Calcul I (201-103-RE)

SOLUTIONNAIRE EXERCICES DE RÉVISION – EXAMEN 1

1. Évaluez algébriquement les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to 3}\frac{3x^3-2x}{3x-1}$

$$\lim_{x\to 3}\frac{3x^3-2x}{3x-1}=\frac{3\cdot 3^3-2\cdot 3}{3\cdot 3-1}=\frac{75}{8}$$

b) $\lim_{x\to -\infty}\frac{2}{\sqrt{3x^2-x}}$ (Graphiquement, que pouvez-vous conclure ?)

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{2}{\sqrt{3x^2-x}}=\frac{2}{\sqrt{3(-\infty)^2-(-\infty)}}=\frac{2}{\sqrt{\infty+\infty}}=\frac{2}{\infty}=0$$

Graphiquement, il y a une asymptote horizontale d'équation $y=0$ à l'extrémité gauche du graphique.

c) $\lim_{x\to 4}\frac{2-x}{x-4}$ (Graphiquement, que pouvez-vous conclure ?)

$$\lim_{x\to 4}\frac{2-x}{x-4}\quad\left(\frac{2-4}{4-4}=\frac{-2}{0}\right)\left(\text{forme } \frac{c}{0}\right)$$

Évaluons les limites à gauche et à droite:

$$\lim_{x\to 4^-}\frac{2-x}{x-4}=\frac{-2}{0^-}=\infty$$

$$\lim_{x\to 4^+}\frac{2-x}{x-4}=\frac{-2}{0^+}=-\infty$$

$\neq$

$$\lim_{x\to 4^-}\frac{2-x}{x-4}\neq\lim_{x\to 4^+}\frac{2-x}{x-4}\quad\text{donc}\quad\lim_{x\to 4}\frac{2-x}{x-4}\nexists$$

Graphiquement, il y a une asymptote verticale d'équation $x=4$.

d) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^2-3x+2}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^2-3x+2}\quad\left(\text{f.i } \frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+1)}{\cancel{(x-2)}(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x-1}$$

$$=\frac{2+1}{2-1}=3$$

e) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}\left(\text{f.i}\ \frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{5}}{\sqrt{x}+\sqrt{5}}$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{(x^2-25)(\sqrt{x}+\sqrt{5})}{x-5}$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{\cancel{(x-5)}\,(x+5)(\sqrt{x}+\sqrt{5})}{\cancel{x-5}}$$

$$=\lim_{x\to 5}(x+5)(\sqrt{x}+\sqrt{5})$$

$$=10\cdot(2\sqrt{5})=20\sqrt{5}$$

f) $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{5}{x-2}-\dfrac{20}{x^2-4}\right)$

$$\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{5}{x-2}-\frac{20}{x^2-4}\right)(\text{f.i}\ \infty-\infty)$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{5}{x-2}-\frac{20}{(x-2)(x+2)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{5(x+2)}{(x-2)(x+2)}-\frac{20}{(x-2)(x+2)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{5x+10-20}{(x-2)(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{5x-10}{(x-2)(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{5\,\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}\,(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{5}{x+2}=\frac{5}{4}$$

g) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^3-5x^2+x-12}{x-3}$

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^3-5x^2+x-12}{x-3}\left(\text{f.i } \dfrac{0}{0}\right)$

$$\begin{array}{r|l}
2x^3-5x^2+x-12 & x-3 \\ \cline{2-2}
\underline{-\left(2x^3-6x^2\right)} & 2x^2+x+4 \\
x^2+x-12 & \\
\underline{-\left(x^2-3x\right)} & \\
4x-12 & \\
\underline{-\left(4x-12\right)} & \\
0 &
\end{array}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^3-5x^2+x-12}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}(2x^2+x+4)}{\cancel{(x-3)}}=\lim_{x\to 3}(2x^2+x+4)=2(3)^2+3+4=25$$

h) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(7+\dfrac{3}{x}\right)$ (Graphiquement, que pouvez-vous conclure ?)

