CHAPITRE 3

Question éclair 3.1

a) $N(0)=1240\left(2^{0}\right)=1240(1)=1240$ lapins.

b) $N(3)=1240\left(2^{3/5}\right)\approx 1879$ lapins.

Question éclair 3.2

a) Comme x^2 est un polynôme, c'est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ (théorème 1.4). De plus, en vertu du théorème 3.1, $e^{-x}=\left(e^{-1}\right)^{x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ puisque c'est une fonction exponentielle de base e^{-1}. Par le théorème 1.5, x^2e^{-x} est donc continue sur $\mathbb{R}$ (produit de fonctions continues). Par conséquent,

$$\lim_{x\to -1} x^2e^{-x}=(-1)^2e^{-(-1)}=e\approx 2{,}718$$

b) Par le théorème 3.1, 2^x et $2^{-x}=\left(2^{-1}\right)^{x}$ sont continues sur $\mathbb{R}$ puisque ce sont des fonctions exponentielles de base 2 et 2^{-1} respectivement. Alors, en vertu du théorème 1.5, 2^x-2^{-x} et 2^x+2^{-x} sont continues sur $\mathbb{R}$ (différence et somme de fonctions continues). Comme $2^x>0$ et $2^{-x}>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a que $2^x+2^{-x}>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. En vertu du théorème 1.5, $\dfrac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas). Alors,

$$\lim_{x\to 1}\frac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}=\frac{2-2^{-1}}{2+2^{-1}}=\frac{2-\frac{1}{2}}{2+\frac{1}{2}}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}}=\frac{3}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{5}=\frac{3}{5}$$

Exercices 3.1

1. *a)* $\displaystyle\lim_{x\to 9}\frac{2^{\sqrt{x}}}{e^{x-9}+2}=\frac{2^{\sqrt{9}}}{e^{9-9}+2}=\frac{8}{3}$

   b) Puisque $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty$, on a $\underbrace{\lim_{x\to 0^+} 2^{1/x}}_{\substack{\text{forme } b^{\infty}\\ \text{avec } b=2>1}}=\infty$.

c) Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-1)=-\infty$, on a $\underbrace{\lim\limits_{x\to-\infty} 4^{2x-1}}_{\substack{\text{forme } b^{-\infty} \\ \text{avec } b=4>1}}=0$.

d) Puisque $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}=\infty$, on a $\underbrace{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{x}}}_{\substack{\text{forme } b^{\infty} \\ \text{avec } 0<b=\frac{1}{2}<1}}=0$.

e) Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^2\right)=-\infty$, on a $\underbrace{\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x^2}}_{\substack{\text{forme } b^{-\infty} \\ \text{avec } b=e>1}}=0$.

2. a) $Q(50)=150e^{-0{,}02(50)}=150e^{-1}\approx 55{,}2\text{ g}$

b) Puisque $\lim\limits_{t\to\infty}(-0{,}02t)=-\infty$, on a

$$\lim_{t\to\infty}\left(150e^{-0{,}02t}\right)=150\underbrace{\lim_{t\to\infty}\left(e^{-0{,}02t}\right)}_{\substack{\text{forme } b^{-\infty} \\ \text{avec } b=e>1}}=150(0)=0\text{ g}$$

c) À long terme, la substance radioactive se désintègre complètement.

Questions éclair 3.3

1. a) $\log 132\approx 2{,}121$

b) $\ln 272\approx 5{,}606$

c) $\log_5 45=\dfrac{\log 45}{\log 5}\approx 2{,}365$ ou $\log_5 45=\dfrac{\ln 45}{\ln 5}\approx 2{,}365$

d) $\log_{2/3} 75=\dfrac{\log 75}{\log\left(\frac{2}{3}\right)}\approx -10{,}648$ ou $\log_{2/3} 75=\dfrac{\ln 75}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}\approx -10{,}648$

e) $\ln e^6=6$, par la propriété $\ln e^q=q$.

f) On a

$$\begin{aligned}\log_2 8^4 &= 4\left(\log_2 8\right) && \text{propriété : } \log_b M^q = q\log_b M\\ &= 4(3) && \text{car } \log_2 8 = x \Leftrightarrow 2^x = 8 \Leftrightarrow x=3\\ &= 12\end{aligned}$$

2. Comme $N(0)=1240\left(2^0\right)=1240$ lapins, on compte initialement 1 240 lapins dans la population. On cherche t tel que $N(t)=3(1240)=3\,720$ lapins. On obtient

$$\begin{aligned} N(t) &= 3\,720 \\ 1240\left(2^{t/5}\right) &= 3\,720 \\ 2^{t/5} &= 3 \\ \ln\left(2^{t/5}\right) &= \ln 3 \\ \frac{t}{5}\cdot \ln 2 &= \ln 3 \\ t &= \frac{5\ln 3}{\ln 2} \\ t &\approx 7{,}925 \text{ années} \end{aligned}$$

Par conséquent, la population de lapins aura triplé au bout d'environ 7,925 années (ou environ 7 ans et 11 mois).

Question éclair 3.4

a) Posons $g(x)=7x-1$ et $f(x)=\log_9 x$. Alors, $f(g(x))=f(7x-1)=\log_9(7x-1)$. La fonction $g(x)=7x-1$ est continue en $x=4$, car c'est un polynôme (théorème 1.4). De plus, en vertu du théorème 3.2, la fonction $f(x)=\log_9 x$ est continue en $g(4)$, car $g(4)=7(4)-1=27>0$. Par conséquent, en vertu du théorème 1.7 portant sur la continuité des fonctions composées, la fonction $f(g(x))=\log_9(7x-1)$ est continue en $x=4$, de sorte que

$$\lim_{x\to 4}\log_9(7x-1)=\log_9 27=\frac{\ln 27}{\ln 9}=1{,}5$$

b) On a que x est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, car c'est un polynôme (théorème 1.4). De plus, par le théorème 3.2, la fonction $\ln x$ est continue sur $]0,\infty[$, car c'est une fonction logarithmique de base e. Alors, en vertu du théorème 1.5, la fonction $x\ln x$ est continue sur $]0,\infty[$ (produit de fonctions continues). Par ailleurs, on a que 1 est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, car c'est un polynôme (théorème 1.4). De plus, par le théorème 3.1, 3^x est continue sur $\mathbb{R}$, car c'est une fonction exponentielle de base 3. Alors, en vertu du théorème 1.5, $1+3^x$ est continue sur $\mathbb{R}$ (somme de fonctions continues). Comme $3^x>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a que $1+3^x>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. En vertu du théorème 1.5, $\dfrac{x\ln x}{1+3^x}$ est continue sur $]0,\infty[$ (quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas). Alors,

$$\lim_{x\to 3}\frac{x\ln x}{1+3^x}=\frac{3\ln 3}{1+3^3}=\frac{3\ln 3}{28}\approx 0{,}118$$

