Assignment 4

TA-胡珈豪 smart_hu@mail.ustc.edu.cn

CHAPTER 5

Question 5.1

一物体受到 $F=-6x^3$ **的力的作用，**x **以** m **为单位，**F **以** kg **为单位. 问物体从** $x=1.0\text{m}$ **移到** $x=2.0\text{m}$ **时，力** F **做了多少功？**

$$W=\int_{x_1}^{x_2}F\cdot \mathrm{d}x=-\int_1^2 6x^3\mathrm{d}x=-\frac{6}{4}x^4\Big|_1^2=-22.5(\text{kg}\cdot\text{m})$$

Question 5.2

一列火车以 72 km/h **的速度匀速前进，阻力等于列车自重的** 0.0030 **倍. 若列车重** 1800t**，求机车的牵引功率.**

因为

$$u=72\text{km/h}=20\text{m/s},\quad m=1.8\times10^6\text{kg},\quad \mu=0.003$$

所以

$$P=F\cdot v=f\cdot v=\mu mg\cdot v=0.003\times1.8\times10^6\times9.8\times20=1.058\times10^6(\text{W})$$

即机车的牵引功率为 1058kW.

Question 5.5

物体从高为 h **的斜面顶端自静止开始滑下，最后停在与起点的水平距离为** s **的水平地面上. 若物体与斜面和地面间的摩擦系数均为** μ**, 证明：**$\mu=h/S$.

设斜面的倾角为 θ, 则物体在斜面上的摩擦力为 $f_1 = \mu mg\cos\theta$, 在水平面上的摩擦力为 $f_2 = \mu mg$. 斜面长度 $S_1 = h/\sin\theta$, 水平面长度 $S_2 = S - h/\tan\theta$.
由能量守恒

$$mgh = f_1S_1 + f_2S_2 = \mu mg\cos\theta \cdot \frac{h}{\sin\theta} + \mu mg \cdot \left(S - h\frac{h\cos\theta}{\sin\theta}\right) = \mu mgS$$

即得

$$\mu = \frac{h}{S}$$

Question 5.6

若上题中物体与斜面间摩擦系数和物体与地面之间的摩擦系数并不相同当物体自斜面顶端静止滑下时，停在地面上 A 点，而当物体以 v_0 的初速 (方向沿斜面向下) 自同一点滑下时，则停在地面上 B 点. 已知 A、B 点与斜面底端 C 点的距离之间满足 $\overline{BC} = 2\overline{AC}$. 试求物体在斜面上运动的过程中摩擦力所做的功.

设 $\overline{AC} = S$, 由题意 $\overline{BC} = 2S$. 若物体在斜面上运动的过程中克服摩擦力所做的功为 W.
由题设

$$mgh = W + \mu \cdot mg \cdot \overline{AC} = W + \mu mgS$$

$$mgh + \frac{1}{2}mv_0^2 = W + \mu \cdot mg \cdot \overline{BC} = W + 2\mu mgS$$

联立上述两式消去 μmgS，得

$$W = mgh - \frac{1}{2}mv_0^2$$

所以摩擦力做功

$$A_f = -W = \frac{1}{2}mv_0^2 - mgh$$

Question 5.9

一颗质量为 m 的人造地球卫星以圆形轨道环绕地球飞行. 由于受到空气阻力的作用，其轨道半径从 r_1 变小到 r_2, 求在此过程中空气阻力所做的功.

地球质量 M. 对于在圆轨道上稳定运动的物体，其机械能与引力势能之间关系为

$$\frac{GMm}{r_1^2} = \frac{mv^2(r_1)}{r_1} \Rightarrow E_{\text{机械能}}(r_1) = \frac{1}{2}mv^2(r_1) - \frac{GMm}{r_1} = -\frac{GMm}{2r_1}$$

该过程只需考虑前后机械能变化，耗散的机械能即为空气阻力做的功:

$$W_{阻力} = E_{星}(r_2) - E_{星}(r_1) = -\frac{GMm}{2}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

Question 5.10

一质点在保守力场中沿 x 轴 (在 $x > 0$ 范围内) 运动，其势能为 $V(x) = kx/(x^2 + a^2)$ 式中 k、a 均为大于零的常数. 试求：(1) 质点所受到的力的表示式; (2) 质点的平衡位置.