$\lim\limits_{x\to -\infty}\left(7+\dfrac{3}{x}\right)=7+\dfrac{3}{-\infty}=7+0=7$

Graphiquement, il y a une asymptote horizontale d'équation $y=7$ à l'extrémité gauche du graphique.

i) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3+2x+5}{x^2+7}$

$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3+2x+5}{x^2+7}\left(\text{f.i } \dfrac{+\infty}{+\infty}\right)$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}\left(x+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(1+\frac{7}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}{1+\frac{7}{x^2}}=\frac{\infty+0+0}{1+0}=\infty$$

j) $\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{2}{\sqrt{x-4}}$ (Graphiquement, que pouvez-vous conclure ?)

$\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{2}{\sqrt{x-4}}=\dfrac{2}{\sqrt{4^+-4}}=\dfrac{2}{\sqrt{0^+}}=\dfrac{2}{0^+}=\infty$

Graphiquement, il y a une asymptote verticale d'équation $x=4$.

2. Que pouvez-vous dire d'une fonction $f(x)$ telle que $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=3$ et telle que $f(2)=-3$?

La fonction est discontinue en $x=2$ car $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=3\neq -3=f(2)$.

La troisième condition de la continuité n'est pas respectée.

3.Déterminez si la fonction $f(x)$ suivante est continue en $x = 3$ et en $x = 4$.

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\le 0 \\ \dfrac{|x|}{x^2-9} & \text{si } 0<x<4 \\ \dfrac{8-x}{3x+1} & \text{si } x\ge 4 \end{cases}$$

Pour $x=3$:

1) $f(3)=\dfrac{|3|}{3^2-9}=\dfrac{3}{0}\ \nexists$

Donc la fonction est discontinue en $x=3$.

Pour $x=4$:

1) $f(4)=\dfrac{8-4}{3(4)+1}=\dfrac{4}{13}\ \left(f(4)\text{ existe}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=?$

$$\lim_{x\to 4^+} f(x)=\lim_{x\to 4^+}\frac{8-x}{3x+1}=\frac{4}{13}$$

$$\neq$$

$$\lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4^-}\frac{|x|}{x^2-9}=\frac{4}{7}$$

Puisque $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 4^-} f(x)\Rightarrow \lim\limits_{x\to 4} f(x)\ \nexists$

Donc la fonction est discontinue en $x=4$.

4. Soit $f(x)=\dfrac{2}{3x}$:

a) Calculez $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{2}{3(x+\Delta x)}-\dfrac{2}{3x}}{\Delta x}\quad\left(\text{f.i }\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{2x-2(x+\Delta x)}{3x(x+\Delta x)}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{2x}-\cancel{2x}-2\Delta x}{3x(x+\Delta x)}\cdot\frac{1}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}\cdot 3x(x+\Delta x)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2}{3x(x+\Delta x)}=\frac{-2}{3x(x+0)}$$

$$=\frac{-2}{3x^2}$$

b) Quelle interprétation graphique pouvez-vous donner à l'expression $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$?

$$f'(2) = \frac{-2}{3(2)^2} = \frac{-2}{12} = \frac{-1}{6}$$

La pente de la tangente à la courbe $f(x)$ au point $(2, f(2))$ est de $\frac{-1}{6}$.

5. On a donné à un patient atteint d'une forte fièvre un médicament destiné à faire chuter sa température. La température C (en degrés Celsius) du patient t heures après l'absorption du médicament est donnée par la fonction $C(t) = 37 + \frac{6}{\sqrt{\frac{1}{2}t+4}}$.

a) Quelle était la température du patient au moment où on lui a donné le médicament ?

$$C(0) = 37 + \frac{6}{\sqrt{\frac{1}{2}(0)+4}} = 37 + \frac{6}{2} = 37 + 3 = 40^\circ C$$

b) Quelle était la température du patient 24 heures après l'absorption du médicament ?

