Assignment 6

TA-胡珈豪 smart_hu@mail.ustc.edu.cn

CHAPTER 8

Question 8.1

力 $F = 30\boldsymbol{i} + 40\boldsymbol{j}$**N, 作用在** $r = 8\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j}$ m **处的一点上. 试求：**(1) **力** F **绕原点的力矩** L ; (2) **力臂** d ; (3) **力** F **垂直于** r **的分量** $F_{\perp}$.

(1) $$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 8 & 6 & 0 \\ 30 & 40 & 0 \end{vmatrix} = 140\boldsymbol{k}\ (\mathrm{N \cdot m})$$

(2) $$|\boldsymbol{L}| = |\boldsymbol{F}| \cdot d,\ 所以 d = \frac{140}{\sqrt{30^2 + 40^2}} = 2.8(\mathrm{m}).$$

(3) $$|\boldsymbol{L}| = F_{\perp} \cdot r,\ 所以 F_{\perp} = \frac{L}{r} = \frac{140}{\sqrt{8^2 + 6^2}} = 14(\mathrm{N}).$$

Question 8.2

证明：刚体绕定轴转动时，在垂直于轴的平面上任意两点 A **和** B **, 它们的速度** $\boldsymbol{v}_A$ **和** $\boldsymbol{v}_B$ **在** AB **连接线上的分量相等. 并说明这结果的物理意义.**

$$v_A = \omega \times r_A\ , \quad v_B = \omega \times r_B$$

v_A 在 AB 上的分量:

$$v_A \cdot r_{AB} = (\omega \times r_A) \cdot r_{AB} = (\omega \times r_A) \cdot \frac{r_{AB}}{|r_{AB}|} = \frac{(r_A \times r_{AB}) \cdot \omega}{|r_{AB}|}$$

v_B 在 AB 上的分量:

$$\boldsymbol{v}_B \cdot \boldsymbol{r}_{AB} = (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_B) \cdot \boldsymbol{r}_{AB} = (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_B) \cdot \frac{\boldsymbol{r}_{AB}}{\left|\boldsymbol{r}_{AB}\right|} = \frac{(\boldsymbol{r}_B \times \boldsymbol{r}_{AB}) \cdot \boldsymbol{\omega}}{\left|\boldsymbol{r}_{AB}\right|}$$

也即

$$\boldsymbol{v}_A\cdot\hat{\boldsymbol{r}}_{AB}-\boldsymbol{v}_B\cdot\hat{\boldsymbol{r}}_{AB}=\frac{\boldsymbol{\omega}}{\left|\boldsymbol{r}_{AB}\right|}\cdot(\boldsymbol{r}_A\times\boldsymbol{r}_{AB}-\boldsymbol{r}_B\times\boldsymbol{r}_{AB})=\frac{\boldsymbol{\omega}}{\left|\boldsymbol{r}_{AB}\right|}\cdot(\boldsymbol{r}_A-\boldsymbol{r}_B)\times\boldsymbol{r}_{AB}=\frac{\boldsymbol{\omega}}{\left|\boldsymbol{r}_{AB}\right|}\cdot(\boldsymbol{r}_{AB}\times\boldsymbol{r}_{AB})=0$$

$$\longrightarrow (v_A-v_B)\cdot\hat{r}_{AB}=0$$

该结果的物理意义表示：刚体中任意两点间的距离不会改变

Question 8.3

证明：刚体绕定轴转动时，在垂直于轴的平面上，任意两点 A、B 的速度 $\boldsymbol{v}_A$、$\boldsymbol{v}_B$ 与加速度 $\boldsymbol{a}_A$、$\boldsymbol{a}_B$ 之间有下列关系：$\boldsymbol{v}_A$ 与 $\boldsymbol{a}_A$ 之间的夹角等于 v_B 与 $\boldsymbol{a}_B$ 之间的夹角.