(1) 质点受到的力

$$F = -\nabla V(x) = -\left(\frac{kx}{x^2 + a^2}\right)' = \frac{k(x^2 - a^2)}{(x^2 + a^2)^2}$$

(2) 势能最小处即为质点的平衡位置，亦即 $F = 0$ 处，令 (1) 中 $F = 0$, 又 $x > 0$, 所以 $x = a$ 即为质点平衡位置.

Question 5.11

一质量为 m 的质点在保守力的作用下沿 x 轴 (在 $x > 0$ 范围内) 运动，其势能为 $V(x) = A/x^3 - B/x$, 其中 A、B 均为大于零的常数. (1) 画出势能曲线图；(2) 找出质点运动中受到沿 x 负方向最大力的位置；(3) 若质点的总能量 $E = 0$, 试确定质点的运动范围.

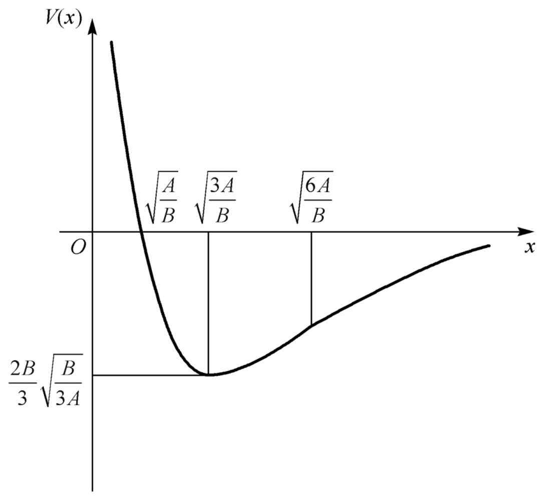


图 1: 5.11

(1) 绘图结果如图 5.11, 其中应该标出的点有

$$x=\sqrt{\frac{A}{B}}\text{时},V(x)=0$$

(2)$F=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}V(x)$, 求 F 的最大值，对 F 再求导.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F=-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}V(x)=\frac{12A}{x^5}-\frac{2B}{x^3}$$

令 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F=0$, 即得沿 x 负方向最大力的位置 x_0,

$$x_0=\sqrt{\frac{6A}{B}}$$

(3) 由于动能 $E_k>0$, 而 $E=E_k+V(r),E=0$ 时，$V(r)<0$, 由 (1) 中势能曲线可知，当 $\sqrt{\frac{A}{B}}<x<\infty$ 时，符合要求，故质点运动范围为

$$\sqrt{\frac{A}{B}}<x<+\infty$$

Question 5.12

质量为 m 的小球通过一根长为 $2l$ 的细绳悬挂于 O 点. 在 O 点的正下方 l 远处有一个固定的钉子 P. 开始时, 把绳拉至水平位置，然后释放小球. 试求：当细绳碰到钉子后小球所能上升的最大高度.

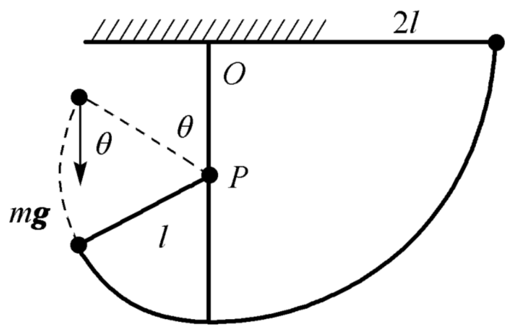


图 2: 5.12

如图 5.12 所示，一开始，小球绕 O 点做圆周运动，当达到最低点后，细绳碰到钉子，接着绕 P 点做圆周运动，由于能量守恒，当 $h=l$ 时，小球还有动能，即小球还会向上运动，所以 $l<h<2l$. 设在如图所示的 θ 位置，小球不再沿圆轨道运动 (绳松), 而做斜抛

