Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ Фундаментальные науки

КАФЕДРА Прикладная математика

РАСЧЕТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

К КУРСОВОЙ РАБОТЕ

НА ТЕМУ:

Задача Штурма — Лиувилля на собственные значения для уравнения прогиба балки с закрепленными концами

Студент ФН2-41Б (Группа) ______ (Подпись, дата) С. Э. Марцинович (И. О. Фамилия)

Руководитель курсовой работы ______ (Подпись, дата) И. А. Рудаков (И. О. Фамилия)

2020 г.

Оглавление

Техническое задание

Задача Штурма — Лиувилля 4-го порядка поставлена таким образом:

$$X^{(4)} - aX'' = \lambda X, \quad 0 < X < \pi, \quad a > 0; \tag{1}$$

$$X(0) = X'(0) = 0; \tag{2}$$

$$X(\pi) = X'(\pi) = 0. \tag{3}$$

В данной работе требуется:

1. Составить уравнение для собственных значений λ, исследовать его, найти асимптотику $\{\lambda_n\}$.
2. Локализовать собственные значения $\{\lambda_n\}$.
3. Исследовать свойства собственных функций.

Введение

Задача Штурма[1] *— Лиувилля*[2] состоит в отыскании нетривиальных решений уравнения $LX = \lambda X$ на некотором промежутке (a, b), где L — дифференциальный оператор, удовлетворяющих однородным краевым (граничным) условиям и значениям параметра λ, при которых такие решения существуют. Искомые нетривиальные решения называются собственными функциями задачи, а значения λ, при которых такое решение существует, — ее собственными значениями.

В статье [5] рассматривается задача о периодических по времени решениях квазилинейного уравнения колебаний балки с закрепленным и шарнирно опертым концами. Математическая модель колебаний проводов, стержней, способных сопротивляться изгибу, а также двутавровых балок представляет из себя дифференциальное уравнение 4-го порядка с граничными условиями [5]. В данной работе, в отличие от [5], рассмотрен случай жесткого закрепления балки на обоих концах, что значительно усложняет вычисления. При изучении этого уравнения собственные значения соответствующей *задачи Штурма — Лиувилля* явно не выражаются и удовлетворяют громоздкому трансцедентному уравнению, исследованию которого и посвящена данная работа.

1. Постановка задачи

Имеем задачу Штурма — Лиувилля 4-го порядка, поставленную таким образом:

$$X^{(4)} - aX'' = \lambda X, \quad 0 < X < \pi, \quad a > 0; \tag{4}$$

$$X(0) = X'(0) = 0; \tag{5}$$

$$X(\pi) = X'(\pi) = 0. \tag{6}$$

Цели настоящей работы сформулируем следующим образом:

1. Составить уравнение для собственных значений λ, исследовать его, найти асимптотику $\{\lambda_n\}$.
2. Локализовать собственные значения $\{\lambda_n\}$.
3. Исследовать свойства собственных функций.

[1] Шарль Франсуа Штурм (*фр.* Charles-François Sturm, 1803–1855) — французский математик.
[2] Жозеф Лиувилль (*фр.* Joseph Liouville, 1809–1882) — французский математик.

2. Свойства собственных значений

Покажем, что λ может принимать значения строго больше нуля. Домножим уравнение (4) на X:

$$XX^{(4)} - aXX'' = \lambda X^2.$$

Возьмем интеграл от обеих частей на промежутке от 0 до π:

$$\int\limits_0^\pi XX^{(4)}dx - a\int\limits_0^\pi XX''dx = \lambda\int\limits_0^\pi X^2dx. \tag{7}$$

Правая часть тождества (7) больше или равна нулю. Оценим левую часть. Рассмотрим первое слагаемое:

$$\int\limits_0^\pi XX^{(4)}dx = XX'''|_0^\pi - \int\limits_0^\pi X'X'''dx = XX'''|_0^\pi - X'X''|_0^\pi + \int\limits_0^\pi X''X''dx = \\ = \int\limits_0^\pi (X'')^2dx \geqslant 0. \tag{8}$$

Рассмотрим второе слагаемое:

$$\int\limits_0^\pi XX''dx = XX'|_0^\pi - \int\limits_0^\pi X'X'dx = -\int\limits_0^\pi (X')^2dx \leqslant 0. \tag{9}$$

В итоге получаем, что левая часть тождества (7) больше или равна нулю. Это значит, что $\lambda \geqslant 0$.

