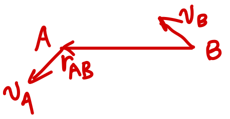
第三次习题课 刚体

TA-胡珈豪 smart_hu@mail.ustc.edu.cn

知识梳理

Problem 1 刚体力学中几个重要的小结论

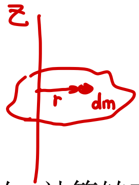
- 一个刚体，**有且只有一个**角速度 ω
- 刚体所受**平移**惯性力相对参考点 O 的力矩有 $M = r_c \times m(-a_C)$
- 刚体上任意两点 AB 的速度 $\boldsymbol{v}_A$ 和 $\boldsymbol{v}_B$ 在 AB 连接线上的分量相等，即**刚体中任意两点间的距离不会改变**



Problem 2 转动惯量

计算方式最简可以表达成：

$$I_z = \int r^2 dm$$



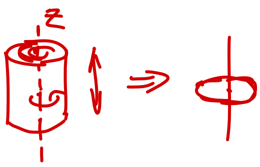
$dI = r^2 dm$

从这里的计算定义中就能看出，转动惯量是依赖于**选取的转轴**的。计算转动惯量的两个重要定理

1. 平行轴定理：
$$I = I_C + md^2$$
2. 垂直轴定理：对于**平面图形**，有
$$I_z = I_x + I_y$$

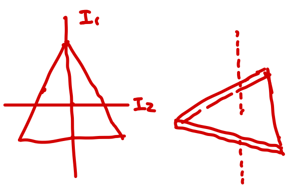
几个基本刚体的转动惯量

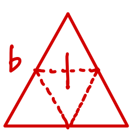
- 半径为 R，质量为 m，的圆筒，过质心的轴 mR^2
- 半径为 R，质量为 m，的圆柱，过质心的轴 $1/2mR^2$
- 半径为 R，质量为 m，的球，过质心的轴 $2/5mR^2$ $\frac{2}{3}mR^2$
- 边长为 l_1、l_2，质量为 m，的长方体，过质心的轴 $1/12m(l_1^2 + l_2^2)$
- 边长为 b，质量为 m，的正三角形，过质心的轴 $1/12mb^2$



$I \propto r^2 m$

$I_z = I_1 + I_2$





$I_z = \frac{1}{16}I_z + 3\left[\frac{1}{16}I_z + \frac{1}{4}m\left(\frac{\sqrt{3}}{6}b\right)^2\right]$

Problem 3 补充：惯量张量

惯量张量 $\mathcal{I}$ 是转动惯量的扩展，能够完全的表示一个刚体的转动信息，同样也是强依赖于**参考点**的。

我们选取某一参考点，并任取三个正交的坐标轴 xyz，惯量张量 $\mathcal{I}$ 有

$$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} \boxed{I_{11}} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & \boxed{I_{22}} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & \boxed{I_{33}} \end{pmatrix}$$

能量与角动量在该框架下写作

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T \mathcal{I} \boldsymbol{\omega}$$

$$\boldsymbol{L} = \mathcal{I}\boldsymbol{\omega}$$

$$\frac{1}{2}(\omega_1 \omega_2 \omega_3)\begin{pmatrix} I_{xx} & & \\ & I_{yy} & \\ & & I_{zz} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}I_{xx}\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_{yy}\omega_2^2 + \frac{1}{2}I_{zz}\omega_3^2$$

$$\begin{pmatrix} I_{xx} & & \\ & I_{yy} & \\ & & I_{zz} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx}\omega_1 \\ I_{yy}\omega_2 \\ I_{zz}\omega_3 \end{pmatrix}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$$

分量写作

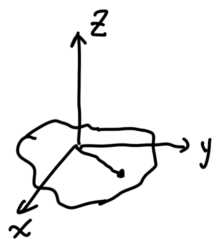
$$I_{ij} = \iiint \rho(r)(\delta_{ij} r^2 - r_i r_j) dV \qquad i, j = 1, 2, 3(x, y, z)$$

