Assignment 7

TA-胡珈豪 smart_hu@mail.ustc.edu.cn

CHAPTER 10

Question 10.4

一根长为 l、密度为 ρ 的均质细杆，浮在密度为 ρ_0 的液体里，杆的一端由一竖直细绳悬挂着，使该端高出液面的距离为 d, 如图所示. 试求：(1) 杆与液面的夹角 θ; (2) 绳中的张力 T. 设杆的截面积为 S.

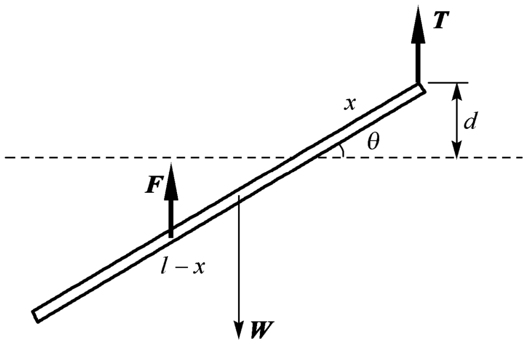

图 1: 10.4

(1) 如图 10.4 所示，设细杆浮出水面部分的长度为 x、重力为 w、浮力为 F, 有

$$W = (\rho l S)g\,, \quad F = \rho_0 S(l-x)g$$

相对于悬挂点的力矩平衡：

$$W \cdot \frac{l}{2}\cos\theta = F\left(\frac{l-x}{2} + x\right)\cos\theta$$

解得

$$x = l\sqrt{1-\rho/\rho_0}, \quad \sin\theta = \frac{d}{x} = \frac{d}{l\sqrt{1-\rho\,/\,\rho_0}}$$

即

$$\theta = \arcsin\left(\frac{d}{l\sqrt{1-\rho\,/\,\rho_0}}\right)$$

(2) 由杆在竖直方向所受合力为零得

$$T = W - F = (\rho - \rho_0 + \rho_0\sqrt{1-\rho/\rho_0})lSg$$

Question 10.6

一长方形容器长、宽、高分别是 2m、0.7m **和** 0.6m, **内贮** 0.3m **深的水，若容器沿长边方向做水平加速运动，加速度为** $a = 3\text{m}/\ s^2$. **求水作用在容器各壁上的力**.

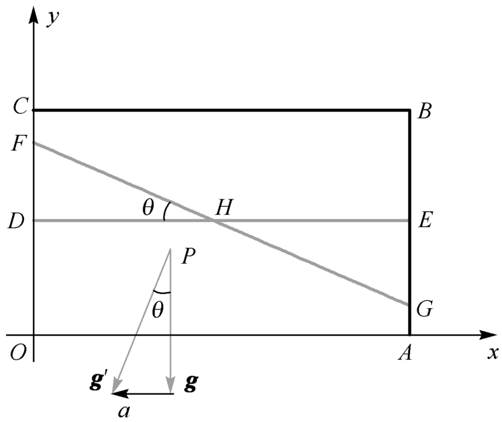

图 2: 10.6

当容器加速运动起来后，很自然地换到容器所在参考系 K' 下，可知表观重力加速度 $\boldsymbol{g'}$ 如图所示，并且液面需要垂直 $\boldsymbol{g'}$.
由于

$$\tan\theta = \frac{a}{g} = 0.3 = \frac{OC}{OA}$$

容器前侧壁：
由于液面在加速后倾斜，且水与前侧壁不接触，水对前侧壁的作用力 $F_{\text{front}} = 0$.
容器后侧壁：
考虑到 OC 上各点的压强为 $\rho g \cdot (OC - y)$, **记容器的宽为** b,

$$\begin{aligned} F_{\text{back}} &= \int_0^{OC} (\rho g \cdot (OC - y)) \cdot b\, dy \\ &= 1260N \end{aligned}$$

容器底面：

考虑到 OA 上各点的压强为 $\rho g \cdot OC \cdot \frac{OA-x}{OA}$,

$$\begin{aligned} F_{\text{bottom}} &= \int_0^{OA} (\rho g \cdot OC \cdot \frac{OA-x}{OA}) \cdot b\,dx \\ &= 4200N \end{aligned}$$

容器侧面:

考虑到侧面 (也即三角形 OAC) 上各点的压强同时依赖 (x, y), 不妨将三角形 OAC 按照 x 轴分成一个个沿 y 方向的长条:

在 x 方向长度 dx，y 方向上长度 $OC' = OC \cdot (1 - \frac{x}{OA})$ 的长条上所受压力 $\delta F_{\text{flank}}(x)$ 有

$$\begin{aligned} \delta F_{\text{flank}}(x) &= \int_{y=0}^{OC\cdot(1-\frac{x}{OA})} \left[\rho g \cdot (-y + OC(1 - \frac{x}{OA}))\right] \cdot dx \cdot dy \\ &= \frac{1}{2}\rho g (OC \cdot (1 - \frac{x}{OA}))^2\,dx \end{aligned}$$

后对长条按 x 积分

$$\begin{aligned} F_{\text{flank}} &= \int_0^{OA} \delta F_{\text{flank}}(x) \\ &= 1200N \end{aligned}$$

Question 10.7

一粗细均匀的 U 形管内装有一定量的液体. U 形管底部的长度为 ι. 当 U 形管以加速度 a 沿水平方向加速时, 求两管内液面的高度差 h.

仿上题，取相对于 U 形管静止的参考系，由于该参考系为非惯性系，需引入向左的惯性力，故液体中任一点 P 的表观重力方向应为 g' 方向，此时的液面与水平方向的夹角 θ 满足

$$\tan\theta = \frac{a}{g} = \frac{h}{l}$$

解得

$$h = \frac{al}{g}$$

Question 10.10

一个直立的密闭圆柱形容器，直径 1m、高 2m, 内贮 0.5m 深的水，以 $\omega = 20\text{rad/s}$ 的角速度绕中心轴线旋转，问容器底部有多少面积不为水覆盖？

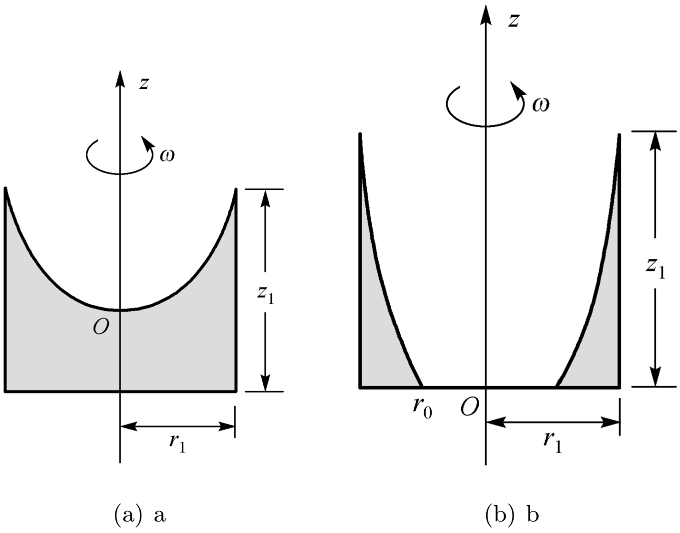

图 3: 10.10

如图 10.10a 所示，取相对于圆柱形容器静止的参考系，水除了有重力势能外还有离心势能，故伯努利方程修正为

$$p+\rho g z-\frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2+\frac{1}{2}\rho v^2=c$$

题设 $\omega=20$, $r_1=0.5$, $z_1=2$, $v=0$ (水相对于容器静止) 得

$$p=\frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2-\rho g z+c$$

若当

$$z=0\text{时},r=0\ ,p=p_0$$

其中，p_0 是液体表面的压强，即大气压强，此时容器底部都有水覆盖. 将该条件带入伯努利方程, 得

$$c=p_0$$

最后求得液体内压强分布

$$p=\frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2-\rho g z+p_0$$

由于液体表面上任一点的压强为大气压强，$p=p_0$，于是得到液体表面的方程

$$z=\frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

该式为一旋转抛物面方程，但当 $r=r_1$ 时, $z=\frac{\omega^2 r_1^2}{2g}=\frac{20^2\times 0.5^2}{2\times 9.8}=5.1>z_1$, 不合题意, 表面一部分液体会被旋转甩出杯壁。这也表明原假设 $z=0$ 时， $r=0$ ， $p=p_0$ 不正确，实际情况应该是图 10.10b 所示：

$$z=0\text{时},\quad r=r_0\ ,\quad p=p_0$$

将上式代入伯努利方程，得

$$p - p_0 = \frac{1}{2}\rho\omega^2(r^2 - r_0^2) - \rho g z$$

于是得到液体表面 $(p = p_0)$ 的方程

$$z = \frac{\omega^2(r^2 - r_0^2)}{2g}$$

代入题干条件，可知

$$z_1 = \frac{\omega^2(r_1^2 - r_0^2)}{2g}$$

$$r_0^2 = r_1^2 - \frac{2gz}{\omega^2} = 0.5^2 - \frac{2\times 9.8\times 2}{20^2} = 0.152(\mathrm{m}^2)$$

