

文章编号:1001-7402(2000)02-0080-09

模糊层次分析法(FAHP)*

张吉军

(西南石油学院 经济管理系,四川 南充 637001)

摘 要:首先通过分析指出层次分析法(AHP)存在的问题,然后给出了较文献[2]条件更弱的模糊一致矩阵的定义,并对新定义的模糊一致矩阵的性质,用模糊一致矩阵表示因素两两重要性比较的合理性以及表示因素两两重要性比较的模糊一致矩阵同表示因素重要程度权重之间的关系进行了讨论,最后给出了模糊层次分析法的原理和步骤。

关键词:层次分析法;模糊一致矩阵;模糊层次分析法;决策分析

中图分类号:O159;C934

文献标识码:A

1 层次分析法(AHP)存在的问题

层次分析法是美国运筹学家,匹兹堡大学的 A. L. Saaty 教授于 20 世纪 70 年代提出的一种定性分析和定量分析相结合的系统分析方法。层次分析法通过明确问题,建立层次分析结构模型,构造判断矩阵,层次单排序和层次总排序五个步骤计算各层次构成要素对于总目标的组合权重,从而得出不同可行方案的综合评价价值,为选择最优方案提供依据。AHP 的关键环节是建立判断矩阵,判断矩阵是否科学、合理直接影响到 AHP 的效果,通过分析,我们发现:

(1) 检验判断矩阵是否具有 consistency 非常困难。

检验判断矩阵是否具有 consistency 需要求判断矩阵的最大特征根 λ_{\max} , 看 λ_{\max} 是否同判断矩阵的阶数 n 相等。若 $\lambda_{\max} = n$, 则具有 consistency^[1]。当阶数 n 较大时,精确计算 λ_{\max} 的工作量非常大。

(2) 当判断矩阵不具有 consistency 时需要调整判断矩阵的元素,使其具有 consistency,这不排除要经过若干次调整、检验、再调整、再检验的过程才能使判断矩阵具有 consistency。

(3) 检验判断矩阵是否具有 consistency 的判断标准: $CR < 0.1$ 缺乏科学依据。

(4) 判断矩阵的 consistency 与人类思维的一致性有显著差异。

为了解决上述问题,我们引进了模糊一致矩阵的概念。为些,下面先介绍模糊一致矩阵的定义及其性质。

* 收稿日期:1998-11-13;修订日期:1999-04-15

作者简介:张吉军(1963-),男,四川南充人,西南石油学院经济管理系副教授,博士,研究方向:现代管理理论与方法。

2 模糊一致矩阵的定义及其性质

2.1 模糊一致矩阵及其有关概念

定义 2.1 设矩阵 $R = (r_{ij})_{n \times n}$, 若满足^[2]:

$$0 \leq r_{ij} \leq 1, \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n)$$

则称 R 是模糊矩阵。

定义 2.2 若模糊矩阵 $R = (r_{ij})_{n \times n}$ 满足^[2]:

$$r_{ij} + r_{ji} = 1, \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n)$$

则称模糊矩阵 R 是模糊互补矩阵。

在文献^[2]中定义的模糊一致矩阵如下:

定义 2.3 若模糊互补矩阵 $R = (r_{ij})_{n \times n}$ 满足: $\forall i, j, k$

$$r_{ij} = r_{ik} - r_{jk} + 0.5$$

则称模糊矩阵 R 是模糊一致矩阵。

本文定义的模糊一致矩阵不要求模糊矩阵是互补的, 因而其条件较文献^[2]弱, 本文的定义如下:

定义 2.4 若模糊矩阵 $R = (r_{ij})_{n \times n}$ 满足: $\forall i, j, k$ 有

$$r_{ij} = r_{ik} - r_{jk} + 0.5$$

则称模糊矩阵 R 是模糊一致矩阵。

2.2 模糊一致矩阵的性质

定理 2.1 设模糊矩阵 $R = (r_{ij})_{n \times n}$ 是模糊一致矩阵, 则有

(1) $\forall i (i = 1, 2, \dots, n)$, 有

$$r_{ii} = 0.5$$

(2) $\forall i, j (i, j = 1, 2, \dots, n)$, 有

$$r_{ij} + r_{ji} = 1$$

(3) R 的第 i 行和第 i 列元素之和为 n ;