例如，**绕某轴**的转动惯量

$$I_{11} = I_{xx} = \iiint \rho(r)(y^2 + z^2) dV$$

$$I_{22} = I_{yy} = \iiint \rho(r)(z^2 + x^2) dV$$

$$I_{33} = I_{zz} = \iiint \rho(r)(x^2 + y^2) dV$$



惯量张量的交叉项，也称之为**惯量积**

$$I_{12} = I_{xy} = I_{21} = I_{yx} = \iiint \rho(r)(-xy) dV$$

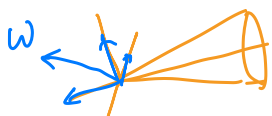
$$I_{23} = I_{yz} = I_{32} = I_{zy} = \iiint \rho(r)(-yz) dV$$

$$I_{31} = I_{zx} = I_{13} = I_{xz} = \iiint \rho(r)(-zx) dV$$

从惯量积的性质可以看出惯量张量 $\mathcal{I}$ 是一个**对称张量**；同时其具有物理意义（质量不能为负），故有**正定性**。这样一来，惯量张量 $\mathcal{I}$ 便确定了唯一的一组**惯量主轴** $x'y'z'$，彼此相互垂直。

在惯量主轴的坐标系架下，惯量张量 $\mathcal{I}$ 没有交叉项

$$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} I_{x'x'} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y'y'} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z'z'} \end{pmatrix}$$



惯量主轴非常好用。将刚体的总角速度投影到三个惯量主轴上之后 $(\omega = (\omega_{x'}, \omega_{y'}, \omega_{z'}))$，刚体的角动量和能量都可以很简洁的写作

$$\begin{cases} E = \frac{1}{2}I_{x'x'}\omega_{x'}^2 + \frac{1}{2}I_{y'y'}\omega_{y'}^2 + \frac{1}{2}I_{z'z'}\omega_{z'}^2 \\ \boldsymbol{L} = I_{x'x'}\boldsymbol{\omega}_{x'} + I_{y'y'}\boldsymbol{\omega}_{y'} + I_{z'z'}\boldsymbol{\omega}_{z'} \end{cases}$$

事实上，这也是一般的解题方法。对于惯量主轴的寻找，一般对于有对称性的规则物体，只需要找到对称轴便是其中一个惯量主轴，剩余的两个惯量主轴只需垂直其即可.

作业习题选讲

Question 8.8

平面—垂直轴

证明正方形均匀薄板对下述两轴的转动惯量相等：(1) **对角线；**(2) **通过中心且与一边平行**.

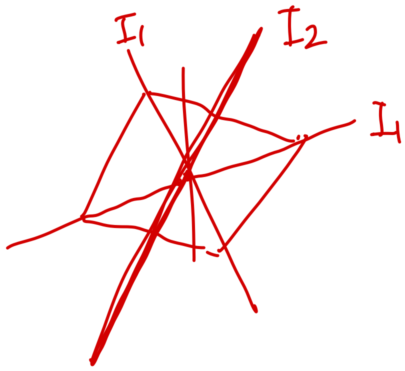
利用垂直轴定理很容易知道

$$I_{(1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} m(l^2 + l^2)$$

同样利用垂直轴定理，可知

$$I_{(2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} m(l^2 + l^2)$$

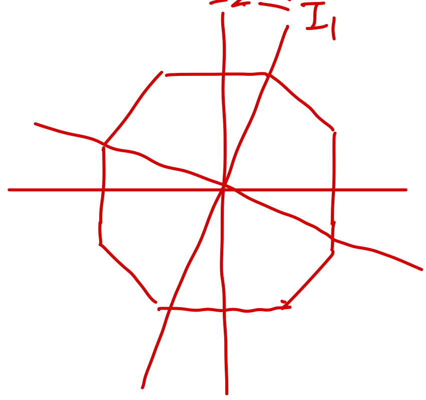
即证.



$I_z = 2I_1$

$I_z = 2I_2$

$I_2 = I_1$



Question 8.33

镜框贴着墙立在有摩擦的钉子上，稍受扰动其即向下倾倒，当到达一定角度 θ, 此镜框将跳离钉子，求 θ.(提示：跳离钉子时，镜框对钉子的压力为零.)