Покажем, что $\lambda \neq 0$. Если $\lambda = 0$, то получаем

$$\int\limits_0^\pi XX^{(4)}dx - a\int\limits_0^\pi XX''dx = 0.$$

Учитывая (8), (9), получаем:

$$\int\limits_0^\pi (X'')^2dx + a\int\limits_0^\pi (X')^2dx = 0.$$

Докажем, что хотя бы одно из слагаемых строго больше нуля. Рассмотрим второе слагаемое.Предположим, что интеграл $\int\limits_0^\pi (X')^2dx$ равен нулю:

$$\int\limits_0^\pi (X')^2dx = 0 \quad \Rightarrow \quad X' = 0 \quad \Rightarrow \quad X = const.$$

Используя начальные условия, получаем:

$$X(0) = X'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad X \equiv 0.$$

Это тривиальное решение, а нас интересуют только нетривиальные решения. Следовательно, интеграл $\int\limits_0^\pi (X')^2 dx$ строго больше нуля. При этом $a > 0$ по условию. Таким образом получаем, что

$$\int\limits_0^\pi (X'')^2 dx + a \int\limits_0^\pi (X')^2 dx > 0,$$

а значит λ не может быть равна нулю.

Таким образом, было доказано, что $\lambda > 0$.

3. Вывод трансцедентного уравнения

Уравнение (4) является линейным однородным дифференциальным уравнением 4-го порядка с постоянными коэффициентами. Составим для него характеристическое уравнение:

$$k^4 - ak^2 - \lambda = 0.$$

Решая его, получаем

$$\left[\begin{aligned} k^2 &= \frac{a + \sqrt{a^2 + 4\lambda}}{2}, \\ k^2 &= \frac{a - \sqrt{a^2 + 4\lambda}}{2}. \end{aligned}\right.$$

Для упрощения вычислений введем обозначения. Пусть $\frac{a - \sqrt{a^2 + 4\lambda}}{2} = -b^2$, тогда $b = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + 4\lambda} - a}{2}}$. Зафиксируем переменную b таким образом:

$$b = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + 4\lambda} - a}{2}}. \tag{10}$$

Пусть $\frac{a + \sqrt{a^2 + 4\lambda}}{2} = c^2$, тогда $c = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + 4\lambda} + a}{2}}$. Зафиксируем переменную c так:

$$c = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + 4\lambda} + a}{2}}. \tag{11}$$

С учетом введенных обозначений фундаментальную систему решений можно записать следующим образом: $\{\operatorname{sh}(cx), \operatorname{ch}(-cx), \sin(bx), \cos(bx)\}$.

Общее решение однородного уравнения (4) можно представить в виде:

$$X_{o.o.} = C_1 \operatorname{sh}(cx) + C_2 \operatorname{ch}(-cx) + C_3 \sin(bx) + C_4 \cos(bx).$$

Используем условие (5):

$$\begin{cases} X(0)=0, \\ X'(0)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1\operatorname{sh}(0)+C_2\operatorname{ch}(0)+C_3\sin(0)+C_4\cos(0)=0, \\ C_1c\operatorname{ch}(0)+C_2(-c)\operatorname{sh}(0)+C_3b\cos(0)-C_4b\sin(0)=0. \end{cases}$$

Выразим константы C_1, C_2 через константы C_3 и C_4:

$$\begin{cases} C_2+C_4=0, \\ C_1c+C_3b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2=-C_4, \\ C_1=-\dfrac{C_3b}{c}. \end{cases} \tag{12}$$

Теперь используем условие (6):

$$\begin{cases} X(\pi)=0, \\ X'(\pi)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1\operatorname{sh}(c\pi)+C_2\operatorname{ch}(-c\pi)+C_3\sin(b\pi)+C_4\cos(b\pi)=0, \\ C_1c\operatorname{ch}(c\pi)+C_2(-c)\operatorname{sh}(-c\pi)+C_3b\cos(b\pi)-C_4b\sin(b\pi)=0. \end{cases}$$

Подставим выражения для констант, полученные в (12):

$$\begin{cases} -\dfrac{C_3b}{c}\cdot\operatorname{sh}(c\pi)-C_4\operatorname{ch}(-c\pi)+C_3\sin(b\pi)+C_4\cos(b\pi)=0, \\ -\dfrac{C_3b}{c}\cdot c\operatorname{ch}(c\pi)-C_4(-c)\operatorname{sh}(-c\pi)+C_3b\cos(b\pi)-C_4b\sin(b\pi)=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_3(-\dfrac{b}{c}\cdot\operatorname{sh}(c\pi)+\sin(b\pi))+C_4(-ch(c\pi)+\cos(b\pi))=0, \\ C_3(-b\operatorname{ch}(c\pi)+b\cos(b\pi))+C_4(c\operatorname{sh}(-c\pi)-b\sin(b\pi))=0. \end{cases}$$

