



Muon 反常磁矩测量的调研

报告人：胡珈豪

中国科学技术大学，近代物理系

2025 年 1 月 17 日



1 引言

2 基本原理

3 加速器与环装置

4 ω_a 的测量

5 总结

6 参考



1 引言

2 基本原理

3 加速器与环装置

4 ω_a 的测量

5 总结

6 参考



近几年高能物理界的“大新闻”之一便是费米实验室 (Fermilab) 进行的 μ 子的反常磁矩测量实验^[1,2]。

早在 Fermilab 的 $g-2$ 实验之前，布鲁克海文实验室 (BNL) 进行的 μ 子反常磁矩的测量给出了与标准模型存在 3.5 偏差，但 Fermilab 的 Muon $g-2$ 实验做到了 4 倍精度的提升，将 a_μ 的误差降到 140 ppb。



近几年高能物理界的“大新闻”之一便是费米实验室 (Fermilab) 进行的 μ 子的反常磁矩测量实验^[1,2]。

早在 Fermilab 的 $g-2$ 实验之前，布鲁克海文实验室 (BNL) 进行的 μ 子反常磁矩的测量给出了与标准模型存在 3.5 偏差，但 Fermilab 的 Muon $g-2$ 实验做到了 4 倍精度的提升，将 a_μ 的误差降到 140 ppb。

高能物理是一门非常严谨的学科，只有当存在 5σ 的偏差时，才有可能被认为有新发现！

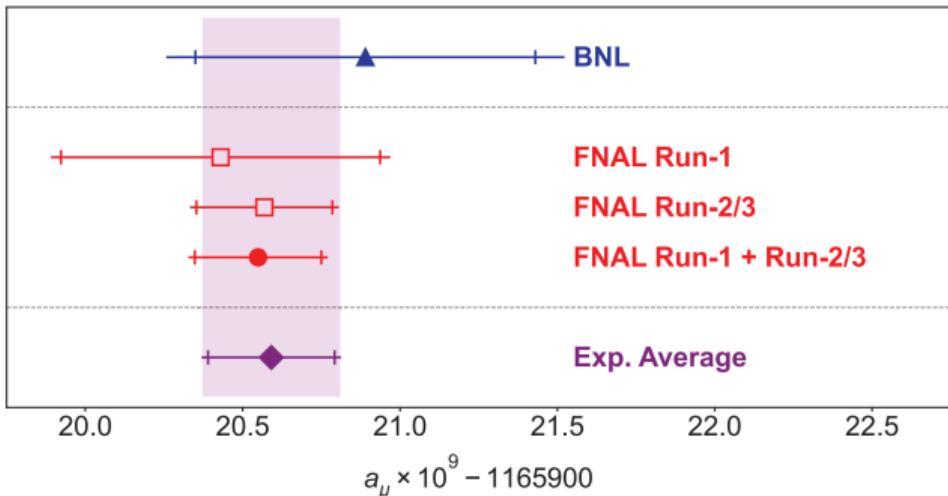


近几年高能物理界的“大新闻”之一便是费米实验室 (Fermilab) 进行的 μ 子的反常磁矩测量实验^[1,2]。

早在 Fermilab 的 $g-2$ 实验之前，布鲁克海文实验室 (BNL) 进行的 μ 子反常磁矩的测量给出了与标准模型存在 3.5σ 偏差，但 Fermilab 的 Muon $g-2$ 实验做到了 4 倍精度的提升，将 a_μ 的误差降到 140 ppb。

高能物理是一门非常严谨的学科，只有当存在 5σ 的偏差时，才有可能被认为有新发现！

经过对一期 (Run-1) 运行数据的分析，2021 年 4 月 7 日，Fermilab M 公布了对 μ 子反常磁矩测量的结果^[1]，其中心值略微接近了标准模型的预言，具有更小的实验误差，比标准模型理论的预言大了 4.2σ 的偏差，在当时的物理界泛起了不小的波澜。

图: BNL 与 FNAL 对 a_μ 实验测值的可视化

而在 2023 年末, Fermilab 整合三期运行 (Run-1/2/3) 的全部数据后, 在新的一篇 PRL^[2] 中给出了 5σ 的偏差, 这是更加令人欣喜的结果。

本报告旨在调研并总结 Fermilabg-2 实验的基本原理, 实验技术, 测量方法, 分析方法及近几年最新的工作进展。



1 引言

2 基本原理

- 缪子与标准模型 ■ 磁矩进动方程 ■ 魔动量

3 加速器与环装置

4 ω_a 的测量

5 总结

6 参考



1 引言

2 基本原理

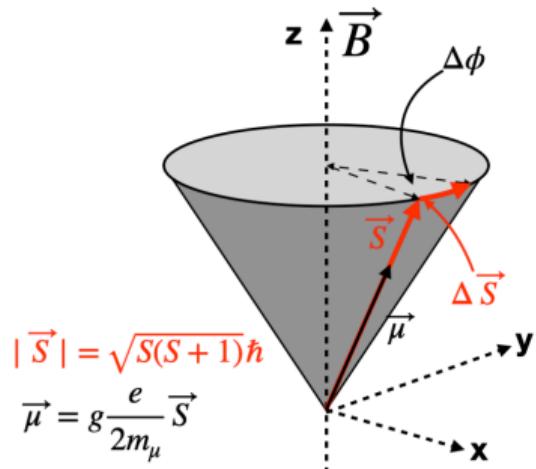
- 缪子与标准模型 ■ 磁矩进动方程 ■ 魔动量

3 加速器与环装置

4 ω_a 的测量

5 总结

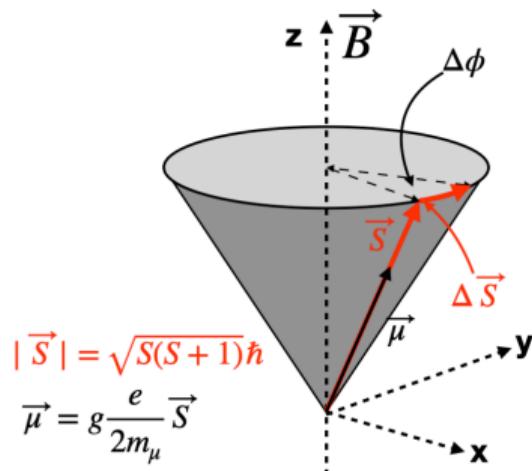
6 参考



在标准模型框架下，属于轻子的缪子是类点粒子。对于轻子的磁矩 $\vec{\mu}$ 与自旋 \vec{s} ，两者之间通过朗德 g 因子联系，其定义为：

$$\vec{\mu} = g \frac{Qe}{2m_e} \vec{s}$$

图： μ 子磁矩



在标准模型框架下，属于轻子的缪子是类点粒子。对于轻子的磁矩 $\vec{\mu}$ 与自旋 \vec{s} ，两者之间通过朗德 g 因子联系，其定义为：

$$\vec{\mu} = g \frac{Qe}{2m_e} \vec{s}$$

对于类点带电轻子，Dirac 建立的相对论量子力学^[6] 预言 $g = 2$ ，他也因此获 1933 年的诺贝尔奖。

图： μ 子磁矩



然而考虑标准模型的修正，其与虚粒子之间的相互作用将会导致 $g > 2$ ，亦即反常磁矩。用 a_μ 表征 g 因子对 2 的偏离程度，在标准模型下计算得到 a_μ 分别为分别为量子电动力学 (QED) 项、强作用项、弱作用项。

$$a_\mu = \frac{g - 2}{2} = a_{\text{QED}} + a_{\text{weak}} + a_{\text{had}}$$

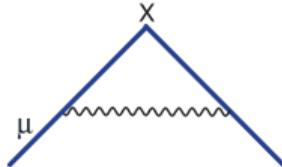


图: 缪子的 QED 单圈图

$$a_{\text{QED}} = (116584718.09 \pm 0.14_{\text{5loops}} \\ \pm 0.08_\alpha \pm 0.04_{\text{masses}}) \times 10^{-11}. \quad (1)$$

