第二次习题课

TA-胡珈豪 smart_hu@mail.ustc.edu.cn

牛顿运动定律知识梳理

Problem 1 单位制与量纲分析

Problem 2 性质力

Problem 3 **非惯性参考系与虚拟力**

第二次作业题选讲

Question **附加题**

分析南半球自西向东和自南向北河流水面的形状

对于南半球而言，地球自转角速度 $\vec{\omega}$ 有垂直指向地里的分量，接着考虑 $\vec{f_{cor}} = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}\sin\alpha$ 的方向 (此处 α 为该地的纬度)：

- 水流自南向北，$\vec{f_{cor}}$ 指向西，故河流西侧水面更高，东侧更低.
- 水流自西向东，$\vec{f_{cor}}$ 指向北，故河流北侧水面更高，南侧更低.

也即，水流同时受到垂直向下的重力加速度 g，以及横向的地转偏向“加速度” $2\omega v\sin\alpha$ 的作用，水流面将会是一个梯形，水面与地平线夹角为

$$\theta = \tan^{-1}(2\omega v\sin\alpha/g) \simeq \frac{2\omega v\sin\alpha}{g}$$

Question 3.6

一个圆盘直径为 d, 绕通过圆心的垂直轴以角速度 ω 匀速旋转，今有一人站在圆盘上的点 A 射出一颗子弹，已知子弹出膛速度为 $v, v \gg \omega d$. 现在希望子弹击中点 A 的对径点 B (AB 是圆盘直径), 则应瞄准点 C, 问 BC 的弧长是多少？又问这颗子弹在圆盘上的轨迹是什么？求出相应的曲率半径.

该题较为阴险，最好使用旋转参考系求解。
换入与转盘保持静止的旋转参考系 S' 中, 子弹受到两类虚拟力: 科里奥利力 $f_{cor} = 2m\omega v$, 离心力 $f_c < m\omega^2 R$。两者做量级比较可知

$$f_c/f_{cor} < \frac{\omega R}{2v} << 1$$

表明在接下来的运算中可以忽略离心力的影响。
子弹在 S' 系中受到 $f_{cor} = 2mv \times \omega$ 作用，将其与磁场力 (Lorentz 力)$f_L = qv \times B$ 类比。由于带电粒子在磁场中做圆周运动，故子弹在 S' 系中也做圆周运动，曲率半径为

$$\rho = \frac{mv^2}{f_{cor}} = \frac{mv^2}{2mv\omega} = \frac{v}{2\omega}$$

接下来的问题就简单了，根据图 3.6 的几何关系，考虑到 $\rho >> R$，故发射角 θ 应有

$$\theta = R/\rho = \frac{2\omega R}{v^2}$$

对应 BC 弧长故为

$$\overset{\frown}{BC} = \theta \cdot d = \frac{4\omega R^2}{v^2} = \frac{\omega d^2}{v}$$

补充习题

Question 1

如图 1 所示, 倾角为 θ 的斜面上，一个物体以 v_0 速度沿 y 方向发射. 已知 $\mu = \tan\theta$, 试问物体最终在 y 方向上的平移距离 d?
提示: 你可能会用到的积分

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{(1+sin(x))^2} dx = 2/3$$

$\mu = \tan\theta$ 表明了物体在斜面上受摩擦力 F_f 与重力在 x 方向分量 F_G 大小相同，记为

$$F = F_f = F_G = mg\sin\theta = \mu mg\cos\theta$$

$$a = F/m$$

初看这道题还是没什么思路的，所以要多尝试列出方程，找到其中的关系式。记物体的瞬时速度大小 v 为，其方向与 y 轴夹角 ψ，用以表征物体的运动，可以尝试着把牛顿运动

