文章编号:1000-6788(2006)09-0107-06

模糊层次分析法权重研究

兰继斌[1,2],徐　扬[1],霍良安[2],刘家忠[1]
(1.西南交通大学经济管理学院,成都 610031;2.广西大学数学与信息科学学院,南宁 530004)

摘要: 提出确定一族模糊层次分析法权重的新方法,说明该权重确定方法的合理性,得出四个重要结论,纠正人们对模糊层次分析法权重确定的某些错误认识.给出从传统层次分析法标度到模糊层次分析法标度的转换方法.

关键词: 模糊层次分析法;模糊判断矩阵;一致性;权重;排序
中图分类号: C934;O223　　**文献标志码:** A

Research on the Priorities of Fuzzy Analytical Hierarchy Process

LAN Ji-bin[1,2], XU Yang[1], HUO Liang-an[2], LIU Jia-zhong[1]
(1.School of Economics and Management, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China; 2.School of Mathematics and Information Science, Guangxi university, Nanning 530004, China)

Abstract: A new approach for a family priority of fuzzy analytical hierarchy process is proposed and the rationality of the approach is explained. Four important results are obtained. Some false cognitions to determine the priorities of fuzzy analytical hierarchy process are rectified. A method to transform the scale of tradition analytical hierarchy process into fuzzy analytical hierarchy process is given.

Key words: fuzzy analytical hierarchy process; fuzzy judgment matrix; consistency; priority; ranking

1 引言

层次分析法是T.L.Saaty[1]首次提出,该方法是定量和定性分析相结合的多目标决策方法,能够有效分析目标准则体系层次间的非序列关系,有效地综合测度决策者的判断和比较,由于系统简洁、实用,在社会、经济、管理等许多方面,得到越来越广泛的应用.为了改进T.L.Saaty的层次分析法中诸如判断一致性与矩阵一致性的差异、一致性检验的困难和缺乏科学性等问题,一些学者[2-4]提出了模糊层次分析法(FAHP).模糊层次分析法的一个根本的问题是如何确定方案权重的大小,本文讨论基于模糊一致互补判断矩阵的权重确定问题.

设有方案集 $A=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$,则表示方案 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两比较重要程度的模糊互补判断矩阵为[2-4]

$$R=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ & & \vdots & \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix}, \tag{1.1}$$

其中 $0\leqslant r_{ij}\leqslant 1$, $r_{ii}=0.5$, $r_{ij}+r_{ji}=1$. r_{ij} 表示方案 A_i 比方案 A_j 重要的隶属度,r_{ij} 越大,方案 A_i 比方案 A_j 越重要,$r_{ij}=0.5$ 时表示方案 A_i 和方案 A_j 同等重要.

性质1.1[4] 设模糊互补判断矩阵 $R=(r_{ij})_{n\times n}$,则其所有元素之和等于 $n^2/2$.

定义1.1[4] 若模糊互补判断矩阵 $R=(r_{ij})_{n\times n}$ 满足:$\forall\, i,j,k=1,2,\cdots,n$,有

收稿日期: 2005-06-27
资助项目: 国家自然科学基金(60474022)
作者简介: 兰继斌(1962-),男,广西都安县人,副教授,主要从事决策理论及方法的研究.

$$r_{ij} = r_{ik} - r_{jk} + 0.5, \tag{1.2}$$

则称模糊互补判断矩阵 $R=(r_{ij})_{n\times n}$ 为模糊一致判断矩阵.

文献[4]依据模糊一致判断矩阵的性质,提出模糊一致矩阵的元素与权重的关系:

$$r_{ij} = a(w_i - w_j) + 0.5, \quad a \geqslant \frac{n-1}{2}. \tag{1.3}$$

文献[5]依据(1.3)式采用最小二乘法求解各个方案的权重值,其主要结论如下:

$$1^\circ \quad w_i = \frac{1}{n} - \frac{1}{2a} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} r_{ik}, \quad i = 1,2,\cdots,n. \quad a \geqslant \frac{n-1}{2}, \tag{1.4}$$

$$2^\circ \quad |w_i - w_j| \leqslant \frac{1}{n-1}. \tag{1.5}$$

很明显在(1.5)中,当 n 很大时,权重的偏差会很小,不利于分辨方案的序关系.基于这个问题,我们提出一种新的确定方案权重的方法.

