Assignment 2

TA-胡珈豪 smart_hu@mail.ustc.edu.cn

CHAPTER 2

Question 2.1

如题 2.1 图所示的装置可用来测物体 A 与桌面间的摩擦系数 μ. 设已知 A, B 的质量分别是 m_A 和 m_B, 它们的加速度是 a, 试导出摩擦系数的表达式.

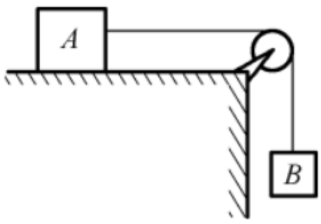


图 1: 2.1

设绳中的张力为 T, 对质点 A、B 使用牛顿第二定律得

$$\begin{cases} m_B g - T = m_B a \\ T - \mu m_A g = m_A a \end{cases}$$

解得

$$\mu = \frac{m_B(g-a) - m_A a}{m_A g}$$

Question 2.7

两个质量分别为 m_1 和 m_2 的小环，用细线连着套在一个竖直固定着的大圆环上，如果连线对圆心的张角为 α, 如图所示，当小圆环与大圆环之间的摩擦力和线的质量都略去不计时，求证：连线与竖直方向的夹角 θ 满足

$$\tan\theta = \frac{m_1+m_2}{m_2-m_1}\cot\frac{\alpha}{2}$$

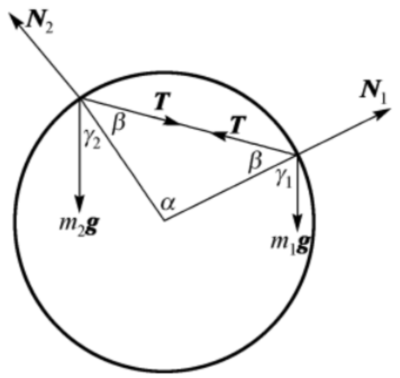


图 2: 2.7

证明 如图 2.7 所示，设圆环的支持力分别为 N_1、N_2, 绳中张力为 T, 由几何知识可得

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = \pi \\ \gamma_2 + \beta = \theta \\ \gamma_1 + \gamma_2 = \alpha \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} \beta = (\pi - \alpha)/2 \\ \gamma_1 = (\pi + \alpha)/2 - \theta \\ \gamma_2 = \theta - (\pi - \alpha)/2 \end{cases} \tag{1}$$

又

$$\begin{cases} m_2 g \sin\gamma_2 = T\sin\beta \\ m_1 g \sin\gamma_1 = T\sin\beta \end{cases}$$

于是 $m_1 \sin\gamma_1 = m_2 \sin\gamma_2$, 由式 1 得

$$m_1 \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \theta\right) + m_2 \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \theta\right) = 0$$

化简后可得

$$\tan\theta = \frac{m_1 + m_2}{m_2 - m_1} \cot\frac{\alpha}{2}$$

Question 2.9

质量分别为 m_A 和 m_B 的两物体 A、B, 固定在倔强系数为 k 的弹簧两端，竖直地放在水平桌面上. 如图所示. 用一力 F 垂直地压在 A 上，并使其静止不动. 然后突然撤去 F, 问欲使 B 离开桌面，F 至少应多大？

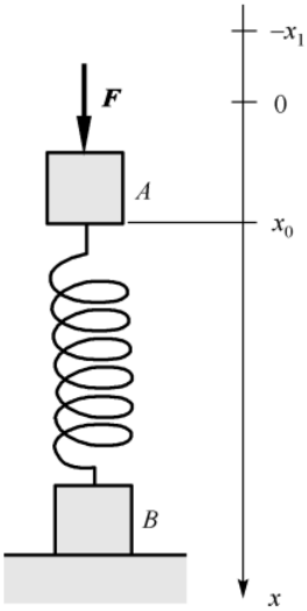


图 3: 2.9

欲使 B 恰好弹起，则 A 到达最高点时弹簧的伸长量至少应为 $x_1 = \frac{m_B g}{k}$. 假设力 F 作用下弹簧的压缩量为 x_0, 则设弹簧无形变时 A 的坐标为 0, 取竖直向下的方向为 x 轴正向 (图 2.9). 在撤去 F 后且 B 离开桌面前 A 的运动方程为

$$m_A g - kx = m_A \ddot{x} \tag{2}$$

解为

$$x = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m_A}}t + \varphi\right) + \frac{m_A g}{k}$$