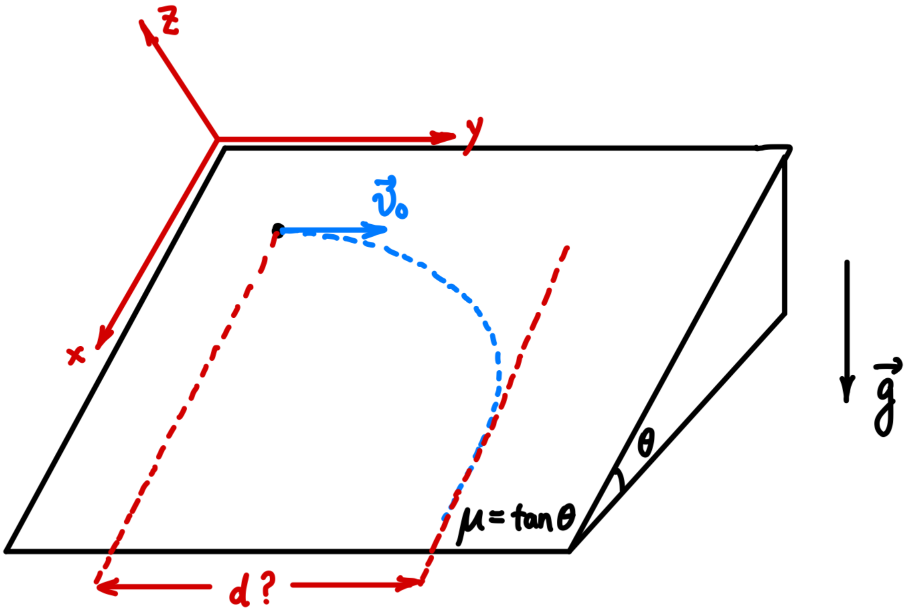

图 1: 题 1 图

方程投影到不同方向:

$$\begin{cases}\text{沿 y 方向} & \frac{\mathbf{d}v\cos\psi}{dt} & = -a\cos\psi \\ \\ \text{沿 } v \text{ 方向} & \frac{\mathbf{d}v}{dt} & = -a(1-\sin\psi) \\ \\ \text{沿 x 方向} & \frac{\mathbf{d}v\sin\psi}{dt} & = a(1-\sin\psi)\end{cases}$$

不难发现沿 v 方向与沿 x 方向的方程右边反号，两式相加可得守恒量

$$\frac{\mathbf{d}v}{dt}+\frac{\mathbf{d}v\sin\psi}{dt}=\frac{\mathbf{d}}{dt}(v+v\sin\psi)=0$$

$$\to v+v\sin\psi=\text{conservation}$$

考虑到一开始时，$v=v_0$,$\psi=0$, 进而可知该守恒量就是 v_0.
有了以上守恒量的铺垫，可以写出 v 与 ψ 之间的显式关系:

$$v=\frac{v_0}{1+\sin\psi}$$

回代到沿 y 方向的方程，可得

$$\dot{\psi}=\frac{a}{v_0}\cos\psi(1+\sin\psi)$$

这样有关 $\mathbf{d}t$ 的内容均可以用 $\dot{\psi}$ 去替换，最终把积分式换成仅与 ψ 相关而与 t 无关:

$$\begin{aligned}\mathbf{d}y &= v\cos\psi\mathbf{d}t \\ &= v\cos\psi\mathbf{d}\psi\frac{\mathbf{d}t}{\mathbf{d}\psi} \\ &= \frac{v\cos\psi}{\dot{\psi}}\mathbf{d}\psi \\ &= \frac{v_0^2}{a}\frac{1}{(1+\sin\psi)^2}\mathbf{d}\psi\end{aligned}$$

积得

$$d=\int\mathbf{d}y=\frac{v_0^2}{a}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{(1+\sin\psi)^2}\mathbf{d}\psi=\frac{2}{3}\frac{v_0^2}{a}=\frac{2}{3}\frac{v_0^2}{\mu g\cos\theta}$$

Question 2

如题 2 **图**, **在固定不动的圆柱体上绕有绳索，绳两端挂大、小两桶，其质量分别为** $M=1000\text{kg}$ **和** $m=10\text{kg}$。**绳与圆柱体之间的摩擦系数为** $\mu=0.050$, **绳的质量可以忽略。试问为使两桶静止不动，绳至少需绕多少圈**.