即容器底部不为水覆盖的面积为

$$A = \pi r_0^2 = 0.48\mathrm{m}^2$$

Question 10.13

如图，一水平管下面装有一 U 形管，U 形管内盛有水银. 已知水平管中粗、细处的横截面积分别为：$A_1 = 5.0\times 10^{-3}m^2$, $A_2 = 1.0\times 10^{-3}m^2$, 当水平管中有水流作定常流动时, 测得 U 形管中水银面的高度差 $h = 3.0\times 10^{-2}\mathrm{m}$. 求水流在粗管处的流速 v_1. 已知水和水银的密度分别为: $\rho = 1.0\times 10^{-3}\mathrm{kg/m}^3$,$\rho' = 13.6\times 10^{-3}\mathrm{kg/m}^3$.

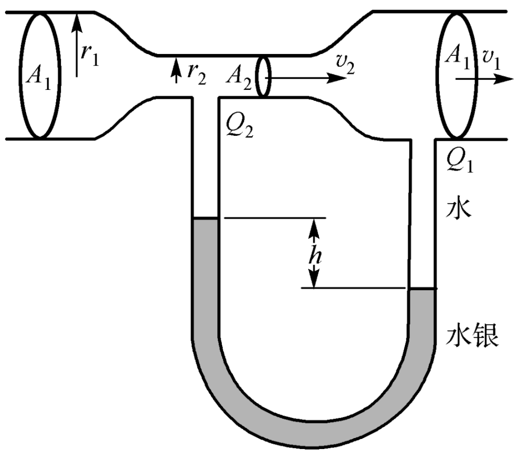

图 4: 10.13

设液体中 A_{i} 处和 A_{i} 处的压强分别为 p_{i} 和 p_2, 液体流速分别为 v_1 和 v_2 , 有题设:

$$v_1 A_1 = v_2 A_2, \qquad p_1 - p_2 = \rho' g h$$

伯努利方程:

$$p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2$$

由上述三式联立解得

$$v_1 = A_2 \sqrt{\frac{2\rho' g h}{\rho(A_1^2 - A_2^2)}} \approx 0.58 \mathrm{m/s}$$

Question 10.14

一喷泉竖直喷出高度为 H 的水流，喷泉的喷嘴具有上细下粗的形状，上截面的直径为 d, 下截面的直径为 D, 喷嘴高为 h. 设大气压强为 p_0. 求：(1) 水的体积流量；(2) 喷嘴的下截面处的压强.

(1) 喷水速度 $v = \sqrt{2gH}$, 体积流量 $Q = v\left(\frac{1}{4}\pi d^2\right) = \frac{1}{4}\pi d^2 \sqrt{2gH}$. (2) 下截面和上截面之间的伯努利方程为

$$p_D + \frac{1}{2}\rho v_D^2 = p_0 + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v_d^2$$

$$v_d = v\,, \quad v_D = v_d \frac{d^2}{D^2}$$

解得

$$p_D = p_0 + \rho g h + \rho g H \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right)$$

Question 10.19

一个半径 $r = 0.10 \times 10^{-2}\mathrm{m}$ 的小空气泡在黏滞液体中上升，液体的黏滞系数 $\eta = 0.11\ \mathrm{Pa \cdot s}$, 密度为 $0.72 \times 10^3 \mathrm{kg/\ m^3}$. 求其上升的收尾速度. ‘

与浮力相比，小空气泡的重力可以忽略. 当它以收尾速度运动时浮力和摩擦力正好相等，有

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g = 6\pi r \eta v$$

题设

$$r = 0.10 \times 10^{-2} \mathrm{m}\,, \quad \eta = 0.11 \mathrm{Pa \cdot s}\,, \quad \rho = 0.72 \times 10^3 \mathrm{kg\ /\ m^3}$$

代入得

$$v = \frac{2r^2\rho g}{9\eta} = 1.4 \times 10^{-2}\mathrm{m/s}$$

Question 10.20

在直径为 305mm **的输油管内，安装了一个开口面积为原来面积** 1/5 **的隔片. 管中的石油流量为** $0.07\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$, **其运动黏度** $\eta/\rho = 0.000\mathrm{lm}^2/\mathrm{s}$. **石油经过隔片时是否变为湍流？**