Решим эту систему относительно C_3 и C_4. Система имеет единственное решение, когда определитель равен нулю, то есть

$$\Delta=\begin{vmatrix} -\frac{b}{c}\cdot\operatorname{sh}(c\pi)+\sin(b\pi) & -ch(c\pi)+\cos(b\pi) \\ -b\operatorname{ch}(c\pi)+b\cos(b\pi) & c\operatorname{sh}(-c\pi)-b\sin(b\pi) \end{vmatrix}=0.$$

Раскрывая определитель, получаем

$$\begin{aligned} &(-\frac{b}{c}\cdot\operatorname{sh}(c\pi)+\sin(b\pi))(c\operatorname{sh}(-c\pi)-b\sin(b\pi))-(-ch(c\pi)+\cos(b\pi))(-b\operatorname{ch}(c\pi)+b\cos(b\pi))= \\ &=-\frac{b}{c}\cdot c\operatorname{sh}(c\pi)\operatorname{sh}(-c\pi)+c\sin(b\pi)\operatorname{sh}(-c\pi)+\frac{b}{c}\cdot b\sin(b\pi)sh(c\pi)-b\sin^2(b\pi)- \\ &-b\operatorname{ch}(-c\pi)\operatorname{ch}(c\pi)+b\cos(b\pi)\operatorname{ch}(c\pi)+b\cos(b\pi)\operatorname{ch}(-c\pi)-b\cos^2(b\pi)= \\ &=b\operatorname{sh}^2(c\pi)-c\sin(b\pi)\operatorname{sh}(c\pi)+\frac{b^2}{c}\sin(b\pi)\operatorname{sh}(c\pi)-b\sin^2(b\pi)-b\operatorname{ch}^2(c\pi)+ \\ &+b\cos(b\pi)\operatorname{ch}(c\pi)+b\cos(b\pi)\operatorname{ch}(c\pi)-b\cos^2(b\pi)= \\ &=-2b+2b\cos(b\pi)\operatorname{ch}(c\pi)-c\sin(b\pi)\operatorname{sh}(c\pi)+\frac{b^2}{c}\sin(b\pi)\operatorname{sh}(c\pi)=0. \end{aligned} \tag{13}$$

Домножим результат, полученный в (13) на c и упростим это выражение:

$$-2bc + 2bc\cos(b\pi)\,\mathrm{ch}(c\pi) + (b^2 - c^2)\sin(b\pi)sh(c\pi) = 0;$$
$$2bc\cos(b\pi)ch(c\pi) = 2bc - (b^2 - c^2)\sin(b\pi)\,\mathrm{sh}(c\pi).$$

Если выразить $\cos(b\pi)$, то получим следующее уравнение

$$\cos(b\pi) = \frac{1}{\mathrm{ch}(c\pi)} + \frac{(c^2 - b^2)\sin(b\pi)\,\mathrm{th}(c\pi)}{2bc}. \tag{14}$$

Выразим c через b. Напомним, что

$$b^2 = \frac{\sqrt{a^2 + 4\lambda} - a}{2}, \quad c^2 = \frac{\sqrt{a^2 + 4\lambda} + a}{2}.$$

Тогда

$$c^2 = \frac{\sqrt{a^2 + 4\lambda}}{2} + \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + 4\lambda}}{2} - \frac{a}{2} + a = b^2 + a \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{b^2 + a}; \tag{15}$$
$$c^2 - b^2 = b^2 + a - b^2 = a. \tag{16}$$

Подставляя полученные в (15) и (16) результаты в уравнение (14), получаем трансцедентное уравнение, зависящее от b:

$$\cos(b\pi) = \frac{1}{\mathrm{ch}(\sqrt{b^2 + a}\pi)} + \frac{a\sin(b\pi)\,\mathrm{th}(\sqrt{b^2 + a}\pi)}{2b\sqrt{b^2 + a}}. \tag{17}$$

Проиллюстрируем равенство (17). Обозначим правую часть равенства как $f_1(b)$, а левую как $f_2(b)$. На рис. 1 изображен график зависимости двух частей равенства (17) от параметра b. Точки пересечения двух кривых являются решениями этого уравнения. Можно заметить, что решения b_n представимы в виде $b_n = n + \frac{1}{2} + \theta_n$, $0 < |\theta_n| < \frac{1}{2}$.