该数值考虑了最新的 5 圈图贡献，并将前几阶结果相加得到。

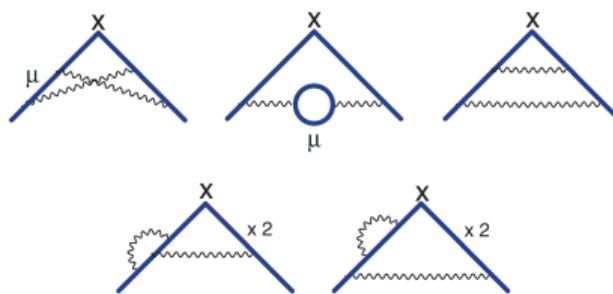


图: 缪子的 QED 二圈图

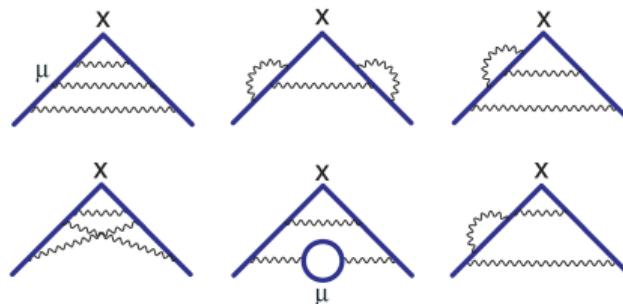


图: 缪子的部分 QED 三圈图



强作用贡献

▶ 强作用真空极化

根据最新实验结果，考虑了 e^+e^- 湮灭成各种强子的新数据，得到

$$a_\mu[\text{HVP}(06)] = (6901 \pm 42_{\text{exp}} \pm 19_{\text{rad}} \pm 7_{\text{QCD}}) \times 10^{-11}$$

其中对中心值取了平均，但保留了两次测定中最大的不确定度。



强作用贡献

▶ 强作用真空极化

根据最新实验结果，考虑了 e^+e^- 湮灭成各种强子的新数据，得到

$$a_\mu[\text{HVP}(06)] = (6901 \pm 42_{\text{exp}} \pm 19_{\text{rad}} \pm 7_{\text{QCD}}) \times 10^{-11}$$

其中对中心值取了平均，但保留了两次测定中最大的不确定度。

▶ 高阶强作用真空极化

$$a_\mu[\text{HVP h.o.}] = (-97.9 \pm 0.9_{\text{exp}} \pm 0.3_{\text{rad}}) \times 10^{-11}.$$



强作用贡献

▶ 强作用真空极化

根据最新实验结果，考虑了 e^+e^- 湮灭成各种强子的新数据，得到

$$a_\mu[\text{HVP}(06)] = (6901 \pm 42_{\text{exp}} \pm 19_{\text{rad}} \pm 7_{\text{QCD}}) \times 10^{-11}$$

其中对中心值取了平均，但保留了两次测定中最大的不确定度。

▶ 高阶强作用真空极化

$$a_\mu[\text{HVP h.o.}] = (-97.9 \pm 0.9_{\text{exp}} \pm 0.3_{\text{rad}}) \times 10^{-11}.$$

▶ 强作用光-光散射

$$a_\mu[\text{HLLS}] = (110 \pm 40) \times 10^{-11}.$$



弱作用贡献

$$a_{\text{weak}} = (154 \pm 2 \pm 1) \times 10^{-11}.$$



弱作用贡献

$$a_{\text{weak}} = (154 \pm 2 \pm 1) \times 10^{-11}.$$

以正交方式添加实验和理论误差，将这些贡献相加，标准模型给出的最新结果为

$$a_\mu^{\text{SM}} = 116591810(43) \times 10^{-11}. \quad (2)$$

这便是 2020 年 Muong-2 理论倡议组织的计算结果^[3]，也是目前算力能到做到最精确的标准模型预测。



1 引言

2 基本原理

- 缪子与标准模型 ■ 磁矩进动方程 ■ 魔动量

3 加速器与环装置

4 ω_a 的测量

5 总结

6 参考



极化的缪子产生后将被注入储存环，在均一度达 ppm 量级的偏转磁场下做圆周运动。相对论高速运动的缪子在磁场中，考虑其做圆周运动，其动量的变化角频率 ω_c 为

$$\boxed{\omega_c = -\frac{Qe}{m\gamma} B} \quad (3)$$

其中， $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$ 为相对论因子。



μ 子做圆周运动同时，其磁矩指向会相对于动量指向发生 Lamor 进动，角频率为 ω_S 。Lamor 进动只适用于经典低速模型，下面引入精确相对论效应的修正：首先引入 Pauli–Lubanski 贲矢量，其描述了量子化相对论中的角动量，定义为

$$w^\mu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} J_{\nu\rho} P_\sigma$$



μ 子做圆周运动同时，其磁矩指向会相对于动量指向发生 Lamor 进动，角频率为 ω_S 。Lamor 进动只适用于经典低速模型，下面引入精确相对论效应的修正：首先引入 Pauli–Lubanski 贲矢量，其描述了量子化相对论中的角动量，定义为

$$w^\mu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} J_{\nu\rho} P_\sigma$$

其中 $J^{\nu\rho}$ 为相对论角动量张量， P^σ 为四动量。在静止系中， $P^0 = m, \vec{P} = 0, \vec{J} = \vec{S}$ ，即 $w^\mu = (0; m\vec{S})$ ，因此可以很方便地定义归一化自旋为

$$S^\mu = \frac{w^\mu}{(-w^2)^{1/2}}.$$



故粒子静止系中自旋的运动学方程的协变形式为

$$S'^\mu = (0; \hat{s}), \quad \frac{dS'^\mu}{d\tau} = \left(\frac{dS'^0}{d\tau}; \frac{ge}{2mc} \hat{s} \times \vec{B}' \right).$$



故粒子静止系中自旋的运动学方程的协变形式为

$$S'^\mu = (0; \hat{s}), \quad \frac{dS'^\mu}{d\tau} = \left(\frac{dS'^0}{d\tau}; \frac{ge}{2mc} \hat{s} \times \vec{B}' \right).$$

利用恒等关系 $w^\mu P_\mu = \frac{1}{2} J^\rho (\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} P_\sigma P_\mu) = 0$, 以及 $P^\mu = mu^\mu$, 得到

$$S^\mu u_\mu = 0 \implies u_\mu \frac{dS^\mu}{d\tau} = -S^\mu \frac{du_\mu}{d\tau} \implies \frac{dS'^0}{d\tau} = \hat{s} \cdot \frac{d\vec{\beta}'}{d\tau}.$$



故粒子静止系中自旋的运动学方程的协变形式为

$$S'^\mu = (0; \hat{s}), \quad \frac{dS'^\mu}{d\tau} = \left(\frac{dS'^0}{d\tau}; \frac{ge}{2mc} \hat{s} \times \vec{B}' \right).$$

利用恒等关系 $w^\mu P_\mu = \frac{1}{2} J^\rho (\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} P_\sigma P_\mu) = 0$, 以及 $P^\mu = mu^\mu$, 得到

$$S^\mu u_\mu = 0 \implies u_\mu \frac{dS^\mu}{d\tau} = -S^\mu \frac{du_\mu}{d\tau} \implies \frac{dS'^0}{d\tau} = \hat{s} \cdot \frac{d\vec{\beta}'}{d\tau}.$$