代入初始条件 $t = 0$ 时，$\dot{x} = 0$, $x = x_0 = \frac{1}{k}(F + m_A g)$, 得

$$\varphi = 0, \quad A = F \,/\, k$$

则方程 2 有解

$$x = \frac{F}{k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{m_A g}{k}$$

从而最高点有

$$x = -\frac{F}{k} + \frac{m_A g}{k} = -x_1 = -\frac{m_B g}{k}$$

解得

$$F = (m_A + m_B)g$$

Question 2.11

收尾速度问题. 空气对物体的阻力由许多因素决定. 然而，一个有用的近似公式是，阻力 $f = -\beta v$，其中 v 是物体的速度，β 是一个与速度无关的常数. 现在考虑空气中的一个自由下落物体，将 z 轴的正方向取为竖直向下.

(a) 给出落体的牛顿方程

$$mg - \beta\dot{z} = m\ddot{z} \tag{3}$$

(b) 当物体的速度 $v(t_0)$ 等于多少时, 物体不再加速 (这个速度叫做收尾速度)?

由于 $v = \dot{z}$ 从而方程 3 化为

$$mg - \beta v = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{4}$$

当物体不再加速时，应有 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$, 从而方程化为

$$mg - \beta v(t_0) = 0$$

解得

$$v(t_0) = mg/\beta$$

即收尾速度为 mg/β.

(c) 试证, 速度随时间变化的关系为 $v(t) = v(t_0)(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{m}t})$, 并作出 v-t 曲线.

为解方程 4, 将其改写成

$$\frac{\mathrm{d}v}{g - \frac{\beta v}{m}} = \mathrm{d}t$$

积分一次得

$$\ln\left(\frac{\beta}{m}v - g\right) = -\frac{\beta}{m}(t + c) \quad (c\text{为常数})$$

解得

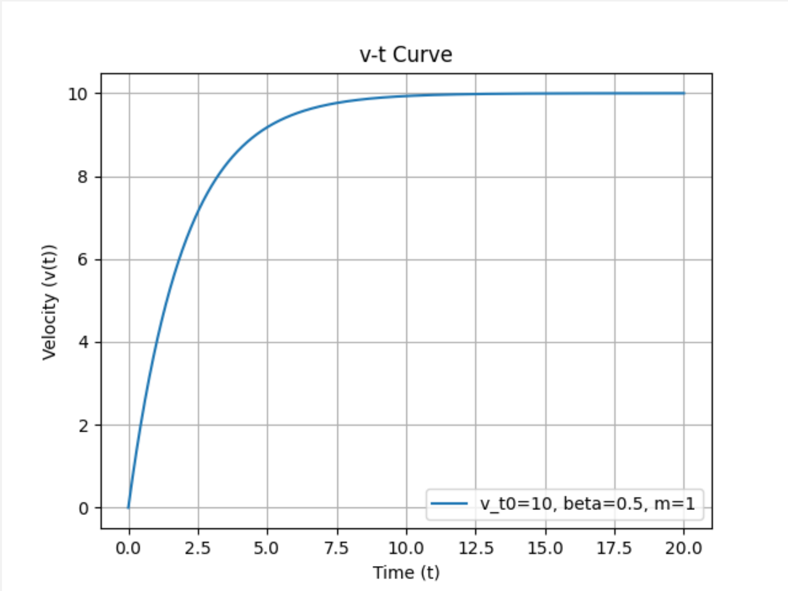
$$v(t) = \frac{m}{\beta}\left[g - \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{m}(t+c)}\right]$$

考虑到 $t = 0$ 时 $v = 0$, 有

$$g - \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{m}c} = 0 \Rightarrow \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{m}c} = g$$

