概率期望问题的常用套路

通过概率、期望的定义，将问题转化为计数问题或数学公式计算。利用概率论相关知识(随机变量，各种概率模型，条件概率，bayes公式，期望的可加性等)进行计算，概率只是一层皮，拆开来可能是DP、计数、数论、图论、字符串、数据结构。

什么是概率

什么是期望

随机变量

> 如果我们掷5个硬币，请回答以下问题：
>
> 1. 获得3个正面的概率是多少?
> 2. 获得少于4个正面的概率是多少?
> 3. 获得超过1个正面的概率是多少?
>
> **第一步，用函数p（）来描述概率的概念**
>
> 那么我们的一般方式将是： P（抛硬币5次时恰好获得3个正面的概率） P（抛硬币5次时少于4个正面的概率） P（抛硬币5次时获得超过1个正面的概率）
>
> **第二步，用随机变量的方式表达括号内的自然语言**
>
> 我们使用随机变量来表示上述问题，那么我们将编写：
>
> 1. P（X = 3）
> 2. P（X <4）
> 3. P（X > 1）
>
> 其中X 表示 抛硬币获得正面的次数。

抛骰子

定义

离散型随机变量

设离散型随机变量 X 的概率分布为 $p_i = P\{X = x_i\}$，若和式

$$\sum x_i p_i$$

绝对收敛，则称其值为 X 的 **期望**，记作 EX。

连续型随机变量

设连续型随机变量 X 的密度函数为 $f(x)$。若积分

$$\int_{\mathbb{R}} x f(x) \mathrm{d}x$$

绝对收敛，则称其值为 X 的 **期望**，记作 EX。

更通俗易懂的解释就是加权平均值。例子：假如有一个每面不同概率的骰子，肯定不能直接把可能的点数加起来除一下。

例题1：擅长解密的小红同学

https://ac.nowcoder.com/acm/contest/11214/B

小红要破译一个密码，密码由 0 到 9 组成，现在已知密码中每个数字出现的次数，但是不知道先后次序，每次尝试完密码都会重置，但数字的出现次数不变（所有方案等概率）。求直到密码正确的期望。

题解：

因为所有可能的方案都是等概率的，所以成功的概率就是 $\frac{1}{\text{总方案}}$

总方案

$$= \frac{(\sum_{i=0}^{9} cnt_i)!}{cnt_1! * cnt_2! * cnt_3! \cdots cnt_9!}$$

因为 cnt_i 是 1e6 级别的，所以直接预处理阶乘即可，然后算逆元即可。

所以这道题里 x = 尝试次数，$P(x) = (1-p)^{k-1} * p$

$$\begin{aligned} E[x] &= \sum_{k\ge1} k * P(x=k) \\ &= \sum_{k\ge1} k * (1-p)^{k-1} * p \end{aligned}$$

这个级数的和是 $\frac{1}{p}$ = 总方案数

例题2：CF453/A

m 个面的骰子，第 i 个面点数为 i ($1 \le i \le m$)，掷到每个面的概率均为 $\frac{1}{m}$。求独立掷 n 次的最大点数的期望 ($1 \le n, m \le 10^5$)

题解：显然这道题的随机变量是最大的点数。

然后考虑如何计算已知最大点数的概率，有两种方法

$$P(x = k) = (\frac{k}{m})^n - (\frac{k-1}{m})^n$$

这两道例题都是根据期望的定义，然后结合一些计数方面的知识。

期望的线性性

随机变量之间可以有关系

假如 $Z = X + Y$，则有联合概率 $P(Z = z) = \sum_{x+y=z} P(X = x, Y = y)$

$$\begin{aligned} E[Z] &= \sum_z z * P(Z = z) \\ &= \sum_{x,y} (x + y) * P(X = x, Y = y) \\ &= \sum_x \sum_y x * P(X = x, Y = y) + y * P(X = x, Y = y) \\ &= \sum_x x * \sum_y P(X = x, Y = y) + \sum_y y * \sum_x P(X = x, Y = y) \\ &= \sum_x x * P(X = x) + \sum_y y * P(Y = y) & = \end{aligned}$$

所以证明了两个随机变量的和的期望等于两个随机变量的期望的和。

例题3：CF1612/E

n 个学生，m 则消息，第 i 个学生需要知道第 m_i 则消息。Monocarp 可以选择贴出 t 则消息，对于学生 i 有一个值 k_i，如果 $t < k_i$，则学生 i 会读完这 t 则消息，否则学生 i 会等概率的读这 t 则消息中的 k 则。求 Monocarp 的一种贴消息的方案，使得读到自己需要的消息的学生数量的期望最大。($1 \le n, m \le 2 \times 10^5, 1 \le k \le 20$)

