第五次习题课 相对论

TA-胡珈豪 smart_hu@mail.ustc.edu.cn

知识梳理

Part 1 狭义相对论的基本假设

狭义相对论的核心假设包括：

- **相对性原理**：物理定律在所有惯性参考系中具有相同形式。
- **光速不变原理**：在真空中，光速对所有观察者都是常数，约为 $c = 3 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$。

Part 2 本征长度与本征时

在静止系下测量到的长度 l_0、时间间隔 τ_0 分别为本征长度、本征时，若把其 Boost 至运动系，则有经典的尺缩、时胀效应：

$$l = l_0/\gamma, \quad t = \gamma\tau_0$$

这里的相对论因子有

$$\beta = \frac{v}{c} < 1, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} > 1$$

Part 3 四维矢量与 *Lorentz* 变换

常用的四维矢量有

$$\text{四维坐标} \quad x^\mu = (ct, x, y, z) = (ct, \mathbf{x})$$

$$\text{四维动量} \quad p^\mu = (\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z) = (\frac{E}{c}, \mathbf{p})$$

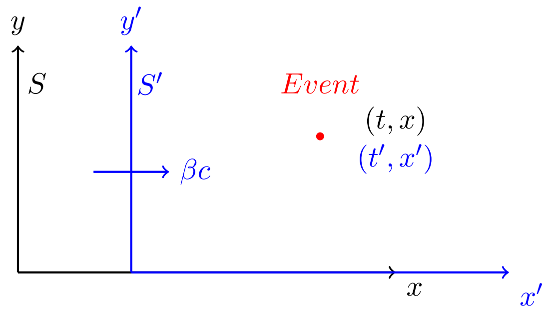
它们各自的模平方定义为

$$\text{四维坐标模平方} \quad |x^\mu|^2 = x^\mu x_\mu = (ct, \mathbf{x}) \cdot (ct, -\mathbf{x}) = (ct)^2 - \mathbf{x}^2$$

$$\text{四维动量模平方} \quad |p^\mu|^2 = p^\mu p_\mu = (\frac{E}{c}, \mathbf{p}) \cdot (\frac{E}{c}, -\mathbf{p}) = (\frac{E}{c})^2 - \mathbf{p}^2$$

四维矢量有一个很好的性质，那便是其模长平方在任意参考系中都是一致的，称为洛伦兹不变量 (Lorentz invarient). 所以一个很好的操作便是将动量模方放到质心系中来看，由于质心系中 $\mathbf{p} = 0$, $E = m_{\text{静}} c^2$, 故

$$\begin{aligned}(p^\mu p_\mu)_{\text{实验室系}} = (p^\mu p_\mu)_{\text{质心系}} &= m_{\text{静}}^2 c^2 \qquad && \text{for single particle} \\ &= \left(\frac{\sum_i E_{\text{i 质心系}}}{c}\right)^2 && \text{for mulit-particles}\end{aligned}$$



将不同惯性参考系之间的坐标和时间转换关系称为洛伦兹变换。设参考系 S' 相对于参考系 S 以速度 v 运动，则洛伦兹变换公式为：

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - \beta ct), \\ y' = y, \\ z' = z, \\ ct' = \gamma\left(ct - \beta x\right). \end{cases}$$

事实上，只要是四维矢量都服从洛伦兹变换，因此能动量的变换与时空坐标的变换形式一致，可以一并记忆

$$\begin{cases} p_x' = \gamma(p_x - \beta \frac{E}{c}), \\ p_y' = p_y, \\ p_z' = p_z, \\ \frac{E'}{c} = \gamma\left(\frac{E}{c} - \beta p_x\right). \end{cases}$$

Part 4 相对论速度变换

推导很简洁也很重要。

首先，对 Lorentz 变换两边取微分 d 有

$$\begin{cases} \mathrm{d}x' = \gamma(\mathrm{d}x - \beta c\mathrm{d}t), \\ \mathrm{d}y' = \mathrm{d}y, \\ \mathrm{d}z' = \mathrm{d}z, \\ c\mathrm{d}t' = \gamma\left(c\mathrm{d}t - \beta\mathrm{d}x\right). \end{cases}$$

进而 x 方向的变换为

$$v_x' = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\gamma(\mathrm{d}x - \beta c\mathrm{d}t)}{\gamma(\mathrm{d}t - \beta\mathrm{d}x/c)} = \frac{v_x - \beta c}{1 - v_x\beta/c}.$$

yz（横向）的变换为

$$v_y' = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}y}{\gamma(\mathrm{d}t - \beta\mathrm{d}x/c} = \frac{1}{\gamma}\frac{v_y}{1 - v_x\beta/c}$$

上述两公式可以一并记忆，可以发现它们的分母因子都是一样的。

另外，本讲义上写的全部相对论公式都是最基本的，强烈建议记住的同时会自己推导。对于检验自己的相对论变换公式是否有误，我常用的方法是取

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \to 1$$

的极限，回到经典的情况，与自己熟悉的经典公式对照是否有误。

作业习题选讲

Question 11.6

两根静长均为 l_0 的棒 A、B, 相向沿棒做匀速运动. A 棒上的观测者发现两棒的左端先重合, 相隔时间 Δt 后, 两棒的右端再重合. 试问:

(1) **B 棒上的观测者看到两棒的端点以怎样的次序重合?**

(2) **两棒的相对速度是多大?**

(3) **对于看到两棒以大小相等、而方向相反的速度运动的观测者来说，两棒端点以怎样的次序重合?**

(1) 题干中 A 棒上观测到的 B 棒长度收缩，为 $l = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$，$v$ 为相对速度。同时有左端先重合，故表明 B 棒相对于 A 棒向右移动。

故在 B 棒上观测，A 棒长度收缩为 $l = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$，并且向左移动，故右端先重合。

(2)

$$\Delta t = \frac{l_0 - l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{v} \Rightarrow v = \frac{2l_0\Delta t}{(\Delta t)^2 + \frac{l_0^2}{c^2}}.$$

(3) 对于看到两棒以大小相等、方向相反的速度运动的观测者 S 来说，两棒长均为 $l_0\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$，$u$ 为 S 眼中两棒的速度。

Question 11.27 **光子引擎飞船**

设有一宇宙飞船完全通过发射光子而获得加速. 当该宇宙飞船从静止开始加速至 $v = 0.6c$ 时，其静质量为初始值的几分之几?

设宇宙飞船原静质量为 m_0, 发射的光子的**总动量**为 p, 末态飞船的静质量为 m_0'. 在最初的参考系中，列出能量守恒和动量守恒方程：

$$\begin{cases} m_0c^2 = \dfrac{m_0'}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}c^2 + pc \\ \dfrac{m_0'}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}v = p \end{cases}$$

解得

$$\frac{m_0'}{m_0} = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} = 0.5$$

Question 11.28 双生子问题

半人马座 α **星与地球相距** 4.3 l.y.. **两个孪生兄弟中的一个** A **乘坐速度为** $0.8c$ **的宇宙飞船去该星旅行，他在往程和返程途中每隔** 0.01a **的时间** (**飞船静止参考系的时间**) **发出一个无线电信号，另一个留在地球上的孪生兄弟** B**，也在相应过程中每隔** 0.01a **的时间** (**地球静止参考系的时间**) **发出一个无线电信号**.

(1) **在** A **到达该星以前，**B **收到多少个** A **发出的信号？**

(2) **在** A **到达该星以前，**A **收到多少个** B **发出的信号？**

(3) A **和** B **各自共收到多少个从对方发出的信号？**

(4) **当** A **返回地球时，**A **比** B **年轻了几岁？试证明两孪生兄弟都同意此观点**.

设地面系为 K，去程时飞船参考系为 K'，反程时飞船参考系为 K''。

K 与 K' 系的原点 O 对齐，即 $t=t'=0$ 时，$x=x'=0$ 飞船在地球处。

(1) 应在 K 系中观察。

设 A 到达该星时，B 在地球参考系看来，恰好收到 A 在 M 点发出的信号，有

$$\frac{\overline{OM}}{c} = \frac{x-\overline{OM}}{v}$$

$$\Rightarrow \overline{OM} = \frac{cx}{c+v} = 2.389\text{ly}$$

即在地球参考系看，飞船到达 M 点的时刻为

$$t = \frac{\overline{OM}}{0.8c} = \frac{2.389c}{0.8c} = 2.986$$

Lorentz 变换至 K' 系，对应时刻为

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} \cdot \overline{OM}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2.989 - 0.8 \times 2.389}{\sqrt{1 - 0.8^2}} = 1.796\text{a}$$

故 B 收到 A 发出的信号 179 个。

(2) 应在 K' 系中观察。

设 α 星到达 A 时，A 在飞船参考系看来，恰好收到 B 在到达 N' 点发出的信号，有

$$\frac{\overline{O'N'}}{c} = \frac{x' - \overline{O'N'}}{v}$$

$$\Rightarrow \overline{O'N'} = \frac{cx'}{c+v} = \frac{cx\sqrt{1 - v^2/c^2}}{c+v} = 1.4334\text{ly}$$

即 N' 点在飞船参考系的坐标为 $N' = -1.4334\text{ly}$. 在飞船参考系看，B 在到达 N' 点的时刻为

$$t' = \frac{\overline{O'N'}}{0.8c} = \frac{1.4334c}{0.8c} = 1.7918$$

该事件 (B 在到达 N' 点) 为：K' 系 (t', N')、K 系 $(t, 0)$, 由洛伦兹变换得

$$t = \frac{t' + \frac{N'v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1.7918 - 1.4334 \times 0.8}{\sqrt{1 - 0.8^2}} = 1.0751\text{a}$$

(3) 在 K 系中观察。飞船往返共耗时 $t = \frac{4.3 \times 2}{0.8} = 10.75\text{a}$, 所以地球上的钟走了 10.75a, 地球上的 B 共发出信号 1075 个, 这些信号能全部被收到，故飞船返回地球时飞船上的 A 共收到信号 1075 个.

而飞船上的时钟由于相对论延缓，耗时

$$t' = t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 10.75\sqrt{1 - 0.8^2} = 6.45\text{a}$$

飞船上的 A 共发出信号 645 个. 这些信号能全部被收到，故当飞船返回地球时，地球上的 B 共收到信号 645 个。

(4) 结合 (3) 的内容，可知**在** B **看来**，飞船上的 A 比地球上的 B 年轻 $10.75 - 6.45 = 4.3$ 岁。

在 A **看来**就略显麻烦，因为涉及 K' 和 K'' 系的转换。

首先，在飞船系看，一开始时地球和飞船的时钟校准均为零 $t = t' = 0$，但是 α 星的时间不为零：

$$t = \frac{t' + \frac{x'v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{0 + 2.58 \times 0.8}{\sqrt{1 - 0.8^2}} = 3.44\text{a}$$

飞船在前往 α 星的过程中，飞船到达 α 星需时间

$$\Delta t' = x'/v = 2.58c/0.8c = 3.225\text{a}$$

故飞船到达 α 星时，K' 系时间为 $t' = 3.225\text{a}$,K 系相对于 K' 系运动，因而 K 系中发展的时间为

$$\Delta t = \Delta t' \sqrt{1 - v^2 \,/\, c^2} = 3.225 \times 0.6 = 1.935\text{a}$$

故地球上的时间是 1.935a，α 星的时间是 $3.44 + 1.935 = 5.375$a.

飞船在 α 星减速、停止、调头加速至 $v = 0.8c$ 的过程所需时间假设可以忽略，相当于飞船驾驶员瞬时从 K' **系跳到** K'' **系**，此时 K'' 系中 A 时间继承了之前 K' 系的时间，为 $t'' = t' = 3.225$a，但是 K'' 系与 K 系之间的时钟需要在原点处（即 α 星）重新校准。K'' 系中的地球向右移动，由于 α 星的时间为 $t = 5.375$a，地球上的时间是 $3.44 + 5.375 = 8.815$a.

飞船回到地球，K'' 系中的 A 的时间为 $t'' = 2 \times 3.225 = 6.45$a，地球（也即 B）的时间为 $8.815 + 1.935 = 10.75$a，照样有飞船上的 A 比地球上的 B 年轻 4.3 岁的物理现象。

补充习题

Question **相对论粒子碰撞**

已知 ρ **介子是质量** 769MeV **的介子共振态。实验用** π^- **打氢靶，观测到如下反应：**

$$\pi^- + p \to \rho^0 + n$$

计算：

(1) **为产生** ρ^0**，**π^- **的阈能 是多少**?

(2) **考虑一个在实验室系** 5GeV **的** ρ^0 **介子，若发生反应** $\rho^0 \to \pi^+ + \pi^-$**，求实验室系中** π^+ **和** π^- **之间的最小夹角**?

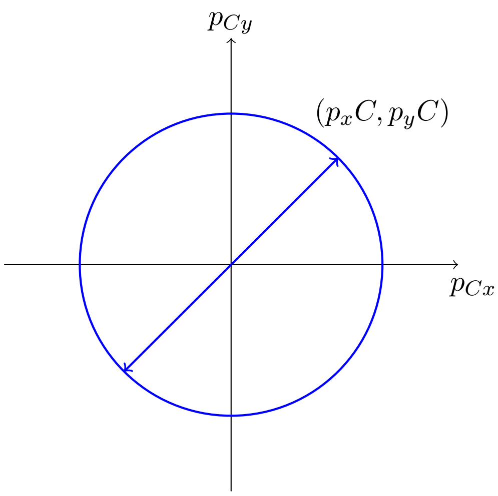


Figure 1: 质心系中的动量圆

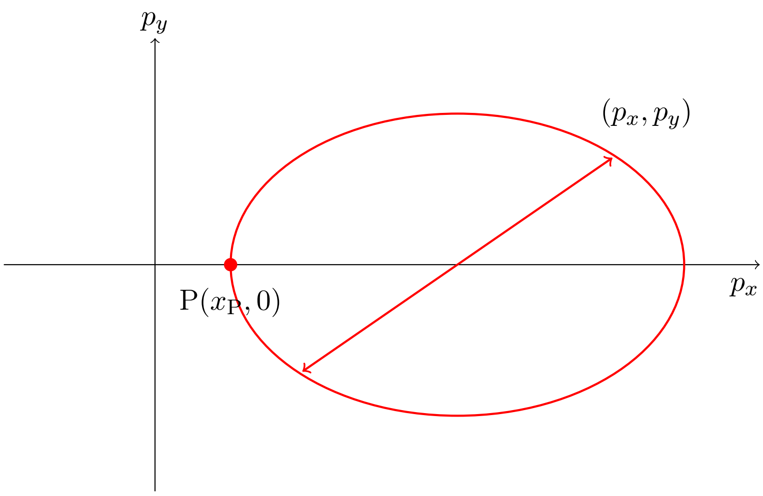


Figure 2: Boost 至地面系的动量椭圆

(1) 当 π^- 以阈能 $E_{\pi th}$ 入射时，全部能量都用于生成 ρ^0. 在质心系看的话，产物的两粒子相对静止 (回忆守恒率中的资用能). 利用该反应初末态的四维动量守恒