2 模糊一致判断矩阵权重的确定及方案的排序

定理 2.1 设模糊互补判断矩阵 $R=(r_{ij})_{n\times n}$,则 $R=(r_{ij})_{n\times n}$ 是模糊一致判断矩阵的充分必要条件是存在 n 维正的归一化向量 $w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^T$ 及 $\beta(\beta>1)$,使得 $\forall\, i,j$

$$r_{ij} = \log_\beta w_i - \log_\beta w_j + 0.5, \tag{2.1}$$

成立.

证明(必要性) 设 $R=(r_{ij})_{n\times n}$ 为模糊一致判断矩阵,令

$$w_i = \beta^{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}} \Big/ \sum_{k=1}^{n} \beta^{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} r_{kj}}, \quad i = 1,2,\cdots,n, \tag{2.2}$$

显然 $w_i>0, i=1,2,\cdots,n$, $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$.由模糊一致判断矩阵的定义有

$$\log_\beta w_i - \log_\beta w_j = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} r_{il} - \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} r_{jl} = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}(r_{il} - r_{jl}) = \frac{1}{n}n(r_{ij} - 0.5) = r_{ij} - 0.5.$$

这说明模糊一致判断矩阵 $R=(r_{ij})_{n\times n}$ 的元素 r_{ij} 可以表示为

$$r_{ij} = \log_\beta w_i - \log_\beta w_j + 0.5,$$

(充分性)若模糊互补判断矩阵 $R=(r_{ij})_{n\times n}$ 的元素 r_{ij} 可以表示为 $r_{ij}=\log_\beta w_i - \log_\beta w_j + 0.5$, $\forall\, i,j,k \in 1,2,\cdots,n$,有

$$\begin{aligned} r_{ij} &= \log_\beta w_i - \log_\beta w_j + 0.5 \\ &= (\log_\beta w_i - \log_\beta w_k + 0.5) - (\log_\beta w_j - \log_\beta w_k + 0.5) + 0.5 \\ &= r_{ik} - r_{jk} + 0.5. \end{aligned}$$

即 $R=(r_{ij})_{n\times n}$ 是模糊一致判断矩阵.

定理 2.2 设 $R=(r_{ij})_{n\times n}$ 是模糊一致判断矩阵,令 $b_{ij}=w_i/w_j=\beta^{r_{ij}-0.5}$, $(\beta>1)$,则 $B=(b_{ij})_{n\times n}$ 是一致的正互反判断矩阵.

证明 显然 $b_{ij}>0$, $\forall\, i,j=1,2,\cdots,n$, $b_{ik}/b_{jk}=\beta^{r_{ik}-0.5}/\beta^{r_{jk}-0.5}=\beta^{r_{ik}-r_{jk}}$,因为 R 是模糊一致判断矩阵,$r_{ik}-r_{jk}=r_{ij}-0.5$,所以 $b_{ik}/b_{jk}=\beta^{r_{ik}-r_{jk}}=\beta^{r_{ij}-0.5}=b_{ij}$.这说明 $B=(b_{ij})_{n\times n}$ 是一致的正互反判断矩阵.

在定理 2.2 中,当 $r_{ij}=0.5$ 时,$b_{ij}=1$,表示方案 A_j 与方案 A_i 同样重要;当 $r_{ij}>0.5$ 时,$b_{ij}>1$,表示方案 A_i 比方案 A_j 重要,且 r_{ij} 越大,b_{ij} 也越大,这说明方案 A_i 比方案 A_j 越重要;当 $r_{ij}<0.5$ 时,$b_{ij}<1$,表示方案 A_j 比方案 A_i 重要.这说明选择 $w_i, i=1,2,\cdots,n$ 作为区分方案的优劣程度的指标即权重的合理性.