Exercices 3.2

1. *a)* $\lim_{x\to e}\left[x\ln\left(x^3\right)\right]=e\ln\left(e^3\right)=3e\approx 8{,}155$

   b) $\underbrace{\lim_{x\to 2^+}\log_{1/2}(3x-6)}_{\substack{\text{forme } \log_b\left(0^+\right)\\ \text{avec } 0<b=1/2<1}}=\infty$

   c) $\underbrace{\lim_{x\to\infty}\log\left(x^3+2\right)}_{\substack{\text{forme } \log_b \infty\\ \text{avec } b=10>1}}=\infty$

   d) $\lim_{x\to 4^-}\log_7\left(\dfrac{x-4}{x+4}\right)$ n'existe pas puisque l'argument de la fonction logarithmique est négatif. Par conséquent, $\lim_{x\to 4}\log_7\left(\dfrac{x-4}{x+4}\right)$ n'existe pas.

   e) $\underbrace{\lim_{x\to 0^-}\ln\left(x^2\right)}_{\substack{\text{forme } \log_b\left(0^+\right)\\ \text{avec } b=e>1}}=-\infty=\underbrace{\lim_{x\to 0^+}\ln\left(x^2\right)}_{\substack{\text{forme } \log_b\left(0^+\right)\\ \text{avec } b=e>1}}$, de sorte que $\lim_{x\to 0}\ln\left(x^2\right)=-\infty$.

2. On cherche t tel que $Q(t)=75$ g. On a

$$\begin{aligned}
Q(t)&=75\\
150e^{-0{,}02t}&=75\\
e^{-0{,}02t}&=1/2\\
\ln\left(e^{-0{,}02t}\right)&=\ln\left(1/2\right)\\
\ln\left(e^{-0{,}02t}\right)&=\ln 1-\ln 2 && \text{propriété : } \ln\left(M/N\right)=\ln M-\ln N\\
\ln\left(e^{-0{,}02t}\right)&=-\ln 2 && \text{car } \ln 1=0\\
-0{,}02t&=-\ln 2 && \text{propriété : } \ln\left(e^q\right)=q\\
t&=\frac{\ln 2}{0{,}02}\\
t&=50\ln 2 \text{ années}\\
t&\approx 34{,}7 \text{ années}
\end{aligned}$$

Par conséquent, il restera 75 g de la substance radioactive au bout d'environ 34,7 années (ou environ 34 ans et 8 mois).

Question éclair 3.5

a) $$\frac{df}{dx}=\frac{d}{dx}\left(4e^{x^3-2x+1}\right)=4e^{x^3-2x+1}\frac{d}{dx}(x^3-2x+1)=4(3x^2-2)e^{x^3-2x+1}$$

b) $$\frac{dg}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{t}{e^{4t}}\right)=\frac{e^{4t}\frac{d}{dt}(t)-t\frac{d}{dt}(e^{4t})}{(e^{4t})^2}=\frac{e^{4t}-te^{4t}\frac{d}{dt}(4t)}{(e^{4t})^2}=\frac{e^{4t}-4te^{4t}}{(e^{4t})^2}$$
$$=\frac{e^{4t}(1-4t)}{(e^{4t})^2}=\frac{1-4t}{e^{4t}}$$

Question éclair 3.6

a) $$\frac{df}{dt}=\frac{d}{dt}\left[8\left(\tfrac{3}{4}\right)^{t^2}+5^3\right]=8\left(\tfrac{3}{4}\right)^{t^2}\ln\left(\tfrac{3}{4}\right)\frac{d}{dt}(t^2)+0$$
$$=8\left(\tfrac{3}{4}\right)^{t^2}\left[\ln\left(\tfrac{3}{4}\right)\right](2t)=16t\left[\ln\left(\tfrac{3}{4}\right)\right]\left(\tfrac{3}{4}\right)^{t^2}$$

b) $$\frac{dg}{dx}=\frac{d}{dx}\left[x^2(3^{1-2x})\right]=x^2\frac{d}{dx}(3^{1-2x})+3^{1-2x}\frac{d}{dx}(x^2)$$
$$=x^2(3^{1-2x})(\ln 3)\frac{d}{dx}(1-2x)+3^{1-2x}(2x)$$
$$=x^2(3^{1-2x})(\ln 3)(-2)+2x(3^{1-2x})$$
$$=2x(3^{1-2x})[-(\ln 3)x+1]$$

Exercices 3.3

1. a) $$\frac{df}{dx}=\frac{d}{dx}(x^4+4^x+4^{-x}-4x)=4x^3+4^x\ln 4+4^{-x}\ln 4\frac{d}{dx}(-x)-4$$
$$=4x^3+4^x\ln 4-4^{-x}\ln 4-4$$

b) $$\frac{dg}{dt}=\frac{d}{dt}(e^{2t}+2e^{-3t}-e^{\pi})=e^{2t}\frac{d}{dt}(2t)+2e^{-3t}\frac{d}{dt}(-3t)-0=2e^{2t}-6e^{-3t}$$

c) $$\frac{dh}{dx}=\frac{d}{dx}\left[(2x^3+1)e^{-x^2}\right]=(2x^3+1)\frac{d}{dx}(e^{-x^2})+e^{-x^2}\frac{d}{dx}(2x^3+1)$$
$$=(2x^3+1)e^{-x^2}\frac{d}{dx}(-x^2)+6x^2e^{-x^2}=-2x(2x^3+1)e^{-x^2}+6x^2e^{-x^2}$$
$$=2xe^{-x^2}\left[-(2x^3+1)+3x\right]=2xe^{-x^2}(-2x^3+3x-1)$$

d) $$\frac{df}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{2^t-2^{-t}}{2^t+2^{-t}}\right)=\frac{(2^t+2^{-t})\frac{d}{dt}(2^t-2^{-t})-(2^t-2^{-t})\frac{d}{dt}(2^t+2^{-t})}{(2^t+2^{-t})^2}$$

$$= \frac{(2^t+2^{-t})\left[2^t\ln 2 - 2^{-t}\ln 2\frac{d}{dt}(-t)\right]-(2^t-2^{-t})\left[2^t\ln 2+2^{-t}\ln 2\frac{d}{dt}(-t)\right]}{(2^t+2^{-t})^2}$$

$$= \frac{(2^t+2^{-t})(2^t\ln 2+2^{-t}\ln 2)-(2^t-2^{-t})(2^t\ln 2-2^{-t}\ln 2)}{(2^t+2^{-t})^2}$$

$$= \frac{2^{2t}\ln 2+2^0\ln 2+2^0\ln 2+2^{-2t}\ln 2-(2^{2t}\ln 2-2^0\ln 2-2^0\ln 2+2^{-2t}\ln 2)}{(2^t+2^{-t})^2}$$

$$= \frac{2^{2t}\ln 2+\ln 2+\ln 2+2^{-2t}\ln 2-2^{2t}\ln 2+\ln 2+\ln 2-2^{-2t}\ln 2}{(2^t+2^{-t})^2}$$

$$= \frac{4\ln 2}{(2^t+2^{-t})^2}$$

On peut réécrire le dernier résultat sous une forme équivalente :

$$\frac{df}{dt} = \frac{4\ln 2}{(2^t+2^{-t})^2} = \frac{4\ln 2}{\left(2^t+\frac{1}{2^t}\right)^2} = \frac{4\ln 2}{\left(\frac{2^{2t}+1}{2^t}\right)^2} = \frac{4\ln 2}{\frac{(4^t+1)^2}{(2^t)^2}}$$

$$= 4\ln 2\cdot\frac{2^{2t}}{(4^t+1)^2} = 4\ln 2\cdot\frac{4^t}{(4^t+1)^2} = \frac{4^{t+1}\ln 2}{(4^t+1)^2}$$