$$C(24) = 37 + \frac{6}{\sqrt{\frac{1}{2}(24)+4}} = 37 + \frac{6}{4} = 38,5^\circ C$$

c) À quelle valeur la température du patient se stabilisera-t-elle à long terme ? Utilisez la notation mathématique appropriée dans votre démarche.

$$\lim_{t \to \infty} C(t) = \lim_{t \to \infty}\left(37 + \frac{6}{\sqrt{\frac{1}{2}t+4}}\right) = 37 + \frac{6}{\sqrt{\frac{1}{2}(\infty)+4}} = 37 + \frac{6}{\infty} = 37 + 0 = 37^\circ C$$

6. Soit $g(x) = x^2 + x$.

a) Quel est le taux de variation moyen de $g(x)$ sur l'intervalle [2, 4] ?

$$TVM_{[2,4]}g(x) = \frac{\Delta g}{\Delta x} = \frac{g(4)-g(2)}{4-2} = \frac{(4^2+4)-(2^2+2)}{2} = \frac{20-6}{4-2} = \frac{14}{2} = 7$$

b) Quelle est l'interprétation graphique du taux calculé en a ?

La pente de la sécante à la courbe de $g(x)$ passant par les points $(2, g(2))$ et $(4, g(4))$ est de 7.

c) Quel est le taux de variation instantané de $g(x)$ en $x = 2$?

$$TVI_{x=2}g(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(2+\Delta x)-g(2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left((2+\Delta x)^2 + (2+\Delta x)\right) - (2^2+2)}{\Delta x} \left(\text{f.i } \frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\cancel{4} + 4\Delta x + (\Delta x)^2 + \cancel{2} + \Delta x\right) - \cancel{6}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4\Delta x + (\Delta x)^2 + \Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}(4+\Delta x+1)}{\cancel{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to 0}(4+\Delta x+1) = 4+0+1 = 5$$

d) Quelle est l'interprétation graphique du taux calculé en c ?

La pente de la tangente à la courbe de $g(x)$ au point $(2, g(2))$ est de 5.

e) Quelle est l'équation de la tangente à la courbe décrite par la fonction $g(x)$ en $x = 2$?

$y = mx + b$

$m =$ pente de la tangente

$\quad = TVI_{x=2}\, g(x)$

$\quad = 5$

$y = 5x + b$

On connaît un point $(2, g(2)) = (2, 2^2 + 2) = (2, 6)$

$6 = 5(2) + b$

$b = -4$

$y = 5x - 4$

7. Déterminez le domaine des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \dfrac{x+5}{2x^2 + 7x + 3}$

$f(x) = \dfrac{x+5}{2x^2 + 7x + 3}$

Il faut que $2x^2 + 7x + 3 \neq 0$ (dénominateur non nul) $\left.\begin{matrix} P = 6 \\ S = 7 \end{matrix}\right\} 6$ et 1

$2x^2 + x + 6x + 3 \neq 0$

$x(2x+1) + 3(2x+1) \neq 0$

$(2x+1)(x+3) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad (2x+1) \neq 0$ et $(x+3) \neq 0$

$\Rightarrow \quad x \neq \dfrac{-1}{2}$ et $x \neq -3$

Donc, Dom $f = \mathbb{R} \setminus \left\{ -3, \dfrac{-1}{2} \right\}$

b) $f(x) = \sqrt{x+3}$

Il faut que $x + 3 \geq 0$ (racine paire)

$\Rightarrow x \geq -3$

Donc, Dom $f = [-3, \infty[$

c) $f(x)=\sqrt[3]{7x+2}$

Aucune valeur à exclure lorsque l'on a une racine impaire.