如果 $R=(r_{ij})_{n\times n}$ 是模糊互补判断矩阵,可以考虑用下面方法确定各个方案的权重.

定理 2.3 设 $R=(r_{ij})_{n\times n}$ 是模糊互补判断矩阵,权重向量 $w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^T$ 由下面约束规划问题的解确定:

$$(\text{P1})\begin{cases}\min z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\log_\beta w_i - \log_\beta w_j + 0.5 - r_{ij})^2 \\ \text{s.t.}\sum_{j=1}^{n} w_j = 1 \\ \quad w_j > 0, j = 1,2,\cdots,n\end{cases} \tag{2.3}$$

则仍有

$$w_i = \beta^{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}} \Big/ \sum_{k=1}^{n} \beta^{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} r_{kj}}, \quad i = 1,2,\cdots,n.$$

这里 $\beta > 1$.

证明 由拉各朗日乘数法,将(P1)转化为下面无约束规划问题:

$$(\text{P2})\ \min L(w,\lambda) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\log_\beta w_i - \log_\beta w_j + 0.5 - r_{ij})^2 + 2\lambda\Big(\sum_{i=1}^{n} w_i - 1\Big).$$

令 $\dfrac{\partial L(w,\lambda)}{\partial w_i} = 0$,得 $4\sum_{j=1}^{n}\dfrac{(\log_\beta w_i - \log_\beta w_j + 0.5 - r_{ij})}{w_i \ln\beta} + 2\lambda = 0$,整理后得

$$2\sum_{j=1}^{n}(\log_\beta w_i - \log_\beta w_j + 0.5 - r_{ij}) + \lambda w_i \ln\beta = 0, \quad i = 1,2,\cdots,n,$$

从而

$$\sum_{i=1}^{n}\Big[\sum_{j=1}^{n} 2(\log_\beta w_i - \log_\beta w_j + 0.5 - r_{ij}) + \lambda w_i \ln\beta\Big] = 0,$$

由性质 1.1 及 $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$,得 $\lambda\ln\beta = 0$,因 $\beta > 1$,从而 $\lambda = 0$.解下面方程组

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}(\log_\beta w_i - \log_\beta w_j + 0.5 - r_{ij}) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1, \quad w_i > 0\end{cases}, \quad i = 1,2,\cdots,n,$$

解得

$$w_i = \beta^{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}} \Big/ \sum_{k=1}^{n} \beta^{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} r_{kj}}, \quad i = 1,2,\cdots,n.$$

3 主要结论

从上面的讨论,我们得出以下结论.

结论 1 方案的优劣排序与底数 $\beta,(\beta > 1)$无关,只与方案对应模糊判断矩阵的行的所有元素和有关,即方案的序关系由 $\sum_{j=1}^{n} r_{ij}, i = 1,2,\cdots,n$ 的大小决定的.(1.4)式同样说明这一点.

结论 2 权重

$$w_i = \beta^{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}} \Big/ \sum_{k=1}^{n} \beta^{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} r_{kj}}, \quad i = 1,2,\cdots,n,$$

是底数 $\beta,(\beta > 1)$的函数,因而对于模糊判断矩阵 $R = (r_{ij})_{n\times n}$有一族权重矢量

$$W = \Big\{(w_1(\beta), w_2(\beta), \cdots, w_n(\beta))^{\mathrm{T}} \,\Big|\, w_i(\beta) = \beta^{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}} \Big/ \sum_{k=1}^{n} \beta^{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} r_{kj}}, \beta > 1, i = 1,2,\cdots,n\Big\}. \tag{3.1}$$

结论 3 不妨设 $w_i(\beta) > w_j(\beta)$,则

$$\frac{w_i(\beta)}{w_j(\beta)} = \beta^{\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} r_{ik} - \sum_{k=1}^{n} r_{jk}\right)} > 1,$$