本题即证：对于定轴转动刚体，垂直于轴平面上各点处的 a,v 夹角相等.
再翻译一下，即证：a,v 夹角与 r 无关.

$$\mathrm{v}=\omega\times\mathrm{r},\quad a=\beta\times\mathrm{r}-\omega^2\mathrm{r}$$

于是夹角 θ 就有

$$\tan\theta=\frac{a_n}{a_t}=\frac{\omega^2 r}{\beta r}=\frac{\omega^2}{\beta}$$

这与 r 无关，即证.

Question 8.5

1. $I=\frac{3}{2}ml^2$
2. $I=\frac{3}{4}ml^2$
3. $I=\frac{1}{2}ml^2$
4. $I=\frac{1}{4}ml^2$

Question 8.6

一块边长为 a **和** b **的均匀矩形薄板，质量为** m. (1) **中间挖去半径为** r **的圆形**;(2) **一角上挖去边长为** c **的正方形**. **分别求它们对于过中心且垂直于板的轴的转动惯量**.

(1) 未去圆的矩形板的转动惯量

$$I_1 = \frac{1}{12}m(a^2+b^2)$$

圆形质量 $m' = \frac{m}{ab} \cdot \pi r^2$, 而圆形转动惯量为

$$I_2 = \frac{1}{2}m'r^2 = \frac{1}{2}\frac{m\pi r^4}{ab}$$

所以

$$I = I_1 - I_2 = \frac{1}{12}m(a^2+b^2) - \frac{1}{2}\frac{m\pi r^4}{ab} = \frac{1}{12}m\left(a^2+b^2-\frac{6\pi r^4}{ab}\right)$$

(2) 设原矩形薄板的中心为 O, 正方形的中心为 O', 有

$$\left|OO'\right|^2 = \left(\frac{a}{2}-\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}-\frac{c}{2}\right)^2$$

正方形绕自身几何中心转动时，转动惯量为

$$I_1 = \frac{1}{12}m'(c^2+c^2) = \frac{1}{6}m'c^2\,, \quad m' = \frac{m}{ab}\cdot c^2$$

平行轴定理得

$$\begin{aligned} I_2 &= I_1 + m'\cdot\left|OO'\right|^2 = \frac{1}{6}m'c^2 + m'\left(\frac{a^2}{4}-\frac{1}{2}ac+\frac{b^2}{4}-\frac{1}{2}bc+\frac{c^2}{2}\right) \\ &= \frac{mc^2}{12ab}(3a^2-6ac+3b^2-6bc+8c^2) \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{12}m(a^2+b^2) - \frac{mc^2}{12ab}(3a^2-6ac+3b^2-6bc+8c^2) \\ &= \frac{m}{12ab}(a^3b+ab^3-3a^2c^2+6ac^3-3b^2c^2+6bc^3-8c^4) \end{aligned}$$

Question 8.8

证明正方形均匀薄板对下述两轴的转动惯量相等：(1) **对角线**；(2) **通过中心且与一边平行**.

利用垂直轴定理很容易知道

$$I_{(1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} m(l^2 + l^2)$$

同样利用垂直轴定理，可知

$$I_{(2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} m(l^2 + l^2)$$

即证.

Question 8.12

如图所示，一条细绳的两端分别拴有质量为 m_1 和 m_2 的两物体，$m_1 \neq m_2$, 绳子套在质量为 m_0、半径为 r_0 的均匀圆盘形滑轮上，设绳子不在滑轮上滑动，绳子长度不变，绳子的质量以及滑轮与轴间的摩擦力均可不计. 求 m_1 和 m_2 的加速度 a 以及绳子的张力 T_1 和 T_2. 如图所示，一条细绳的两端分别拴有质量为 m_1 和 m_2 的两物体，$m_1 \neq m_2$, 绳子套在质量为 m_0、半径为 r_0 的均匀圆盘形滑轮上，设绳子不在滑轮上滑动，绳子长度不变，绳子的质量以及滑轮与轴间的摩擦力均可不计. 求 m_1 和 m_2 的加速度 a 以及绳子的张力 T_1 和 T_2.