2. Dérivons chaque membre de l'égalité par rapport à x, en considérant y comme une fonction dérivable de x, puis isolons $\frac{dy}{dx}$.

$$2^{xy} = (x+y)^3$$

$$\frac{d}{dx}(2^{xy}) = \frac{d}{dx}\left[(x+y)^3\right]$$

$$2^{xy}\ln 2\frac{d}{dx}(xy) = 3(x+y)^2\frac{d}{dx}(x+y)$$

$$2^{xy}\ln 2\left[x\frac{d}{dx}(y)+y\frac{d}{dx}(x)\right] = 3(x+y)^2\left[1+\frac{dy}{dx}\right]$$

$$2^{xy}\ln 2\left[x\frac{dy}{dx}+y\right] = 3(x+y)^2\left[1+\frac{dy}{dx}\right]$$

$$x2^{xy}\ln 2\frac{dy}{dx}+y2^{xy}\ln 2 = 3(x+y)^2+3(x+y)^2\frac{dy}{dx}$$

$$x2^{xy}\ln 2\frac{dy}{dx}-3(x+y)^2\frac{dy}{dx} = 3(x+y)^2-y2^{xy}\ln 2$$

$$\left[x2^{xy}\ln 2-3(x+y)^2\right]\frac{dy}{dx}=3(x+y)^2-y2^{xy}\ln 2$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3(x+y)^2-y2^{xy}\ln 2}{x2^{xy}\ln 2-3(x+y)^2}$$

3. a) $\frac{dT}{dt}=\frac{d}{dt}\left(22+73e^{-0{,}046\,67t}\right)=0+73e^{-0{,}046\,67t}\frac{d}{dt}(-0{,}046\,67t)$

$=73e^{-0{,}046\,67t}(-0{,}046\,67)=-3{,}406\,91e^{-0{,}046\,67t}$ °C/min

b) $\left.\frac{dT}{dt}\right|_{t=5}=-3{,}406\,91e^{-0{,}046\,67(5)}\approx -2{,}7$ °C/min

c) Au bout de 5 min, la température du café diminue à raison d'environ 2,7 °C par minute.

Question éclair 3.7

a) $\frac{df}{dx}=\frac{d}{dx}\left[\log_2\left(\sqrt{x}\right)\right]=\frac{1}{\left(\sqrt{x}\right)\ln 2}\frac{d}{dx}\left(x^{1/2}\right)=\frac{1}{\left(\sqrt{x}\right)\ln 2}\left(\tfrac{1}{2}x^{-1/2}\right)$

$=\frac{1}{\left(\sqrt{x}\right)\ln 2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2x\ln 2}$

b) $\frac{dg}{dt}=\frac{d}{dt}\left[2t^3\ln(4t)\right]=2t^3\frac{d}{dt}\left[\ln(4t)\right]+\ln(4t)\frac{d}{dt}\left(2t^3\right)$

$=2t^3\cdot\frac{1}{4t}\cdot\frac{d}{dt}(4t)+6t^2\ln(4t)=\frac{1}{2}t^2(4)+6t^2\ln(4t)$

$=2t^2+6t^2\ln(4t)=2t^2\left[1+3\ln(4t)\right]$

Exercices 3.4

1. a) $\frac{ds}{dt}=\frac{d}{dt}\left[\log_5\left(3t^2-4t+5\right)\right]=\frac{1}{\left(3t^2-4t+5\right)\ln 5}\frac{d}{dt}\left(3t^2-4t+5\right)=\frac{6t-4}{\left(3t^2-4t+5\right)\ln 5}$

b) $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[\frac{\ln(2x)}{e^{3x^2-x}}\right]=\frac{e^{3x^2-x}\frac{d}{dx}\left[\ln(2x)\right]-\ln(2x)\frac{d}{dx}\left(e^{3x^2-x}\right)}{\left(e^{3x^2-x}\right)^2}$

$$= \frac{e^{3x^2-x}\cdot\frac{1}{2x}\cdot\frac{d}{dx}(2x) - e^{3x^2-x}\ln(2x)\frac{d}{dx}(3x^2-x)}{\left(e^{3x^2-x}\right)^2}$$

$$= \frac{e^{3x^2-x}\cdot\frac{1}{\cancel{2}x}\cancel{(2)} - (6x-1)e^{3x^2-x}\ln(2x)}{\left(e^{3x^2-x}\right)^2} = \frac{e^{3x^2-x}\left[\frac{1}{x} - (6x-1)\ln(2x)\right]}{\left(e^{3x^2-x}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{x} - \frac{x(6x-1)\ln(2x)}{x}}{e^{3x^2-x}} = \frac{1 - x(6x-1)\ln(2x)}{x}\cdot\frac{1}{e^{3x^2-x}}$$

$$= \frac{1 - x(6x-1)\ln(2x)}{xe^{3x^2-x}}$$

2. Dérivons chaque membre de l'égalité par rapport à x, en considérant y comme une fonction dérivable de x, puis isolons $\frac{dy}{dx}$.

$$x^3\ln(2y) + xy^2 = e^{-x}$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^3\ln(2y)\right] + \frac{d}{dx}(xy^2) = \frac{d}{dx}(e^{-x})$$

$$x^3\frac{d}{dx}\left[\ln(2y)\right] + \ln(2y)\frac{d}{dx}(x^3) + x\frac{d}{dx}(y^2) + y^2\frac{d}{dx}(x) = e^{-x}\frac{d}{dx}(-x)$$

$$x^3\cdot\frac{1}{2y}\cdot\frac{d}{dx}(2y) + 3x^2\ln(2y) + x\left(2y\frac{dy}{dx}\right) + y^2 = -e^{-x}$$

$$\frac{x^3}{\cancel{2}y}\left(\cancel{2}\frac{dy}{dx}\right) + 3x^2\ln(2y) + 2xy\frac{dy}{dx} + y^2 = -e^{-x}$$

$$\frac{x^3}{y}\frac{dy}{dx} + 2xy\frac{dy}{dx} = -e^{-x} - 3x^2\ln(2y) - y^2$$

$$\left(\frac{x^3}{y} + 2xy\right)\frac{dy}{dx} = -e^{-x} - 3x^2\ln(2y) - y^2$$

$$\left(\frac{x^3 + 2xy^2}{y}\right)\frac{dy}{dx} = -e^{-x} - 3x^2\ln(2y) - y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\left(-e^{-x} - 3x^2\ln(2y) - y^2\right)}{x^3 + 2xy^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y\left(e^{-x} + 3x^2\ln(2y) + y^2\right)}{x^3 + 2xy^2}$$