Donc, Dom $f=\mathbb{R}$

8. Calculez la dérivée de la fonction $f(x)$ à l'aide de la définition, puis calculez $f\,'(3)$ à l'aide de la réponse obtenue.

a) $f(x)=(2x-1)^2$

$$f\,'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left((2(x+\Delta x)-1)^2-(2x-1)^2\right)}{\Delta x}\left(\text{f.i }\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(4(x+\Delta x)^2-4(x+\Delta x)+1\right)-\left(4x^2-4x+1\right)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{4x^2}+8x\Delta x+4\left(\Delta x\right)^2-\cancel{4x}-4\Delta x+\cancel{1}-\cancel{4x^2}+\cancel{4x}-\cancel{1}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{8x\Delta x+4\left(\Delta x\right)^2-4\Delta x}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{\Delta x}\left(8x+4\Delta x-4\right)}{\cancel{\Delta x}}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(8x+4\Delta x-4\right)$$

$$=8x-4=4(2x-1)$$

$$f\,'(3)=4(2\cdot 3-1)=20$$

b) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{1}{(x+\Delta x)^2-4}-\dfrac{1}{x^2-4}}{\Delta x}\quad\left(\text{f.i }\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{\left(x^2-4\right)-\left((x+\Delta x)^2-4\right)}{\left(x^2-4\right)\left((x+\Delta x)^2-4\right)}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(x^2-4\right)-\left((x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2-4\right)}{\left(x^2-4\right)\left((x+\Delta x)^2-4\right)}\cdot\frac{1}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{x^2}-\cancel{4}-\cancel{x^2}-2x\Delta x-(\Delta x)^2+\cancel{4}}{\left(x^2-4\right)\left((x+\Delta x)^2-4\right)}\cdot\frac{1}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2x\Delta x-\left(\Delta x\right)^2}{\Delta x\cdot\left(x^2-4\right)\left((x+\Delta x)^2-4\right)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{\Delta x}\left(-2x-\Delta x\right)}{\cancel{\Delta x}\cdot\left(x^2-4\right)\left((x+\Delta x)^2-4\right)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2x-\Delta x}{\left(x^2-4\right)\left((x+\Delta x)^2-4\right)}$$

$$=\frac{-2x-0}{(x^2-4)\left((x+0)^2-4\right)}$$

$$=\frac{-2x}{(x^2-4)^2}$$

$$f\,'(3)=\frac{-2(3)}{(3^2-4)^2}=\frac{-6}{25}$$

9. Calculez la pente de la tangente à la courbe de $f(x)=\sqrt{3x+7}$ en $x=1$(en utilisant la définition de la dérivée en un point).

$$m_{\tan} = f\,'(1) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$

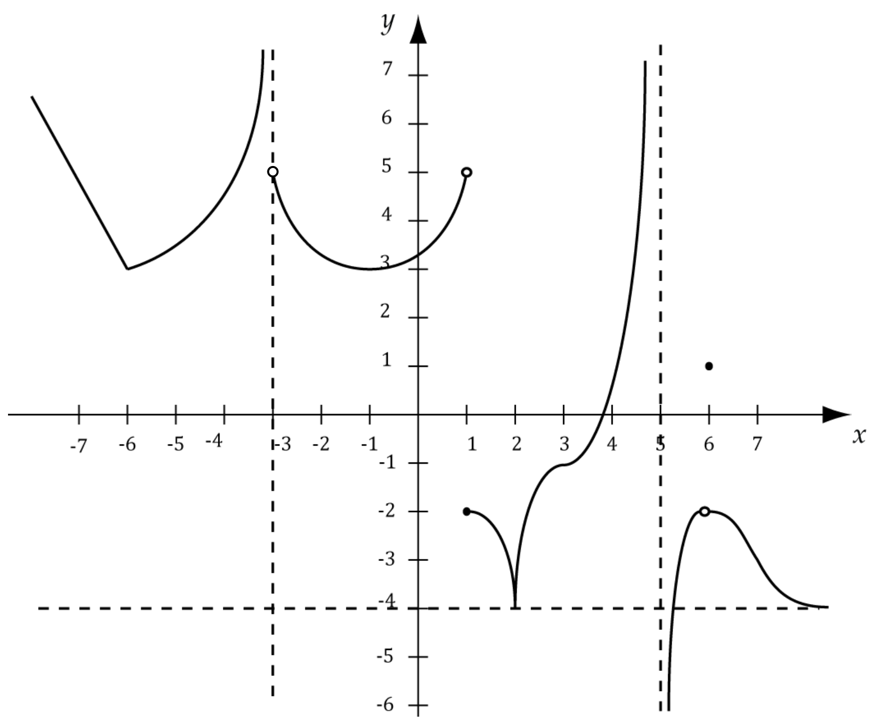
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{3(1+\Delta x)+7}-\sqrt{3(1)+7}}{\Delta x}\left(\text{f.i } \frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{10+3\Delta x}-\sqrt{10}}{\Delta x}\cdot\frac{\sqrt{10+3\Delta x}+\sqrt{10}}{\sqrt{10+3\Delta x}+\sqrt{10}}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{10}+3\Delta x-\cancel{10}}{\Delta x\left(\sqrt{10+3\Delta x}+\sqrt{10}\right)} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{3\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}\left(\sqrt{10+3\Delta x}+\sqrt{10}\right)}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{3}{\left(\sqrt{10+3\Delta x}+\sqrt{10}\right)} = \frac{3}{2\sqrt{10}}$$