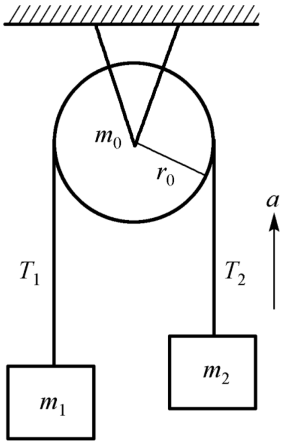

图 1: 8.12

如图 8.12 所示，设 m_2 的加速度向上.
对 m_1 而言：$m_1 g - T_1 = m_1 a$
对 m_2 而言：$T_2 - m_2 g = m_2 a$
对 m_0 而言：$(T_1 - T_2)R = \frac{1}{2} m_0 R^2 \cdot \beta$
滑轮上有

$$\beta R = a$$

联立有

$$a = \frac{2(m_1 - m_2)}{m_0 + 2(m_1 + m_2)} g$$

$$T_1 = m_1 g - m_1 a = \frac{m_1(m_0 + 4m_2)}{m_0 + 2(m_1 + m_2)} g$$

$$T_2 = m_2 g + m_2 a = \frac{m_2(m_0 + 4m_1)}{m_0 + 2(m_1 + m_2)} g$$

Question 8.21

一质量为 M 的均匀正立方体 A 斜靠在光滑的竖直墙上，A 与地面之间的摩擦力刚好足以阻止它滑动. 求 μ 与 θ 的关系，μ 是 A 与地面之间的静摩擦系数，θ 是 A 的一边与水平的夹角，如图所示.

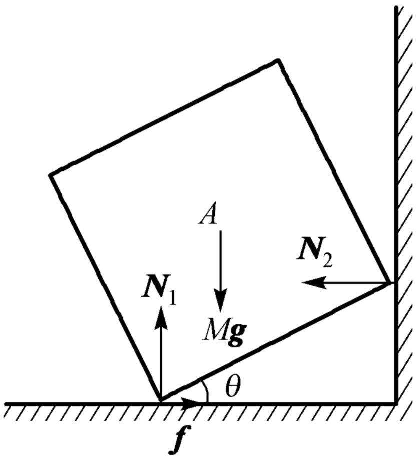

图 2: 8.21

这是一个典型的静力学问题. 尽可能全面地列出受力平衡与力矩平衡的方程，有

$$\begin{cases} Mg = N_1 \\ N_2 = f \\ f = \mu N_1 \\ Mg \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} a \cdot \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = N_2 \cdot a \cdot \sin\theta \end{cases}$$

解出

$$\Rightarrow \cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\mu\sin\theta$$

$$\Rightarrow \cos\theta-\sin\theta=2\mu\sin\theta$$

$$\tan\theta=\frac{1}{1+2\mu}$$

Question 8.28

证明: 要使一物体在斜面上滚动时不打滑, 滑动摩擦系数 μ 必须满足

$$\mu>\frac{\tan\alpha}{\frac{MR^2}{I_C}+1}$$

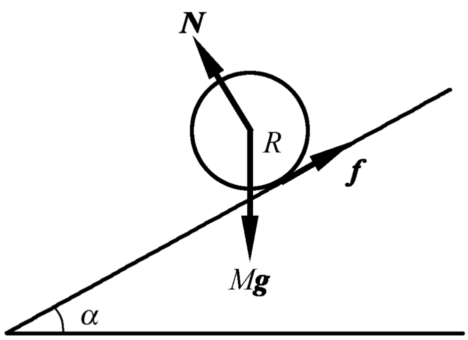

图 3: 8.28

受力分析如图所示，由题意应有不打滑的临界条件为

$$\begin{aligned} Mg\cos\alpha &= N \\ Mg\sin\alpha-f &= Ma \\ f &< \mu N \\ a &= R\beta \\ fR &= I_C\beta \end{aligned}$$

联立上述方程解得

$$\mu>\frac{\tan\alpha}{\frac{MR^2}{I_C}+1}$$

Question 8.30

一个半径为 r 的均匀小球放在一块水平的板上，平板以加速度 a 移动. 球与板之间的滑动摩擦系数为 μ, 滚动摩擦系数为 k. 试问：(1) 什么情况下球将随板以加速度 a 运动？(2) 什么情况下球只滚动而不滑动？