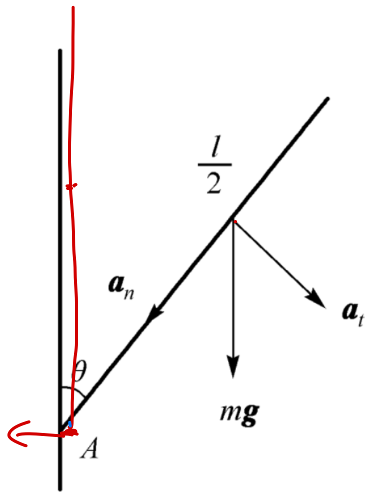


图 1: 8.33

受力分析如图 8.33 所示，相对于镜框的支撑点（钉子 A），用质心运动定理和角动量定理列出方程

$$\begin{cases}(mg-N)\cos\theta - f\sin\theta = m\frac{l}{2}\dot{\theta}^2 \\ (mg-N)\sin\theta + f\cos\theta = m\frac{l}{2}\ddot{\theta}\end{cases}$$

$$mg\frac{l}{2}\sin\theta = \frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta}$$

代入 f=N=0

解得

$$\boxed{\begin{cases}N = \frac{mg}{4}(3\cos\theta-1)^2 \\ f = \frac{3}{4}mg\sin\theta(3\cos\theta-2)\end{cases}}$$

令 $N=0$,

$$\theta = \arccos\frac{1}{3}, \text{ 此时} f = -\frac{\sqrt{2}}{2}mg$$

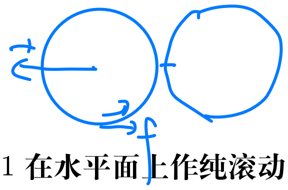
令 $f=0$,

$$\theta = \arccos\frac{2}{3}, \text{ 此时} N = \frac{mg}{4}$$

镜框开始倾倒时，摩擦力从零开始增加（向右），达最大值后再逐渐减少到零，此时正压力还不等于零. 然后，摩擦力反向并慢慢增加（向左），由于正压力一直是在逐渐减少的，当摩擦力达到 μN 时，镜框向右滑动，当 $N=0$ 时镜框将跳离钉子。

因此，

$$\theta = \arccos\frac{1}{3}$$



Question 8.34

一质量为 M、半径为 R 的均质球 1 在水平面上作纯滚动，球心速度为 v_0，与另一完全相同的静止球 2 发生对心碰撞. 设碰撞时各接触面间的摩擦均可忽略，碰撞是弹性的.(1) 碰撞后，各自经过一段时间，两球开始作纯滚动，求出此时各球心的速度 (2) 求此过程中系统机械能的损失.

碰撞时各接触面间的摩擦均可忽略，故碰撞仅交换平动能. 由于两球的质量相同，碰撞后两球交换速度，球 1 静止但转速不变，球 2 不转动但以速度 $v0$ 平动. (1) 对球 1, 碰撞后设所受摩擦力为 f_1, 方向向右. 设经过时间 t_1 后作纯滚动，纯滚动时球心的速度为 v_1. 由质心运动定理和转动定理得

$$\int_0^{t_1} f_1 \mathrm{d}t = mv_1 - m\cdot 0$$

$$\int_0^{t_1} f_1 R\mathrm{d}t = \frac{2}{5}mR^2\left(\frac{v_0}{R} - \frac{v_1}{R}\right)$$

解得纯滚动时球 1 球心的速度为

$$v_1 = \frac{2}{7}v_0$$

对球 2, 碰撞后设所受摩擦力为 f_2，方向向左. 设经过时间 t_2 后作纯滚动，纯滚动时球心的速度为 v_2. 由质心运动定理和转动定理得

$$\int_0^{t_2} f_2 \mathrm{d}t = mv_0 - mv_2$$

$$\int_0^{t_2} f_2 R\mathrm{d}t = \frac{2}{5}mR^2\frac{v_2}{R}$$

解得纯滚动时球 2 球心的速度为

$$v_1 = \frac{5}{7}v_0$$

(2) 碰撞前的机械能:

$$E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}I\omega_0^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mR^2\left(\frac{v_0}{R}\right)^2 = \frac{7}{10}mv_0^2$$