从而

$$v(t) = \frac{m}{\beta}\left(g - g\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{m}t}\right), \quad v(t) = \frac{mg}{\beta}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{m}t}\right) = v(t_0)\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{m}t}\right)$$



Question 2.17

一质量为 M 的光滑斜面放在光滑的水平面上，斜面的顶端装一滑轮，一条细绳跨过滑轮拴着两个质量分别为 m_1 和 m_2 的物体 A 和 B, 如图所示. 设绳子和滑轮的质量以及滑轮轴承处的摩擦力均可略去不计，绳子长度不变，问在 A 下滑过程中欲使 M 不动时作用在 M 上的水平方向的力 F 需要多大？

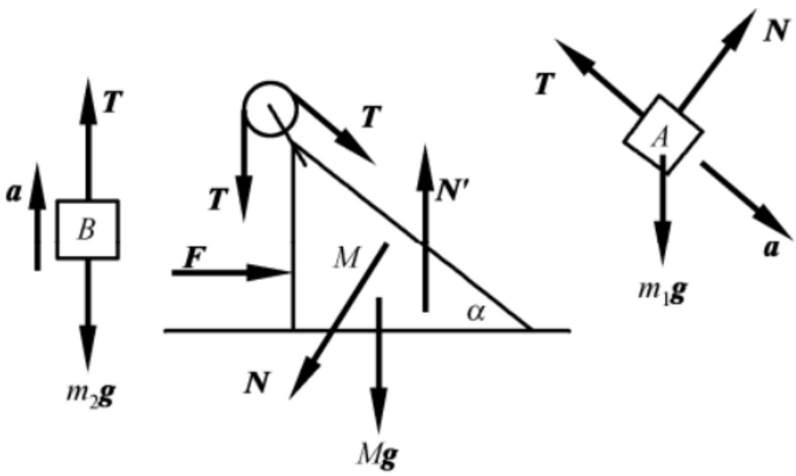


图 4: 2.17

如图 2.17 所示隔离物体，设 A 的加速度为 a, 与斜面之间的作用力为 T, 地面对斜面的作用力为 N', 则对 B：

$$T - m_2 g = m_2 a \tag{5}$$

对 A：

$$m_1 g \sin\alpha - T = m_1 a \quad m_1 g \cos\alpha - N = 0 \tag{6}$$

对 M：

$$F + T\cos\alpha - N\sin\alpha = 0 \tag{7}$$

联立 5 6 7, 解得

$$a = \frac{m_1 g \sin\alpha - m_2 g}{m_1 + m_2}, \quad T = \frac{m_1 m_2 g(1+\sin\alpha)}{m_1 + m_2}, \quad F = \frac{m_1 g\cos\alpha(m_1\sin\alpha - m_2)}{m_1 + m_2}$$

即作用在 M 上的水平方向的力为

$$F = \frac{m_1 g\cos\alpha(m_1\sin\alpha - m_2)}{m_1 + m_2}$$

Question 2.22

一长为 l、质量为 M 的均匀链条套在一表面光滑、顶角为 α 的圆锥上，当链条在圆锥面上静止时，求链中的张力.

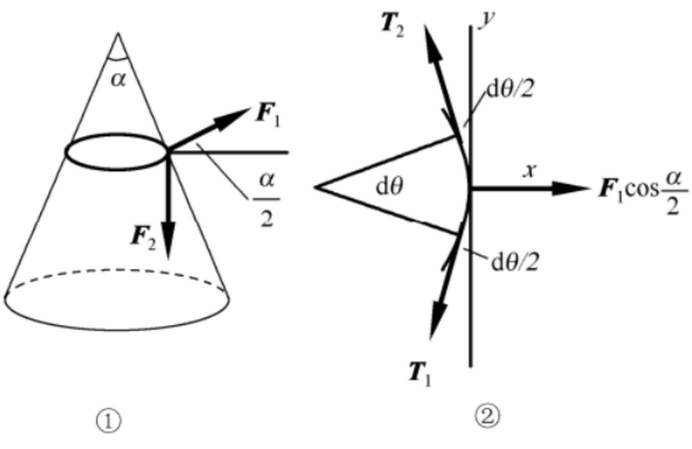


图 5: 2.22

由图 2.22 ① 取一段圆心角为 $d\theta$ 的小微元，如图 2.22 ② 所示，将该小微元隔离出来. 设该小微元所受重力为 F_2, 受圆锥表面的正压力为 F_1, 该小微元两端链条的张力分别为 T_1、