运动，此时 $mg\cdot\cos\theta$ 作为向心力，即有

$$mg\cdot\cos\theta=m\frac{v^2}{l}$$

由机械能守恒

$$mg(l+l\cos\theta)+\frac{1}{2}mv^2=mg\cdot 2l$$

解前两式, 得

$$\cos\theta=\frac{2}{3},\quad v=\sqrt{\frac{2}{3}gl}$$

此时

$$h_{\text{脱离}}=\left(1+\frac{2}{3}\right)l=\frac{5}{3}l$$

小球沿 y 方向速度为

$$v_y=\sqrt{\frac{2}{3}gl}\cdot\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}gl}=\sqrt{\frac{10}{27}gl}$$

小球还能上升高度

$$\Delta h=\frac{v_y^2}{2g}=\frac{5}{27}l$$

所以小球上升最大高度

$$h_{\max}=\frac{5}{27}l+\frac{5}{3}l=\frac{50}{27}l$$

Question 5.14

质量分别为 M_1 和 M_2 的两个物块由一倔强系数为 k 的轻弹簧相连，竖直地放在水平桌面上，如图所示. 另有一质量为 m 的物体从高于 M_1 为 h 的地方由静止开始自由落下，当与 M_1 发生碰撞后，即与 M_1 粘合在一起向下运动. 试问 h 至少应多大，才能当弹簧反弹起后 M_2 与桌面互相脱离?

如图 5.14 建立坐标系，取弹簧恢复原长时 M_1 的坐标为原点开始时，M_1 的坐标为 x_1, 有

$$x_1=-\frac{M_1g}{k}\tag{1}$$

m 下落碰撞 M_1 达到共同速度 v_1

$$\begin{cases}mgh=\dfrac{1}{2}mv_{\text{碰前}}^2\\ mv_{\text{碰前}}=(M_1+m)v_1\end{cases}$$

解得

$$v_1=\frac{m}{M_1+m}\cdot\sqrt{2gh}\tag{2}$$

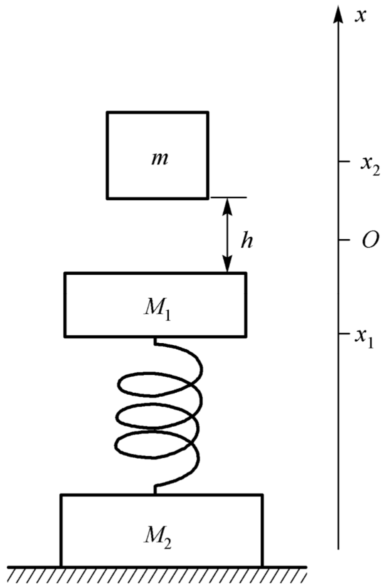


图 3: 5.14

这时 v_1 的方向向下，m、M_1 共同向下运动至最低处，然后又以共同速度上升到 x_2 位置时静止 (此时弹簧长度大于原长，而 M_2 刚好与桌面互相脱离，这时的 $h = h_{\min}$ 为最小值), 有

$$x_2 = \frac{M_2 g}{k} \tag{3}$$

由能量守恒有

$$\frac{1}{2}(M_1+m)v_1^2 + (M_1+m)gx_1 + \frac{1}{2}kx_1^2 = (M_1+m)gx_2 + \frac{1}{2}kx_2^2 \tag{4}$$

由方程1∼ 方程4可解得

$$h_{\min} = \frac{g}{2km^2}(M_1+m)(M_1+M_2)(M_1+M_2+2m)$$

Question 5.16

在水平桌面上，质量分别为 M 和 m 的两物块由一倔强系数为 k 的弹簧相连. 物块与桌面间的摩擦系数均为 μ. 开始时，弹簧处于原长，m 静止，而 M 以 $v_0 = \sqrt{\frac{6Mmg^2\mu^2}{k(M+m)}}$ 的速度拉伸弹簧. 试求：当弹簧达最大拉伸时的伸长量 (设 $M > m$).

