿Qué ocurre con la velocidad de la polea a medida que el barco se acerca más al muelle?

29. ***Control de tráfico aéreo*** Un controlador detecta que dos aviones que vuelan a la misma altura tienen trayectorias perpendiculares y convergen en un punto (ver la figura). Uno de ellos está a 225 millas de dicho punto y vuela a 450 millas por hora. El otro está a 300 millas y se desplaza a 600 millas/h.

a) ¿A qué ritmo se reduce la distancia entre ellos?

b) ¿De cuánto tiempo dispone el controlador para modificar la ruta de alguno de ellos?

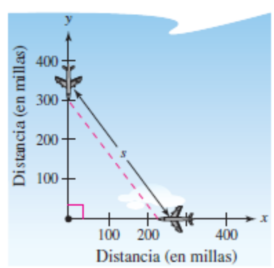


Figura para 29

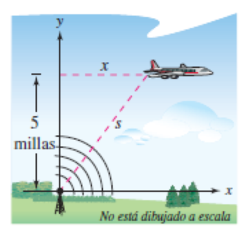


Figura para 30

30. ***Control de tráfico aéreo*** Un avión vuela a 5 millas de altura y pasa exactamente por encima de una antena de radar (ver la figura). Cuando el avión está a 10 millas ($s = 10$), el radar detecta que la distancia s está cambiando a una velocidad de 240 millas/h. ¿Cuál es la velocidad del avión?

31. ***Deportes*** Un campo de beisbol tiene forma de un cuadrado con lados de 90 pies (ver la figura). Si un jugador corre de segunda a tercera a 25 pies por segundo y se encuentra a 20 pies de la tercera base, ¿a qué ritmo está cambiando su distancia s respecto a *home*?

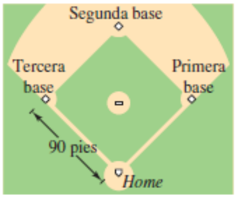


Figura para 31 y 32

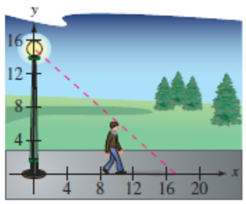


Figura para 33

32. ***Deportes*** En el campo de beisbol del ejercicio anterior, suponer que el jugador corre desde primera hasta segunda base a 25 pies por segundo. Calcular la razón de cambio de su distancia con respecto a *home* cuando se encuentra a 20 pies de la segunda base.

33. ***Longitud de una sombra*** Un hombre de 6 pies de altura camina a 5 pies por segundo alejándose de una luz que está a 15 pies de altura sobre el suelo (ver la figura). Cuando este hombre está a 10 pies de la base de la luz:

a) ¿a qué velocidad se mueve el extremo de su sombra?
b) ¿a qué razón está cambiando la longitud de su sombra?

34. ***Longitud de una sombra*** Repetir el ejercicio anterior, suponiendo ahora que el hombre camina *hacia* la luz y que ésta se encuentra situada a 20 pies de altura (ver la figura).

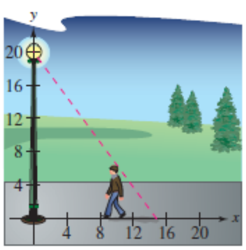


Figura para 34

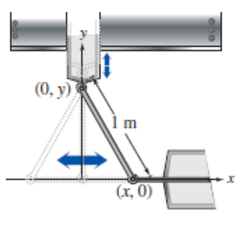


Figura para 35

35. ***Diseño de máquinas*** Los extremos de una varilla móvil de 1 m de longitud tienen coordenadas $(x, 0)$ y $(0, y)$ (ver la figura). La posición del extremo que se apoya en el eje x es

$$x(t) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi t}{6}$$

donde t se mide en segundos.

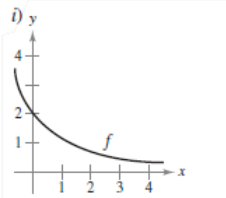
a) Calcular la duración de un ciclo completo de la varilla.
b) ¿Cuál es el punto más bajo que alcanza el extremo de la varilla que está en el eje y?
c) Encontrar la velocidad del extremo que se mueve por el eje y cuando el otro está en $(\frac{1}{4}, 0)$.