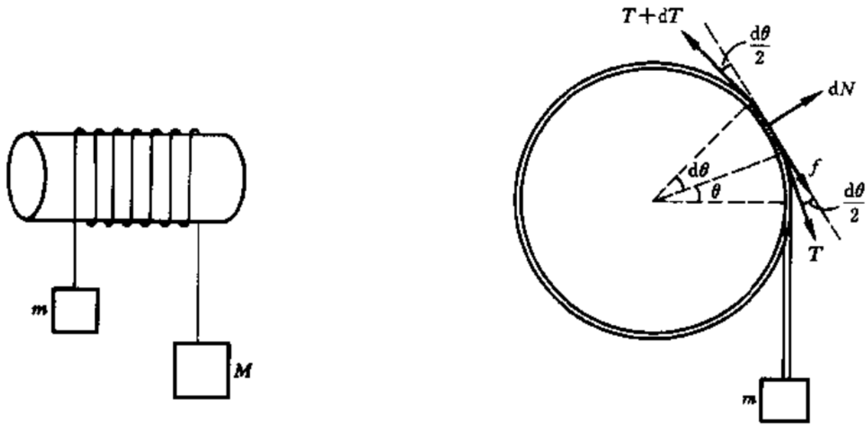

图 2: 题 2 图

如图, 隔离任意一小段绳子，它的长度为 $R\mathrm{d}\theta$(R 是圆柱体的半径), 它与小桶之间的绳索长度为 $R\theta$(竖直下垂的那段绳索不计在内). 它受到的作用力有，靠近小桶一侧的张力了，靠近大桶一侧的张力 $(T+\mathrm{d}T)$, 张力的方向如力图 2-1-2, 都在作用点与圆柱体相切，支持力 dN 其方向沿径向，最大静摩擦力 $f=\mu\mathrm{d}N$ 其方向与支持力垂宜. 因静止，合力为零，故有

$$\begin{cases}[(T+\mathbf{d}T)+T] \quad \sin\frac{\mathbf{d}\theta}{2}=\mathbf{d}N \\ \\ (T+\mathbf{d}T) \qquad\qquad \cos\frac{\mathbf{d}\theta}{2}=T\cos\frac{\mathbf{d}\theta}{2}+\mu\mathbf{d}N\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}(2T+\mathrm{d}T)\sin\frac{\mathrm{d}\theta}{2}=\mathrm{d}N \\ \\ \mathrm{d}T\cos\frac{\mathrm{d}\theta}{2}=\mu\mathrm{d}N\end{cases}$$

因 $\mathrm{d}\theta$ 很小，有

$$\sin\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\approx\frac{\mathrm{d}\theta}{2},\quad \cos\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\approx 1$$

故为

$$\begin{cases}2T\frac{\mathrm{d}\theta}{2}+\mathrm{d}T\frac{\mathrm{d}\theta}{2}=\mathrm{d}N \\ \\ \mathrm{d}T=\mu\mathrm{d}N\end{cases}$$

忽略高阶小量，得

$$\begin{cases}Td\theta=\mathrm{d}N \\ \\ \mathrm{d}T=\mu\mathrm{d}N\end{cases}$$

消去 dN, 得

$$\frac{\mathrm{d}T}{T}=\mu d\theta$$

积分，得

$$\ln T=\mu\theta+C$$

因 $\theta=0$ 时，$T=mg$, 故积分常量为 $C=\ln mg$. 代入，得

$$T=mge^{\mu\theta}$$

这就是为使两桶静止，绳索中张力随 θ 的变化、与小桶连接处 $(\theta=0)$, 绳的张力最小为 $T_{min}=mg$; 与大桶连接处，绳的张力最大应为 $T_{\max}=Mg$. 设绳索共绕 n 圈，由上式，得

$$T_{\max}=T_{\min}e^{\mu\cdot 2\pi\pi}$$

即

$$Mg=mge^{\mu\cdot 2\pi n}$$

故

$$n=\frac{1}{2\pi\mu}\ln\frac{M}{m}=\frac{\ln 100}{0.1\pi}=14.7\ \approx 15$$