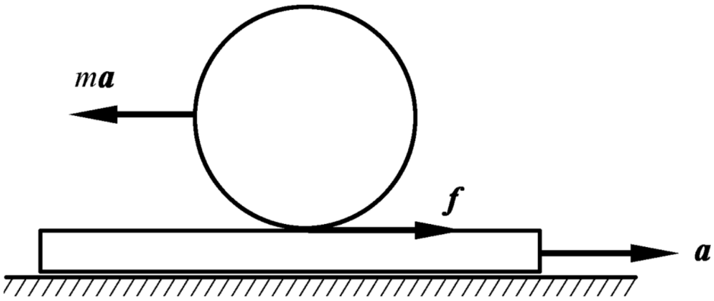

图 4: 8.30

换入木板所在参考系，考虑惯性力，有方程组：
质心运动定理：$ma - f = ma'$(水平方向) $N = mg$(垂直方向)
纯滚动条件：$a' = r\beta$
f 为静摩擦力：$f\mu N$
转动定律：
$rf - L = I\beta$ (当 $\beta \neq 0$ 时)
$rf < L$(当 $\beta = 0$ 时)
(滚动摩擦力矩不会主动使物体滚动) (1) 此时的小球与板相对静止，即 $a' = 0$, $\beta = 0$, 解出

$$f < min\{\mu, \frac{k}{r}\}mg$$

亦即

$$a = f/m < min\{\mu, \frac{k}{r}\}g$$

(2) 纯滚动时，$\beta \neq 0$, 联立上述方程组解得

$$\beta = \frac{fr - kmg}{\frac{2}{5}mr^2}, \quad a = \frac{f}{m} + r\beta = \frac{7f}{2m} - \frac{5kg}{2r} < \frac{7\mu g}{2} - \frac{5kg}{2r}$$

Question 8.33

镜框贴着墙立在有摩擦的钉子上，稍受扰动其即向下倾倒，当到达一定角度 θ, 此镜框将跳离钉子，求 θ.(提示：跳离钉子时，镜框对钉子的压力为零.)

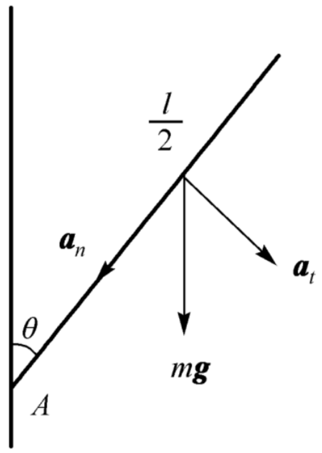

图 5: 8.33

受力分析如图 8.33 所示，相对于镜框的支撑点（钉子 A），用质心运动定理和角动量定理列出方程

$$(mg-N)\cos\theta - f\sin\theta = m\frac{l}{2}\dot{\theta}^2$$

$$(mg-N)\sin\theta + f\cos\theta = m\frac{l}{2}\ddot{\theta}$$

$$mg\frac{l}{2}\sin\theta = \frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta}$$

解得

$$N = \frac{mg}{4}(3\cos\theta - 1)^2$$

$$f = \frac{3}{4}mg\sin\theta(3\cos\theta - 2)$$

令 $N=0$,

$$\theta = \arccos\frac{1}{3}, \text{此时} f = -\frac{\sqrt{2}}{2}mg$$

令 $f=0$,

$$\theta = \arccos\frac{2}{3}, \text{此时} N = \frac{mg}{4}$$

镜框开始倾倒时，摩擦力从零开始增加 (向右), 达最大值后再逐渐减少到零，此时正压力还不等于零. 然后，摩擦力反向并慢慢增加 (向左), 由于正压力一直是在逐渐减少的，当摩擦力达到 μN 时，镜框向右滑动，当 $N=0$ 时镜框将跳离钉子。

因此,

$$\theta = \arccos\frac{1}{3}$$

Question 8.34

一质量为 M、半径为 R 的均质球 1 在水平面上作纯滚动，球心速度为 v_0, 与另一完全相同的静止球 2 发生对心碰撞. 设碰撞时各接触面间的摩擦均可忽略，碰撞是弹性的.(1) 碰撞后，各自经过一段时间，两球开始作纯滚动，求出此时各球心的速度 (2) 求此过程中系统机械能的损失.

