Задача Штурма — Лиувилля на собственные значения для уравнения прогиба балки с закрепленными концами

С. Э. Марцинович

МГТУ им. Н. Э. Баумана

1 июня 2020 г.

Содержание

Введение и постановка задачи

Задача Штурма — Лиувилля 4-го порядка поставлена таким образом:

$$X^{(4)} - aX^{''} = \lambda X, \quad 0 < X < \pi, \quad a > 0;$$
$$X(0) = X^{'}(0) = 0;$$
$$X(\pi) = X^{'}(\pi) = 0.$$

Такая задача возникает при исследовании уравнения Эйлера — Бернулли в частных производных [6], [7], [8].
В данной работе требуется:

1. Составить уравнение для собственных значений λ, исследовать его, найти асимптотику $\{\lambda_n\}$.
2. Локализовать собственные значения $\{\lambda_n\}$.
3. Исследовать свойства собственных функций.

Свойства собственных значений

Покажем, что λ может принимать значения строго больше нуля. Домножим исходное уравнение на X и возьмем интеграл от обеих частей на промежутке от 0 до π:

$$\int\limits_0^\pi (X'')^2 dx + a\int\limits_0^\pi (X')^2 dx = \lambda \int\limits_0^\pi X^2 dx.$$

Оценивая все три интеграла получаем, что $\lambda \geq 0$. Если предположить, что $\lambda = 0$, то получим

$$\int\limits_0^\pi (X'')^2 dx + a\int\limits_0^\pi (X')^2 dx = 0.$$

Используя граничные условия, доказываем, что уравнению удовлетворяют только решения $X \equiv 0$. Значит, $\lambda > 0$.

Вывод трансцедентного уравнения

Составим характеристическое уравнение:

$$k^4 - ak^2 - \lambda = 0.$$

Решая его, получаем выражения для k^2.
Для упрощения дальнейших вычислений зафиксируем следующие обозначения:

$$b = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + 4\lambda} - a}{2}}, \quad c = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + 4\lambda} + a}{2}}.$$

$$\text{ФСР: } \{\operatorname{sh}(cx), \operatorname{ch}(-cx), \sin(bx), \cos(bx)\}.$$

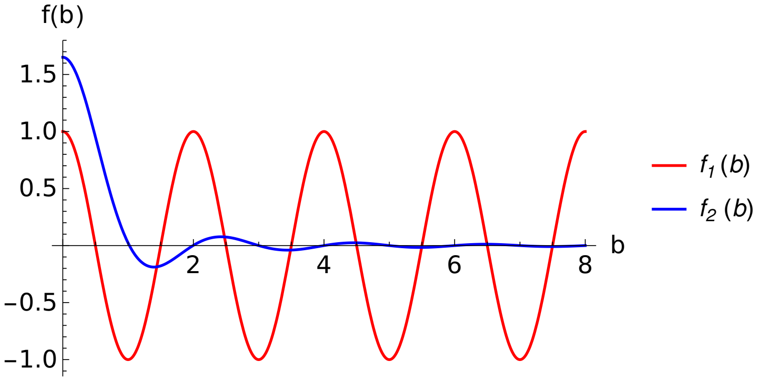
$$X_{o.o.} = C_1 \operatorname{sh}(cx) + C_2 \operatorname{ch}(-cx) + C_3 \sin(bx) + C_4 \cos(bx).$$

Вывод трансцедентного уравнения

Используя граничные условия и выражая c через b, получаем следующее трансцедентное уравнение:

$$\cos(b\pi) = \frac{1}{\mathrm{ch}(\pi\sqrt{b^2+a})} + \frac{a\sin(b\pi)\,\mathrm{th}(\pi\sqrt{b^2+a})}{2b\sqrt{b^2+a}}.$$

Решения b_n представимы в виде $b_n = n + \frac{1}{2} - \theta_n$, $0 < \theta_n < \frac{1}{2}$.



Локализация корней

Если нормализовать собственные значения $X(x)$, используя условия $\int\limits_0^\pi X^2(x)dx = 1$, то получим:

$$\lambda = \int\limits_0^\pi (X'')^2 dx + a\int_0^\pi (X')^2 dx, \quad \lambda > 0.$$

Выразим λ через a и b: $\lambda = b^4 + ab^2$. Покажем, что найдется $n_0 \in \mathbb{N}$, такое, что для любого $n \geq n_0$ на интервале $(n,\ n + \frac{1}{2})$ существует единственный корень b трансцедентного уравнения, а на отрезке $[n + \frac{1}{2},\ n+1]$ это уравнение не имеет решений. Пусть

$$F(b) = \frac{1}{\mathrm{ch}(c\pi)} + \frac{(c^2 - b^2)\sin(b\pi)\,\mathrm{th}(c\pi)}{2bc} - \cos(b\pi).$$

Локализация корней

Интервал $(2n-1,\, 2n-\frac{1}{2})$

Для любого $n \in \mathbb{N}$ можно записать неравенства

$$F(2n-1) = -1 + \frac{1}{\mathrm{ch}(c\pi)} > 0,$$
$$F(2n-\frac{1}{2}) = \frac{1}{\mathrm{ch}(c\pi)} - a\frac{\mathrm{th}(c\pi)}{c} \cdot \frac{1}{2n+\frac{1}{2}}.$$

Найдется такое $n_1 \in \mathbb{N}$, что для любого $n \geq n_1$ $F(2n-\frac{1}{2}) < 0$. Для $n \geq n_1$ на этом интервале существует корень трансцедентного уравнения.