Exercice 3.5

a) Comme $x < \frac{1}{4}$, on a $1-4x>0$ et $y>0$, de sorte que $\ln(1-4x)$ et $\ln y$ sont définis. Appliquons le logarithme naturel à chaque membre de l'équation :

$$y = (1-4x)^{2x}$$
$$\ln y = \ln\left[(1-4x)^{2x}\right]$$
$$\ln y = 2x\ln(1-4x)$$

Dérivons implicitement par rapport à x :

$$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}[2x\ln(1-4x)]$$
$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 2x\frac{d}{dx}[\ln(1-4x)] + \ln(1-4x)\frac{d}{dx}(2x)$$
$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 2x\cdot\frac{1}{1-4x}\cdot\frac{d}{dx}(1-4x) + 2\ln(1-4x)$$
$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{1-4x}\cdot(-4) + 2\ln(1-4x)$$
$$\frac{dy}{dx} = y\left[-\frac{8x}{1-4x} + 2\ln(1-4x)\right]$$
$$\frac{dy}{dx} = (1-4x)^{2x}\left[-\frac{8x}{1-4x} + \frac{2(1-4x)\ln(1-4x)}{1-4x}\right]$$
$$\frac{dy}{dx} = (1-4x)^{2x-1}[-8x + 2(1-4x)\ln(1-4x)]$$

b) Comme $x > -2$, $e^{x^2} > 0$ et $x^2+1>0$, on a $2x+4>0$ et $y>0$, de sorte que $\ln\left(e^{x^2}\right)$, $\ln(2x+4)$, $\ln\left(x^2+1\right)$ et $\ln y$ sont définis. Appliquons le logarithme naturel à chaque membre de l'équation :

$$y = \frac{e^{x^2}\sqrt{2x+4}}{\left(x^2+1\right)^7} = \frac{e^{x^2}(2x+4)^{1/2}}{\left(x^2+1\right)^7}$$
$$\ln y = \ln\left[\frac{e^{x^2}(2x+4)^{1/2}}{\left(x^2+1\right)^7}\right]$$
$$\ln y = \ln\left[e^{x^2}(2x+4)^{1/2}\right] - \ln\left[\left(x^2+1\right)^7\right]$$
$$\ln y = \ln\left(e^{x^2}\right) + \ln\left[(2x+4)^{1/2}\right] - \ln\left[\left(x^2+1\right)^7\right]$$
$$\ln y = x^2 + \tfrac{1}{2}\ln(2x+4) - 7\ln\left(x^2+1\right)$$

Dérivons implicitement par rapport à x :

$$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}\left[x^2 + \tfrac{1}{2}\ln(2x+4) - 7\ln\left(x^2+1\right)\right]$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 2x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x+4}\cdot\frac{d}{dx}(2x+4) - 7\cdot\frac{1}{x^2+1}\cdot\frac{d}{dx}\left(x^2+1\right)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 2x + \frac{1}{\cancel{2}(2x+4)}(\cancel{2}) - \frac{7}{x^2+1}(2x)$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left(2x + \frac{1}{2x+4} - \frac{14x}{x^2+1}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \left[\frac{e^{x^2}\sqrt{2x+4}}{\left(x^2+1\right)^7}\right]\left(2x + \frac{1}{2x+4} - \frac{14x}{x^2+1}\right)$$

Nous omettrons la mise au même dénominateur de cette dernière expression.

Questions éclair 3.8

1. *a)* On a

$$360° = 2\pi \text{ rad}$$
$$-75° = \theta$$

Alors, $\theta = \frac{-75°(2\pi \text{ rad})}{360°} = -\frac{150\pi}{360} \text{ rad} = -\frac{5\pi}{12} \text{ rad} \approx -1{,}31 \text{ rad}$. Par conséquent, $-75° = -{}^{5\pi}\!/_{12} \text{ rad} \approx -1{,}31 \text{ rad}$.

b) On a

$$360° = 2\pi \text{ rad}$$
$$194° = \theta$$

Alors, $\theta = \frac{194°(2\pi \text{ rad})}{360°} = \frac{388\pi}{360} \text{ rad} = \frac{97\pi}{90} \text{ rad} \approx 3{,}39 \text{ rad}$. Par conséquent, $194° = {}^{97\pi}\!/_{90} \text{ rad} \approx 3{,}39 \text{ rad}$.

2. *a)* On a

$$360° = 2\pi \text{ rad}$$
$$\theta = {}^{17\pi}\!/_{9} \text{ rad}$$

Alors, $\theta = \dfrac{360°(17\pi/9 \text{ rad})}{2\pi \text{ rad}} = 340°$. Par conséquent, $17\pi/9 \text{ rad} = 340°$.

b) On a

$$360° = 2\pi \text{ rad}$$
$$\theta = -1{,}5 \text{ rad}$$

Alors, $\theta = \dfrac{360°(-1{,}5 \text{ rad})}{2\pi \text{ rad}} = \left(-270/\pi\right)° \approx -85{,}94°$. Par conséquent, $-1{,}5 \text{ rad} = \left(-270/\pi\right)° \approx -85{,}94°$.

3. *a)* On a

$\sin(138°) \approx 0{,}669$ $\qquad \operatorname{cosec}(138°) = \dfrac{1}{\sin(138°)} \approx 1{,}494$

$\cos(138°) \approx -0{,}743$ $\qquad \sec(138°) = \dfrac{1}{\cos(138°)} \approx -1{,}346$

$\operatorname{tg}(138°) \approx -0{,}900$ $\qquad \operatorname{cotg}(138°) = \dfrac{1}{\operatorname{tg}(138°)} \approx -1{,}111$

b) On a

$\sin\left(11\pi/8\right) \approx -0{,}924$ $\qquad \operatorname{cosec}\left(11\pi/8\right) = \dfrac{1}{\sin\left(11\pi/8\right)} \approx -1{,}082$

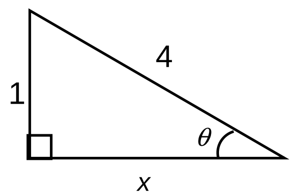
$\cos\left(11\pi/8\right) \approx -0{,}383$ $\qquad \sec\left(11\pi/8\right) = \dfrac{1}{\cos\left(11\pi/8\right)} \approx -2{,}613$

$\operatorname{tg}\left(11\pi/8\right) \approx 2{,}414$ $\qquad \operatorname{cotg}\left(11\pi/8\right) = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\left(11\pi/8\right)} \approx 0{,}414$