碰撞时各接触面间的摩擦均可忽略，故碰撞仅交换平动能. 由于两球的质量相同，碰撞后两球交换速度，球 1 静止但转速不变，球 2 不转动但以速度 $v0$ 平动. (1) 对球 1, 碰撞后设所受摩擦力为 f_1, 方向向右. 设经过时间 t_1 后作纯滚动，纯滚动时球心的速度为 v_1. 由质心运动定理和转动定理得

$$\int_0^{t_1} f_1 \mathrm{d}t = mv_1 - m \cdot 0$$
$$\int_0^{t_1} f_1 R \mathrm{d}t = \frac{2}{5} mR^2 \left(\frac{v_0}{R} - \frac{v_1}{R} \right)$$

解得纯滚动时球 1 球心的速度为

$$v_1 = \frac{2}{7} v_0$$

对球 2, 碰撞后设所受摩擦力为 f_2 , 方向向左. 设经过时间 t_2 后作纯滚动，纯滚动时球心的速度为 v_2. 由质心运动定理和转动定理得

$$\int_0^{t_2} f_2 \mathrm{d}t = mv_0 - mv_2$$
$$\int_0^{t_2} f_2 R \mathrm{d}t = \frac{2}{5} mR^2 \frac{v_2}{R}$$

解得纯滚动时球 2 球心的速度为

$$v_1 = \frac{5}{7} v_0$$

(2) 碰撞前的机械能:

$$E_0 = \frac{1}{2} mv_0^2 + \frac{1}{2} I\omega_0^2 = \frac{1}{2} mv_0^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} mR^2 \left(\frac{v_0}{R} \right)^2 = \frac{7}{10} mv_0^2$$

碰撞后的机械能:

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{2} mv_1^2 + \frac{1}{2} I\omega_1^2 + \frac{1}{2} mv_2^2 + \frac{1}{2} I\omega_2^2 \\ &= \frac{1}{2} mv_1^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} mR^2 \left(\frac{v_1}{R} \right)^2 + \frac{1}{2} mv_2^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} mR^2 \left(\frac{v_2}{R} \right)^2 \\ &= \frac{7}{10} mv_1^2 + \frac{7}{10} mv_2^2 = \frac{7}{10} m \left[\left(\frac{2}{7} v_0 \right)^2 + \left(\frac{5}{7} v_0 \right)^2 \right] \\ &= \frac{7}{10} m \left(\frac{29}{49} v_0^2 \right) = \frac{29}{70} mv_0^2 \end{aligned}$$

过程中系统机械能的损失为

$$\Delta E = E_0 - E_1 = \frac{7}{10} mv_0^2 - \frac{29}{70} mv_0^2 = \frac{2}{7} mv_0^2$$

Question 8.36

为了避免高速行驶的汽车在转弯时容易发生的翻车现象，可在车上安装一高速自旋着的大飞轮.(1) 试问，飞轮轴应安装在什么方向上？飞轮应沿什么方向转动？(2) 设汽车的质量为 M, 其行驶速度为 v, 飞轮是质量为 m、半径为 R 的圆盘汽车 (包括飞轮) 的质心距地面的高度为 h. 为使汽车在绕一曲线行驶时，两边车轮的负荷均等，试求飞轮的转速.