Интервал $(2n,\, 2n+\frac{1}{2})$

$$F(2n) = -1 + \frac{1}{\mathrm{ch}(c\pi)} < 0,$$
$$F(2n+\frac{1}{2}) = \frac{1}{\mathrm{ch}(c\pi)} + a\frac{\mathrm{th}(c\pi)}{c} \cdot \frac{1}{2n+\frac{1}{2}} > 0.$$

На этом интервале существует корень трансцедентного уравнения.

Локализация корней

Отрезок $[2n - \frac{1}{2},\ 2n]$

$$\exists n_2 : \forall n \geq n_2 \quad \mathrm{ch}(c\pi) \geq 2,\ \frac{c}{\mathrm{ch}(c\pi)} \leq \frac{a}{4b},\ \mathrm{th}(c\pi) \geq \frac{3}{4}.$$

Тогда для $n \geq n_2$ и для любого $b \in [2n - \frac{1}{2}, 2n - \frac{1}{4}]$ имеем:

$$F(b) < \frac{1}{\mathrm{ch}(c\pi)} + a\,\mathrm{th}(c\pi)\sin(b\pi) \cdot \frac{1}{bc} \leq -\frac{2\sqrt{2}}{8} \cdot a \cdot \frac{1}{bc} + \frac{a}{4} \cdot \frac{1}{bc} < 0$$

и для $b \in (2n - \frac{1}{4},\ 2n]$: $F(b) \leq \frac{1}{\mathrm{ch}(c\pi)} - \cos(b\pi) \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} < 0$.
Для $n \geq n_2$ на отрезке $[2n - \frac{1}{2},\ 2n]$ трансцедентное уравнение не имеет корней.

Отрезок $[2n + \frac{1}{2},\ 2n + 1]$

$$\forall\ b \in [2n + \frac{1}{2},\ 2n + 1] \quad \sin(b\pi) \geq 0,\ \cos(b\pi) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad F(b) > 0.$$

На этом отрезке трансцедентное уравнение не имеет корней.

Оценка θ_n и выражение для собственных значений

Можно показать существование положительных чисел b_0, b_1, таких, что

$$0 < b_0 \frac{1}{n^2} < \theta_n < b_1 \frac{1}{n^2} \quad \forall n \geq n_0.$$

Для $n \geq n_0$ соответствующие b_n собственные значения исходной задачи представляются так:

$$\lambda_n = (n + \frac{1}{2} - \theta_n)^4 + a(n + \frac{1}{2} - \theta_n)^2$$

где $\theta_n \in (0, \frac{1}{2})$ и выполняется условие, записанное выше.
Также можно доказать, что любые два решения X_n и X_m ортогональны в пространстве $L_2[0; \pi]$.

Выводы

- Было получено трансцендентное уравнение для собственных значений задачи Штурма — Лиувилля для уравнения 4-го порядка с граничными условиями, соответствующими жесткому закреплению концов;
- исследованы свойства собственных значений;
- исследованы свойства собственных функций;
- решена задача локализации собственных значений $\{\lambda_n\}$.

Список использованных источников

[1] Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд–во Московского Университа, 1984, 294 с.

[2] Эльсгольц Л. Э. Дифференциииальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Книга по Требованию, 2012, 424 с.

[3] Коллатц Л. Задачи на собственные значения. М.: Мир, 1968, 504 с.

[4] Рудаков И. А. Периодические решения квазилинейного уравнения вынужденных колебаний балки. Известия РАН. Серия математическая. — Т. 79, № 5 — 2015 — Doi: 10.4213/im8250. — С. 215–238.

[5] Рудаков И. А. Задача о колебаниях двутавровой балки с закрепленным и шарнирно опертым концами. Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2019 № 3 С. 4-21. DOI: 10.18698/1812-3368-2019-3-4-21

[6] Рудаков И. А. Периодические решения квазилинейного уравнения Эйлера—Бернулли. Дифференциальные уравнения. 2019 Т. 55 № 11 С. 1581–1583.

[7] Рудаков И. А. Уравнение колебаний балки с закрепленным и шарнирно опертым концами. Вестник МГУ. Серия 1 Математика. Механика. 2020 № 2 С. 3–8.

[8] Рудаков И. А. Задача о периодических колебаниях двутавровой балки с закрепленным концом в случае резонанса// Дифференциальные уравнения. 2020 Т. 56 № 3 С. 343–352. DOI: 10.1134/S0374064120030061.

[9] Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Физматлит, 2010. 526 с.