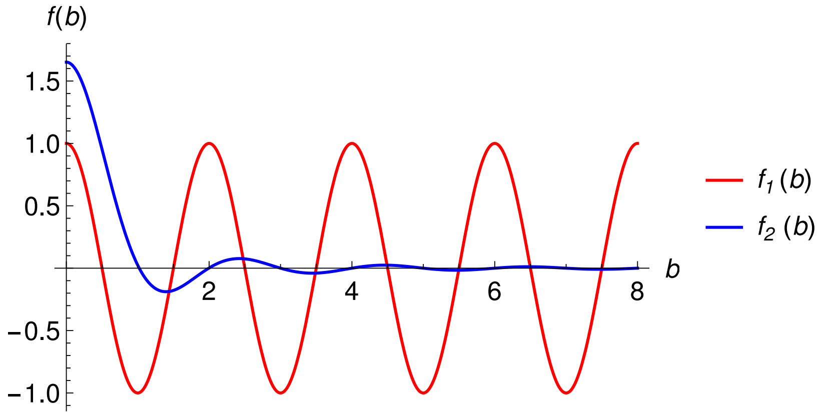

Рис. 1. Иллюстрация решений уравнения (17)

4. Локализация корней

Если нормализовать собственные значения $X(x)$, используя условия $\int\limits_0^\pi X^2(x)dx = 1$, то получим:

$$\lambda = \int\limits_0^\pi (X'')^2 dx + a\int_0^\pi (X')^2 dx, \quad \lambda > 0.$$

Используя выражение (10), выразим λ через a и b:

$$b^2 = \frac{\sqrt{a^2 + 4\lambda} - a}{2},$$
$$2b^2 + a = \sqrt{a^2 + 4\lambda},$$
$$4b^4 + 4ab^2 + a^2 = a^2 + 4\lambda,$$

откуда в итоге получаем

$$\lambda = b^4 + ab^2. \tag{18}$$

Покажем, что найдется $n_0 \in \mathbb{N}$, такое, что для любого $n \geqslant n_0$ на интервале $(n,\, n+\frac{1}{2})$ существует единственный корень b уравнения (14), а на отрезке $[n+\frac{1}{2},\, n+1]$ это уравнение не имеет решений. Пусть

$$F(b) = \frac{1}{\operatorname{ch}(c\pi)} + \frac{(c^2 - b^2)\sin(b\pi)\operatorname{th}(c\pi)}{2bc} - \cos(b\pi).$$

Для любого $n \in \mathbb{N}$ можно записать неравенства

$$F(2n) = -1 + \frac{1}{\operatorname{ch}(c\pi)} < 0,$$
$$F(2n + \frac{1}{2}) = \frac{1}{\operatorname{ch}(c\pi)} + a\frac{\operatorname{th}(c\pi)}{c} \cdot \frac{1}{2n + \frac{1}{2}} > 0.$$

Это значит, что на интервале $(2n,\, 2n + \frac{1}{2})$ существует корень уравнения (14). Кроме того, имеем следующие соотношения:

$$F(2n - 1) = -1 + \frac{1}{\operatorname{ch}(c\pi)} > 0,$$
$$F(2n - \frac{1}{2}) = \frac{1}{\operatorname{ch}(c\pi)} - a\frac{\operatorname{th}(c\pi)}{c} \cdot \frac{1}{2n + \frac{1}{2}}.$$

Найдется такое $n_1 \in \mathbb{N}$, что для любого $n \geqslant n_1$ $F(2n - \frac{1}{2}) < 0$. Следовательно, для $n \geqslant n_1$ существует корень уравнения (14) на интервале $(2n - 1,\, 2n - \frac{1}{2})$.

Если $b \in [2n + \frac{1}{2},\, 2n + 1]$, $n \in \mathbb{N}$, то

$$\sin(b\pi) \geqslant 0, \quad \cos(b\pi) \leqslant 0, \quad F(b) > 0.$$

Следовательно, на отрезке $[2n+\frac{1}{2},\, 2n+1]$ уравнение (14) не имеет корней.

Рассмотрим уравнение (14) на отрезке $[2n-\frac{1}{2},\, 2n]$. Обозначим за n_2 такое натуральное число, что для любого $n \geqslant n_2$ выполняются неравенства

$$\operatorname{ch}(c\pi) \geqslant 2, \quad \frac{c}{\operatorname{ch}(c\pi)} \leqslant \frac{a}{4b}, \quad \operatorname{th}(c\pi) \geqslant \frac{3}{4}. \tag{19}$$

Тогда для $n \geqslant n_2$ и для любого $b \in [2n-\frac{1}{2}, 2n-\frac{1}{4}]$ имеем:

$$F(b) < \frac{1}{\operatorname{ch}(c\pi)} + a\operatorname{th}(c\pi)\sin(b\pi)\cdot\frac{1}{bc} \leqslant -\frac{2\sqrt{2}}{8}\cdot a\cdot\frac{1}{bc} + \frac{a}{4}\cdot\frac{1}{bc} = -\frac{a}{8}\cdot(3\sqrt{2}-2)\cdot\frac{1}{bc} < 0$$

и для $b \in (2n-\frac{1}{4},\, 2n]$ с учетом неравенств (19) получаем:

$$F(b) \leqslant \frac{1}{\operatorname{ch}(c\pi)} - \cos(b\pi) \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} < 0.$$

Следовательно, для $n \geqslant n_2$, $n \in \mathbb{N}$ на отрезке $[2n-\frac{1}{2},\, 2n]$ уравнение (14) не имеет корней.