即

$$\sum_{k=1}^{n} r_{ik} - \sum_{k=1}^{n} r_{jk} > 0.$$

$\frac{w_i(\beta)}{w_j(\beta)}$关于 β 是严格增函数，且$\lim\limits_{\beta\to\infty}\frac{w_i(\beta)}{w_j(\beta)}=\infty$，$\lim\limits_{\beta\to 1}\frac{w_i(\beta)}{w_j(\beta)}=1$ 这说明可以通过增大 β 的值提高方案优劣的分辨率，当 β 很大时，某些权重值会趋向于零，不利于计算机处理．因此 β 的取值应根据决策者的偏好而定．在这里需要纠正某些学者关于模糊层次分析法权重确定的观点，某些学者[6]往往以分辨率的大小及数据比较实例说明确定权重的方法的优劣，现在看来是毫无科学根据的．参数 β 起到调节权重分辨率的作用．

结论 4 用模糊一致判断矩阵确定方案的权重，信息是不完善的．即模糊互补判断矩阵具有一致性，只能确定方案的序关系，不能确定方案的权重的大小，要确定方案的权重，必须考虑参数 β 的选择即决策者的分辩能力．这是因为模糊互补判断矩阵具有一致性，它对应的权重矢量不是唯一的，而是一族权重矢量．在这一族权重中决策者的分辨能力是确定权重大小的关键．

文献[6]对根据按行求和合归一化法给出的权重值[7-9]

$$w_i=\sum_{k=1}^{n}r_{ik}\Big/\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}r_{ij}=\frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}r_{ik},\quad i=1,2,\cdots,n. \tag{3.2}$$

产生疑问并通过考虑计算的复杂性及分辨率说明其提出的确定权重的方法优于其他确定权重的方法．本文不敢苟同，本文的结论 1 回答文献[4]的疑问．随着现代计算机技术的发展，如此简单的计算权重值不需要考虑计算的复杂性，这也就是说在模糊层次分析法的权重确定问题上，计算的复杂性不能作为衡量确定权重方法的优劣．至于分辨率问题，本文的结论 3 给予了回答．

下面以文献[6]给出的实例加以说明．

例 设模糊一致矩阵

$$R_1=\begin{bmatrix}0.5 & 0.241 & 0.328\\ 0.759 & 0.5 & 0.587\\ 0.672 & 0.413 & 0.5\end{bmatrix}.$$

取 $a=\frac{n-1}{2}$，分别按(1.4)、(3.2)式计算模糊一致矩阵 R_1 的权重值，其计算结果分别为 $w^{(1)}=(0.1897\quad 0.4487\quad 0.3616)^{\mathrm T}$ 和 $w^{(2)}=(0.2376\quad 0.4102\quad 0.3522)^{\mathrm T}$．现在采用本文确定模糊判断矩阵权重的方法，分别取 $\beta=e,\beta=e^{10}$ 及 $\beta=e^{20}$（e 为自然对数的底）：其计算结果分别为

$$w(e)=(0.2871\quad 0.3720\quad 0.3409)^{\mathrm T},$$
$$w(e^{10})=(0.0502\quad 0.6694\quad 0.2804)^{\mathrm T},$$
$$w(e^{20})=(0.0048\quad 0.8466\quad 0.1486)^{\mathrm T}.$$

实例同样说明本文结论 3 的正确性．

本文提出新的确定模糊互补判断矩阵权重的方法，克服文献[4,5]的缺陷即当 n 很大时，权重的偏差会很小，不利于分辩方案的序关系．同时指出用模糊一致判断矩阵确定方案的权重，信息是不完善的．即模糊互补判断矩阵具有一致性，只能确定方案的序关系，不能确定方案的权重的大小，要确定方案的权重，必须考虑参数 β 的选择．参数 β 是隐藏在决策过程决策者的偏好即决策者的分辨能力，这是模糊层次分析法理论尚未提到的新发现，对模糊层次分析法的理论及应用具有重要的作用．