回代化简自旋方程

$$\frac{dS'^\mu}{d\tau} = \left(\hat{s} \cdot \frac{d\vec{\beta}'}{d\tau}; \frac{ge}{2mc} \hat{s} \times \vec{B}' \right).$$



借由电磁场张量基本性质

$$\begin{cases} F^{\mu\nu} S'_\nu = (-F'^{0j}\hat{s}^j; -F'^{ij}\hat{s}^j) = (\vec{E}' \cdot \hat{s}; \hat{s} \times \vec{B}'), \\ \frac{du^\alpha}{d\tau} = \frac{e}{mc} F^{\alpha\beta} u_\beta. \end{cases}$$



借由电磁场张量基本性质

$$\begin{cases} F^{\mu\nu} S'_\nu = (-F'^{0j}\hat{s}^j; -F'^{ij}\hat{s}^j) = (\vec{E} \cdot \hat{s}; \hat{s} \times \vec{B}'), \\ \frac{du^\alpha}{d\tau} = \frac{e}{mc} F^{\alpha\beta} u_\beta. \end{cases}$$

算得自旋方程的分量形式为

$$\frac{d\hat{s}}{dt} = \frac{ge}{2mc} \hat{s} \times \left(\frac{1}{\gamma} \vec{B} - \frac{1}{\gamma+1} \vec{\beta} \times \vec{E} \right) - (g-2) \left(\frac{e}{2mc} \right) \frac{\gamma}{1+\gamma} \hat{s} \times \left[\vec{\beta} \times (\vec{E} + \vec{\beta} \times \vec{B}) \right]. \quad (4)$$

考虑 Fermilab 实验条件下的 μ 子运动：

- ▶ 收束的 μ 子流速度与偏转磁场垂直，即 $\beta \cdot \vec{B} = 0$ $\beta \times \vec{B} \neq 0$ ；
- ▶ 垂直方向上电四极场 \vec{E} 用于约束 μ 子流，即电场项 \vec{E} 无法忽略。



$$\implies \frac{d\hat{s}}{dt} = \hat{s} \times \left(-\frac{Qe}{m} \right) \left[\left(a + \frac{1}{\gamma} \right) \vec{B} - \left(a - \frac{1}{\gamma^2 - 1} \right) \frac{\vec{\beta} \times \vec{E}}{c} \right] = \hat{s} \times \vec{\omega}_s$$



$$\implies \frac{d\hat{s}}{dt} = \hat{s} \times \left(-\frac{Qe}{m} \right) \left[(a + \frac{1}{\gamma}) \vec{B} - \left(a - \frac{1}{\gamma^2 - 1} \right) \frac{\vec{\beta} \times \vec{E}}{c} \right] = \hat{s} \times \vec{\omega}_S$$

即 μ 子磁矩进动角频率 ω_S 为

$$\boxed{\vec{\omega}_S = -\left(a + \frac{1}{\gamma}\right) \frac{Qe}{m} \vec{B} + \left(a - \frac{1}{\gamma^2 - 1}\right) \frac{Qe}{m} \frac{\vec{\beta} \times \vec{E}}{c}} \quad (5)$$



ω_S, ω_C 相减后导出反常频率 ω_a

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_S - \vec{\omega}_C = -\frac{Qe}{m} \left[a \vec{B} - \left(a - \frac{1}{\gamma^2 - 1} \right) \frac{\vec{\beta} \times \vec{E}}{c} \right]. \quad (6)$$

可见，若 $g - 2 \neq 0$ $a_\mu \neq 0$ ，则 $\omega_S - \omega_C \neq 0$ ，表明 μ 子在做圆周运动的时，其磁矩与动量指向会产生相位差。



ω_S, ω_C 相减后导出反常频率 ω_a

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_S - \vec{\omega}_C = -\frac{Qe}{m} \left[a \vec{B} - \left(a - \frac{1}{\gamma^2 - 1} \right) \frac{\vec{\beta} \times \vec{E}}{c} \right]. \quad (6)$$

可见，若 $g - 2 \neq 0$ $a_\mu \neq 0$ ，则 $\omega_S - \omega_C \neq 0$ ，表明 μ 子在做圆周运动的时，其磁矩与动量指向会产生相位差。

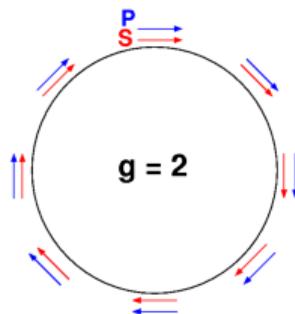


图: $g = 2$ 时 μ 子磁矩与动量变化同步

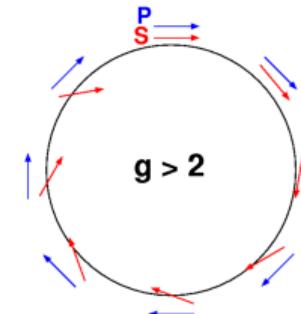


图: $g > 2$ 时 μ 子磁矩与动量变化产生相差



1 引言

2 基本原理

- 缪子与标准模型 ■ 磁矩进动方程 ■ 魔动量

3 加速器与环装置

4 ω_a 的测量

5 总结

6 参考



$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_S - \vec{\omega}_C = -\frac{Qe}{m} \left[a \vec{B} - \left(a - \frac{1}{\gamma^2 - 1} \right) \frac{\vec{\beta} \times \vec{E}}{c} \right].$$



$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_S - \vec{\omega}_C = -\frac{Qe}{m} \left[a \vec{B} - \left(a - \frac{1}{\gamma^2 - 1} \right) \frac{\vec{\beta} \times \vec{E}}{c} \right].$$

为提高测量的精度，让 μ 予以“魔动量 (magic momentum)”运动，即

$$p_{\text{magic}} = m/\sqrt{a} \simeq 3.09 \text{GeV}/c (\gamma_{\text{magic}} = 29.3) \quad a - \frac{1}{\gamma^2 - 1} = 0$$

这样便能消除电场项带来的影响，反常频率 ω_a 化为

$$\omega_a = -\frac{Qe}{m} a B \tag{7}$$



1 引言

2 基本原理

3 加速器与环装置

- 加速器与 μ 子传递环 ■ μ 子储存环与粒子流的约束

4 ω_a 的测量

5 总结

6 参考



1 引言

2 基本原理

3 加速器与环装置

- 加速器与 μ 子传递环 ■ μ 子储存环与粒子流的约束

4 ω_a 的测量

5 总结

6 参考



加速器与 μ 子传递环起到了生成与纯化 μ 子的作用。



加速器与 μ 子传递环起到了生成与纯化 μ 子的作用。

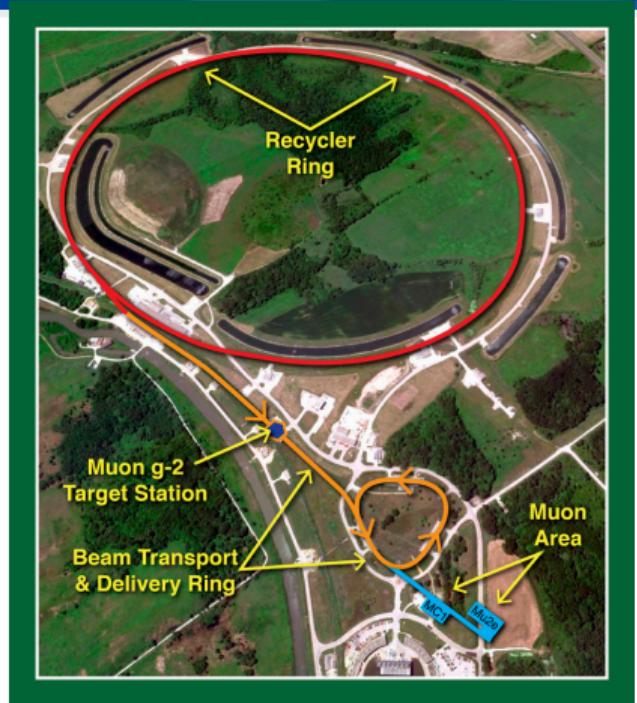
本实验的加速器继承了 Tevatron Collider (兆电子伏特加速器) 装置，通过回旋加速器将质子加速至动量为 $8\text{GeV}/c$ 后，轰击反质子靶，得到大量产物 π^+ 介子。 π^+ 介子衰变成 μ^+ 轻子，并在经过后续 M2M3 与传递环 (Delivery Ring) 的遴选后，尽可能多的魔动量 μ^+ 子会被聚集，杂质粒子如质子、中子等会被剔除。