当雷诺数大于 2000 **时流动将变为湍流**. 题设：输油管直径 $D = 0.305m$, 运动黏度 $\nu = \eta/\rho = 0.000\mathrm{lm}^2/s$, 石油流量 $Q = 0.07\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$, 隔片开口面积

$$S = \frac{1}{5}\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{\pi D^2}{20} = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2$$

其中，d 为隔片开口直径. 可以求得流速：

$$v = \frac{Q}{S} = \frac{20Q}{\pi D^2}$$

以上各量代入雷诺数的定义

$$Re = \frac{\rho v d}{\eta} = \frac{4\sqrt{5}Q}{\pi\nu D} \approx 6500 > 2000$$

即石油经过隔片时变为了湍流.

补充题

Question 1

设流体质点的轨迹方程为 $\begin{cases} x = c_1e^t - t - 1 \\ y = c_2e^t + t - 1 \\ z = c_3 \end{cases}$ **其中** c_1, c_2, c_3 **为常数。试求：**(1) $t = 0$ **时位于** $x = a, y = b, z = c$ **处的流体质点的轨迹方程；**(2) **求任意流体质点的速度；**(3) **用** Euler **法表示上面流动的速度场；**(4) **用** Euler **法直接求加速度场和用** Lagrange **法求得质点的加速度场后再**

换算成 Euler **法的加速度场，二者结果是否相同？**

(1) 在 $t=0$ 时 $x=a, y=b, z=c$,$t=0$ 带入得

$$\begin{cases} c_1 = 1+a \\ c_2 = 1+b \\ c_3 = c \end{cases}$$

那么

$$\begin{cases} x = (1+a)e^t - t - 1 \\ y = (1+b)e^t + t - 1 \\ z = c \end{cases}$$

(2) 对于初始位置 $t=0$ 为 $x=x_0, y=y_0, z=z_0$ 的质点，其在任意时刻的位置可用 (1) 中式子表示. 那么位置对 t 求导可得任意时刻速度
有

$$\begin{cases} v_x = (1+x_0)e^t - 1 \\ v_y = (1+y_0)e^t + 1 \\ v_z = 0 \end{cases}$$

(3) 由于场和特定质点及其初始位置无关，我们希望消去 x_0, y_0. 我们又看到 $(1+a) = \frac{x+t+1}{e^t}, (1+b) = \frac{x-t+1}{e^t}$
那么

$$\begin{cases} v_x = x+t \\ v_y = y-t+2 \\ v_z = 0 \end{cases}$$

速度场

$$u = (x+t, y-t+2, 0)$$

(4) Euler **法**：加速度场

$$\begin{aligned} a &= \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u \\ &= (1, -1, 0) + (x+t, y-t+2, 0) \\ &= (x+t+1, y-t+1, 0) \end{aligned}$$

Lagrange **法**：根据对 (2) 中速度求导，我们得到初始位置 (x_0, y_0, z_0) 的质点加速度

$$\begin{cases} a_x = (1+x_0)e^t \\ a_y = (1+y_0)e^t \\ a_z = 0 \end{cases}$$

得到结果 $a = ((1+x_0)e^t, (1+y_0)e^t, 0)$
如果我们用当前位置 (x, y, z, t) 替换初始位置 (x_0, y_0, z_0)
那么 $a = (x+t+1, y-t+1, 0)$，和 Euler 法计算结果相同.

Question 2

已知二维速度场 $u_x = \frac{x}{1+t}, u_y = y$ (1) **求迹线方程，已知条件为** $x|_{t=0} = 1, y|_{t=0} = 1$ （2）**求流线方程，已知条件为** $x\,|_{t=0} = a$, $y\,|_{t=0} = b$

(1) 由迹线公式

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = dt$$

带入 u_x, u_y 表达式得

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{1+t}, \frac{dy}{y} = dt$$

积分并带入初始条件 $x|_{t=0} = 1, y|_{t=0} = 1$ 得

$$|x| = 1+t, |y| = e^t$$

(2) 由流线公式

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y}$$

带入 u_x, u_y 表达式得

$$\frac{(1+t)dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

假定 t 为常数积分并带入初始条件 $x|_{t=0} = a, y|_{t=0} = b$ 得

$$b|x|^{1+t} = a|y|$$

由此可见，由于 $\partial u_x/\partial t \neq 0$，**该流体不满足定常流动条件，进而流线与迹线方程不重合**.