Покажем, что для достаточно большого числа $n \in \mathbb{N}$ на интервале $(n,\, n+\frac{1}{2})$ существует единственный корень b уравнения (14). Пусть $n_3 = \max(n_1,\, n_2)$. Если $n \geqslant n_3$, $n \in \mathbb{N}$, то корень $b \in (n,\, n+\frac{1}{2})$ уравнения (14) представляется в виде

$$b = n + \frac{1}{2} - \theta, \tag{20}$$

где $\theta \in (0,\, \frac{1}{2})$. Из (14) выражаем:

$$\sin(\theta\pi) = \frac{(-1)^n}{\operatorname{ch}(c\pi)} + a\cos(\theta\pi)\operatorname{th}(c\pi)\frac{1}{bc}. \tag{21}$$

Из этого следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\theta = 0. \tag{22}$$

Можно заметить, что существует число $c > 0$, такое, что

$$F\prime(b) = \pi\sin(b\pi) + h(b), \quad |h(b)| \leqslant c\frac{1}{b^2}$$

для всех $b \geqslant 1$.

Из (28) следует

$$b_n = n + \frac{1}{2} - \theta_n, \quad n = n_0,\, n_0+1, \ldots \tag{23}$$

где $\theta_n \in (0,\, \frac{1}{2})$.

Тождество (21) также показывает существование положительных чисел b_0, b_1, таких, что

$$0 < b_0\frac{1}{n^2} < \theta_n < b_1\frac{1}{n^2} \quad \forall n \geqslant n_0. \tag{24}$$

Для $n \geqslant n_0$, принимая во внимание (18), (23), соответствующие b_n собственные значения исходной задачи (4)–(6) представляются так:

$$\lambda_n = (n + \frac{1}{2} - \theta_n)^4 + a(n + \frac{1}{2} - \theta_n)^2$$

где $\theta_n \in (0, \frac{1}{2})$ и выполняется (24).

5. Асимптотика собственных значений

Как уже было сказано ранее, решения уравнения (14) представимы в виде

$$b_n = n + \frac{1}{2} + \theta_n, \quad 0 < |\theta_n| < \frac{1}{2}.$$

Докажем, что $\theta_n < 0$. Домножим уравнение (17) на $\frac{\theta_n}{\cos(b_n\pi)}$, тогда получим

$$\theta_n = \frac{\theta_n}{\operatorname{ch}(\sqrt{b_n^2 + a}\pi)\cos(b_n\pi)} + \frac{a\sin(b_n\pi)\operatorname{th}(\sqrt{b_n^2 + a}\pi)\theta_n}{2b_n\sqrt{b_n^2 + a}\cos(b_n\pi)}. \tag{25}$$

Заметим, что

$$\cos(b_n\pi) = \cos(\pi(n + \frac{1}{2} + \theta_n)) = \cos(\frac{\pi}{2} + \pi n + \pi\theta_n) = -\sin(\pi n\pi\theta_n) =$$
$$= -\cos(\pi n)\sin(\pi\theta_n) = (-1)^{n+1}\sin(\pi\theta_n), \tag{26}$$

$$\sin(b_n\pi) = \sin(\pi(n + \frac{1}{2} + \theta_n)) = \sin(\frac{\pi}{2} + \pi n + \pi\theta_n) = \cos(\pi n\pi\theta_n) =$$
$$= \cos(\pi n)\cos(\pi\theta_n) = (-1)^n\cos(\pi\theta_n). \tag{27}$$

Подставляя результаты, полученные в (26), (27) в уравнение (25), получаем

$$\theta_n = \frac{\theta_n}{\operatorname{ch}(\sqrt{b_n^2 + a}\pi)(-1)^{n+1}\sin(\pi\theta_n)} + \frac{a(-1)^n\cos(\pi\theta_n)\operatorname{th}(\sqrt{b_n^2 + a}\pi)\theta_n}{2b_n\sqrt{b_n^2 + a}(-1)^{n+1}\sin(\pi\theta_n)} =$$
$$= (-1)^{n+1}\frac{\pi\theta_n}{\sin(\pi\theta_n)} \cdot \frac{1}{\pi\operatorname{ch}(\sqrt{b_n^2 + a}\pi)} - \frac{a\operatorname{th}(\sqrt{b_n^2 + a}\pi)\cos(\pi\theta_n)}{2\pi b_n\sqrt{b_n^2 + a}} \cdot \frac{\pi\theta_n}{\sin(\pi\theta_n)}. \tag{28}$$