加速器与 μ 子传递环起到了生成与纯化 μ 子的作用。

本实验的加速器继承了 Tevatron Collider (兆电子伏特加速器) 装置，通过回旋加速器将质子加速至动量为 $8\text{GeV}/c$ 后，轰击反质子靶，得到大量产物 π^+ 介子。 π^+ 介子衰变成 μ^+ 轻子，并在经过后续 M2M3 与传递环 (Delivery Ring) 的遴选后，尽可能多的魔动量 μ^+ 子会被聚集，杂质粒子如质子、中子等会被剔除。

大量的 μ^+ 子被抽取出传递环后，通过 M5 路线会被运到 $g - 2$ 实验，通过 M4 路线会被运到 Mu2e 实验，实现了 μ^+ 子源的共享。



图：加速器与传递环总览



图： μ 子传递环简图



1 引言

2 基本原理

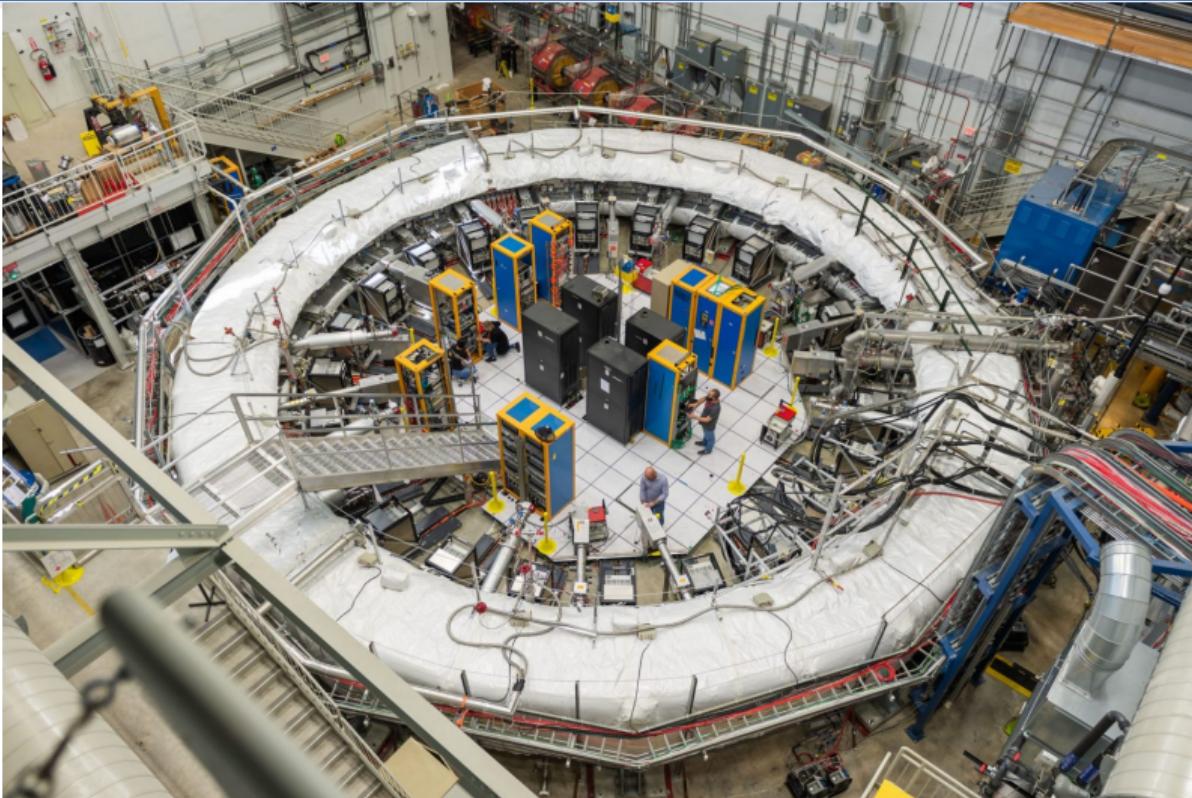
3 加速器与环装置

- 加速器与 μ 子传递环 ■ μ 子储存环与粒子流的约束

4 ω_a 的测量

5 总结

6 参考



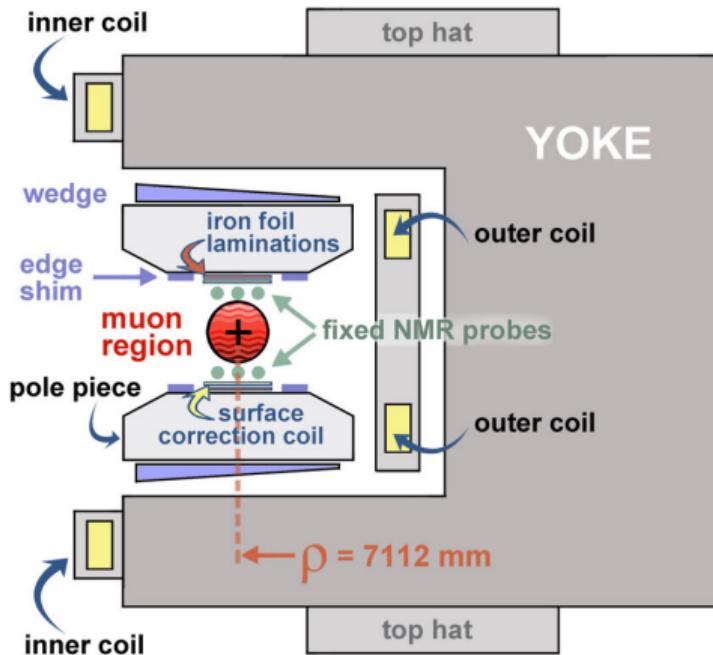


储存环内的偏转磁场是本实验的关键，为 μ 子提供偏转力，故需要确保高的强度与均匀度。



储存环内的偏转磁场是本实验的关键，为 μ 子提供偏转力，故需要确保高的强度与均一度。

磁铁可以在一个 90mm 的圆形包络线内产生强度为 1.45 T ，精度为 0.7 ppm 的纵向磁场，将 μ 子的环形轨道完全包含在内 [4]。



图：产生高度均匀磁场的储存环截面图



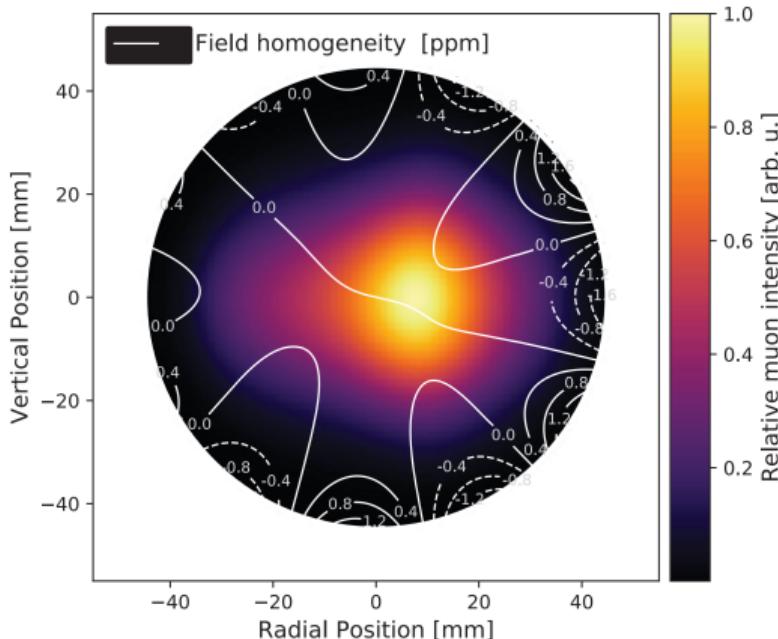
核磁共振 (NMR) 探针被置于轨道两侧，通过测量质子的磁共振频率 ω_p 达成精密测量、实时监控磁场强度的要求：