T_2. 有

$$F_2 = Mg\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}$$

因为链条静止，所以

$$F_2 = F_1 \sin\frac{\alpha}{2}$$

为使链条保持静止，图 2.22a② 中的三力平衡，考虑这三力沿图中 x, y 方向的分量和，有

$$T_1 \sin\frac{\mathrm{d}\theta}{2} + T_2 \sin\frac{\mathrm{d}\theta}{2} = F_1 \cos\frac{\alpha}{2}$$

$$T_1 \cos\frac{\mathrm{d}\theta}{2} = T_2 \cos\frac{\mathrm{d}\theta}{2}$$

利用 $\sin\frac{\mathrm{d}\theta}{2} = \frac{1}{2}\mathrm{d}\theta$, 可得

$$T_1 = T_2 = \frac{F_1\cos(\alpha/2)}{\mathrm{d}\theta} = \frac{F_2\cot(\alpha/2)}{\mathrm{d}\theta} = \frac{Mg}{2\pi}\cot\frac{\alpha}{2}$$

也即

$$T = \frac{1}{2\pi}Mg\cot\frac{\alpha}{2}$$

CHAPTER 3

Question 3.6

一个圆盘直径为 d, 绕通过圆心的垂直轴以角速度 ω 匀速旋转，今有一人站在圆盘上的点 A 射出一颗子弹，已知子弹出膛速度为 $v, v \gg \omega d$. 现在希望子弹击中点 A 的对径点 B (AB 是圆盘直径), 则应瞄准点 C, 问 BC 的弧长是多少？又问这颗子弹在圆盘上的轨迹是什么？求出相应的曲率半径.

该题较为阴险，最好使用旋转参考系求解。

换入与转盘保持静止的旋转参考系 S' 中, 子弹受到两类虚拟力: 科里奥利力 $f_{cor} = 2m\omega v$, 离心力 $f_c < m\omega^2 R$。两者做量级比较可知

$$f_c/f_{cor} < \frac{\omega R}{2v} << 1$$

表明在接下来的运算中可以忽略离心力的影响。

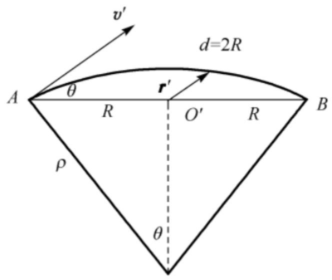


图 6: 3.6

子弹在 S' 系中受到 $f_{cor} = 2mv \times \omega$ 作用，将其与磁场力 (Lorentz 力)$f_L = qv \times B$ 类比。由于带电粒子在磁场中做圆周运动，故子弹在 S' 系中也做圆周运动，曲率半径为

$$\rho = \frac{mv^2}{f_{cor}} = \frac{mv^2}{2mv\omega} = \frac{v}{2\omega}$$

接下来的问题就简单了，根据图 3.6 的几何关系，考虑到 $\rho >> R$，故发射角 θ 应有

$$\theta = R/\rho = \frac{2\omega R}{v^2}$$

对应 BC 弧长故为

$$\overset{\frown}{BC} = \theta \cdot d = \frac{4\omega R^2}{v^2} = \frac{\omega d^2}{v}$$

Question 3.10

一根光滑的钢丝弯成如图所示的形状，其上套有一小环. 当钢丝以恒定角速度 ω 绕其竖直对称轴旋转时，小环在其上任何位置都能相对静止. 求钢丝的形状 (即写出 y 与 x 的关系).