初始时 M 减速，m 静止，当弹簧伸长 $x_0 = \frac{\mu mg}{k}$ 时，m 开始运动，此时 M 速度 v_0', 则

$$\frac{1}{2}Mv_0^2 - \frac{1}{2}Mv_0'^2 = \frac{1}{2}kx_0^2 + \mu mgx_0$$

代入数据，得

$$Mv_0'^2 = \frac{2m\mu^2 g^2}{k(M+m)}(3M^2 - mM - m^2) > 0$$

以后，M, m 一起运动，在质心系中 (质心速度 $v_c = \frac{Mv_0'}{M+m}$), 此时相对于质心：

$$M: \quad v_{10} = \frac{mv_0'}{M+m}, \quad m: \quad v_{20} = -\frac{Mv_0'}{M+m}$$

当弹簧达最大伸长 x_{m} 时，M, m 相对于质心静止，由能量定理

$$\frac{1}{2}kx_{\mathrm{m}}^2 - \left(\frac{1}{2}kx_0^2 + \frac{1}{2}Mv_{10}^2 + \frac{1}{2}mv_{20}^2\right) = -(\mu Mg\Delta l_1 + \mu mg\Delta l_2) \tag{5}$$

Δl_1, Δl_2 分别为 M,m 相对于质心位移.

由于质心位置不变，位于原点：$M_1 + ml_2 = 0$, 于是 $M\Delta l_1 + m\Delta l_2 = 0$, 所以

$$\mu Mgl_1 + \mu mgl_2 = \mu g(Ml_1 + ml_2) = 0$$

式5即

$$\frac{1}{2}kx_0^2 + \frac{1}{2}Mv_{10}^2 + \frac{1}{2}mv_{20}^2 = \frac{1}{2}kx_{\mathrm{m}}^2 \tag{6}$$

将数据代入式6, 可得

$$x_{\mathrm{m}} = \frac{\mu mg}{k(M+m)}\sqrt{5M^2 - mM}$$

Question 5.20

质量为 m_1 的运动粒子与质量为 m_2 的静止粒子发生完全弹性碰撞. 证明:(1) 当 $m_1 < m_2$ 时，m_1 的偏转角可能取 0 到 π 之间所有值;(2) 当 $m_1 > m_2$ 时, $\theta_{\max}$ 满足公式 $\cos^2\theta_{\max} = 1 - m_2^2/m_1^2, 0 << \theta_{\max} < \pi/2$.

如图 5.20 所示. 设碰撞后 m_1 和 m_2 的速率分别为 v_1 和 v_2, 在完全弹性碰撞中，动量与能量都守恒，有

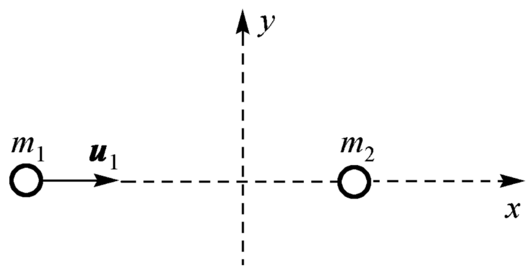
$$m_1u_1 = m_1v_1\cos\theta_1 + m_2v_2\cos\theta_2$$

$$0 = m_1v_1\sin\theta_1 - m_2v_2\sin\theta_2$$

$$\frac{1}{2}m_1u_1^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

联立上式得

$$\cos\theta_1 = \frac{1}{2}\left[\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)\frac{v_1}{u_1} + \left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right)\frac{u_1}{v_1}\right]$$