$$\omega_p = g_p \left(\frac{eB}{2m_p} \right)$$

其中， g_p 为质子的朗德因子。右图展示了最新运行时用 NMR 探针测得的磁场平均值分布。

借由上式，反常磁矩 a_μ 能够用一系列可测量量表示

$$a_\mu = \frac{\omega_a}{\omega_p} \frac{2\mu_p}{\hbar} \frac{m_\mu}{e} = \frac{\omega_a}{\omega_p} \frac{\mu_p}{\mu_e} \frac{m_\mu}{m_e} \frac{g_e}{2} \quad (8)$$



图：储存环内磁场均一性与 μ 子束流强度分布图



μ 子流刚注入储存环时，其轨道与储存环轨道会有 $77mm$ 的径向偏差。



μ 子流刚注入储存环时，其轨道与储存环轨道会有 77mm 的径向偏差。

安装在环上的 kicker 装置，通过脉冲强磁场，给与粒子横向矫正动量，踢回储存环的轨道上。

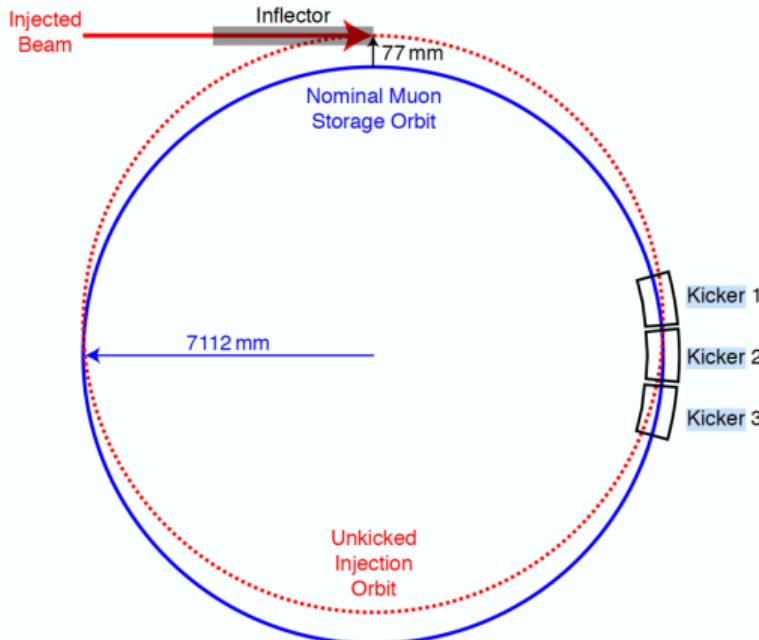


图: kicker 简图



为了在垂直方向上更好地约束粒子流，静电聚焦四级子 (ESQs) 部署在环上四处，其覆盖了超过 43% 的区域，产生一个有效的离子阱。

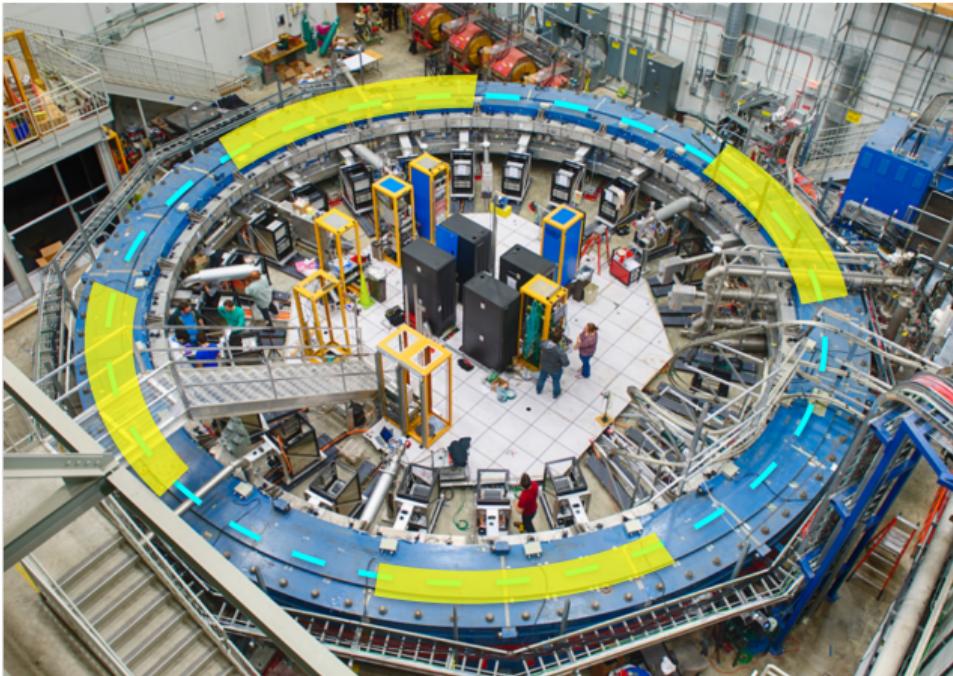


图: ESQs 位置示意图



1 引言

2 基本原理

3 加速器与环装置

4 ω_a 的测量

- 弱衰变过程 ■ 分析方法概述 ■ 模拟分析 ■ 统计与系统误差的控制

5 总结

6 参考



在“基本原理”中已算得，魔动量下，极化的正 μ 子在储存环中的反常进动频率为

$$\omega_a = \omega_S - \omega_C = -a \frac{Qe}{m} B$$

是整体 μ 子进动频率 ω_S 和加速器回旋频率 ω_C 之间的差异。



在“基本原理”中已算得，魔动量下，极化的正 μ 子在储存环中的反常进动频率为

$$\omega_a = \omega_S - \omega_C = -a \frac{Qe}{m} B$$

是整体 μ 子进动频率 ω_S 和加速器回旋频率 ω_C 之间的差异。

然而 μ 子自旋无法直接测量，通过间接测量其衰变产物正电子是可行的方法。 μ 子的弱衰变过程宇称破缺，该测量思路利用了产物粒子动量与母粒子 μ 子自旋方向相关的特点。



1 引言

2 基本原理

3 加速器与环装置

4 ω_a 的测量

- 弱衰变过程 ■ 分析方法概述 ■ 模拟分析 ■ 统计与系统误差的控制

5 总结

6 参考



储存环中，正 μ 子主要的衰变道为

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$$



储存环中，正 μ 子主要的衰变道为

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$$

这是一个典型的三体衰变。简要分析，在 μ 子静止系中，衰变正电子能获得的最大能量为 $E'_{max} \approx (m_\mu c^2)/2 = 53\text{MeV}$ ，此时两个中微子完全反向飞出并携带 0 总角动量。根据反应前后角动量守恒，正电子便完全继承了 μ 子的 $1/2$ 角动量，同时正电子在弱衰变中的螺度更倾向于右手 (RH)，这便导致了更多的正电子会沿着 μ 子磁矩方向射出。



