CHAPITRE 4

Question éclair 4.1

a) On a $\dfrac{dy}{dt} = -0{,}8\ \text{m/s}$. Le taux est négatif puisque le haut de l'échelle se déplace vers le sol (la distance y diminue avec le temps).

b) On cherche $\dfrac{dx}{dt}$ lorsque $x = 3\ \text{m}$, soit $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{x=3}$.

c) Il est positif, car, lorsque le haut de l'échelle se déplace vers le sol, le bas de l'échelle s'éloigne du mur (la distance x augmente le temps).

d) En vertu du théorème de Pythagore, on a $x^2 + y^2 = 10^2$. Dérivons implicitement cette équation par rapport à t et isolons $\dfrac{dx}{dt}$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(x^2 + y^2\right) &= \frac{d}{dt}(100) \\
2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} &= 0 \\
2x\frac{dx}{dt} &= -2y\frac{dy}{dt} \\
\frac{dx}{dt} &= \frac{-y}{x}\frac{dy}{dt}
\end{aligned}$$

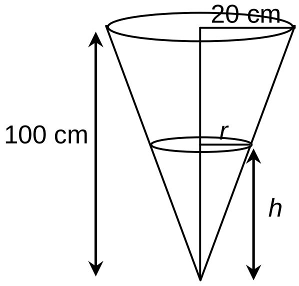
Or, lorsque $x = 3\ \text{m}$, on a $y = \sqrt{10^2 - 3^2} = \sqrt{91}\ \text{m}$ et alors

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=3} = \left.\left(\frac{-y}{x}\frac{dy}{dt}\right)\right|_{x=3} = \frac{-\sqrt{91}}{3}(-0{,}8) \approx 2{,}54\ \text{m/s}$$

La distance entre le pied de l'échelle et le mur augmente donc à raison d'environ 2,54 m/s à l'instant précis où le haut de l'échelle se déplace vers le sol à raison de 0,8 m/s et que le pied de l'échelle est à 3 m du mur.

Question éclair 4.2

a) L'information est consignée dans le schéma.



b) On a $\left.\dfrac{dh}{dt}\right|_{h=5} = 2 \text{ cm/s}$.

c) On cherche $\dfrac{dV}{dt}$ lorsque $h = 5$ cm, soit $\left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{h=5}$.

d) La formule de volume d'un cône est $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

e) On doit recourir à la comparaison des côtés dans des triangles semblables pour exprimer r en fonction de h.

f) La comparaison des triangles semblables permet d'établir que $\dfrac{r}{h} = \dfrac{20}{100} = \dfrac{1}{5}$, de sorte que $r = \frac{1}{5}h$.

g) On a $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{5}h\right)^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{25}h^2\right)h = \frac{1}{75}\pi h^3$. Alors,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{75}\pi h^3\right) = \tfrac{1}{75}\pi\left(3h^2\frac{dh}{dt}\right) = \tfrac{1}{25}\pi h^2\frac{dh}{dt}$$

Lorsque $h = 5$ cm, on a $\dfrac{dh}{dt} = 2$ cm/s et alors

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{h=5} = \left.\left(\tfrac{1}{25}\pi h^2\frac{dh}{dt}\right)\right|_{h=5} = \tfrac{1}{25}\pi(5)^2(2) = 2\pi \approx 6{,}28 \text{ cm}^3\text{/s}$$

Lorsque le niveau de l'eau atteint 5 cm, le volume d'eau dans le réservoir augmente à raison de 2π cm^3/s, soit d'environ $6{,}28$ cm^3/s.

Exercices 4.1

1. Soit A l'aire du cercle (en centimètres carrés), r son rayon (en centimètres) et t le temps (en secondes). On a $\left.\frac{dA}{dt}\right|_{A=20} = 4\ \text{cm}^2/\text{s}$ et on cherche $\left.\frac{dr}{dt}\right|_{A=20}$. On sait que $A = \pi r^2$. Dérivons implicitement cette équation par rapport à t :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\pi r^2\right) = 2\pi r\frac{dr}{dt}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{dr}{dt} = \frac{1}{2\pi r}\frac{dA}{dt}$$

Lorsque $A = \pi r^2 = 20\ \text{cm}^2$, on a $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} = \sqrt{\frac{20}{\pi}}\ \text{cm}$ et $\left.\frac{dA}{dt}\right|_{A=20} = 4\ \text{cm}^2/\text{s}$. Par conséquent,