Рассмотрим отдельно оба слагаемых в формуле (28). Посмотрим, к чему стремятся их значения при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi\theta_n}{\sin(\pi\theta_n)} \cdot \frac{1}{\pi\operatorname{ch}(\sqrt{b_n^2 + a}\pi)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi\theta_n}{\sin(\pi\theta_n)} \cdot \frac{1}{\pi\operatorname{ch}(\sqrt{n^2 + n + \frac{1}{4} + a}\pi)} = 1 \cdot 0 = 0,$$

то есть первое слагаемое стремится к нулю со скоростью экспоненты.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a\,\mathrm{th}(\sqrt{b_n^2+a}\pi)\cos(\pi\theta_n)}{2\pi b_n\sqrt{b_n^2+a}} \cdot \frac{\pi\theta_n}{\sin(\pi\theta_n)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a\,\mathrm{th}(\sqrt{n^2+n+\frac{1}{4}+a}\pi)\cos(\pi\theta_n)}{2\pi(n+\frac{1}{2})\sqrt{n^2+n+\frac{1}{4}+a}} \cdot \frac{\pi\theta_n}{\sin(\pi\theta_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{a\,\mathrm{th}(n\pi)}{2\pi n^2} = 0,$$

это значит, что второе слагаемое также стремится к нулю, со скоростью степенной функции. Следовательно, θ_n стремится к нулю и принимает отрицательные значения.

6. Оценка θ_n

Докажем, что существуют константы C_0, $C_1 > 0$, такие, что выполняется неравенство $0 < C_0\frac{1}{n^2} < \theta_n < C_1\frac{1}{n^2}$. Очевидно, что $\mathrm{th}(\theta_n) < 1$. Определим функцию $f(t)$ следующим образом:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t}{\sin t}, & t \in [-\frac{\pi}{2};\, 0) \cup (0;\, \frac{\pi}{2}], \\ 1, & t = 0. \end{cases}$$

Найдем производную этой функции:

$$f'(t) = \frac{\sin t - t\cos t}{\sin^2 t} = \frac{\cos t(\mathrm{tg}\, t - t)}{\sin^2 t}.$$

Покажем, что функция $\mathrm{tg}\, t - t > 0$ при $t \in (0;\, \frac{\pi}{2}]$. Для этого возьмем производную:

$$(\mathrm{tg}\, t - t)' = \frac{1}{\cos^2 t} - 1 > 0, \quad t \in (0;\, \frac{\pi}{2}].$$

Функция $\mathrm{tg}\, t - t$ возрастает и положительна на промежутке $(0;\, \frac{\pi}{2}]$, а в нуле принимает значение 0. Это значит, что $f'(t) > 0$ при $t \in (0;\, \frac{\pi}{2}]$. Следовательно, для всех $t \in (0;\, \frac{\pi}{2}]$ можно записать неравенство

$$1 \leqslant f(t) \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Для $|\theta_n|$ имеем следующее неравенство:

$$|\theta_n| \leqslant \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\mathrm{ch}(\pi c_n)} + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{a}{\pi b_n c_n} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}(\pi c_n)} + \frac{a}{\pi b_n c_n}\right). \tag{29}$$

Оценим $b_n c_n$:

$$b_n c_n = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+4\lambda_n}-a}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+4\lambda_n}+a}{2}} = \sqrt{\frac{a^2+4\lambda_n-a^2}{4}} = \sqrt{\lambda_n} =$$

$$= \sqrt{(n+\frac{1}{2}-\theta_n)^4 + a(n+\frac{1}{2}-\theta_n)^2} \geqslant (n+\frac{1}{2}-\theta_n)^2 \geqslant n^2.$$

Тогда можем записать следующее:

$$\frac{1}{b_n c_n} \leqslant \frac{1}{n^2}. \tag{30}$$

Подставляя (30) в (29), получаем такое выражение:

$$|\theta_n| = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(\pi c_n)} + \frac{a}{\pi n^2}\right).$$

Теперь оценим $\dfrac{1}{\operatorname{ch}(\pi c_n)}$:

$$\frac{1}{\operatorname{ch}(\pi c_n)} = \frac{2}{e^{\pi c_n} + e^{-\pi c_n}} < \frac{2}{e^{\pi c_n}}. \tag{31}$$

Докажем, что $\dfrac{1}{e^x} < \dfrac{2}{x^2}$. Рассмотрим функцию $e^x - \dfrac{x^2}{2}$. Возьмем первую и вторую производные:

$$\left(e^x - \frac{x^2}{2}\right)' = e^x - x;$$
$$\left(e^x - \frac{x^2}{2}\right)'' = e^x - 1.$$