10. Soit le graphique suivant d'une fonction $f(x)$. (Les questions sont sur la page suivante.)



a) Déterminez les asymptotes verticales et horizontales.

Il y a des AV en $x=-3$et en $x=5$. Il y a une AH en $y=-4$.

b) Déterminez les valeurs de x pour lesquelles la fonction $f(x)$ est discontinue et justifier mathématiquement.

$x=3$: La fonction est discontinue en $x=-3$ car $f(-3)\nexists$.

$x=1$: $\lim_{x\to 1^-} f(x)=5\neq -2=\lim_{x\to 1^+} f(x)\Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x)\nexists$.

La fonction est discontinue en $x=1$, car $\lim_{x\to 1} f(x)\nexists$

$x=5$: La fonction est discontinue en $x=5$ car $f(5)\nexists$.

$x=6$: $f(6)=1$

$\lim_{x\to 6^-} f(x)=\lim_{x\to 6^+} f(x)=-2\Rightarrow \lim_{x\to 6} f(x)=-2$

$f(6)=1\neq -2=\lim_{x\to 6} f(x)$

La fonction est discontinue en $x=6$ car $f(6)\neq \lim_{x\to 6} f(x)$.

c) Déterminez les valeurs de x pour lesquelles la fonction $f(x)$ est non dérivable et justifier brièvement.

La fonction est non-dérivable en $x=-6, x=-3, x=1, x=2, x=5, x=6$:

- La fonction est non-dérivable en $x=-3, x=1, x=5, x=6$ car la fonction est discontinue en ces valeurs de x.
- La fonction est non-dérivable en $x=-6$ car il y a un point anguleux (2 tangentes distinctes).
- La fonction est non-dérivable en $x=2$ car la tangente est verticale.

d) Calculez les expressions suivantes :

i. $TVM_{[-6,-4]} f(x)$

$$TVM_{[-6,-4]} f(x)=\frac{f(-4)-f(-6)}{-4-(-6)}=\frac{5-3}{2}=\frac{2}{2}=1$$

ii. $TVI_{x=-1} f(x)$

$TVI_{x=-1} f(x)=0$ (La pente de la tangente est nulle, car la tangente est horizontale.)

e) Évaluez graphiquement les limites suivantes :

i. $\lim_{x\to 5} f(x)$

$\lim_{x\to 5} f(x)\nexists$, car $\lim_{x\to 5^-} f(x)=\infty\neq -\infty=\lim_{x\to 5^+} f(x)$

ii. $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

$\lim_{x\to +\infty} f(x)=-4$

iii. $\lim_{x\to -\infty} f(x)$

$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\infty$

iv. $\lim_{x\to -6} f(x)$

$\lim_{x\to -6} f(x)=3$, car $\lim_{x\to -6^-} f(x)=\lim_{x\to -6^+} f(x)=3$