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{A=20} = \left.\left(\frac{1}{2\pi r}\frac{dA}{dt}\right)\right|_{A=20} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{20}{\pi}}}(4) = \frac{4}{2\pi\frac{\sqrt{4(5)}}{\sqrt{\pi}}} = \frac{4}{2\sqrt{\pi}\left(2\sqrt{5}\right)}$$
$$= \frac{\cancel{4}}{\cancel{4}\sqrt{5\pi}} = \frac{1}{\sqrt{5\pi}}\cdot\frac{\sqrt{5\pi}}{\sqrt{5\pi}} = \frac{\sqrt{5\pi}}{5\pi} \approx 0{,}25\ \text{cm/s}$$

À l'instant où l'aire du cercle est de 20 cm^2, le rayon du cercle augmente à raison de $\frac{\sqrt{5\pi}}{5\pi}$ cm/s, soit d'environ 0,25 cm/s.

2. Soit V le volume du ballon sphèrique (en centimètres cubes), D son diamètre (en centimètres), r son rayon (en centimètres) et t le temps (en secondes). On a $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{D=60} = -40\ \text{cm}^3/\text{s}$ et on cherche $\left.\frac{dr}{dt}\right|_{D=60}$. On sait que $V = \tfrac{4}{3}\pi r^3$. Dérivons implicitement cette équation par rapport à t :

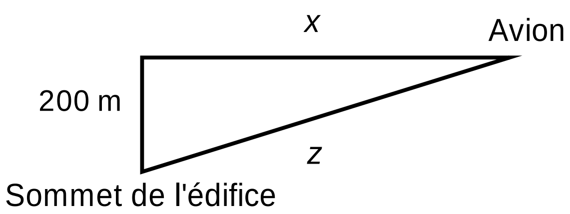
$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\tfrac{4}{3}\pi r^3\right) = \tfrac{4}{3}\pi\left(3r^2\frac{dr}{dt}\right) = 4\pi r^2\frac{dr}{dt}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{dV}{dt}$$

Lorsque $D = 60$ cm, on a $r = \frac{D}{2} = \frac{60}{2} = 30$ cm et $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{D=60} = -40$ cm^3/s. Par conséquent,

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{D=60} = \left.\left(\frac{1}{4\pi r^2}\frac{dV}{dt}\right)\right|_{D=60} = \frac{1}{4\pi(30^2)}(-40) = \frac{1}{3\,600\pi}(-40) = -\frac{1}{90\pi} \approx -0{,}003\,5 \text{ cm/s}$$

À l'instant où le diamètre du ballon atteint 60 cm, le rayon du ballon diminue à raison de $\frac{1}{90\pi}$ cm/s, soit d'environ 0,003 5 cm/s.

3. *a)* Soit z la distance (en mètres) séparant le sommet de l'édifice de l'avion, x la distance (en mètres) parcourue par l'avion depuis son passage au-dessus du sommet de l'édifice et t le temps (en secondes).



On a $\frac{dx}{dt} = 50$ m/s et on cherche $\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=30}$. En vertu du théorème de Pythagore, on a $z^2 = x^2 + 200^2$. Dérivons implicitement cette équation par rapport à t :

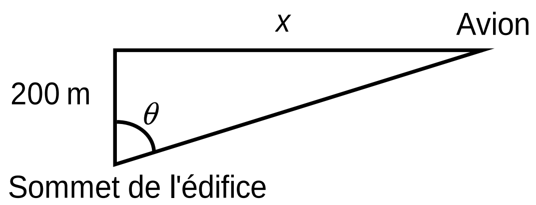
$$\frac{d}{dt}(z^2) = \frac{d}{dt}(x^2 + 200^2)$$
$$\Rightarrow \quad 2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dt} = \frac{x}{z}\frac{dx}{dt}$$

Après 30 s, comme $\frac{dx}{dt} = 50$ m/s, on a $x = (50 \text{ m/s})(30 \text{ s}) = 1500$ m et $z = \sqrt{200^2 + 1500^2} = \sqrt{2\,290\,000} = 100\sqrt{229}$ m. Par conséquent,

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=30} = \left.\left(\frac{x}{z}\frac{dx}{dt}\right)\right|_{t=30} = \frac{1500}{100\sqrt{229}}(50) = \frac{750}{\sqrt{229}} \approx 49{,}56 \text{ m/s}$$

Lorsque le temps écoulé est de 30 s, la distance entre l'avion et le sommet de l'édifice augmente à raison de $\frac{750}{\sqrt{229}}$ m/s, soit d'environ 49,56 m/s.

b) Soit x la distance (en mètres) parcourue par l'avion depuis son passage au-dessus du sommet de l'édifice, θ l'angle (en radians) illustré sur le schéma et t le temps (en secondes).