Вторая производная больше нуля для любого $x > 0$. Это значит, что первая производная возрастает везде на промежутке $(0; \infty)$. При этом заметим, что

$$\left.\left(e^x - \frac{x^2}{2}\right)\right|_0 = 1,$$

следовательно, функция $e^x - \dfrac{x^2}{2} > 0$ везде на $(0; \infty)$. На основании этого можем записать неравенство

$$\frac{1}{e^x} < \frac{2}{x^2}.$$

Тогда получаем следующую оценку:

$$|\theta_n| \leqslant \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(\pi c_n)} + \frac{a}{\pi n^2}\right) < \frac{\pi}{2}\left(\frac{2}{e^{\pi c_n}} + \frac{a}{\pi n^2}\right) < \frac{\pi}{2}\left(\frac{2\cdot 2}{\pi^2 c_n^2} + \frac{a}{\pi n^2}\right) = \frac{2}{\pi c_n^2} + \frac{a}{\pi n^2}.$$

Теперь оценим c_n:

$$c_n = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + 4\lambda_n} + a}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + 4b_n^4 + 4ab_n^2} + a}{2}} = \sqrt{\frac{a + 2b_n^2 + a}{2}} = \sqrt{a + b_n^2} >$$
$$> \sqrt{b_n^2} = b_n = n + \frac{1}{2} - \theta_n > n,$$

следовательно, $\dfrac{1}{c_n} < \dfrac{1}{n}$. Получаем финальную оценку сверху:

$$|\theta_n| < \frac{2}{\pi c_n^2} + \frac{a}{2n^2} < \frac{2}{\pi n^2} + \frac{a}{2n^2} = \frac{1}{n^2}\left(\frac{2}{\pi} + \frac{a}{2}\right) = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{4 + a\pi}{2\pi}. \tag{32}$$

Теперь оценим $|\theta_n|$ снизу. Можем записать следующее неравенство:

$$\frac{\pi\theta_n}{\sin(\pi\theta_n)} \geqslant 1.$$

Заметим, что $\cos(\pi\theta_n) \to 1$ при $n \to \infty$, а значит можем оценить снизу константой:

$$\cos(\pi\theta_n) \geqslant d, \quad d = const, \quad d > 0.$$

Аналогично: $\operatorname{th}(\pi\theta_n) \to 1$ при $n \to \infty$, тогда

$$\operatorname{th}(\pi\theta_n) \geqslant g, \quad g = const, \quad g > 0.$$

Для $|\theta_n|$ получаем такую оценку:

$$|\theta_n| \geqslant \frac{a \cdot g \cdot d}{\pi b_n c_n} - \frac{1}{\operatorname{ch}(\pi c_n)}$$

Оценим $b_n c_n$ снизу:

$$b_n c_n = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+4\lambda_n} - a}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+4\lambda_n} + a}{2}} = \sqrt{\frac{a^2+4\lambda_n - a^2}{4}} = \sqrt{\lambda_n} =$$
$$= \sqrt{(n+\frac{1}{2}-\theta_n)^4 + a(n+\frac{1}{2}-\theta_n)^2} \leqslant \sqrt{(a+1)(n+\frac{1}{2}-\theta_n)^4} =$$
$$= \sqrt{a+1}(n+\frac{1}{2}-\theta_n)^2 \leqslant \sqrt{a+1}(2n)^2,$$

следовательно, $\dfrac{1}{b_n c_n} \geqslant \dfrac{1}{4n^2\sqrt{a+1}}$. Тогда имеем:

$$|\theta_n| \geqslant \frac{a \cdot g \cdot d}{\pi b_n c_n} - \frac{1}{\operatorname{ch}(\pi c_n)} \geqslant \frac{a \cdot g \cdot d}{4\pi n^2\sqrt{a+1}} - \frac{1}{\operatorname{ch}(\pi c_n)}.$$

Теперь оценим $\operatorname{ch}(\pi c_n)$:

$$\frac{1}{\operatorname{ch}(\pi c_n)} = \frac{2}{e^{\pi c_n} + e^{-\pi c_n}} \geqslant \frac{2}{e^{\pi c_n} + e^{\pi c_n}} = \frac{1}{e^{\pi c_n}}.$$

Обозначим $A = \dfrac{a \cdot g \cdot d}{4\pi\sqrt{a+1}}$. Покажем, что существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что для любого $n > n_0$ выполняется неравенство $e^{\pi c_n} > \dfrac{a}{A} n^2$.