(4) $R^T = R^C$, 且均为模糊一致矩阵, 其中 R^T 是 R 的转置矩阵, R^C 是 R 的余矩阵;

(5) 从 R 中划掉任意一行及其对应列所得的子矩阵仍然是模糊一致矩阵;

(6) R 满足中分传递性, 即

当 $\lambda \geq 0.5$ 时, 若 $r_{ij} \geq \lambda, r_{jk} \geq \lambda$, 则有 $r_{ik} \geq \lambda$;

当 $\lambda \leq 0.5$ 时, 若 $r_{ij} \leq \lambda, r_{jk} \leq \lambda$, 则有 $r_{ik} \leq \lambda$.

证明 (1) 由 $R = (r_{ij})_{n \times n}$ 是模糊一致矩阵知, $\forall i, j, k (i, j, k = 1, 2, \dots, n)$, 有

$$r_{ij} = r_{ik} - r_{jk} + 0.5$$

特别地, 当 $i = j$ 时, 也应成立, 即有

$$r_{ii} = r_{ik} - r_{ik} + 0.5 = 0.5$$

故 $\forall i (i = 1, 2, \dots, n)$, 有 $r_{ii} = 0.5$ 成立。

(2) 因为 $\forall i, j, k$, 有

$$r_{ij} = r_{ik} - r_{jk} + 0.5$$

成立, 特别地, 当 $k = i$ 时也应成立, 即有

$$r_{ij} = r_{ii} - r_{ji} + 0.5$$

由(1)知, $r_{ii} = 0.5$, 故有

$$r_{ij} = 0.5 - r_{ji} + 0.5$$

从而, $r_{ij} + r_{ji} = 1$ 成立。

(3)~(6)的证明见文献[2]。

定理 2.2 若模糊矩阵 $R = (r_{ij})_{n \times n}$ 是模糊互补矩阵, 则 $\forall i (i = 1, 2, \dots, n)$, 有 $r_{ii} = 0.5$ 。

证明 因为 $R = (r_{ij})_{n \times n}$ 是模糊互补矩阵, 故对一切 $i (i = 1, 2, \dots, n)$, 有

$$r_{ij} + r_{ji} = 1$$

成立。特别地, 当 $i = j$ 时也应成立, 即有

$$r_{ii} + r_{ii} = 1$$

故对一切 $i (i = 1, 2, \dots, n)$, 有 $r_{ii} = 0.5$ 成立。

定理 2.3 模糊互补矩阵 $R = (r_{ij})_{n \times n}$ 是模糊一致矩阵的充要条件是任意指定两行的对应元素之差为常数。

证明 必要性。对任意指定的第 i 行和第 j 行, 由模糊一致矩阵的定义知, $\forall k (k = 1, 2, \dots, n)$, 有

$$r_{ij} = r_{ik} - r_{jk} + 0.5$$

从而, $\forall k$, 有

$$r_{ik} - r_{jk} = r_{ij} - 0.5$$

在上式中, i 和 j 是固定的, 只有 k 是变动的。所以, 第 i 行和第 j 行对应元素之差为常数。

充分性。对任意指定的第 i 行和第 j 行, 设它们对应元素之差为常数 a , 即 $\forall k (k = 1, 2, \dots, n)$, 有

$$r_{ik} - r_{jk} = a \quad (1)$$

成立, 特别地, 当 $k = j$ 时也应成立, 即有

$$r_{ij} - r_{jj} = a \quad (2)$$

由(1)式和(2)式, 有

$$r_{ij} - r_{jj} = r_{ik} - r_{jk}$$

故

$$r_{ij} = r_{ik} - r_{jk} + r_{jj} \quad (3)$$

再由 $R = (r_{ij})_{n \times n}$ 是模糊互补矩阵及定理 2.2 知, 有 $r_{jj} = 0.5$, 故由(3)式, 有

$$r_{ij} = r_{ik} - r_{jk} + 0.5$$

最后, 由 i 和 j 的任意性及模糊一致矩阵的定义知, 模糊互补矩阵 $R = (r_{ij})_{n \times n}$ 是模糊一致矩阵。

定理 2.4 模糊互补矩阵 $R = (r_{ij})_{n \times n}$ 是模糊一致矩阵的充要条件是任意指定行和其余各行对应元素之差为某一个常数。

证明 必要性。由定理 2.3 直接可得。

充分性。若对任意指定的第 i 行和第 j 行,对 $\forall k (k = 1, 2, \dots, n)$, 恒有

$$\begin{aligned} r_{1k} - r_{ik} &= a_i \\ r_{1k} - r_{jk} &= a_j \end{aligned}$$