On a $\frac{dx}{dt} = 50$ m/s et on cherche $\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{t=30}$. On a $\operatorname{tg}\theta = \frac{x}{200} \Rightarrow \theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{200}\right)$. Dérivons implicitement cette équation par rapport à t :

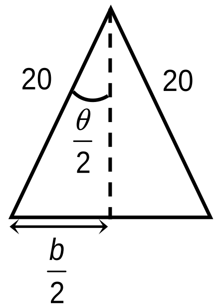
$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{200}\right)\right] = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{200}\right)^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{200}\right) = \frac{1}{1+\frac{x^2}{200^2}}\left(\frac{1}{200}\cdot\frac{dx}{dt}\right)$$
$$= \frac{1}{\frac{200^2+x^2}{200^2}}\left(\frac{1}{200}\cdot\frac{dx}{dt}\right) = \frac{200^2}{200^2+x^2}\left(\frac{1}{200}\cdot\frac{dx}{dt}\right) = \frac{200}{200^2+x^2}\frac{dx}{dt}$$

Après 30 s, comme $\frac{dx}{dt} = 50$ m/s, on a $x = (50\text{ m/s})(30\text{ s}) = 1500$ m. Par conséquent,

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{t=30} = \left.\left(\frac{200}{200^2+x^2}\frac{dx}{dt}\right)\right|_{t=30} = \frac{200}{200^2+1500^2}(50) = \frac{1}{229} \approx 0{,}004\text{ rad/s}$$

Lorsque le temps écoulé est de 30 s, l'angle θ illustré sur le schéma augmente à raison de $\frac{1}{229}$ rad/s, soit d'environ 0,004 rad/s.

4. Soit P le périmètre du triangle (en centimètres), b la mesure du troisième côté du triangle (en centimètres), θ l'angle formé par les deux côtés égaux (en radians) et t le temps (en minutes). On a $\left.\dfrac{d\theta}{dt}\right|_{\theta=60°=\pi/3\text{ rad}} = -1°/\text{min} = -\pi/180\text{ rad/min}$ et on cherche $\left.\dfrac{dP}{dt}\right|_{\theta=60°=\pi/3\text{ rad}}$.



On sait que $P = 2(20) + b = 40 + b$. Or, $\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \dfrac{b/2}{20} = \dfrac{b}{40} \Rightarrow 40\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = b$. En remplaçant b par cette valeur dans l'équation du périmètre, on obtient $P = 40 + b = 40 + 40\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$. Dérivons implicitement cette équation par rapport à t :

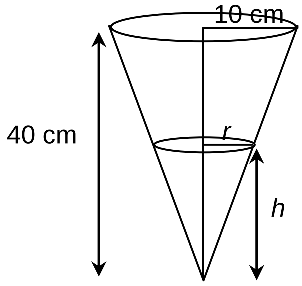
$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt} &= \frac{d}{dt}\left[40 + 40\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] = 40\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ &= 40\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\frac{d\theta}{dt} = 20\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\frac{d\theta}{dt}\end{aligned}$$

Lorsque $\theta = \pi/3\text{ rad}$ et $\dfrac{d\theta}{dt} = -\pi/180\text{ rad/min}$, on a

$$\begin{aligned}\left.\frac{dP}{dt}\right|_{\theta=\pi/3} &= \left.\left[20\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\frac{d\theta}{dt}\right]\right|_{\theta=\pi/3} = 20\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]\left(-\frac{\pi}{180}\right) \\ &= 20\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{\pi}{180}\right) = -\frac{\sqrt{3}\,\pi}{18} \approx -0{,}30\text{ cm/min}\end{aligned}$$

À l'instant où l'angle formé par les deux côtés égaux atteint 60°, le périmètre du triangle diminue à raison de $\dfrac{\sqrt{3}\,\pi}{18}$ cm/min, soit d'environ 0,30 cm/min.

5. On a le schéma suivant.



Soit h le niveau de l'eau dans le récipient (en centimètres), r le rayon de la surface de l'eau (en centimètres), V le volume d'eau dans le récipient (en centimètres cubes) et t le temps (en secondes). On a $\frac{dV}{dt} = 4 \text{ cm}^3/\text{s}$ et on cherche $\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=16}$.