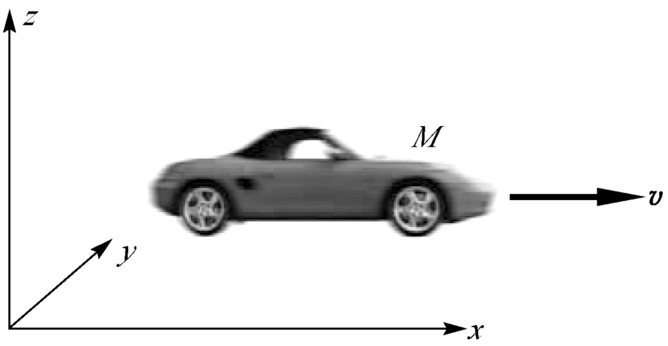

图 6: 8.36

设汽车沿 x 方向行驶 (图 8.36), 取质心下方地面点为参考点，汽车 (包括飞轮) 的角动量为

$$L = h(M+m)v\boldsymbol{j}$$

当汽车转弯时，角动量的方向变化，需要提供力矩. 例如，当汽车左转时，需提供-i 方向的力矩，即需要给质心提供向心力，否则汽车有向右侧翻倒的趋势.
若在汽车上安装一高速自旋着的大飞轮，使总角动量为零，则当汽车转弯时，角动量不会改变，汽车没有翻倒的趋势.
(1) 飞轮轴应安装在与汽车前进方向垂直，角动量方向向右.
(2) 角速度的大小为

$$L = h(M+m)v\boldsymbol{j} + \frac{1}{2}mR^2\boldsymbol{\omega} = 0$$

$$\Longrightarrow \omega = -\frac{2h(M+m)v}{mR^2}\boldsymbol{j}$$

Question 8.37

一半径为 r 的硬币，在桌面上绕半径为 R 的圆滚动，其质心速度为 v , 如图所示. 设硬币的滚动为纯滚动，求其轴线与水平线所成的角 $\theta.(\theta \ll 1, R \gg r)$

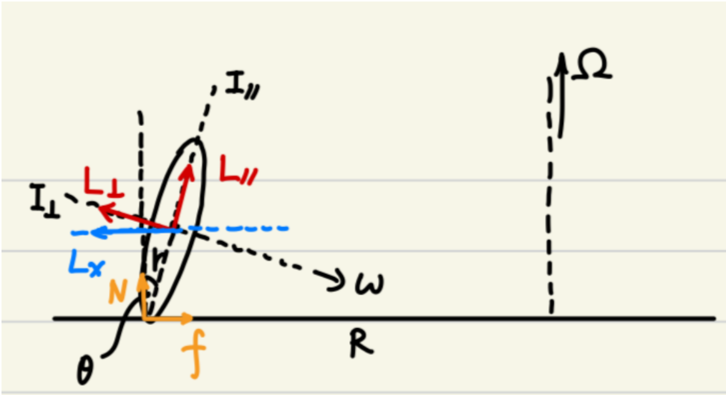

图 7: 8.37

自转与公转角速度各有

$$\Omega = \frac{v}{R - r\sin\theta}, \quad \omega = \frac{v}{r}$$

考虑到该刚体的惯量主轴一根通过轴心（图中 $I_\perp$），另外两根则在盘的平面内（图中 $I_{\parallel}$），于是将自转与公转角速度投影在这两个方向上，得到角动量：

$$L_\perp = \frac{1}{2}mr^2 \cdot (\Omega\sin\theta - w)$$

$$L_{\parallel} = \frac{1}{4}mr^2 \cdot (\Omega\cos\theta)$$

以及图中地面的作用力：

$$f = \frac{mv^2}{R - r\sin\theta}, \quad N = mg$$

不妨以质心为参考点，换入随质心一同平动的参考系中，则角动量的水平分量（图中 L_x）的公转恰由外力矩提供：

$$L_x = L_\perp\cos\theta - L_{\parallel}\sin\theta$$

$$fr\cos\theta - Nr\sin\theta = L_x \cdot \Omega$$

代入有

$$\frac{mv^2}{R - rsin\theta} \cdot r\cos\theta - mgr\sin\theta = \frac{v}{R - rsin\theta} \cdot \frac{1}{4}mr^2 \Big[-\sin\theta \cdot \frac{v\cos\theta}{R - rsin\theta} + \cos\theta \cdot \left(-2\frac{v}{r}\right) + \cos\theta\left(-2\frac{v}{R - rsin\theta}\right) \Big]$$

$$\Longrightarrow \frac{mv^2}{R}r\cos\theta - mgr\sin\theta = \frac{v}{R} \cdot \frac{1}{4}mr^2 \cdot (-\frac{2v}{r})\cos\theta, \quad withR \gg r$$