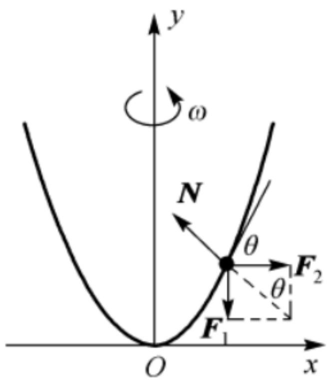


图 7: 3.10

小球受力分析如图 3.10a 所示，小球受力为：重力 F_1、惯性离心力 F_2、钢丝的正压力 N. $F_1 = mg$, $F_2 = m\omega^2 x$. 因为任一时刻，小球都是静止的，这三个力平衡, 即

$$F_1 + F_2 + N = \mathbf{0}$$

于是 $\frac{F_2}{F_1} = \tan\theta$, 且 $\tan\theta = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, 得

$$\frac{\omega^2 x}{g} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

且 $x = 0$,$y = 0$, 故有

$$y = \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{g}x^2$$

Question 3.11

一圆盘绕其竖直的对称轴以恒定的角速度 ω 旋转. 在圆盘上沿径向开有一光滑小槽，槽内一质量为 m 的质点以 v_0 的初速从圆心开始沿半径向外运动. 试求

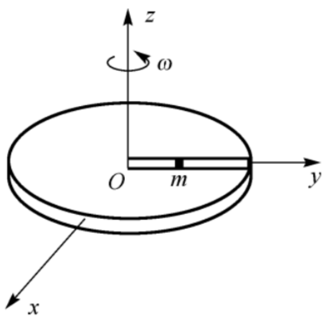


图 8: 3.11

(d) 质点到达图示位置 (即 $y = y_0$) 时的速度 v;

在随转动的参考系中，小球所受惯性力 $F = m\omega^2 y$, 方向 $+y$, 所以在 y 方向上

$$\ddot{y} = \omega^2 y$$

上式可化为

$$\frac{\mathrm{d}\dot{y}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\dot{y}}{\mathrm{d}y}\cdot\dot{y} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\dot{y}^2}{\mathrm{d}y} = \omega^2 y$$

积分得

$$\int_{v_0}^{v_1}\frac{1}{2}\mathrm{d}\dot{y}^2 = \int_0^{y_0}\omega^2 y\mathrm{d}y\,, \quad v_1^2 - v_0^2 = \omega^2 y_0^2 \tag{8}$$

所以 y 方向上

$$v_1^2 = v_0^2 + \omega^2 y_0^2$$

在惯性参考系中，该质点还有垂直于 y 方向上的速度 $v_2 = \omega y_0$，所以速率为

$$v = \sqrt{v^2 + v_2^2} = \sqrt{v_0^2 + 2\omega^2 y_0^2}$$

(e) 质点到达该处所需的时间 t;

由式 8 可知

$$v_1^2 = \omega^2 y^2 + v_0^2$$

即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\omega^2 y^2 + v_0^2} \quad (y\mid_{t=0} = 0)$$

解得

$$t = \int_0^{y_0} \frac{1}{\sqrt{\omega^2 y^2 + v_0^2}} \mathrm{d}y = \frac{1}{\omega} \ln\left(\frac{\omega y_0}{v_0} + \sqrt{\frac{1 + \omega^2 y_0^2}{v_0^2}}\right)$$

(f) 质点在该处所受到的槽壁对它的侧向作用力 F.

这时所受切向作用力为

$$F = 2m\omega v_1 = 2m\omega\sqrt{v_0^2 + \omega^2 y_0^2}$$

Question 3.12

一圆柱形刚性杆 Ox 上套有一质量为 m 的小环，杆的一端固定，整个杆绕着通过固定端 o 的竖直轴 Oz 以恒定的角速度旋转，旋转时杆与竖直轴的夹角 α 保持不变. 设小环与杆之间的摩擦系数为 μ, 已知当小环相对杆运动到图示位置 x 时其相对于杆的速度为 $\dot{x}$, 试列出此时小环沿杆的运动方程 (不要求解出此方程).