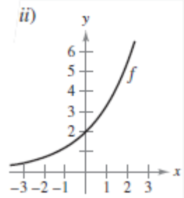
36. ***Diseño de máquinas*** Repetir el ejercicio anterior para una función de posición $x(t) = \frac{3}{5}\operatorname{sen}\pi t$. Utilizar el punto $(\frac{3}{10}, 0)$ para el apartado *c*).

37. ***Evaporación*** Al caer, una gota esférica alcanza una capa de aire seco y comienza a evaporarse a un ritmo proporcional a su área superficial ($S = 4\pi r^2$). Demostrar que el radio de la gota decrece a ritmo constante.

Para discusión

38. Utilizando la gráfica de f, *a*) determinar si dy/dt es positiva o negativa dado que dx/dt es negativa y *b*) determinar si dx/dt es positiva o negativa dado que dy/dt es positiva.





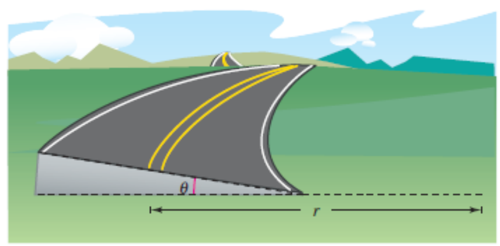
39. ***Electricidad*** La resistencia eléctrica combinada R de R_1 y R_2, conectadas en paralelo, es dada por

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

donde R, R_1 y R_2 se miden en ohmios. R_1 y R_2 están creciendo a razón de 1 y 1.5 ohmios por segundo, respectivamente. ¿A qué ritmo está cambiando R cuando $R_1 = 50$ y $R_2 = 75$ ohmios?

40. ***Expansión adiabática*** Cuando cierto gas poliatómico sufre una expansión adiabática, su presión p y su volumen V satisfacen la ecuación $pV^{1.3} = k$, donde k es una constante. Encontrar la relación que existe entre las razones dp/dt y dV/dt.

41. ***Diseño de autopistas*** En cierta autopista, la trayectoria de los automóviles es un arco circular de radio r. Con el fin de no depender totalmente de la fricción para compensar la fuerza centrífuga, se construye un peralte con un ángulo de inclinación θ sobre la horizontal (ver la figura). Este ángulo satisface la ecuación $rg \tan\theta = v^2$, donde v es la velocidad de los automóviles y $g = 32$ pies por segundo al cuadrado es la aceleración de la gravedad. Encontrar la relación que existe entre las razones de cambio relacionadas dv/dt y $d\theta/dt$.



42. ***Ángulo de elevación*** Un globo asciende a 4 metros por segundo desde un punto del suelo a 50 m de un observador. Calcular la razón de cambio del ángulo de elevación del globo cuando está a 50 metros de altura.

43. *Ángulo de elevación* El pescador de la figura recoge sedal para capturar su pieza a razón de 1 pie por segundo, desde un punto que está a 10 pies por encima del agua (ver la figura). ¿A qué ritmo cambia el ángulo θ entre el sedal y el agua cuando quedan por recoger 25 pies de sedal?

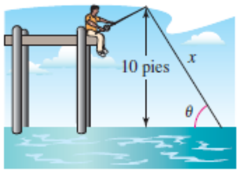


Figura para 43

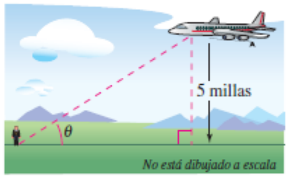


Figura para 44

44. *Ángulo de elevación* Un avión vuela a 5 millas de altitud y a una velocidad de 600 millas por hora, hacia un punto situado exactamente en la vertical de un observador (ver la figura). ¿A qué ritmo está cambiando el ángulo de elevación θ cuando el ángulo es *a*) $\theta = 30°$, *b*) $\theta = 60°$ y *c*) $\theta = 75°$?

45. *Velocidad lineal y velocidad angular* La patrulla de la figura está estacionada a 50 pies de un largo almacén. La luz de su torreta gira a 30 revoluciones por minuto. ¿A qué velocidad se está moviendo la luz a lo largo del muro cuando el haz forma ángulos de *a*) $\theta = 30°$, *b*) $\theta = 60°$ y *c*) $\theta = 70°$?