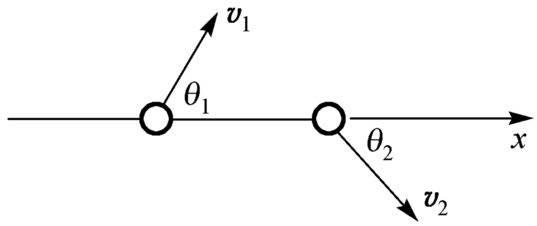


图 4: 5.20

$m_1 < m_2$, $\frac{m_2}{m_1} > 1$ 时，$\frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\frac{v_1}{u_1}+\left(1-\frac{m_2}{m_1}\right)\frac{u_1}{v_1}\right]$ 可能为正，可能为负，故 m_1 的偏转角 θ_1可能取得0 到π 之间的所有值.

当 $m_1 > m_2$ 时，即 $\frac{m_2}{m_1} < 1$, 有

$$\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\frac{v_1}{u_1} > 0, \quad \left(1-\frac{m_2}{m_1}\right)\frac{u_1}{v_1} > 0$$

由不等式性质，$a+b > 2\sqrt{ab}(a,b>0)$, 有

$$\cos\theta_1\sqrt{\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\frac{v_1}{u_1}\cdot\left(1-\frac{m_2}{m_1}\right)\frac{u_1}{v_1}} = \sqrt{1-\frac{m_2^2}{m_1^2}}$$

所以

$$\cos^2\theta_{\max} = 1-\frac{m_2^2}{m_1^2} \quad \left(0 < \theta_{\max} < \frac{\pi}{2}\right)$$

Question 5.23

一质量为 m_0、速度为 v_0 的粒子与一质量为 am_0 的靶粒子发生弹性碰撞 (1) 碰撞后，靶粒子的速度 v 与 v_0 间的夹角 β 最大能等于多少？(2) 写出碰撞后靶粒子在实验室坐标系中的动能 E_k(以 a,β 和 $E_0 = m_0v_0^2/2$ 表示)

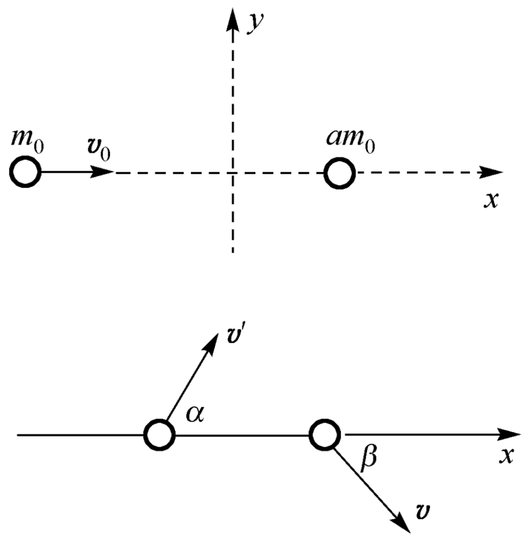


图 5: 5.23

(1) 如图 5.23 所示，设碰后，粒子速度 v' 与 v_0 夹角为 α . 有

$$0 < \alpha < \pi \ , 0 < \beta < \pi$$

动量守恒的矢量形式：

$$m_0\mathbf{v_0} = m_0\mathbf{v}' + am_0\mathbf{v}$$

投影在 xy 方向上即为

$$m_0v_0 = m_0v'\cos\alpha + am_0v\cos\beta$$

$$0 = m_0v'\sin\alpha - am_0v\sin\beta$$

能量守恒：

$$\frac{1}{2}m_0v_0^2 = \frac{1}{2}m_0v'^2 + \frac{1}{2}am_0v^2$$

由动量守恒关系得

$$v = \frac{\sin\alpha}{a\sin(\alpha+\beta)}v_0 \ , \quad v' = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}v_0 \tag{7}$$