题解：

显然随机变量的定义 X = 读到自己需要的学生数量，利用上面的可加性

$$X = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

每个 x_i 要么 0，要么 1。0 代表没有读到，1 代表读到了

所以期望就是

$$E[x] = E[x_1] + E[x_2] + \cdots + E[x_n]$$

然后考虑如何求对于每个人的 $E[x_i]$，因为每个人只有两种情况，所以

$$E[x_i] = 1 * P(x_i = 1) + 0 * p(x_i = 0)$$

其实就是每个人读到自己需要的 m_i 概率。

接下来考虑如何计算每个人读到的概率，假如我们已经定下了 t 则，分别是 $t_1, t_2, \cdots, t_n$

- 如果里面不包含 m_i，那么概率一定是 0
- 如果包含且 $t \le k_i$ ，那么概率是 1
- 如果包含且 $t > k_i$，那么概率是 $\frac{C_{t-1}^{k_i-1}}{C_t^{k_i}} = \frac{k_i}{t}$

1. 假如 t 固定了，那么每个人的期望都可以通过上面的式子 $O(1)$ 的得到。那么问题变成了类似选择一些消息使得贡献最大。先考虑每一个 m_i 如果选的话能有多少的贡献，然后贪心的去选择大的就好了。每次确定一个 t 的时候，后面计算都要 $O(m)$ 的时间。观察到题目中的 $k_i \le 20$，所以对于 t 小的时候，可以直接枚举 t, 然后贪心的选贡献前 t 大的。
2. 对于 $t \ge 21$ 的情况，因为对于一个人来说，不会存在 $t \le k_i$ 的情况了，所以上面的概率就一定是第三种，而且随着 t 的增加，相对大小的关系不会发生变化，那么排序完枚举 t，然后直接选一个前缀即可。

两种情况分别计算，时间复杂度就是 $O(mlogm + 20 * m)$

关于期望的DP

上面的题目基本都是直接基于期望的性质或者定义来进行计算，但很多题目是无法直接计算的。

模型

给出一个有向无环图，每条有向边有一个权值 w_u。一个人从结点 x 出发，假设当前处于结点 u，则

- 如果结点 u 没有连向任何其它点，则过程停止
- 人从 u 随机的走向它的邻点 v，概率为 $P_{u,v}$，其中 $\sum_v P(u,v) = 1$，v 是和 u 有边相邻的点，且走的路程为 $w_{u,v}$

求人从 x 出发直到停止时走过的总路程的期望

D_u 代表了路程的随机变量

$$E[D_u] \quad = \quad \sum_d d * P(D_u = d)$$

再定义一个随机变量 $Next_u$ 代表 u 相连的点

$$D_u = D_{Next_u} + W_{Next_u,u}$$

$$\begin{aligned} E[D_u] &= \sum_d d * P(D_u = d) \\ &= \sum_d d * \sum_v P(u,v) * P(Du = d - w_{u,v}) \\ &= \sum_v P(u,v) \sum_d d * P(D_v = d - w_{u,v}) \\ &= \sum_v P(u,v) \sum_{d'} (d' + w(u,v)) P(D_v = d') \\ &= \sum_v P(u,v) (\sum_{d'} d' * P(D_v = d') + \sum_{d'} w(u,v) * P(D_v = d')) \\ &= \sum_v P(u,v)(E[Dv] + w(u,v)) \end{aligned}$$

整理一下就是

$E[D_u] = \sum_{u->v} P_{u,v} * (E[D_v] + w_{u,v})$

例题1：

https://atcoder.jp/contests/abc184/tasks/abc184_d

当前袋子里有金币 A 枚，银币 B 枚，铜币 C 枚，如果袋子里某种硬币超过 100 个，则结束。每次操作从袋子里等概率的拿出一枚硬币，然后将两个同类硬币放回袋子。求操作次数的期望。$(A, B, C \leq 99)$

直接按照期望的定义会十分的麻烦，考虑用期望DP，

$$dp_{a,b,c} = \frac{a}{a+b+c}(dp_{a+1,b,c} + 1) + \frac{b}{a+b+c}(dp_{a,b+1,c} + 1) + \frac{c}{a+b+c}(dp_{a,b,c+1} + 1)$$

例题2：

https://codeforces.com/gym/104396/problem/F

原题是原神的背景，我翻译了一下。有 A 个材料用来合成东西，每次合成需要花费 B 个材料，有两个人，第一个人有 p 的概率获得双倍，第二个人有 q 的概率返还一个材料，求最多能合成材料数量的期望。

$dp[x] = max(\frac{p}{100} * (dp[x - B] + 2) + (1 - \frac{p}{100}) * (dp[x - B + 1] + 1), \frac{q}{100} * (dp[x - B + 1] + 1) + (1$

因为 B = 1 的时候会有自环，但是自环也是满足的，只是不能 dp 了。

$$dp[x] = dp[x-1] + \frac{100}{100 - q}$$