则 $\forall k$, 有

$$\begin{aligned} r_{ik} - r_{jk} &= r_{1k} - r_{jk} - r_{1k} + r_{ik} \\ &= (r_{1k} - r_{jk}) - (r_{1k} - r_{ik}) \\ &= a_j - a_i \end{aligned}$$

即第 i 行和第 j 行的对应元素之差为常数 $(a_j - a_i)$,再由 i 和 j 的任意性知, R 的任意指定两行对应元素之差均为常数,从而由定理 2.3 知, R 是模糊一致矩阵。

3 用模糊一致矩阵表示因素间两两重要性比较的合理性解释

在模糊数学中,模糊矩阵是模糊关系的矩阵表示,若论域 $U = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 上的模糊关系“……比……重要得多”的矩阵表示为模糊矩阵 $R = (r_{ij})_{n \times n}$,则 R 的元素具有如下实际意义。

(1) r_{ij} 的大小是 a_i 比 a_j 重要的重要程度的度量,且 r_{ij} 越大, a_i 比 a_j 就越重要, $r_{ij} > 0.5$ 表示 a_i 比 a_j 重要;反之,若 $r_{ij} < 0.5$,则表示 a_j 比 a_i 重要。

(2) 由余的定义知, $1 - r_{ij}$ 表示 a_i 不比 a_j 重要的隶属度,而 a_i 不比 a_j 重要,则 a_j 比 a_i 重要,又因 a_j 比 a_i 重要的隶属度为 r_{ji} ,故 $r_{ji} = 1 - r_{ij}$,即 R 是模糊互补矩阵。特别地,当 $i = j$ 时,有 $r_{ii} = 0.5$,也即元素同自身进行重要性比较时,重要性隶属度为 0.5。

(3) 若人们在确定一元素比另一个元素重要的隶属度的过程中具有思维的一致性,则应有:若 $r_{ij} > 0.5$,即 a_i 比 a_j 重要,则 $\forall k (k = 1, 2, \dots, n)$ 有 $r_{ik} > r_{jk}$ 。另一方面, $r_{ik} - r_{jk}$ 是 a_i 比 a_j 相对重要的一个度量,再加上 a_j 自身比较重要性的度量为 r_{jj} ,则可得 a_i 比 a_j 绝对重要的度量 r_{ij} , 即

$$r_{ij} = r_{ik} - r_{jk} + 0.5$$

也即 $R = (r_{ij})_{n \times n}$ 应是模糊一致矩阵。

综上所述,以及模糊一致矩阵的性质知,用模糊一致矩阵 $R = (r_{ij})_{n \times n}$ 表示论域 $U = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 上的模糊关系“…比…重要得多”是合理的。

4 表示因素间两两重要性比较的模糊一致矩阵 同表示因素重要程度权重之间的关系

设表示元素 a_1, a_2, \dots, a_n 两两比较重要程度的模糊判断矩阵 R 为

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix}$$

元素 a_1, a_2, \dots, a_n 的权重分别为 w_1, w_2, \dots, w_n , 由 r_{ij} 的定义知, r_{ij} 表示元素 a_i 比元素 a_j 重要的隶属度, r_{ij} 越大, a_i 就比 a_j 越重要, $r_{ij} = 0.5$ 时, 表示 a_i 和 a_j 同等重要。另一方面, 由权重的定义知, w_i 是对元素 a_i 的重要程度的一种度量, w_i 越大, 元素 a_i 就越重要。因而, $w_i - w_j$ 的大小在一定程度上也表示了元素 a_i 比 a_j 重要的程度, 且 $w_i - w_j$ 越大, a_i 比 a_j 就越重要。这样, 通过两两比较得到的元素 a_i 比 a_j 重要的重要程度度量 r_{ij} 同 $(w_i - w_j)$ 可建立一定的联系, 这种联系我们用函数 f 表示, 即 $r_{ij} = f(w_i - w_j)$ 。