取相对于杆静止的转动参考系，受力如图 3.12 所示.
所受科里奥利力

$$F_{\text{cor}} = 2m\left|\boldsymbol{\omega} \times v\right| = 2m\omega\dot{x}\sin\alpha$$

科里奥利力的方向垂直于 Oz 和 Ox 所确定的平面.
惯性离心力

$$F = m\omega^2 x \sin\alpha$$

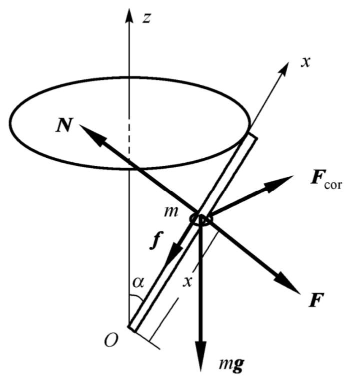


图 9: 3.12

惯性离心力和重力的方向在 Oz 和 Ox 所确定的平面上. 在垂直于杆 ox 的平面上，正压力 N 、科里奥利力 F_{cor} 、惯性离心力 F 和重力 mg 在该平面的分量四个力平衡，于是正压力的绝对值为

$$N=\sqrt{(F\cos\alpha+mg\sin\alpha)^2+F_{\text{cor}}^2}$$

摩擦力

$$f=\mu N=\mu\sqrt{(F\cos\alpha+mg\sin\alpha)^2+F_{\text{cor}}^2}$$

于是沿 Ox 方向的运动方程 (小环沿杆向上运动) 为

$$m\ddot{x}=F\sin\alpha-mg\cos\alpha-f \tag{9}$$

代入化简，有

$$\begin{aligned}m\ddot{x}&=m\omega^2x\sin^2\alpha-mg\cos\alpha-\mu\sqrt{(F\cos\alpha+mg\sin\alpha)^2+(2m\omega\dot{x}\sin\alpha)^2}\\&=m\omega^2x\sin^2\alpha-mg\cos\alpha-\mu\sqrt{(m\omega^2x\sin\alpha\cos\alpha+mg\sin\alpha)^2+(2m\omega x\sin\alpha)^2}\\&=m\omega^2x\sin^2\alpha-mg\cos\alpha-\mu m\sin\alpha\sqrt{(\omega^2x\cos\alpha+g)^2+4\omega^2\dot{x}^2}\end{aligned}$$

即小环沿杆 Ox 向上运动时

$$m\ddot{x}=m\omega^2x\sin^2\alpha-mg\cos\alpha-\mu m\sin\alpha\sqrt{(\omega^2x\cos\alpha+g)^2+4\omega^2\dot{x}^2}$$

同理可得小环沿杆 Ox 向下运动时

$$m\ddot{x}=m\omega^2x\sin^2\alpha-mg\cos\alpha+\mu m\sin\alpha\sqrt{(\omega^2x\cos\alpha+g)^2+4\omega^2\dot{x}^2}$$

小环沿杆 Ox 上静止时，在方程 9 中，$\ddot{x}=\dot{x}=0$,$-\mu N<f<\mu N$, 方程 9 变成

$$-\mu m\sin\alpha(\omega^2x\cos\alpha+g)<m\omega^2x\sin^2\alpha-mg\cos\alpha<\mu m\sin\alpha(\omega^2x\cos\alpha+g)$$

化简得

$$\frac{g(\cos\alpha-\mu\sin\alpha)}{\omega^2\sin\alpha(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)}<x<\frac{g(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)}{\omega^2\sin\alpha(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)}$$

Question 3.13

质量为 m 的小球置于光滑水平台面，用长为 l 的细线系于台面上的 P 点水平台面绕着过 O 点的铅垂轴以恒定角速度 ω 旋转，P 点与 O 点的距离为 b, 试列出小球的运动方程，设在小球运动过程中，线始终保持拉直状态.