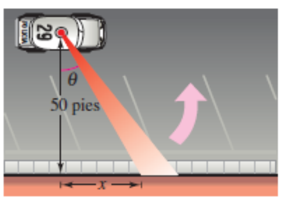


Figura para 45

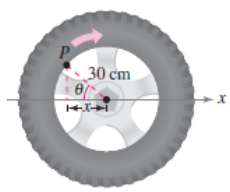


Figura para 46

46. *Velocidad lineal y velocidad angular* Una rueda de 30 cm de radio gira a razón de 10 vueltas por segundo. Se pinta un punto P en su borde (ver la figura).

a) Encontrar dx/dt como función de θ.

b) Utilizar una herramienta de graficación para representar la función del apartado *a*).

c) ¿Cuándo es mayor el valor absoluto del ritmo de cambio de x?, ¿y el menor?

d) Calcular dx/dt cuando $\theta = 30°$ y $\theta = 60°$.

47. *Control de vuelo* Un avión vuela en condiciones de aire en calma a una velocidad de 275 millas por hora. Si asciende con un ángulo de 18°, calcular el ritmo al que está ganando altura.

48. *Cámara de vigilancia* Una cámara de vigilancia está a 50 pies de altura sobre un vestíbulo de 100 pies de largo (ver la figura). Es más fácil diseñar la cámara con una velocidad de rotación constante, pero en tal caso toma las imágenes del vestíbulo a velocidad variable. En consecuencia, es deseable diseñar un sistema con velocidad angular variable de modo tal que la velocidad de la toma a lo largo del vestíbulo sea constante. Encontrar un modelo para la velocidad variable de rotación adecuado si $|dx/dt| = 2$ pies por segundo.

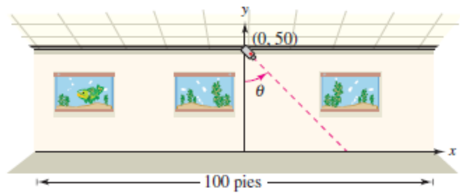


Figura para 48

49. *Para pensar* Describir la relación que existe entre la razón de cambio de y y el de x en los casos siguientes. Suponer que todas las variables y derivadas son positivas.

a) $\dfrac{dy}{dt} = 3\dfrac{dx}{dt}$ *b*) $\dfrac{dy}{dt} = x(L - x)\dfrac{dx}{dt}, \quad 0 \le x \le L$

Aceleración **En los ejercicios 50 y 51, calcular la aceleración del objeto especificado. (*Sugerencia:* Recordar que si una variable cambia a velocidad constante, su aceleración es nula.)**

50. Calcular la aceleración del extremo superior de la escalera del ejercicio 25 cuando su base está a 7 pies de la pared.

51. Calcular la aceleración del velero del ejercicio 28*a* cuando faltan por recoger 13 pies de cuerda.

52. *Modelo matemático* La siguiente tabla muestra el número de mujeres solteras s (nunca casadas) y casadas m (en millones) en el mundo laboral estadounidense desde 1997 hasta 2005. (*Fuente*: *U.S. Bureau of Labor Statistics*)

Año	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
s	16.5	17.1	17.6	17.8	18.0	18.2	18.4	18.6	19.2
m	33.8	33.9	34.4	35.1	35.2	35.5	36.0	35.8	35.9

a) Utilizar las funciones de regresión de su herramienta de graficación para encontrar un modelo de la forma $m(s) = as^3 + bs^2 + cs + d$ para esos datos, donde t es el tiempo en años, siendo $t = 7$ el año 1997.

b) Encontrar dm/dt. Después utilizar ese modelo para estimar dm/dt para $t = 10$, si se supone que el número de mujeres solteras s que forman parte de la fuerza de trabajo va a crecer a razón de 0.75 millones al año.

53. *Sombra en movimiento* Se deja caer una pelota desde una altura de 20 m, a una distancia de 12 m de una lámpara (ver la figura). La sombra de la pelota se mueve a lo largo del suelo. ¿A qué ritmo se está moviendo la sombra 1 segundo después de soltar la pelota? (*Enviado por Dennis Gittinger, St. Philips College, San Antonio, TX*)