下面推断函数 f 应具有的性质:

(1) 由上面的分析讨论知, r_{ij} 越大, 元素 a_i 比 a_j 越重要。同样, $w_i - w_j$ 越大, 元素 a_i 比 a_j 越重要。因此, 函数 $f(x)$ 应是 $[-1, 1]$ 上的增函数 (因为 $-1 \leq w_i - w_j \leq 1$)。

(2) 为确保模糊判断 r_{ij} 和元素 a_i 与 a_j 重要程度差异 $(w_i - w_j)$ 的一致性以及模糊判断整体的一致性, 函数 f 应是连续的。

(3) 由维尔斯特拉斯 (Weistrass) 定理知, 对于函数 $f(x) \in C[-1, 1]$ 及任意 $\epsilon > 0$, 总存在一个多项式 $p(x)$, 使得 $\|f(x) - p(x)\| \leq \epsilon$ 在 $[-1, 1]$ 上一致成立。

因此, 在精度允许的范围内, 可以假定 $f(x)$ 具有多项式形式, 即

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

(4) 由 r_{ij} 具有的性质, 可以确定 $f(x)$ 的具体形式如下:

①由 $r_{ij} = 1 - r_{ji}$, 有 $f(x) = f(w_i - w_j) = 1 - f(w_j - w_i)$, 令 $x = w_i - w_j$, 有 $f(x) = 1 - f(-x)$, 从而有

$$f(x) + f(-x) = 1$$

将 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ 代入上式, 并化简得

$$2a_0 + 2a_2x^2 + 2a_4x^4 + \dots + 2a_{2k}x^{2k} = 1$$

即

$$(2a_0 - 1) + 2a_2x^2 + 2a_4x^4 + \dots + 2a_{2k}x^{2k} = 0 \quad (4)$$

对一切 $x \in [-1, 1]$ 成立 (这里假定 $n = 2k$ 或 $2k + 1$), 又因 $2k$ 次多项式最多有 $2k$ 个不同的根, 要使 (4) 式对一切 $x \in [-1, 1]$ 成立, 必有

$$2a_0 - 1 = 2a_2 = 2a_4 = \dots = 2a_{2k} = 0$$

故 $a_0 = 1/2, a_2 = a_4 = \dots = a_{2k} = 0$, 即 $f(x)$ 具有如下形式:

$$f(x) = 0.5 + a_1x + a_3x^3 + \dots + a_{2k-1}x^{2k-1}$$

简记为

$$f(x) = 0.5 + g(x)$$

②由 $r_{ij} = r_{ik} - r_{jk} + 0.5$, 有

$$f(w_i - w_j) = f(w_i - w_k) - f(w_j - w_k) + 0.5$$

令 $x = w_i - w_k, y = w_j - w_k$, 有

$$f(x - y) = f(x) - f(y) + 0.5$$

再由 $f(x) = 0.5 + g(x)$ 及上式, 有

$$g(x - y) + 0.5 = g(x) + 0.5 - (g(y) + 0.5) + 0.5$$

即

$$g(x - y) = g(x) - g(y)$$

又

$$\begin{aligned} g(x) &= a_1x + a_3x^3 + \cdots + a_{2k-1}x^{2k-1} \\ g(y) &= a_1y + a_3y^3 + \cdots + a_{2k-1}y^{2k-1} \\ g(x - y) &= a_1(x - y) + a_3(x - y)^3 + \cdots + a_{2k-1}(x - y)^{2k-1} \end{aligned}$$

故要使 $g(x - y) = g(x) - g(y)$ 对一切 $x, y \in [-1, 1]$ 成立, 必有

$$a_3 = a_5 = \cdots = a_{2k-1} = 0$$

事实上, 因为 $g(x - y) = g(x) - g(y)$ 对一切 $x, y \in [-1, 1]$ 成立, 特别地, 对 $y = 2x$ 也应成立。此时, 有

$$\begin{aligned} g(x - y) &= -a_1x - a_3x^3 - \cdots - a_{2k-1}x^{2k-1} \\ g(x) - g(y) &= -a_1x - a_3(2^3 - 1)x^3 - \cdots - a_{2k-1}(2^{2k-1} - 1)x^{2k-1} \end{aligned}$$