碰撞后的机械能:

$$\begin{aligned}
E_1 &= \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}I\omega_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}I\omega_2^2 \\
&= \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mR^2\left(\frac{v_1}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mR^2\left(\frac{v_2}{R}\right)^2 \\
&= \frac{7}{10}mv_1^2 + \frac{7}{10}mv_2^2 = \frac{7}{10}m\left[\left(\frac{2}{7}v_0\right)^2 + \left(\frac{5}{7}v_0\right)^2\right] \\
&= \frac{7}{10}m\left(\frac{29}{49}v_0^2\right) = \frac{29}{70}mv_0^2
\end{aligned}$$

过程中系统机械能的损失为

$$\Delta E = E_0 - E_1 = \frac{7}{10}mv_0^2 - \frac{29}{70}mv_0^2 = \frac{2}{7}mv_0^2$$

Question 8.36

为了避免高速行驶的汽车在转弯时容易发生的翻车现象，可在车上安装一高速自旋着的大飞轮.(1) 试问，飞轮轴应安装在什么方向上？飞轮应沿什么方向转动？(2) 设汽车的质量为 M，其行驶速度为 v，飞轮是质量为 m、半径为 R 的圆盘汽车 (包括飞轮) 的质心距地面的高度为 h. 为使汽车在绕一曲线行驶时，两边车轮的负荷均等，试求飞轮的转速.

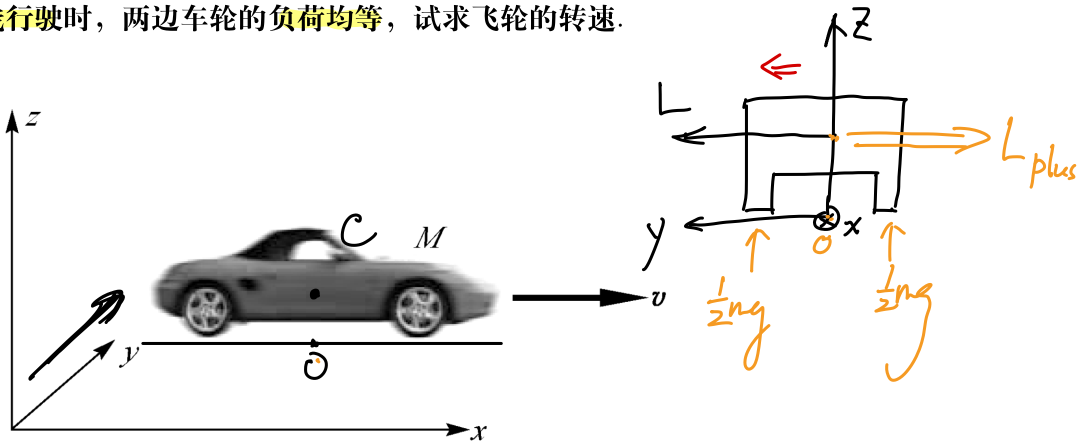


图 2: 8.36

设汽车沿 x 方向行驶 (图 8.36)，取质心下方地面点为参考点，汽车 (包括飞轮) 的角动量为

$$L = h(M+m)v\boldsymbol{j}$$

当汽车转弯时，角动量的方向变化，需要提供力矩. 例如，当汽车左转时，需提供-i 方向的力矩，即需要给质心提供向心力，否则汽车有向右侧翻倒的趋势.
若在汽车上安装一高速自旋着的大飞轮，使总角动量为零，则当汽车转弯时，角动量不会改变，汽车没有翻倒的趋势.
(1) 飞轮轴应安装在与汽车前进方向垂直，角动量方向向右.
(2) 角速度的大小为

$$L = h(M+m)v\boldsymbol{j} + \frac{1}{2}mR^2\boldsymbol{\omega} = 0$$

$$\Longrightarrow \omega = -\frac{2h(M+m)v}{mR^2}\boldsymbol{j}$$

Question 8.37

一半径为 r 的硬币，在桌面上绕半径为 R 的圆滚动，其质心速度为 v，如图所示. 设硬币的滚动为纯滚动，求其轴线与水平线所成的角 $\theta.(\theta \ll 1, R \gg r)$