4 从传统的层次分析法标度到模糊层次分析法标度的过渡

设有方案集 $A=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$对某一准则存在相对重要性，根据特定的标度法则，方案 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$与其它方案两两比较判断，其相对重要程度为 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,n)$，这样构造的 n 阶矩阵用以求解各个方案关于某准则的优先权重称为判断矩阵，记为

$$A=(a_{ij})_{n\times n}. \tag{4.1}$$

T.L.Saaty[1]引用 1～9 标度方法，其各级标度的含义如表 1 所示．

表 1

标度	定义	含义
1	同样重要	两方案对某属性同样重要
3	稍微重要	两方案对某属性,一方案比另一方案稍微重要
5	明显重要	两方案对某属性,一方案比另一方案明显重要
7	强烈重要	两方案对某属性,一方案比另一方案强烈重要
9	极端重要	两方案对某属性,一方案比另一方案极端重要
2,4,6,8	相邻标度中值	表示相邻两标度之间折衷时的标度
上列标度倒数	反比较	方案 A_i 对方案 A_j 的标度为 a_{ij},反之为 $1/a_{ij}$

如何将传统层次分析法标度过渡到模糊层次分析法标度.取 $\alpha\geqslant 81$,令 $r_{ij}(\alpha)=\log_{\alpha}a_{ij}+0.5$,则 $R=(r_{ij}(\alpha))_{n\times n}$是模糊互补判断矩阵.显然 $0\leqslant r_{ij}(\alpha)\leqslant 1$,且 $r_{ii}(\alpha)=0.5$,$r_{ij}(\alpha)+r_{ji}(\alpha)=1$.取 $\alpha\geqslant 81$ 的目的是保证 $0\leqslant r_{ij}(\alpha)\leqslant 1$.相应其各级模糊标度的含义如表 2 所示.

表 2

标度	定义	含义
0.5	同样重要	两方案对某属性同样重要
$\log_{\alpha}3+0.5$	稍微重要	两方案对某属性,一方案比另一方案稍微重要
$\log_{\alpha}5+0.5$	明显重要	两方案对某属性,一方案比另一方案明显重要
$\log_{\alpha}7+0.5$	强烈重要	两方案对某属性,一方案比另一方案强烈重要
$\log_{\alpha}9+0.5$	极端重要	两方案对某属性,一方案比另一方案极端重要
$\log_{\alpha}i+0.5,i=2,4,6,8$	相邻标度折衷值	表示相邻两标度之间折衷时的标度
上列标度互补	互补	方案 A_i 对方案 A_j 的标度为 r_{ij},反之为 $1-r_{ij}$

定理 4.1　若 $A=(a_{ij})_{n\times n}$是一致的正互反判断矩阵,则 $R=(r_{ij}(\alpha))_{n\times n}$,$(\alpha\geqslant 81)$是模糊一致判断矩阵.这里 $r_{ij}(\alpha)=\log_{\alpha}a_{ij}+0.5,\alpha\geqslant 81$.

证明　因为 $A=(a_{ij})_{n\times n}$是一致的正互反矩阵,所以 $a_{ij}=a_{ik}/a_{jk},\forall\, i,j,k=1,2,\cdots,n$,

$$\begin{aligned}r_{ij}(\alpha)&=\log_{\alpha}a_{ij}+0.5=\log_{\alpha}(a_{ik}/a_{jk})+0.5\\&=(\log_{\alpha}a_{ik}+0.5)-(\log_{\alpha}a_{jk}+0.5)+0.5\\&=r_{ik}(\alpha)-r_{jk}(\alpha)+0.5.\end{aligned}$$

即 $R=(r_{ij}(\alpha))_{n\times n}$是模糊一致判断矩阵.

上述构造的模糊互补判断矩阵的元素 r_{ij}可以表示方案 A_i 比方案 A_j 重要的隶属度,r_{ij}越大,方案 A_i 比方案 A_j 越重要,$r_{ij}=0.5$ 时表示方案 A_i 和方案 A_j 同等重要.例如取 $\alpha=243$,则相应其各级模糊标度的含义如表 3 所示.