Question éclair 3.9

Soit x la mesure du côté manquant. On a

$x^2 + 1^2 = 4^2 \Rightarrow x^2 = 15 \Rightarrow x = \sqrt{15} \approx 3{,}87$



a) $\sin\theta = \dfrac{\text{mesure du côté opposé à l'angle } \theta}{\text{mesure de l'hypoténuse}} = \dfrac{1}{4}$

b) $\cos\theta = \dfrac{\text{mesure du côté adjacent à l'angle } \theta}{\text{mesure de l'hypoténuse}} = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$

c) $\text{tg}\,\theta = \dfrac{\text{mesure du côté opposé à l'angle } \theta}{\text{mesure du côté adjacent à l'angle } \theta} = \dfrac{1}{\sqrt{15}} = \dfrac{1}{\sqrt{15}} \cdot \dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{15}} = \dfrac{\sqrt{15}}{15}$

d) $\text{cosec}\,\theta = \dfrac{\text{mesure de l'hypoténuse}}{\text{mesure du côté opposé à l'angle } \theta} = \dfrac{4}{1} = 4$

e) $\sec\theta = \dfrac{\text{mesure de l'hypoténuse}}{\text{mesure du côté adjacent à l'angle } \theta} = \dfrac{4}{\sqrt{15}} = \dfrac{4}{\sqrt{15}} \cdot \dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{15}} = \dfrac{4\sqrt{15}}{15}$

f) $\text{cotg}\,\theta = \dfrac{\text{mesure du côté adjacent à l'angle } \theta}{\text{mesure du côté opposé à l'angle } \theta} = \dfrac{\sqrt{15}}{1} = \sqrt{15}$

Question éclair 3.10

En vertu du théorème 3.6, la fonction $\cos x$ est continue sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, on a que la fonction $3x^2 - 12$ est continue sur $\mathbb{R}$, car c'est un polynôme (théorème 1.4). De plus, par le théorème 3.1, la fonction 2^x est continue sur $\mathbb{R}$, car c'est une fonction exponentielle de base 2. Alors, en vertu du théorème 1.5, la fonction $(3x^2 - 12)2^x$ est continue sur $\mathbb{R}$ (produit de fonctions continues).

Par conséquent, la fonction $f(x) = \dfrac{\cos x}{(3x^2 - 12)2^x}$ est le quotient de deux fonctions continues. Elle est donc continue pour toutes les valeurs de x qui n'annulent pas le dénominateur. Comme $2^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, le dénominateur s'annule si $3x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 12 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } x = 2$. En vertu du théorème 1.5, la fonction $f(x) = \dfrac{\cos x}{(3x^2 - 12)2^x}$ est donc continue si $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2, 2\}$.

Exercices 3.6

1. *a)* En vertu du théorème 3.6, la fonction $\cos x$ est continue sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, on a que la fonction constante 1 est continue sur $\mathbb{R}$, car c'est un polynôme (théorème 1.4). La fonction $f(x) = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ est le quotient de deux fonctions continues. Elle est donc continue pour toutes les valeurs de x qui n'annulent pas le dénominateur. Le dénominateur s'annule quand x est un multiple impair de $\dfrac{\pi}{2}$, c'est-à-dire lorsque $x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, où $k \in \mathbb{Z}$ (par

exemple, $x=\frac{\pi}{2}, x=\frac{3\pi}{2},\ldots$). En vertu du théorème 1.5, la fonction $f(x)=\sec x$ est donc continue si $x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$ (où $k\in\mathbb{Z}$), c'est-à-dire si $x\in\mathbb{R}\backslash\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

b) En vertu du théorème 3.1, la fonction e^x est continue sur $\mathbb{R}$ puisque c'est une fonction exponentielle de base e. Par ailleurs, $\sin x$ est continue sur $\mathbb{R}$ (théorème 3.6). La fonction $f(x)=\frac{e^x}{\sin x}$ est le quotient de deux fonctions continues. Elle est donc continue pour toutes les valeurs de x qui n'annulent pas le dénominateur. Le dénominateur s'annule quand x est un multiple de π, c'est-à-dire lorsque $x=k\pi$, où $k\in\mathbb{Z}$ (par exemple, $x=0$, $x=\pi$, $x=2\pi$, …). En vertu du théorème 1.5, la fonction $f(x)=\frac{e^x}{\sin x}$ est donc continue si $x\neq k\pi$ (où $k\in\mathbb{Z}$), c'est-à-dire si $x\in\mathbb{R}\backslash\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$.

c) Comme $6x$ est un polynôme, c'est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ (théorème 1.4). De plus, $\cos x$ est continue sur $\mathbb{R}$ (théorème 3.6). Par conséquent, en vertu du théorème 1.7, $\cos 6x$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Par ailleurs, comme $2x-4$ est un polynôme, c'est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ (théorème 1.4). De plus, en vertu du théorème 3.2, $\ln x$ est continue si $x>0$. Par conséquent, en vertu du théorème 1.7, $\ln(2x-4)$ est continue si $2x-4>0$, c'est-à-dire si $x>2$.

La fonction $f(x)=\ln(2x-4)\cos 6x$ est donc continue si $x\in\,]2,\infty[$, car c'est le produit de deux fonctions continues sur cet intervalle (théorème 1.5).

2. a) $$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin x+3}{2\cos(3x)}=\frac{0(\sin 0)+3}{2\cos 0}=\frac{3}{2}$$

b) $$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{4}\right)^-}\operatorname{tg}(2x)=\underbrace{\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{4}\right)^-}\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}}_{\text{forme } \frac{1}{0^+}}=\infty$$

c) $$\lim_{x\to\pi}\sec\left(\frac{x}{3}\right)=\sec\left(\frac{\pi}{3}\right)=2$$

d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\left(x^2\operatorname{cosec}x\right)=\left(\frac{\pi}{6}\right)^2\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi^2}{36}(2)=\frac{\pi^2}{18}$

e) $\lim\limits_{x\to 2\pi^-}\frac{\operatorname{cotg}x}{x}=\underbrace{\lim\limits_{x\to 2\pi^-}\frac{\cos x}{x\sin x}}_{\text{forme }\frac{1}{0^-}}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 2\pi^+}\frac{\operatorname{cotg}x}{x}=\underbrace{\lim\limits_{x\to 2\pi^+}\frac{\cos x}{x\sin x}}_{\text{forme }\frac{1}{0^+}}=\infty$, de sorte que

$\lim\limits_{x\to 2\pi}\frac{\operatorname{cotg}x}{x}$ n'existe pas.