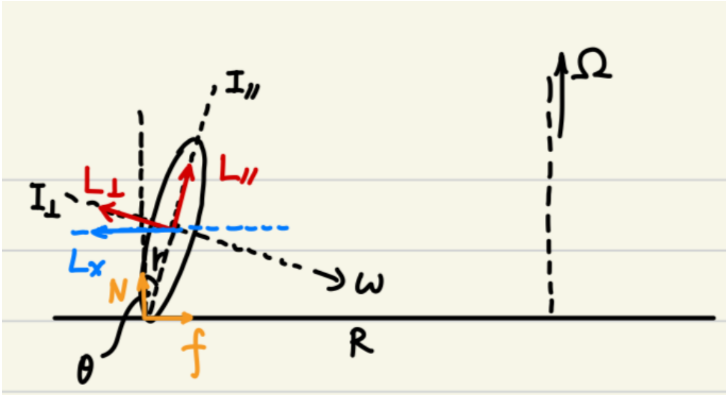


图 3: 8.37

自转与公转角速度各有

$$\Omega = \frac{v}{R - r\sin\theta}, \quad \omega = \frac{v}{r}$$

考虑到该刚体的惯量主轴一根通过轴心（图中 $I_\perp$），另外两根则在盘的平面内（图中 $I_\parallel$），于是将自转与公转角速度投影在这两个方向上，得到角动量：

$$L_\perp = \frac{1}{2}mr^2 \cdot (\Omega\sin\theta - w)$$

$$L_\parallel = \frac{1}{4}mr^2 \cdot (\Omega\cos\theta)$$

以及图中地面的作用力：

$$f = \frac{mv^2}{R - r\sin\theta}, \quad N = mg$$

不妨以质心为参考点，换入随质心一同平动的参考系中，则角动量的水平分量（图中 L_x）的公转恰由外力矩提供：

$$L_x = L_\perp\cos\theta - L_\parallel\sin\theta$$

$$fr\cos\theta - Nr\sin\theta = L_x \cdot \Omega$$

代入有

$$\frac{mv^2}{R - rsin\theta} \cdot r\cos\theta - mgr\sin\theta = \frac{v}{R - rsin\theta} \cdot \frac{1}{4}mr^2 \left[-\sin\theta \cdot \frac{v\cos\theta}{R - rsin\theta} \right.$$
$$\left. + \cos\theta \cdot \left(-2\frac{v}{r}\right) + \cos\theta\left(-2\frac{v}{R - rsin\theta}\right) \right)$$

$$\Longrightarrow \frac{mv^2}{R} r\cos\theta - mgr\sin\theta = \frac{v}{R} \cdot \frac{1}{4}mr^2 \cdot (-\frac{2v}{r})\cos\theta, \quad withR \gg r$$

$$\Longrightarrow \tan\theta = \frac{3v^2}{2Rg}, \quad with\theta \ll 1$$

Question 8.38

盘缘及杆的一端 O 靠在桌面上，杆与桌面成 45ř 角，如图所示. 今陀螺以杆的一端 O 为支点，盘缘靠在桌面上作无滑动滚动，使杆绕铅垂轴作匀速转动，角速度为 Ω. 求：(1) 桌面对盘缘的支承力 N ;(2) 陀螺的动能.