故 $-a_1x - a_3x^3 - \cdots - a_{2k-1}x^{2k-1} = -a_1x - a_3(2^3 - 1)x^3 - \cdots - a_{2k-1}(2^{2k-1} - 1)x^{2k-1}$, 对一切 $x \in [-1, 1]$ 成立, 再因 $2k - 1$ 次多项式最多有 $2k - 1$ 个根知, $-a_1 = -a_1, -a_3 = -a_3(2^3 - 1), \cdots, -a_{2k-1} = -a_{2k-1}(2^{2k-1} - 1)$, 从而必有

$$a_3 = a_5 = \cdots = a_{2k-1} = 0$$

于是有, $g(x) = a_1x$, 及 $f(x) = 0.5 + a_1x$ 。

③由 $r_{ij} = f(w_i - w_j)$ 及 $f(x) = 0.5 + a_1x$, 有

$$r_{ij} = 0.5 + a_1(w_i - w_j)$$

当 $w_i - w_j = 1$ 时, $r_{ij} = 0.5 + a_1$, 所以 a_1 是元素 a_i 和 a_j 重要程度差异($w_i - w_j$) 的度量单位, 它的大小直接反映了决策者的意志趋向, a_1 越大表明决策者非常重视元素间重要程度的差异, a_1 越小表明决策者不是非常重视元素间重要程度的差异。居于这种分析, 在实际决策分析中可以根据决策者的态度, 选择稍大或稍小一点的 a_1 。另外, 由 $f(x)$ 是增函数知, $a_1 > 0$ 。再由 $-1 \leq r_{ij} \leq 1$ 知, $a_1 \leq 0.5$, 综上知, $0 < a_1 \leq 0.5$ 。

5 模糊层次分析法

模糊层次分析法的步骤和 A. L. Saaty 提出的 AHP 的步骤基本一致, 仅有两点不同。

(1) 在 AHP 中通过元素的两两比较构造判断矩阵; 而在 AHP 中通过元素两两比较构造模糊一致判断矩阵;

(2) 由模糊一致矩阵求表示各元素的相对重要性的权重的方法同由判断矩阵求权重的方法不同。

为此, 下面仅介绍如何建立模糊一致判断矩阵, 以及由模糊一致判断矩阵求权重的方法。

5.1 模糊一致判断矩阵的建立

模糊一致判断矩阵 R 表示针对上一层某元素, 本层次与之有关元素之间相对重要性

的比较,假定上一层次元素 C 同下一层次中的元素 a_1, a_2, \cdots, a_n 有联系,则模糊一致判断矩阵可表示为:

$$\begin{array}{c|cccc} C & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \hline a_1 & r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ a_2 & r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{array}$$

元素 r_{ij} 具有如下实际意义: r_{ij} 表示元素 a_i 和元素 a_j 相对于元素 C 进行比较时,元素 a_i 和元素 a_j 具有模糊关系“ \cdots 比 \cdots 重要得多”的隶属度。为了使任意两个方案关于某准则的相对重要程度得到定量描述,可采用如下的 0.1 — 0.9 标度给予数量标度。

0.1 — 0.9 数量标度

标度	定 义	说 明
0.5	同等重要	两元素相比较,同等重要。
0.6	稍微重要	两元素相比较,一元素比另一元素稍微重要。
0.7	明显重要	两元素相比较,一元素比另一元素明显重要。
0.8	重要得多	两元素相比较,一元素比另一元素重要得多。
0.9	极端重要	两元素相比较,一元素比另一元素极端重要。
0.1, 0.2, 0.3, 0.4	反比较	若元素 a_i 与元素 a_j 相比较得到判断 r_{ij} , 则元素 a_j 与元素 a_i 相比较得到的判断为 $r_{ji} = 1 - r_{ij}$ 。

有了上面的数字标度之后,元素 a_1, a_2, \cdots, a_n 相对于上一层元素 C 进行比较,可得到如下模糊判断矩阵

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix}$$

R 具有如下性质:

- (1) $r_{ii} = 0.5, i = 1, 2, \cdots, n;$
- (2) $r_{ij} = 1 - r_{ji}, i, j = 1, 2, \cdots, n;$
- (3) $r_{ij} = r_{ik} - r_{jk}, i, j, k = 1, 2, \cdots, n.$

即 R 是模糊一致矩阵。模糊判断矩阵的一致性反映了人们思维判断的一致性,在构造模糊判断矩阵时非常重要,但在实际决策分析中,由于所研究的问题的复杂性和人们认识上可能产生的片面性,使构造出的判断矩阵往往不具有**一致性**。这时可应用模糊一致矩阵的充要条件**进行调整**。具体的调整步骤如下:

第一步,确定一个同其余元素的重要性相比较得出的判断有把握的元素,不失一般性,设决策者认为对判断 $r_{11}, r_{12}, \cdots, r_{1n}$ 比较有把握。

第二步,用 R 的第一行元素减去第二行对应元素,若所得的 n 个差数为常数,则不需调整第二行元素。否则,要对第二行元素进行调整,直到第一行元素减第二行的对应元素之差为常数为止。

第三步,用 R 的第一行元素减去第三行的对应元素,若所得的 n 个差数为常数,则不需调整第三行的元素。否则,要对第三行的元素进行调整,直到第一行元素减去第三行对应元素之差为常数为止。

上面步骤如此继续下去直到第一行元素减去第 n 行对应元素之差为常数为止。

5.2 由模糊一致判断矩阵 R 求元素 a_1, a_2, \dots, a_n 的权重值 w_1, w_2, \dots, w_n

设元素 a_1, a_2, \dots, a_n 进行两两重要性比较得到的模糊一致性矩阵为 $R = (r_{ij})_{n \times n}$, 元素 a_1, a_2, \dots, a_n 的权重值分别为 w_1, w_2, \dots, w_n , 则由前面的讨论知,有如下关系式成立,

$$r_{ij} = 0.5 + a(w_i - w_j), i, j = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

其中, $0 < a \leq 0.5$, a 是人们对所感知对象的差异程度的一种度量,但同评价对象个数和差异程度有关,当评价的个数或差异程度较大时, a 值可以取得大一点。另外,决策者还可以通过调整 a 的大小,求出若干个不同的权重向量,再从中选择一个自己认为比较满意的权重向量。

当模糊判断矩阵 R 不是一致的时候, (5) 式中等号不严格成立,这时可采用最小二乘法求权重向量 $W = [w_1, w_2, \dots, w_n]^T$, 即求解如下的约束规划问题:

$$(P1) \begin{cases} \min z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [0.5 + a(w_i - w_j) - r_{ij}]^2 \\ s. t. \sum_{i=1}^n w_i = 1, w_i \geq 0, (1 \leq i \leq n) \end{cases}$$

由拉格朗日乘子法知,约束规划问题(P1)等价于如下无约束规划问题(P2):

$$(P2) \min L(w, \lambda) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [0.5 + a(w_i - w_j) - r_{ij}]^2 + 2\lambda \left(\sum_{i=1}^n w_i - 1 \right)$$

其中, λ 是 Lagrange 乘子。

将 $L(w, \lambda)$ 关于 $w_i (i=1, 2, \dots, n)$ 求偏导数,并令其为零,得 n 个代数方程组成的方程组(P3):

$$(P3) a \sum_{j=1}^n [0.5 + a(w_i - w_j) - r_{ij}] - a \sum_{k=1}^n [0.5 + a(w_k - w_i - r_{ki})] + \lambda = 0 \\ (i = 1, 2, \dots, n)$$

也即是

$$(P4) \sum_{j=1}^n [2a^2(w_i - w_j) + a(r_{ji} - r_{ij})] + \lambda = 0 \\ (i = 1, 2, \dots, n)$$

(注:上式用到 $r_{ii} = 0.5$)。

方程组(P4)含有 $n+1$ 未知数 $w_1, w_2, \dots, w_n, \lambda$, n 个方程,解此方程组还不能确定唯一解。又因 $w_1 + w_2 + \dots + w_n = 1$, 故将此式加到方程组(P4)中可得到含有 $n+1$ 个方程, $n+1$ 个未知量的方程组:

