1 Suites numériques et récurrence

QCM

1 b
2 b
3 a
4 c
5 c
6 b

VRAI FAUX

1 **Faux.** On peut seulement déduire que la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 4$. Rien ne permet de savoir si la propriété est vraie pour $n = 2$ et pour $n = 3$.

2 **Faux.** Rien ne permet de savoir si la propriété est vraie pour $n = 4$.

3 **Faux.** Pour $n = 0$, $u_0 = -4$ et $5 \times 2^0 - 4 = 1$ donc $u_0 \neq 5 \times 2^0 - 4$.

4 **Vrai.** On considère la propriété $P(n)$: $u_n = 5 \times 2^n - 4$.
- Initialisation : Pour $n_0 = 0$, $u_0 = 1$ et $5 \times 2^0 - 4 = 1$ donc $P(0)$ est vraie.
- Hérédité : On considère un entier quelconque $k \geqslant 0$. On suppose que $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire $u_k = 5 \times 2^k - 4$.

On a alors :
$$u_{k+1} = 2u_k + 4 = 2(5 \times 2^k - 4) + 4$$
$$= 5 \times 2^{k+1} - 8 + 4 = 5 \times 2^{k+1} - 4.$$
Donc $P(k + 1)$ est vraie.
La propriété est héréditaire.
- Conclusion : La propriété $P(n)$ est vraie au rang $n_0 = 0$ et elle est héréditaire, donc $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$, c'est-à-dire que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n = 5 \times 2^n - 4$.

5 **Faux.** $v_0 = 1$ et $v_1 = -2v_0 + 1 = -2 \times 1 + 1 = -1$. On a donc $v_1 \leqslant v_0$. Ainsi, la suite (v_n) n'est pas croissante.

6 **Vrai.** Si une suite (u_n) est croissante alors elle est minorée par son premier terme u_0. Ce résultat se démontre par une récurrence immédiate.
On considère la propriété $P(n)$: $u_n \geqslant u_0$
- Initialisation : Pour $n_0 = 0$, $u_0 \geqslant u_0$ donc $P(0)$ est vraie.
- Hérédité : On considère un entier quelconque $k \geqslant 0$. On suppose que $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire $u_k \geqslant u_0$.

On a alors, puisque la suite (u_n) est croissante, $u_{k+1} \geqslant u_k \geqslant u_0$. Donc $P(k+1)$ est vraie. La propriété est héréditaire.
- Conclusion : La propriété $P(n)$ est vraie au rang $n_0 = 0$ et elle est héréditaire, donc $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$, c'est-à-dire que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n \geqslant u_0$. Donc la suite (u_n) est minorée par son premier terme u_0.

7 **Faux.** Contre-exemple : la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $u_n = \dfrac{1}{n}$ est décroissante et elle est minorée par 0.

8 **Faux.** Contre-exemple : la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $u_n = 7 - \dfrac{1}{n}$ est majorée par 7 mais n'est pas majorée par 5 (en effet, $u_1 = 6$ et $6 > 5$).

9 **Vrai.** Pour tout entier naturel n, on a $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$. En ajoutant -2 à chaque membre de cette inégalité, on obtient :
$-2 - 1 \leqslant -2 + \sin(n) \leqslant -2 + 1$,
c'est-à-dire $-3 \leqslant u_n \leqslant -1$.
On en déduit donc que la suite (u_n) est bornée.