$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$$



$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$$

上述规律用 $V-A$ 理论^[5] 可以定量呈现，即在 μ 子静止系中，衰变产生的正电子的微分概率分布

$$dP(y', \theta') \propto N(y') [1 \pm A(y') \cos \theta'] dy' d\Omega' \quad (9)$$

$$\text{with } N(y') = 2y'^2(3 - 2y') \quad \text{and} \quad A(y') = \frac{2y' - 1}{3 - 2y'}.$$

其中 $d\Omega'$ 是立体角， $y' = E'_e/E'_{e;max}$ 是正电子的能量分量， θ' 是正电子动量与 μ 子自旋方向的夹角。



$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$$

上述规律用 $V-A$ 理论^[5] 可以定量呈现，即在 μ 子静止系中，衰变产生的正电子的微分概率分布

$$dP(y', \theta') \propto N(y') [1 \pm A(y') \cos \theta'] dy' d\Omega' \quad (9)$$

$$\text{with } N(y') = 2y'^2(3 - 2y') \quad \text{and} \quad A(y') = \frac{2y' - 1}{3 - 2y'}.$$

其中 $d\Omega'$ 是立体角， $y' = E'_e/E'_{e;max}$ 是正电子的能量分量， θ' 是正电子动量与 μ 子自旋方向的夹角。

若对全空间所有衰变产生的正电子进行计数，则检测到的数量随时间的关系将是平庸的纯指数（即 μ 子的衰变）；因此削减实验室的可观测量，以选择数量以进动频率振荡的衰变电子作为数据集，也即上式中反对称项 A 代表的部分



μ 子静止系 boost 至实验室系，得无量纲数
 $N_{d0}(E), A_d(E)$ 在实验室系中有：

$$A_d(E) = \frac{-8y^2 + y + 1}{4y^2 - 5y - 5},$$

$$N_{d0}(E) \propto (y - 1)(4y^2 - 5y - 5).$$

画出 $N_{d0}(E), A_d(E)$ 的曲线



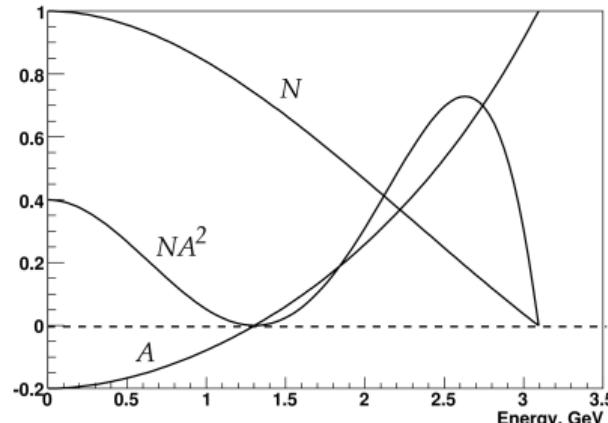
μ 子静止系 boost 至实验室系，得无量纲数
 $N_{d0}(E), A_d(E)$ 在实验室系中有：

$$A_d(E) = \frac{-8y^2 + y + 1}{4y^2 - 5y - 5},$$

$$N_{d0}(E) \propto (y - 1)(4y^2 - 5y - 5).$$

画出 $N_{d0}(E), A_d(E)$ 的曲线

$A_d(E)$ 有一正根 $y_{A_d(E)} = \frac{1+\sqrt{33}}{16}$ ，其意义为，当实验室系下的能量高于 $y_{A_d(E)} \cdot E_{\max} \simeq 1.2 \text{ GeV}$ 时， $A_d(E) > 0$ ，高能量的正电子更倾向于平行分布在 μ 子动量的方向。



图：实验室系下无量纲数 N, A 与品质因数 NA^2 随能量的关系



1 引言

2 基本原理

3 加速器与环装置

4 ω_a 的测量

- 弱衰变过程 ■ 分析方法概述 ■ 模拟分析 ■ 统计与系统误差的控制

5 总结

6 参考



将式(9)boost至实验室系^[2]，得到衰变正电子的谱图，其相当于被 ω_a 调制：

$$N_d(t, E) = N_{d0}(E) e^{-t/\gamma\tau_\mu} [1 + A_d(E) \cos(\omega_a t + \phi)] \quad (10)$$

其中， $\gamma\tau_\mu$ 为膨胀后的 μ 子寿命， ϕ 为初始相位。也即特定能量的电子的产生率为 μ 子指数衰变与反常频率 ω_a 波动的卷积^[4]。



将式 (9) boost 至实验室系^[2], 得到衰变正电子的谱图, 其相当于被 ω_a 调制:

$$N_d(t, E) = N_{d0}(E) e^{-t/\gamma\tau_\mu} [1 + A_d(E) \cos(\omega_a t + \phi)] \quad (11)$$

其中, $\gamma\tau_\mu$ 为膨胀后的 μ 子寿命, ϕ 为初始相位。也即特定能量的电子的产生率为 μ 子指数衰变与反常频率 ω_a 波动的卷积^[4]。

将该函数参数化为 5 参数函数, 用量能器测到的正电子的数据进行拟合是常用的方法。



本实验采用的两种分析方法

- ▶ **T 方法：**量能器中的事件被单独（单个衰变正电子被）识别、分类和拟合以获得时间和能量。事件与填充时间直方图由所有重建能量高于阈值的事件构建。直方图中的所有事件都具有相同的权重。对于 1.86 GeV 的正电子能量阈值，品质因数（即上图中的 NA^2 ）最大化。
- ▶ **Q 方法：**将探测器电流（代表沉积的能量）数字化并绘制为时间函数。未识别单个正电子事件。此过程会产生能量与填充时间的直方图。这里不需要尝试校正堆积，并且需要非常低（接近零）的阈值。