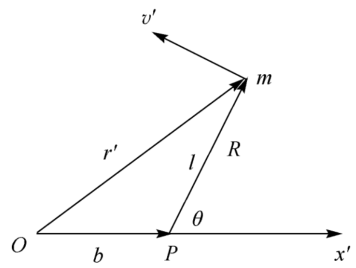


图 10: 3.13

由于水平面光滑，小球仅受绳子拉力 (真实力).
取 O 点为原点，相对于 OP 静止的参考系为 K' 系，如图 3.13 所示. 在 K' 系中设 OP 为 x' 轴, Pm 与 OP 的夹角为 $\theta(t)$,m 点的坐标、速度和加速度分别为 $r'(t)$ 、$v'(t)$, $a'(t)$, 且设 $\overrightarrow{Pm} = \boldsymbol{R}(t)$, 题设 $|\boldsymbol{R}(t)| = l$.
由于 K' 系为非惯性系，作用于 m 点的力除了真实力 $T = -T\hat{\boldsymbol{R}}$ ($\hat{\boldsymbol{R}} = \frac{\boldsymbol{R}}{R}$ 为单位向量) 外，还有两个虚拟力:
惯性离心力

$$F = m\omega^2 r'$$

科里奥利力

$$F_{\text{cor}} = -2m\omega \times v' = 2m\omega v'\hat{R}$$

其中 $v' = l\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ (v' 可正可负，v' 为负值时矢量 v' 的方向与图 3.13a 所示方向相反). 于是有

$$ma' = -T\hat{\boldsymbol{R}} + \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_{\text{cor}} = -T\hat{\boldsymbol{R}} + m\omega^2\boldsymbol{r}' + 2m\omega v'\hat{\boldsymbol{R}} \tag{10}$$

设 x' 轴的单位向量为 $\hat{i}'$, 由图可知

$$r' = b\hat{\boldsymbol{i}}' + \boldsymbol{R} = b\hat{\boldsymbol{i}}' + R\hat{\boldsymbol{R}}$$

代入式 10 得

$$m\boldsymbol{a}' = -T\hat{\boldsymbol{R}} + m\omega^2(b\hat{\boldsymbol{i}}' + R\hat{\boldsymbol{R}}) + 2m\omega v'\hat{\boldsymbol{R}} \tag{11}$$

在 K' 系中，将原点换为 P, 建立极坐标 $(R(t), \theta(t))$, 坐标单位向量为 $\hat{\boldsymbol{R}}$、$\hat{\boldsymbol{\theta}}$, 有

$$\hat{\boldsymbol{i}}' = \hat{\boldsymbol{R}}\cos\theta - \hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\theta \tag{12}$$

代入式 11 得

$$m\boldsymbol{a}' = (-T + m\omega^2 b\cos\theta + m\omega^2 R + 2m\omega v')\hat{\boldsymbol{R}} - \hat{\boldsymbol{\theta}} m\omega^2 b\sin\theta$$

由于题设在小球运动过程中，线不可伸长并始终保持拉直状态，故小球沿绳方向的加速度 $a'_R(t) = 0$, 垂直于绳方向的加速度

$$a'_\theta = -\omega^2 b\sin\theta$$

而 $|a'_\theta| = 2\dot{R}\dot{\theta} + R\ddot{\theta} = l\ddot{\theta}$, 代入得

$$l\ddot{\theta} \pm \omega^2 b\sin\theta = 0$$

引入 $\pm$ 是为了考虑不同角度的正方向. 这是一个振动方程.

BONUS QUESTIONS

Question

分析南半球自西向东和自南向北河流水面的形状

对于南半球而言，地球自转角速度 $\vec{\omega}$ 有垂直指向地里的分量，接着考虑 $\vec{f_{cor}} = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}\sin\alpha$ 的方向 (此处 α 为该地的纬度)：

- 水流自南向北，$\vec{f_{cor}}$ 指向西，故河流西侧水面更高，东侧更低.
- 水流自西向东，$\vec{f_{cor}}$ 指向北，故河流北侧水面更高，南侧更低.

也即，水流同时受到垂直向下的重力加速度 g，以及横向的地转偏向“加速度” $2\omega v\sin\alpha$ 的作用，水流面将会是一个梯形，水面与地平线夹角为

$$\theta = \tan^{-1}(2\omega v\sin\alpha/g) \simeq \frac{2\omega v\sin\alpha}{g}$$