Question éclair 3.11

a) $$\begin{aligned}\frac{1}{\sin x}-\frac{\cos x}{\operatorname{tg}x}&=\frac{1}{\sin x}-\frac{\cos x}{\frac{\sin x}{\cos x}}\\&=\frac{1}{\sin x}-\frac{\cos^2 x}{\sin x}\\&=\frac{1-\cos^2 x}{\sin x}\\&=\frac{\sin^2 x}{\sin x}\qquad\text{identité 1 : }1-\cos^2 x=\sin^2 x\\&=\sin x\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}1+\frac{\operatorname{tg}^2\theta}{1+\sec\theta}&=\frac{1+\sec\theta}{1+\sec\theta}+\frac{\operatorname{tg}^2\theta}{1+\sec\theta}\\&=\frac{1+\sec\theta+\operatorname{tg}^2\theta}{1+\sec\theta}\\&=\frac{\sec\theta+\sec^2\theta}{1+\sec\theta}\qquad\text{identité 2 : }1+\operatorname{tg}^2\theta=\sec^2\theta\\&=\frac{\sec\theta\cancel{(1+\sec\theta)}}{\cancel{1+\sec\theta}}\\&=\sec\theta\end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned}4\sin t\cos t-8\sin^3 t\cos t&=4\sin t\cos t\left(1-2\sin^2 t\right)\\&=2(2\sin t\cos t)\left(1-2\sin^2 t\right)\\&=2\sin(2t)\left(1-2\sin^2 t\right)\qquad\text{identité 12 : }2\sin t\cos t=\sin(2t)\\&=2\sin(2t)\cos(2t)\qquad\text{identité 9 : }1-2\sin^2 t=\cos(2t)\\&=\sin(4t)\qquad\text{identité 12 : }2\sin(2t)\cos(2t)=\sin[2(2t)]\end{aligned}$$

Question éclair 3.12

Si $x > 0$, on a

$$\begin{array}{ccccc}
-1 & \leq & \sin x & \leq & 1 \\
-\dfrac{1}{x} & \leq & \dfrac{\sin x}{x} & \leq & \dfrac{1}{x} \\
\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right) & \leq & \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x} & \leq & \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x} \\
0 & \leq & \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x} & \leq & 0
\end{array}$$

Par conséquent, en vertu du théorème du sandwich, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x} = 0$.

Exercices 3.7

1. Comme $e^{-x} > 0$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccccc}
-1 & \leq & \sin x & \leq & 1 \\
-e^{-x} & \leq & e^{-x}\sin x & \leq & e^{-x} \\
-e^{-x}+2 & \leq & e^{-x}\sin x + 2 & \leq & e^{-x}+2 \\
\lim\limits_{x\to\infty}(-e^{-x}+2) & \leq & \lim\limits_{x\to\infty}(e^{-x}\sin x+2) & \leq & \lim\limits_{x\to\infty}(e^{-x}+2) \\
2 & \leq & \lim\limits_{x\to\infty}(e^{-x}\sin x+2) & \leq & 2
\end{array}$$

Par conséquent, en vertu du théorème du sandwich, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{-x}\sin x + 2\right) = 2$.

2. *a)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\cos(2x)} = \dfrac{2(0)}{\cos[2(0)]} = \dfrac{0}{1} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\operatorname{cotg}(2x)}{4x} = \underbrace{\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\cos(2x)}{4x\sin(2x)}}_{\text{forme } \frac{1}{0^+}} = \infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\operatorname{cotg}(2x)}{4x} = \underbrace{\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cos(2x)}{4x\sin(2x)}}_{\text{forme } \frac{1}{0^+}} = \infty$, de sorte que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{cotg}(2x)}{4x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(2x)}{4x\sin(2x)} = \infty$.

c) Lorsque $x \to 0$, on a $u = 2x \to 0$ et

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\sin(2x)}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{2x}{\sin(2x)}\cdot\frac{5\cancel{x}}{2\cancel{x}}\right]=\frac{5}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin(2x)}=\frac{5}{2}\lim_{u\to 0}\frac{u}{\sin u}=\frac{5}{2}(1)=\frac{5}{2}$$

d) Lorsque $x\to 0$, on a $u=3x\to 0$ et $v=4x\to 0$. Alors,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{\operatorname{tg}(4x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)\cos(4x)}{\sin(4x)}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin(3x)}{3x}\cdot\frac{4x}{\sin(4x)}\cdot\frac{3\cancel{x}\cos(4x)}{4\cancel{x}}\right]$$

$$=\left[\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{3x}\right]\left[\lim_{x\to 0}\frac{4x}{\sin(4x)}\right]\left[\lim_{x\to 0}\frac{3\cos(4x)}{4}\right]$$

$$=\left[\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}\right]\left[\lim_{v\to 0}\frac{v}{\sin v}\right]\left(\frac{3}{4}\right)=(1)(1)\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{4}$$

Question éclair 3.13

a) $$\frac{df}{dt}=\frac{d}{dt}[\sin(\ln t)]=\cos(\ln t)\frac{d}{dt}(\ln t)=\cos(\ln t)\cdot\frac{1}{t}=\frac{\cos(\ln t)}{t}$$

b) $$\frac{dg}{dx}=\frac{d}{dx}[-3x^2\sin(2x)]=-3x^2\frac{d}{dx}[\sin(2x)]+\sin(2x)\frac{d}{dx}(-3x^2)$$

$$=-3x^2\cos(2x)\frac{d}{dx}(2x)-6x\sin(2x)$$

$$=-6x^2\cos(2x)-6x\sin(2x)$$

$$=-6x[x\cos(2x)+\sin(2x)]$$

Exercices 3.8

1. *a)* $$\frac{dg}{dt}=\frac{d}{dt}[\sin^2(t^2)]=\frac{d}{dt}[\sin(t^2)]^2=2\sin(t^2)\frac{d}{dt}[\sin(t^2)]$$

$$=2\sin(t^2)\cos(t^2)\frac{d}{dt}(t^2)$$

$$=\sin(2t^2)\frac{d}{dt}(t^2)$$ identité 12 : $2\sin(t^2)\cos(t^2)=\sin(2t^2)$

$$=2t\sin(2t^2)$$

b) $$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[\frac{1+\sin(x^2)}{2-x^3}\right]=\frac{(2-x^3)\frac{d}{dx}[1+\sin(x^2)]-[1+\sin(x^2)]\frac{d}{dx}(2-x^3)}{(2-x^3)^2}$$

$$=\frac{(2-x^3)\cos(x^2)\frac{d}{dx}(x^2)-[1+\sin(x^2)](-3x^2)}{(2-x^3)^2}$$

$$= \frac{2x(2-x^3)\cos(x^2)+3x^2[1+\sin(x^2)]}{(2-x^3)^2}$$
$$= \frac{x\left[2(2-x^3)\cos(x^2)+3x[1+\sin(x^2)]\right]}{(2-x^3)^2}$$

2. On a $f(0)=e^0\sin(0)=1(0)=0$. La droite tangente passe donc par le point $(0,0)$. De plus,

$$\frac{df}{dx}=\frac{d}{dx}[e^{2x}\sin(5x)]=e^{2x}\frac{d}{dx}[\sin(5x)]+\sin(5x)\frac{d}{dx}(e^{2x})$$
$$=e^{2x}\cos(5x)\frac{d}{dx}(5x)+e^{2x}\sin(5x)\frac{d}{dx}(2x)$$
$$=5e^{2x}\cos(5x)+2e^{2x}\sin(5x)=e^{2x}[5\cos(5x)+2\sin(5x)]$$

de sorte que $f'(0)=e^0[5\cos(0)+2\sin(0)]=1(5+0)=5$. Par conséquent, l'équation de la droite tangente à la courbe décrite par la fonction $f(x)=e^{2x}\sin(5x)$, en $x=0$, est $y=5(x-0)+0$, soit $y=5x$.