$$c_n \geqslant n \quad \Rightarrow \quad e^{\pi c_n} > e^{\pi n}.$$

Кроме того, можем записать неравенства

$$e^{\pi n} > \frac{2}{A} n^2, \quad e^{\pi n_0} > \frac{2}{A} n_0^2.$$

Найдем такое n_0, что последнее неравенство выполняется для любого $n > n_0$. Пусть $n_0 = \left[\sqrt{\frac{A}{2}}\right]$, тогда $e^{\pi n_0} > 1$. Это выполняется для любой константы A. Можем записать оценку снизу:

$$|\theta_n| \geqslant \frac{a \cdot g \cdot d}{\pi b_n c_n}. \tag{33}$$

Таким образом из (32), (33) получаем финальную оценку:

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \quad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}: \quad \forall\, n > n_0 \quad \frac{C_1}{n^2} \geqslant |\theta_n| \geqslant \frac{C_2}{n^2}.$$

7. Ортогональность решений

Пусть X_n и X_m - любые два решения. Докажем, что они ортогональны в пространстве $L_2[0;\, \pi]$. Покажем, что $\int\limits_0^\pi X_n(x)X_m(x)dx = 0$.

Из исходного уравнения (4) получаем:

$$X_n^{(4)} - aX_n'' - \lambda_n X_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_n X_n = X_n^{(4)} - aX_n''.$$

Рассмотрим интеграл

$$\lambda_n \int\limits_0^\pi X_n X_m dx = \int\limits_0^\pi (X_n^{(4)} - aX_n'')X_m dx = \int\limits_0^\pi X_n^{(4)} X_m dx - a\int\limits_0^\pi X_n'' X_m dx. \tag{34}$$

Рассмотрим отдельно оба слагаемых выражения, полученного в (34):

$$\int\limits_0^\pi X_n^{(4)} X_m dx = X_n''' X_m\big|_0^\pi - \int\limits_0^\pi X_n''' X_m' dx = -(X_n'' X_m'\big|_0^\pi - \int\limits_0^\pi X_n'' X_m'' dx) =$$
$$= X_n' X_m''\big|_0^\pi - \int\limits_0^\pi X_n' X_m''' dx = -(X_n X_m'''\big|_0^\pi - \int\limits_0^\pi X_n X_m^{(4)} dx) = \int\limits_0^\pi X_m^{(4)} X_n dx;$$

$$\int\limits_0^\pi X_n'' X_m dx = X_n' X_m\big|_0^\pi - \int\limits_0^\pi X_n' X_m' dx = -(X_n X_m'\big|_0^\pi - \int\limits_0^\pi X_n X_m'' dx) = \int\limits_0^\pi X_m'' X_n dx.$$

Таким образом, получаем

$$\lambda_n \int\limits_0^\pi X_n X_m dx = \lambda_m \int\limits_0^\pi X_m X_n dx.$$

Преобразуем это выражение, вынося общий множитель:

$$(\lambda_n - \lambda_m)\int\limits_0^\pi X_n X_m dx = 0.$$

Множитель $(\lambda_n - \lambda_m) \neq 0$, так как $\lambda_n \neq \lambda_m$. Следовательно, $\int\limits_0^\pi X_n X_m dx = 0$, а значит решения X_n, X_m ортогональны.

Заключение

В ходе работы было получено трансцендентное уравнение (14) для собственных значений задачи Штурма — Лиувилля для уравнения 4-го порядка с граничными условиями, соответствующими жесткому закреплению концов. Была исследована асимптотика собственных значений и их свойства, а так же свойства собственных функций. После визуализации и последующего анализа уравнения (14) была решена задача локализации собственных значений $\{\lambda_n\}$.

Список использованных источников

1. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд–во Московского Университа, 1984, 294 с.
2. Эльсгольц Л. Э. Дифференцииальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Книга по Требованию, 2012, 424 с.
3. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. М.: Мир, 1968, 504 с.
4. Рудаков И. А. Периодические решения квазилинейного уравнения вынужденных колебаний балки. Известия РАН. Серия математическая. — Т. 79, № 5 — 2015 — Doi: 10.4213/im8250. — С. 215–238.
5. Рудаков И. А. Задача о колебаниях двутавровой балки с закрепленным и шарнирно опертым концами. Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2019 № 3 С. 4-21. DOI: 10.18698/1812-3368-2019-3-4-21
6. Рудаков И. А. Периодические решения квазилинейного уравнения Эйлера—Бернулли. Дифференциальные уравнения. 2019 Т. 55 № 11 С. 1581–1583.
7. Рудаков И. А. Уравнение колебаний балки с закрепленным и шарнирно опертым концами. Вестник МГУ. Серия 1 Математика. Механика. 2020 № 2 С. 3–8.
8. Рудаков И. А. Задача о периодических колебаниях двутавровой балки с закрепленным концом в случае резонанса// Дифференциальные уравнения. 2020 Т. 56 № 3 С. 343–352. DOI: 10.1134/S0374064120030061.
9. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Физматлит, 2010. 526 с.