下图展示同一组模拟数据集^[4]采用T方法和Q方法绘制的谱图,

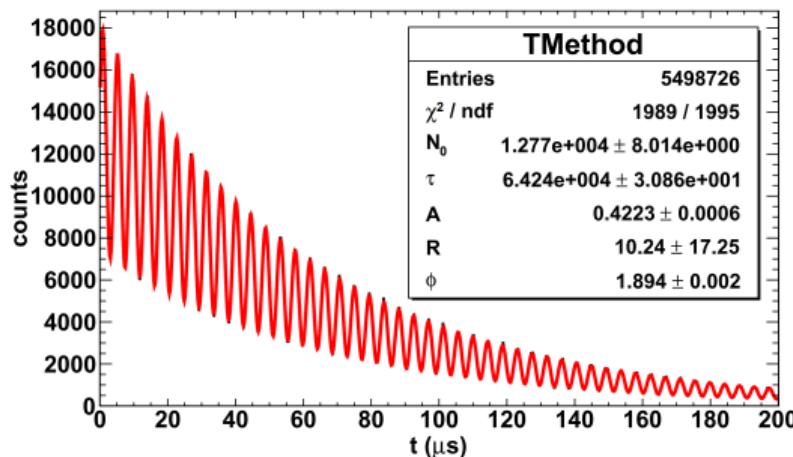


图: T 方法绘制的谱图

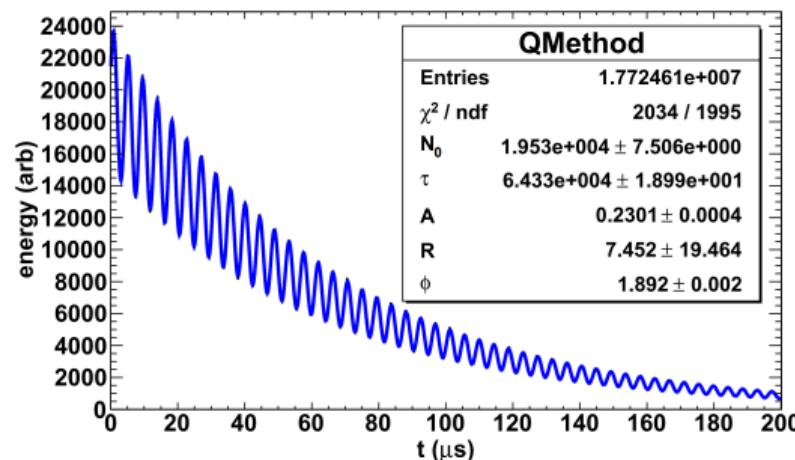


图: Q 方法绘制的谱图



1 引言

2 基本原理

3 加速器与环装置

4 ω_a 的测量

- 弱衰变过程 ■ 分析方法概述 ■ 模拟分析 ■ 统计与系统误差的控制

5 总结

6 参考



在 Fermilab 的实际工作中，Q 方法由于不用矫正堆积，操作简易，为常用的分析方法。借助开源代码 gm2qcuda 项目¹可以进行简易的模拟 Q 方法。

¹<https://github.com/fanghanonline/gm2qcuda>



在 Fermilab 的实际工作中，Q 方法由于不用矫正堆积，操作简易，为常用的分析方法。借助开源代码 gm2qcuda 项目¹可以进行简易的模拟 Q 方法。

其使用 Nvidia CUDA 模拟真实实验中沉积在量能器中的正电子能量，其底层原理为 GPU 计算分析，与材料的相互作用不是模拟的重点。能量分布是用一系列经验参数和简单函数计算的。程序的运行过程中使用到了辅助软件 CERN ROOT。

¹<https://github.com/fanghanonline/gm2qcuda>

在 Fermilab 的实际工作中，Q 方法由于不用矫正堆积，操作简易，为常用的分析方法。借助开源代码 gm2qcuda 项目¹可以进行简易的模拟 Q 方法。

其使用 Nvidia CUDA 模拟真实实验中沉积在量能器中的正电子能量，其底层原理为 GPU 计算分析，与材料的相互作用不是模拟的重点。能量分布是用一系列经验参数和简单函数计算的。程序的运行过程中使用到了辅助软件 CERN ROOT。

```
19
20
21     GSimulation::GSimulation(AnalyzerParameters, floatParameters, StringParameters, Seed);
22
23     //Register Analyzer config
24     for (auto::iterator it=analyzersConfig.begin(); it!=analyzersConfig.end(); ++it)
25     {
26         bool enable = (*it).enable;
27         if (enable)
28         {
29             std::string name((*it).name);
30             std::map<std::string, int> AnalyzeParameters;
31             std::map<std::string, float> AnalyseParameters;
32             std::map<std::string, std::string> AnalyStringParameters;
33             std::string name_(*it).name;
34             AnalyseConfig_td_<int> AnalyzeParameters, AnalyStringParameters;
35             AnalyseConfig_td_<float> AnalyseParameters, AnalyStringParameters;
36
37             GSimulator.RegisterAnalyzer(name_, AnalyzeParameters, AnalyseParameters, AnalyStringParameters, AnalyStringParameters, AnalyseParameters["MfL"]);
38
39             GSimulator.Simulate(name_);
40
41         }
42     }
43
44     std::cout << "Analyzing flush batch" << std::endl;
45     std::cout << "Time to Analyze flush: " << flushTime << std::endl;
46     std::cout << "Time to Analyze flush: " << flushTime << std::endl;
47
48     AnalyseOutput_td_<int> output;
49     AnalyseOutput_td_<float> output;
50     AnalyseOutput_td_<double> output;
51     AnalyseOutput_td_<double> output;
52
53     lowXCut = 0;
54     size = 2000;
55
56     GSimulator->run();
57 }
```

Analyzing flush batch
Time to Analyze flush: 263.8 ms
Time to Analyze flush: 234.4 ms
Analyzing output
Starting output
Output size: 2000
lowXCut: 0
size: 2000
[C:\Users\HUAWEI\source\repos\GSimulation\build\GSimulation -c ..\Input\VFT_AZ001_Az012.8.msh -flush 1000 -run]

¹<https://github.com/fanghanonline/gm2qcuda>

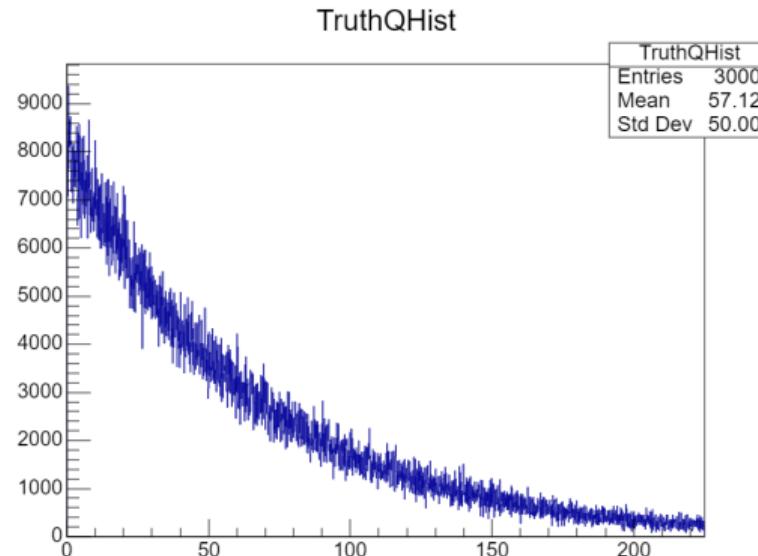
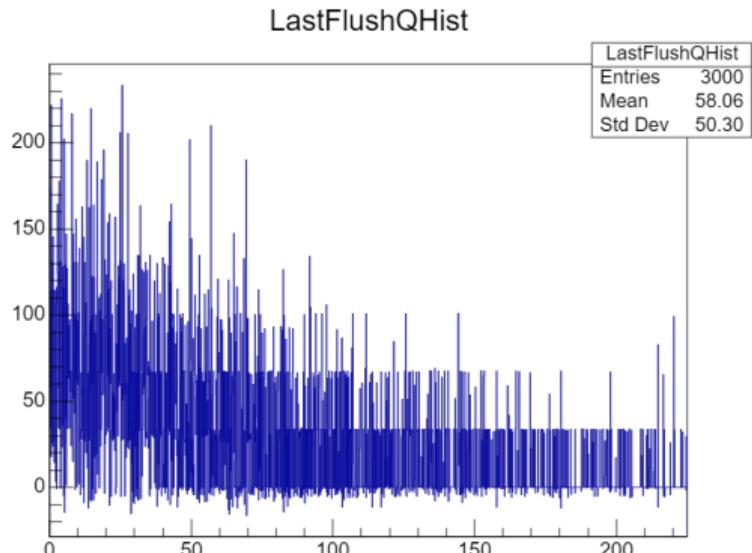


图: CUDA 模拟量能器中的能量沉积事件

图: 分析得到的 QMethod 谱图



1 引言

2 基本原理

3 加速器与环装置

4 ω_a 的测量

- 弱衰变过程 ■ 分析方法概述 ■ 模拟分析 ■ 统计与系统误差的控制

5 总结

6 参考



FermiLab 的不确定度主要包括三方面

- ▶ 统计不确定度：最小二乘或最大似然拟合描述衰变电子事件与时间的直方图将确定 ω_a ，即异常进动频率。拟合的不确定性 $\delta\omega_a$ 将是纯统计的（假设拟合良好）^[4,7]。最终的不确定性取决于拟合中使用的数据集的大小，而这又取决于数据积累和运行时间。