3. Si $0<x<\pi/3$, on a $0<3x<\pi$, $\sin(3x)>0$ et $y>0$, de sorte que $\ln[\sin(3x)]$ et $\ln y$ sont définis. Appliquons le logarithme naturel à chaque membre de l'équation :

$$y=[\sin(3x)]^{2x}$$
$$\ln y=\ln[\sin(3x)]^{2x}$$
$$\ln y=2x\ln[\sin(3x)]$$

Dérivons implicitement par rapport à x :

$$\frac{d}{dx}(\ln y)=\frac{d}{dx}\left[2x\ln[\sin(3x)]\right]$$
$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=2x\frac{d}{dx}\{\ln[\sin(3x)]\}+\ln[\sin(3x)]\frac{d}{dx}(2x)$$
$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=2x\cdot\frac{1}{\sin(3x)}\cdot\frac{d}{dx}[\sin(3x)]+2\ln[\sin(3x)]$$
$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{\sin(3x)}\cos(3x)\frac{d}{dx}(3x)+2\ln[\sin(3x)]$$
$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{6x\cos(3x)}{\sin(3x)}+2\ln[\sin(3x)]$$

$$\frac{dy}{dx}=y\left[6x\operatorname{cotg}(3x)+2\ln[\sin(3x)]\right]$$
$$\frac{dy}{dx}=[\sin(3x)]^{2x}\left[6x\operatorname{cotg}(3x)+2\ln[\sin(3x)]\right]$$

Question éclair 3.14

a) $$\frac{df}{dx}=\frac{d}{dx}\left[\cos(e^{-x})\right]=-\sin(e^{-x})\frac{d}{dx}(e^{-x})=-e^{-x}\sin(e^{-x})\frac{d}{dx}(-x)=e^{-x}\sin(e^{-x})$$

b) $$\frac{dg}{dt}=\frac{d}{dt}\left[\frac{\cos(4t)}{t^2}\right]=\frac{t^2\frac{d}{dt}[\cos(4t)]-\cos(4t)\frac{d}{dt}(t^2)}{(t^2)^2}$$
$$=\frac{-t^2\sin(4t)\frac{d}{dt}(4t)-2t\cos(4t)}{t^4}=\frac{-4t^2\sin(4t)-2t\cos(4t)}{t^4}$$
$$=\frac{-2t[2t\sin(4t)+\cos(4t)]}{t^4}=\frac{-2[2t\sin(4t)+\cos(4t)]}{t^3}$$

Exercices 3.9

1. $$f'(x)=\frac{d}{dx}(\sin x\cos x)=\sin x\frac{d}{dx}(\cos x)+\cos x\frac{d}{dx}(\sin x)$$
$$=\sin x(-\sin x)+\cos x(\cos x)=-\sin^2 x+\cos^2 x$$
$$=\cos(2x)$$ identité 11 : $\cos^2 x-\sin^2 x=\cos(2x)$

d'où $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$. De plus, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$. La droite normale passe donc par le point $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$. Par conséquent, l'équation de la droite normale à la courbe décrite par la fonction $f(x)$ en $x=\frac{\pi}{3}$ est

$$y=-\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{3}\right)}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+f\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{-\frac{1}{2}}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{4}$$
$$=2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{4}=2x-\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}$$

2. Dérivons chaque membre de l'égalité par rapport à x, en considérant y comme une fonction dérivable de x, puis isolons $\frac{dy}{dx}$.

$$\cos(2x+3y) = y\sin x$$
$$\frac{d}{dx}\left[\cos(2x+3y)\right] = \frac{d}{dx}(y\sin x)$$
$$-\sin(2x+3y)\frac{d}{dx}(2x+3y) = y\frac{d}{dx}(\sin x) + \sin x\frac{d}{dx}(y)$$
$$-\sin(2x+3y)\left(2+3\frac{dy}{dx}\right) = y\cos x + \sin x\frac{dy}{dx}$$
$$-2\sin(2x+3y) - 3\sin(2x+3y)\frac{dy}{dx} = y\cos x + \sin x\frac{dy}{dx}$$
$$-3\sin(2x+3y)\frac{dy}{dx} - \sin x\frac{dy}{dx} = y\cos x + 2\sin(2x+3y)$$
$$-\left[3\sin(2x+3y)+\sin x\right]\frac{dy}{dx} = y\cos x + 2\sin(2x+3y)$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y\cos x + 2\sin(2x+3y)}{3\sin(2x+3y)+\sin x}$$

3. *a)* $\theta(0) = -\frac{\pi}{6}\cos[5(0)] = -\frac{\pi}{6}$ rad

b) $\theta(0{,}5) = -\frac{\pi}{6}\cos[5(0{,}5)] = -\frac{\pi}{6}\cos(2{,}5) \approx 0{,}42$ rad

c) $\theta'(t) = \frac{d}{dt}\left[-\frac{\pi}{6}\cos(5t)\right] = -\frac{\pi}{6}[-\sin(5t)]\frac{d}{dt}(5t) = \frac{5\pi\sin(5t)}{6}$ rad/s

d) $\theta'(1) = \frac{5\pi\sin(5)}{6}$ rad/s $\approx -2{,}51$ rad/s

e) $\theta'(1{,}5) = \frac{5\pi\sin(7{,}5)}{6}$ rad/s $\approx 2{,}46$ rad/s

f) $\theta''(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{5\pi\sin(5t)}{6}\right] = \frac{5\pi}{6}[\cos(5t)]\frac{d}{dt}(5t) = \frac{25\pi\cos(5t)}{6}$ rad/s^2

g) $\theta''(1) = \frac{25\pi\cos(5)}{6}$ rad/s^2 $\approx 3{,}71$ rad/s^2

Exercice 3.10

a) $$\frac{df}{dx}=\frac{d}{dx}\left[\operatorname{cotg}\left(3x^2-x\right)\right]=-\operatorname{cosec}^2\left(3x^2-x\right)\frac{d}{dx}\left(3x^2-x\right)$$
$$=-(6x-1)\operatorname{cosec}^2\left(3x^2-x\right)$$