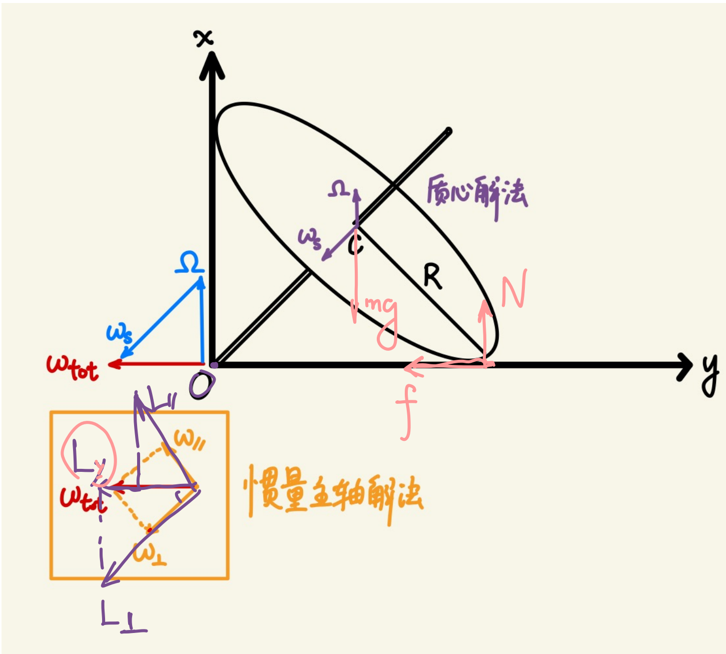


图 4: 8.38

首先, 找 O 为参考点, 瞬轴过 O, 很容易得到

$$w_{tot} = \Omega, \quad w_s = \sqrt{2}\Omega$$

$\vec{I} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}mR^2\omega^2 \\ (\frac{1}{4}+1)mR^2\omega^2 \\ (\frac{1}{4}+1)mR^2 \end{pmatrix}$

(1) 继续以 O 做为支点，采用惯量主轴的方向分解，则两部分角动量大小分别为

$$\omega_\perp = \omega_\parallel = \frac{1}{\sqrt{2}}w_{tot} = \frac{\sqrt{2}}{2}\Omega$$

$\vec{L} = \begin{pmatrix} I_1\omega_1 \\ I_2\omega_2 \\ I_3\omega_3 \end{pmatrix}$

$$L_\perp = \frac{1}{2}mR^2\omega_\perp, \quad L_\parallel = (\frac{1}{4}mR^2 + mR^2)\omega_\parallel$$

投影在 y 轴上的大小为

$$L_y = (L_\perp + L_\parallel)/\sqrt{2}$$

重力与支持力提供的力矩效果为使刚体整体的角动量 L 以 Ω 转动, 故力矩方程为

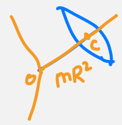
$$M = N\sqrt{2}R - mg\frac{R}{\sqrt{2}} = L_y\Omega$$

解得

$$N = \frac{7\sqrt{2}}{16} m\Omega^2 R + \frac{1}{2} mg$$

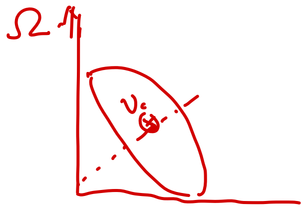
(2) 法一：惯量主轴分解法（最常用）

$$\begin{aligned} E_k &= E_{k\perp} + E_{k\parallel} \\ &= \boxed{\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}mR^2)\omega_\perp^2 + \frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{4}mR^2 + mR^2)\omega_\parallel^2} \\ &= \frac{7}{16}\mathrm{m}R^2\Omega^2 \end{aligned}$$



法二：质心运动定理，即选择质心 C 做为参考点

$$\begin{aligned} E_k &= E_{kC} + E_{k资} \\ &= \underset{\frac{1}{2}mv_c^2}{\boxed{\frac{1}{2}\cdot m\cdot(\Omega\frac{R}{\sqrt{2}})^2}} + \boxed{\{\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}mR^2)\omega_\perp^2 + \frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{4}mR^2)\omega_\parallel^2\}} \\ &= \frac{7}{16}\mathrm{m}R^2\Omega^2 \end{aligned}$$



补充习题

Question 实心圆锥在平面上的运动

一个质量为 M、高为 h、底面半径为 R 的实心圆锥体，以其尖端接触粗糙的水平面做纯滚动运动（即无滑动）. 设该圆锥体的进动角速度为 Ω.