FermiLab 的不确定度主要包括三方面

- ▶ 统计不确定度：最小二乘或最大似然拟合描述衰变电子事件与时间的直方图将确定 ω_a ，即异常进动频率。拟合的不确定性 $\delta\omega_a$ 将是纯统计的（假设拟合良好）^[4,7]。最终的不确定性取决于拟合中使用的数据集的大小，而这又取决于数据积累和运行时间。
- ▶ ω_a 系统误差：一些系统不确定性若会影响 $\delta\omega_a$ ，可能会导致从拟合中提取的 ω_a 值与真实值不同，超出统计波动，主要与系统的抗堆积性、增益稳定性以及 μ 子的丢失有关^[7]。



FermiLab 的不确定度主要包括三方面

- ▶ 统计不确定度：最小二乘或最大似然拟合描述衰变电子事件与时间的直方图将确定 ω_a ，即异常进动频率。拟合的不确定性 $\delta\omega_a$ 将是纯统计的（假设拟合良好）^[4,7]。最终的不确定性取决于拟合中使用的数据集的大小，而这又取决于数据积累和运行时间。
- ▶ ω_a 系统误差：一些系统不确定性若会影响 $\delta\omega_a$ ，可能会导致从拟合中提取的 ω_a 值与真实值不同，超出统计波动，主要与系统的抗堆积性、增益稳定性以及 μ 子的丢失有关^[7]。
- ▶ ω_p 系统误差：由磁场的校准方法影响，不确定性与从绝对校准到相对校准和时间相关监测的多个阶段有关。



1 引言

2 基本原理

3 加速器与环装置

4 ω_a 的测量

5 总结

■ BNL 实验室的测量结果 ■ Fermilab 新发现与展望

6 参考



1 引言

2 基本原理

3 加速器与环装置

4 ω_a 的测量

5 总结

■ BNL 实验室的测量结果 ■ Fermilab 新发现与展望

6 参考



在费米实验室 (Fermilab) 的 $g-2$ 实验之前, BNL 实验室的 E821 合作组对 a_μ 的测量值为^[8]

$$a_\mu(\text{BNL}) = 116\,592\,089(54)_{\text{stat}}(33)_{\text{syst}}(63)_{\text{tot}} \times 10^{-11} \text{ (0.54 ppm).}$$

其和理论值产生了 3.5σ 的偏差。BNL E821 实验是过去 30 年的一项重大工作, 这些工作使得对强子贡献的认识有了一个数量级以上进步, 并且其关键分析技术与实验装置都被后续 Fermilab 的实验采用。



1 引言

2 基本原理

3 加速器与环装置

4 ω_a 的测量

5 总结

- BNL 实验室的测量结果 ■ Fermilab 新发现与展望

6 参考



2023 年 8 月, Fermilab 完成了过去三次运行 (Run-1/2/3) 的全部数据的分析, 计算了所有的统计误差、系统误差、外部参数误差后, 得到^[2]

$$a_\mu(\text{FNAL}) = 116592055(24) \times 10^{-11} \quad (0.20 \text{ ppm})$$



2023 年 8 月, Fermilab 完成了过去三次运行 (Run-1/2/3) 的全部数据的分析, 计算了所有的统计误差、系统误差、外部参数误差后, 得到^[2]

$$a_\mu(\text{FNAL}) = 116592055(24) \times 10^{-11} \quad (0.20 \text{ ppm})$$

若将 BNL 与 Fermilab 的结果合并, 便得到

$$a_\mu(\text{exp}) = 116592059(22) \times 10^{-11} \quad (0.19 \text{ ppm})$$



$$a_\mu(\text{BNL}) = 116592089(63) \times 10^{-11} (0.54\text{ppm})$$

$$a_\mu(\text{FNAL}) = 116592055(24) \times 10^{-11} (0.20\text{ppm})$$

$$a_\mu(\text{exp}) = 116592059(22) \times 10^{-11} (0.19\text{ppm})$$

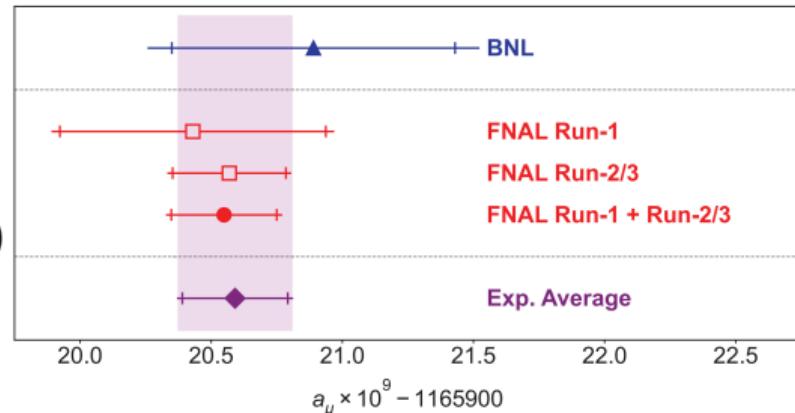


图: BNL 与 FNAL 对 a_μ 实验测值的可视化



- ▶ Fermilab 的测量在达到 0.20 ppm 精度的前提下，与 2020 年 Muong-2 理论倡议组织给出的 SM 理论值能产生 5.0σ 的偏差，这是非常令人振奋的结果，也是新物理可能存在的信号。



- ▶ Fermilab 的测量在达到 0.20 ppm 精度的前提下，与 2020 年 Muong-2 理论倡议组织给出的 SM 理论值能产生 5.0σ 的偏差，这是非常令人振奋的结果，也是新物理可能存在的信号。
- ▶ Run-4/5/6 的数据分析在进行中……



- ▶ Fermilab 的测量在达到 0.20 ppm 精度的前提下，与 2020 年 Muong-2 理论倡议组织给出的 SM 理论值能产生 5.0σ 的偏差，这是非常令人振奋的结果，也是新物理可能存在的信号。
- ▶ Run-4/5/6 的数据分析在进行中……
- ▶ SM 理论计算值也在不断改进。BMW Collaboration 对真空极化 (HVP) 进行的 lattice 计算与 e^+e^- 数据存在显著差异。此外，CMD-3 实验中对 $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ 散射截面的新初步测量结果与所有其他 e^+e^- 数据明显不一致。人们正在努力澄清当前的理论状况。



1 引言

2 基本原理

3 加速器与环装置

4 ω_a 的测量

5 总结

6 参考



1. B. Abi, et al. (Muon g – 2 Collaboration), Measurement of the Positive Muon Anomalous Magnetic Moment to 0.46 ppm, Phys. Rev. Lett. 126, 141801 (2021).
2. P. Aguillard, et al.(The Muon g–2 Collaboration),Measurement of the Positive Muon Anomalous Magnetic Moment to 0.20 ppm, Phys. Rev. Lett. 131, 161802(2023)
3. T. Aoyama, et al., The anomalous magnetic moment of the Standard Model, Phys. Rep. 887, 1(2020)
4. J. Grange, et al.(The Muon g–2 Collaboration), Muon (g-2) Technical Design Report, (2018)
5. Konopinski E J Annu. Rev. Nucl. Sci. 9 99(1959).
6. Dirac, Paul Adrien Maurice. The quantum theory of the electron. Proceedings of The Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences 117 (1928): 610-624.
7. James Mott,The Muon g – 2 experiment at Fermilab,(2017).
8. Bennett GW, et al. (The g – 2 Collab.) Phys. Rev. Lett. 92:161802 (2004).



感谢陈向军教授提出的建议

感谢张平欣师姐、张阳帆师兄、汪涛师兄提供的帮助