代入能量守恒关系得

$$\alpha\sin^2(\alpha+\beta) = \alpha\sin^2\beta + \sin^2\alpha \tag{8}$$

于是

$$\alpha\sin^2(\alpha+\beta) > \alpha\sin^2\beta$$

即

$$|\sin(\alpha+\beta)| > |\sin\beta|$$

由式7可得

$$\beta < \pi/2 \ , \quad \alpha < \pi - 2\beta$$

即靶粒子的速度 v 与 v_0 间的夹角 β 最大值为 $\pi/2$.
(2) 由式7可得碰撞后靶粒子在实验室坐标系中的动能:

$$E_k = \frac{1}{2}am_0 \cdot v^2 = \frac{m_0 v_0^2}{2a} \cdot \left(\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}\right)^2 = \frac{m_0 v_0^2}{2a} \cdot \frac{1}{(\sin\beta\cot\alpha + \cos\beta)^2} \tag{9}$$

为了化简式 9, 先从式7解出 α:

$$\alpha\sin^2\beta + \sin^2\alpha - \alpha\sin^2\alpha\cos^2\beta - \alpha\cos^2\alpha\sin^2\beta - 2\alpha\sin\alpha\cos\beta\cos\alpha\sin\beta = 0$$

化简得

$$\sin^2\alpha - \alpha\sin^2\alpha\cos 2\beta - \alpha\sin\alpha\cos\alpha\sin 2\beta = 0$$

最后得

$$\cot\alpha = \frac{1 - a\cos 2\beta}{a\sin 2\beta} \tag{10}$$

将式10代入式9消去 α 得

$$E_k = \frac{4a}{(1+a)^2}\cos^2\beta \cdot E_0$$

Question 5.25

(1) 一质量为 m 的运动粒子与一质量为 M $(> m)$ 的静止粒子发生完全弹性碰撞，碰撞后 m 的运动方向偏转了 $90\deg$, 问 M 的运动方向如何？(2) 如果碰撞不是完全弹性的，碰撞中损失的动能与原来动能之比为 $1-\alpha^2$, 问 M 的运动方向如何？

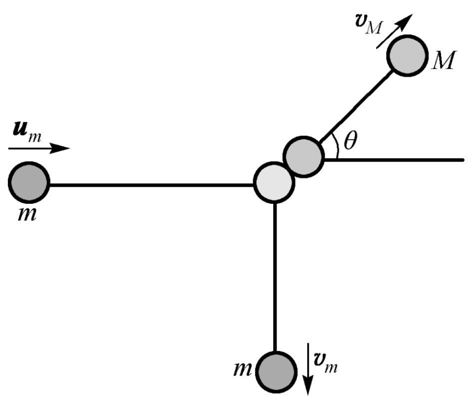


图 6: 5.25

(1) 常规思路，列出动量守恒、能量守恒的关系式即可解题. 如图 5.25 所示，设 M 的偏转角度为 θ.
由于是弹性碰撞，动量守恒：

$$mu_m = Mv_M \cos\theta$$

$$0 = Mv_M \sin\theta - mv_m$$

机械能守恒：

$$\frac{1}{2}mu_m^2 = \frac{1}{2}Mv_M^2 + \frac{1}{2}mv_M^2$$

联立上三式解得

$$\theta = \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{m}{M}\right)$$

$$\theta = \arctan\sqrt{\frac{M-m}{M+m}}$$

(2) 不完全弹性碰撞，动量仍守恒：

$$mu_m = Mv_M \cos\theta$$

$$0 = Mv_M \sin\theta - mv_m$$

机械能不守恒，但由题意知碰撞损失的部分有

$$\frac{\frac{1}{2}mu_m^2 - \frac{1}{2}Mv_m^2 - \frac{1}{2}mv_m^2}{\frac{1}{2}mu_m^2} = 1 - \alpha^2$$

联立上三式知

$$\alpha^2 \cos^2\theta = \sin^2\theta + \frac{m}{M}$$

得

$$\theta = \arctan\sqrt{\frac{\alpha^2 M - m}{M+m}}$$

注释: 5.20, 5.23, 5.25 皆是经典碰撞问题的典型题型，非常重要，需要掌握每一步的细节.