1. **求针对于尖端的转动惯量张量.** 与关于图中x,y,z轴的转动惯量？
2. **求该圆锥体的总能量和角动量.**

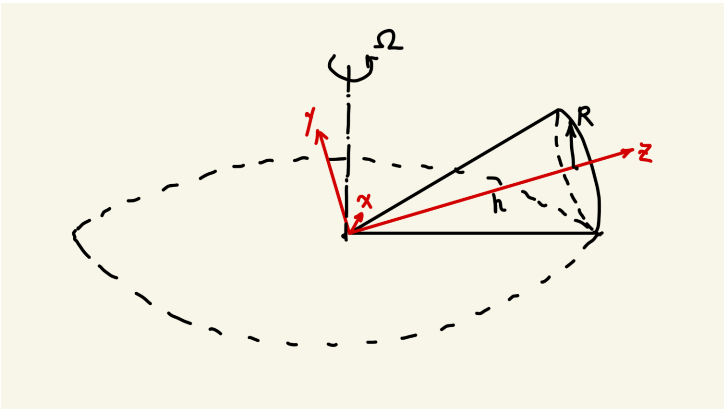


图 5: 补充习题

(1) 设圆锥体密度为

$$\rho = \frac{M}{\frac{1}{3}\pi R^2 h} = \frac{3M}{\pi R^2 h}.$$

微元体积为

$$\mathrm{d}V = 2\pi r \cdot \frac{r}{h}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z.$$

利用积分公式计算张量分量:

z 轴上的惯量:

$$I_{zz} = \iiint_V \rho(x^2+y^2)\,\mathrm{d}V = \frac{3}{10}MR^2.$$

xy 轴上的惯量:

$$I_{xx} = I_{yy} = \iiint_V \rho(y^2+z^2)\,\mathrm{d}V = \frac{3}{20}M(R^2+4h^2).$$

由于选取了惯量主轴，圆锥体对称性保证了惯量积为零:

$$\overset{\leftrightarrow}{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & & \\ & I_{yy} & \\ & & I_{zz} \end{pmatrix}$$

$$I_{xz} = I_{yz} = I_{xy} = 0.$$

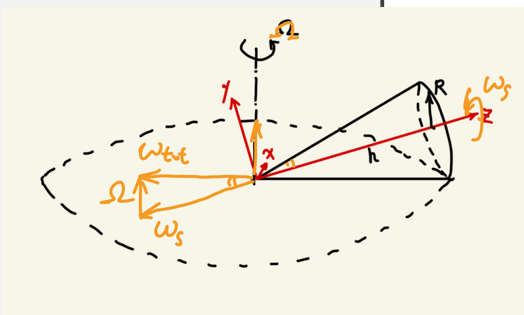
(2) 动能写作

$$E = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{I}\boldsymbol{\omega},$$

其中 $\boldsymbol{\omega}$ 是角速度，$\boldsymbol{I}$ 是转动惯量张量。

对于圆锥的运动，容易找到其瞬轴与地面重合，故总角速度 ω 沿着地面，进而自转角速度 ω_s 有

$$\boldsymbol{\omega}_s = -\Omega\frac{\sqrt{R^2+h^2}}{R}\hat{z}$$



本身进动运动的角速度为

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega\frac{R}{\sqrt{R^2+h^2}}\hat{z} + \Omega\frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}}\hat{y}.$$

即

$$\boldsymbol{\omega} = (0, \Omega\frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}}, -\Omega\frac{h^2}{R\sqrt{R^2+h^2}})$$

动能就有

$$T = \frac{1}{2}(0, \Omega\frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}}, -\Omega\frac{h^2}{R\sqrt{R^2+h^2}})\begin{pmatrix} \frac{3}{20}M(R^2+4h^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{20}M(R^2+4h^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{10}MR^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \Omega\frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}} \\ -\Omega\frac{h^2}{R\sqrt{R^2+h^2}} \end{pmatrix}$$

角动量:

$$\boldsymbol{L} = \mathcal{I}\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \frac{3}{20}M(R^2+4h^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{20}M(R^2+4h^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{10}MR^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \Omega\frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}} \\ -\Omega\frac{h^2}{R\sqrt{R^2+h^2}} \end{pmatrix}.$$

期中考

10　8　-2　分析过程

15　13 12　-3

动量守恒：

能量守恒：