$$\Longrightarrow \tan\theta = \frac{3v^2}{2Rg}, \quad with\theta \ll 1$$

Question 8.38

盘缘及杆的一端 O 靠在桌面上，杆与桌面成 45ř 角，如图所示. 今陀螺以杆的一端 O 为支点，盘缘靠在桌面上作无滑动滚动，使杆绕铅垂轴作匀速转动，角速度为 Ω. 求：(1) 桌面对盘缘的支承力 N ;(2) 陀螺的动能.

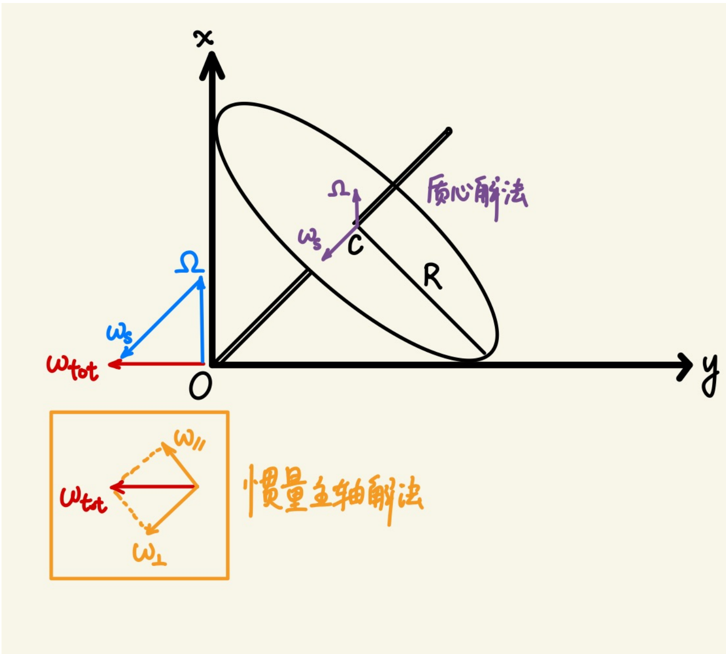

图 8: 8.38

首先, 找 O 为参考点, 瞬轴过 O, 很容易得到

$$w_{tot} = \Omega, \quad w_s = \sqrt{2}\Omega$$

(1) 继续以 O 做为支点，采用惯量主轴的方向分解，则两部分角动量大小分别为

$$\omega_\perp = \omega_\parallel = \frac{1}{\sqrt{2}} w_{tot} = \frac{\sqrt{2}}{2}\Omega$$

$$L_\perp = \frac{1}{2} m R^2 \omega_\perp, \quad L_\parallel = (\frac{1}{4} m R^2 + m R^2)\omega_\parallel$$

投影在 y 轴上的大小为

$$L_y = (L_\perp + L_\parallel)/\sqrt{2}$$

重力与支持力提供的力矩效果为使刚体整体的角动量 L 以 Ω 转动, 故力矩方程为

$$M = N\sqrt{2}R - mg\frac{R}{\sqrt{2}} = L_y \Omega$$

解得

$$N = \frac{7\sqrt{2}}{16} m\Omega^2 R + \frac{1}{2} mg$$

(2) 法一：惯量主轴分解法（最常用）

$$\begin{aligned} E_k &= E_{k\perp} + E_{k\parallel} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} mR^2)\omega_\perp^2 + \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{4} mR^2 + mR^2)\omega_\parallel^2 \\ &= \frac{7}{16} \mathrm{m} R^2 \Omega^2 \end{aligned}$$

法二：质心运动定理，即选择质心 C 做为参考点

$$\begin{aligned} E_k &= E_{kC} + E_{k\text{资}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot (\Omega \frac{R}{\sqrt{2}})^2 + \{\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} mR^2)\omega_\perp^2 + \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{4} mR^2)\omega_\parallel^2\} \\ &= \frac{7}{16} \mathrm{m} R^2 \Omega^2 \end{aligned}$$