b) $$\frac{dg}{dt}=\frac{d}{dt}\left[t^2\sec(3t)\right]=t^2\frac{d}{dt}\left[\sec(3t)\right]+\sec(3t)\frac{d}{dt}\left(t^2\right)$$
$$=t^2\sec(3t)\operatorname{tg}(3t)\frac{d}{dt}(3t)+2t\sec(3t)$$
$$=3t^2\sec(3t)\operatorname{tg}(3t)+2t\sec(3t)$$
$$=t\sec(3t)\left[3t\operatorname{tg}(3t)+2\right]$$

c) $$\frac{dh}{dt}=\frac{d}{dt}\left[\operatorname{tg}^3(1-2t)\right]=\frac{d}{dt}\left[\operatorname{tg}(1-2t)\right]^3=3\left[\operatorname{tg}(1-2t)\right]^2\frac{d}{dt}\left[\operatorname{tg}(1-2t)\right]$$
$$=3\operatorname{tg}^2(1-2t)\sec^2(1-2t)\frac{d}{dt}(1-2t)$$
$$=-6\operatorname{tg}^2(1-2t)\sec^2(1-2t)$$

d) $$\frac{dy}{d\theta}=\frac{d}{d\theta}\left[\sqrt[3]{\operatorname{cosec}^2(2\theta)}\right]=\frac{d}{d\theta}\left[\operatorname{cosec}(2\theta)\right]^{2/3}$$
$$=\tfrac{2}{3}\left[\operatorname{cosec}(2\theta)\right]^{-1/3}\frac{d}{d\theta}\left[\operatorname{cosec}(2\theta)\right]$$
$$=\tfrac{2}{3}\left[\operatorname{cosec}(2\theta)\right]^{-1/3}\left[-\operatorname{cosec}(2\theta)\operatorname{cotg}(2\theta)\right]\frac{d}{d\theta}(2\theta)$$
$$=-\tfrac{4}{3}\left[\operatorname{cosec}(2\theta)\right]^{2/3}\operatorname{cotg}(2\theta)$$
$$=-\tfrac{4}{3}\operatorname{cotg}(2\theta)\sqrt[3]{\operatorname{cosec}^2(2\theta)}$$

Question éclair 3.15

a) $\arcsin(-0{,}8)\approx-53{,}13^\circ$ ou $\arcsin(-0{,}8)\approx-0{,}927$ rad

b) $\arccos(-0{,}8)\approx143{,}13^\circ$ ou $\arccos(-0{,}8)\approx2{,}498$ rad

c) $\operatorname{arctg}(-0{,}8)\approx-38{,}66^\circ$ ou $\operatorname{arctg}(-0{,}8)\approx-0{,}675$ rad

d) $\operatorname{arccotg}(-2)=\operatorname{arctg}(-\tfrac{1}{2})+180^\circ\approx153{,}43^\circ$ ou $\operatorname{arccotg}(-2)=\operatorname{arctg}(-\tfrac{1}{2})+\pi\approx2{,}678$ rad

e) $\operatorname{arcsec}(-2)=\arccos(-\tfrac{1}{2})=120^\circ$ ou $\operatorname{arcsec}(-2)=\arccos(-\tfrac{1}{2})=\tfrac{2\pi}{3}$ rad

f) $\operatorname{arccosec}(-2)=\arcsin(-\tfrac{1}{2})=-30^\circ$ ou $\operatorname{arccosec}(-2)=\arcsin(-\tfrac{1}{2})=-\tfrac{\pi}{6}$ rad

Exercices 3.11

1. a) $$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}[\arcsin(4x)-\arccos(4x)]$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1-(4x)^2}}\frac{d}{dx}(4x)-\frac{-1}{\sqrt{1-(4x)^2}}\frac{d}{dx}(4x)$$
$$=\frac{4}{\sqrt{1-16x^2}}+\frac{4}{\sqrt{1-16x^2}}=\frac{8}{\sqrt{1-16x^2}}$$

b) $$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[(\sin x)(\operatorname{arccotg} x)\right]=\sin x\frac{d}{dx}(\operatorname{arccotg} x)+\operatorname{arccotg} x\frac{d}{dx}(\sin x)$$
$$=\sin x\cdot\frac{-1}{1+x^2}\cdot\frac{d}{dx}(x)+(\operatorname{arccotg} x)\cos x\frac{d}{dx}(x)$$
$$=-\frac{\sin x}{1+x^2}+(\operatorname{arccotg} x)\cos x=-\frac{\sin x}{1+x^2}+\frac{(1+x^2)(\operatorname{arccotg} x)\cos x}{1+x^2}$$
$$=\frac{-\sin x+(1+x^2)(\operatorname{arccotg} x)\cos x}{1+x^2}$$

c) $$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[\operatorname{arcsec}\left(\sqrt{x^2+1}\right)\right]=\frac{1}{\left|\sqrt{x^2+1}\right|\sqrt{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-1}}\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2+1}\right)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}\sqrt{(x^2+1)-1}}\cdot\frac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2}\frac{d}{dx}(x^2+1)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}\sqrt{x^2}}\cdot\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}\cdot\cancel{2}x=\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2}}=\frac{x}{(x^2+1)|x|}$$

d) Dérivons chaque membre de l'égalité par rapport à x, en considérant y comme une fonction dérivable de x, puis isolons $\frac{dy}{dx}$.

$$x\operatorname{arctg} y=x^2+y$$
$$\frac{d}{dx}(x\operatorname{arctg} y)=\frac{d}{dx}(x^2)+\frac{d}{dx}(y)$$
$$x\frac{d}{dx}(\operatorname{arctg} y)+\operatorname{arctg} y\frac{d}{dx}(x)=2x+\frac{dy}{dx}$$
$$x\cdot\frac{1}{1+y^2}\frac{dy}{dx}+\operatorname{arctg} y=2x+\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{x}{1+y^2}\frac{dy}{dx}-\frac{dy}{dx}=2x-\operatorname{arctg}y$$

$$\left(\frac{x}{1+y^2}-1\right)\frac{dy}{dx}=2x-\operatorname{arctg}y$$

$$\left[\frac{x}{1+y^2}-\frac{1(1+y^2)}{1+y^2}\right]\frac{dy}{dx}=2x-\operatorname{arctg}y$$

$$\left(\frac{x-1-y^2}{1+y^2}\right)\frac{dy}{dx}=2x-\operatorname{arctg}y$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(2x-\operatorname{arctg}y)(1+y^2)}{x-1-y^2}$$

2. $f(1/2)=\operatorname{arctg}(1)=\pi/4$ et $\frac{df}{dx}=\frac{d}{dx}[\operatorname{arctg}(2x)]=\frac{1}{1+(2x)^2}\frac{d}{dx}(2x)=\frac{2}{1+4x^2}$, d'où $f'(1/2)=\frac{2}{1+4(1/2)^2}=1$, de sorte que l'équation de la droite tangente à la courbe décrite par la fonction $f(x)$ en $x=1/2$ est

$$y=f'(1/2)(x-1/2)+f(1/2)=(x-1/2)+\pi/4=x-1/2+\pi/4$$