表 3

标度	定义	含义
0.5	同样重要	两方案对某属性同样重要
0.7	稍微重要	两方案对某属性,一方案比另一方案稍微重要
0.7930	明显重要	两方案对某属性,一方案比另一方案明显重要
0.8542	强烈重要	两方案对某属性,一方案比另一方案强烈重要
0.9	极端重要	两方案对某属性,一方案比另一方案极端重要
0.6262,0.7524,0.8262,0.8786	相邻标度折衷值	表示相邻两标度之间折衷时的标度
上列标度互补	互补	方案 A_i 对方案 A_j 的标度为 r_{ij},反之为 $1-r_{ij}$

至于模糊标度值的大小依赖于决策者对 $\alpha(\alpha\geqslant 81)$取值的选择,特别是 $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\log_{\alpha}x=0,1/9\leqslant x\leqslant 9$.这样

一个具有一致性正互反判断矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 对应一族模糊一致性判断矩阵 $R=(r_{ij}(\alpha))_{n\times n}$，其中 $r_{ij}(\alpha)=\log_{\alpha}a_{ij}+0.5,(\alpha\geqslant 81)$.

5 小结

本文讨论模糊层次分析法权重的确定问题，提出了一族确定模糊互补判断矩阵的权重的方法，说明该方法的合理性及一个模糊判断矩阵与一族权重相对应，得出四个重要的结论，其中结论4说明模糊互补判断矩阵具有一致性，只能确定方案的序关系，不能确定方案权重的大小，要确定方案的优先权重，必须考虑参数 β 的选择即决策者对权重分辨能力.纠正人们在模糊层次分析法中某些错误的认识，给出传统标度与模糊标度的转换方法.本文的主要目的是告诉人们，在用模糊层次分析法进行决策时，仅仅利用模糊互补断矩阵的一致性去确定方案的权重信息不充分、不完善，这应该引起人们的注意.

参考文献：

[1] Saaty T L. Modeling unstructured decision problems-the theory of analytical hierarchies [J]. Math Comput Simulation, 1978, 20: 147 - 158.

[2] 樊治平，姜艳萍. 模糊判断矩阵排序方法研究的综述[J]. 系统工程，2001，19(5)：12 - 18.
Fan Z P, Jiang Y P. An overview on ranking methods of fuzzy judgment matrix[J]. Systems Engineering, 2001, 19(5): 12 - 18.

[3] 樊治平，姜艳萍，肖四汉. 模糊判断矩阵的一致性及其性质[J]. 控制与决策，2001，16(1)：142 - 145.
Fan Z P, Jiang Y P, Xiao S H. Consistency of fuzzy judgment matrix and its properties[J]. Control and Decision, 2001, 16(1): 142 - 145.

[4] 张吉军. 模糊层次分析法(FAHP)[J]. 模糊系统与数学，2000，14(2)：80 - 88.
Zhang J J. Fuzzy analytical hierarchy process[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2000, 14(2): 80 - 88.

[5] 吕跃进.基于模糊一致矩阵的模糊层次分析法的排序[J]. 模糊系统与数学，2002，16(2)：79 - 85.
Lu Y J. Weight calculation method of fuzzy analytical hierarchy process[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2002, 16(2): 79 - 85.

[6] 张吉军. 模糊一致判断矩阵3种排序方法的比较研究[J]. 系统工程与电子技术，2003，25(11)：1370 - 1372.
Zhang J J. Comparison of three ranking methods for the fuzzy consistent judgment matrix [J]. Systems Engineering and Electronics, 2003, 25(11): 79 - 85.

[7] 徐泽水.模糊互补判断矩阵排序的一种算法[J]. 系统工程学报，2001，16(4)：311 - 314.
Xu Z S. Algorithm for priority of fuzzy complementary judgment matrix[J]. Journal of Systems Engeering, 2001, 16(4): 311 - 314.

[8] 徐泽水.AHP中两类标度的关系研究[J]. 系统工程理论与实践，1999，19(7)：97 - 101.
Xu Z S. Study on the relation between two classes of scales in AHP[J]. Systems Engineering - Theory & Practice, 1999, 19(7): 97 - 101.

[9] 林钧昌，徐泽水. 模糊AHP中一种新的标度法[J]. 运筹与管理，1998，7(2)：37 - 40.
Lin J C, Xu Z S. A new scale in fuzzy AHP[J]. Operations Research and Management Science, 1998, 7(2): 37 - 40.