$$(p_{\pi^-} + p_p)^\mu = (p_{\rho^0} + p_n)^\mu$$

四矢量取模平方可得

$$|(p_{\pi^-}+p_p)^\mu|^2=|(p_{\rho^0}+p_n)^\mu|^2$$

$$\Longrightarrow (E_{\pi th}+m_p)^2-p_\pi^2=(m_{\rho^0}+m_n)^2$$

解得

$$E_{\pi th}=\frac{(m_{\rho^0}+m_n)^2-(m_\pi^2+m_p^2)}{2m_p}=1073.8\text{MeV}$$

(2) 首先可以计算质心系的相对论因子数值

$$\gamma=\frac{E_\rho}{m_\rho}=\frac{5\text{GeV}}{769\text{MeV}}=6.502$$

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\Rightarrow\beta=0.988$$

质心系中，ρ^0 衰变成的 π^+，π^- 动量均为 p_C

$$\sqrt{p_C^2+m_\pi^2}+\sqrt{p_C^2+m_\pi^2}=m_\rho$$

$$\Rightarrow p_C=362\text{MeV},\quad E_C=\sqrt{p_C^2+m_\pi^2}=384.5\text{MeV}.$$

其在质心系中可以画成一个动量圆，如 Figure1 所示

$$\frac{p_{xC}^2}{p_C^2}+\frac{p_{yC}^2}{p_C^2}=1$$

利用相对论能动量变换将其 Boost 至地面系后，可以画成一个动量椭圆，如 Figure2 所示

$$\begin{cases}p_x=\gamma(p_{xC}+\beta E_C)\\ p_y=p_{yC}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{(p_x-\gamma\beta E_C)^2}{\gamma^2p_C^2}+\frac{p_y^2}{p_C^2}=1$$

考虑椭圆的左端点 P：

$$x_\text{P}=\gamma\beta E_C-\gamma p_C=2500\text{MeV}-2353\text{MeV}=146\text{MeV}>0$$

也即椭圆的左端不会与 y 轴交汇，由几何关系可知最小夹角 $\theta_{\min}=0$。

（1）值得注意：动能 等于能量 减去静质量, 即 $T = E - m_0c^2$。

（2）思考若 1GeV 的 ρ^0 介子，其实验室系的动量椭圆与 y 轴交汇后，最小夹角 $\theta_{\min}$ 该如何求。

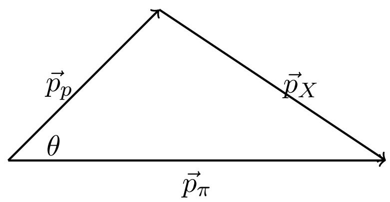
Question **相对论粒子碰撞——最大散射角问题**

高能宇宙线簇射产生的 π 粒子穿过水切连科夫探测装置时，与质子相互作用反应如下

$$\pi + p \to p + X$$

已探测到入射 π 粒子的平均动量 $12\mathrm{GeV}/c$，X **粒子质量** $2.4\mathrm{GeV}/c^2$，**求质子最大散射角以及此时的产物质子动量**.

(**质子质量** $0.94\mathrm{GeV}/c^2$, π **质量** $0.13\mathrm{GeV}/c^2$)



研究该散射过程, $p_\pi \cong E_\pi = 12\mathrm{GeV}$

能量守恒

$$E_\pi + E_{p_0} = E_{tot} = E_p + E_X$$

$$\Rightarrow 12.94\mathrm{GeV} = E_{tot} = \sqrt{m_p^2 + p_p^2} + \sqrt{m_X^2 + p_X^2}$$

动量守恒 (余弦定理)

$$\cos\theta = \frac{p_p^2 + p_\pi^2 - p_X^2}{2p_p p_\pi}$$

联立上两式得

$$\cos\theta = \frac{(p_\pi^2 - E_{tot}^2 - m_p^2 + m_X^2) + 2E_{tot}\sqrt{m_p^2 + p_p^2}}{2p_\pi p_p}$$

这个式子看着很吓人，但只有 p_p 作为变量，其它量我们都知道数值。令夹角最大

$$\frac{d\cos\theta}{dp_p} = 0 \Rightarrow p_p = 0.911\mathrm{GeV}$$

回代得

$$\cos\theta|_{p_p=0.911\mathrm{GeV}} = 0.699, \quad \theta_{\mathrm{MAX}} = 45.65\,\mathrm{deg}$$

学期将结束，祝顺利！

力学是物理学习的开端，

希望同学们在本学期的学习中找到物理最原初的美。

Figure 3: 期末加油