On sait que $V = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h$. Une comparaison de triangles semblables permet d'établir que $\frac{r}{h} = \frac{10}{40}$, de sorte que $r = \tfrac{1}{4}h$. En remplaçant h par cette valeur dans l'équation du volume, on obtient $V = \tfrac{1}{3}\pi\left(\tfrac{1}{4}h\right)^2 h = \tfrac{1}{3}\pi\left(\tfrac{1}{16}h^2\right)h = \tfrac{1}{48}\pi h^3$. Dérivons implicitement cette équation par rapport à t :

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{48}\pi h^3\right) = \tfrac{1}{48}\pi\left(3h^2\frac{dh}{dt}\right) = \tfrac{1}{16}\pi h^2\frac{dh}{dt}$$

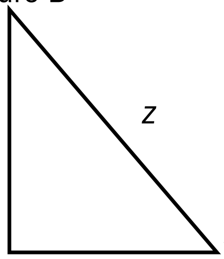
$$\Rightarrow \quad \frac{dh}{dt} = \frac{16}{\pi h^2}\frac{dV}{dt}$$

Lorsque $h = 16 \text{ cm}$ et $\frac{dV}{dt} = 4 \text{ cm}^3/\text{s}$, on a

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=16} = \left.\left(\frac{16}{\pi h^2}\frac{dV}{dt}\right)\right|_{h=16} = \frac{16}{\pi(16)^2}(4) = \frac{1}{4\pi} \text{ cm/s} \approx 0{,}08 \text{ cm/s}$$

À l'instant où il atteint 16 cm, le niveau de l'eau augmente donc à raison de $\frac{1}{4\pi} \text{ cm/s}$, soit d'environ 0,08 cm/s.

6. Soit x la distance (en kilomètres) séparant la voiture A du lieu de l'accident, y la distance (en kilomètres) séparant la voiture B du lieu de l'accident, z la distance (en kilomètres) séparant les deux voitures, comme l'illustre le schéma, et t le temps (en heures).



On a $\frac{dx}{dt} = -54 \text{ km/h}$ et $\frac{dy}{dt} = -81 \text{ km/h}$ (le signe négatif indiquant que les distances diminuent parce que les voitures convergent toutes deux vers le lieu de l'accident). On cherche $\frac{dz}{dt}$ lorsque $x = 300 \text{ m} = 0{,}3 \text{ km}$ et $y = 400 \text{ m} = 0{,}4 \text{ km}$. En vertu du théorème de Pythagore, on a $z^2 = x^2 + y^2$. Dérivons implicitement cette équation par rapport à t :

$$\frac{d}{dt}(z^2) = \frac{d}{dt}(x^2 + y^2) \quad \Rightarrow \quad 2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dt} = \frac{x}{z}\frac{dx}{dt} + \frac{y}{z}\frac{dy}{dt}$$

Lorsque $x = 300 \text{ m} = 0{,}3 \text{ km}$ et $y = 400 \text{ m} = 0{,}4 \text{ km}$, on a

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{0{,}3^2 + 0{,}4^2} = 0{,}5 \text{ km}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \left.\frac{dz}{dt}\right|_{x=0{,}3;\, y=0{,}4} &= \left.\left(\frac{x}{z}\frac{dx}{dt} + \frac{y}{z}\frac{dy}{dt}\right)\right|_{x=0{,}3;\, y=0{,}4} \\ &= \frac{0{,}3}{0{,}5}(-54) + \frac{0{,}4}{0{,}5}(-81) = -97{,}2 \text{ km/h} \end{aligned}$$

À l'instant où la première voiture se situe à 300 m de l'accident et que la seconde en est éloigné de 400 m, la distance séparant les deux voitures diminue à raison de 97,2 km/h. Par conséquent, elles s'approchent l'une de l'autre à raison de 97,2 km/h.

Question éclair 4.3

a) $$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(x\cos x)=x\frac{d}{dx}(\cos x)+\cos x\frac{d}{dx}(x)=-x\sin x+\cos x$$

de sorte que

$$dy=(-x\sin x+\cos x)dx$$

b) $$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)=\frac{(x^2+1)\frac{d}{dx}(x)-x\frac{d}{dx}(x^2+1)}{(x^2+1)^2}=\frac{(x^2+1)(1)-x(2x)}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

de sorte que

$$dy=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}dx$$

Question éclair 4.4

On a établi, à la question éclair 4.3 *b*, que $dy=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}dx$. Par conséquent, si $x=0$ et $dx=-0{,}01$, alors

$$dy=\frac{1-0^2}{(0^2+1)^2}(-0{,}01)=-0{,}01$$

Exercices 4.2

1. *a)* $$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{d}{dx}\left[x^5+2(5x^2+3)^2+e^{\sin(x^3-5x)}\right]\\&=5x^4+4(5x^2+3)\frac{d}{dx}(5x^2+3)+e^{\sin(x^3-5x)}\frac{d}{dx}\left[\sin(x^3-5x)\right]\\&=5x^4+40x(5x^2+3)+\cos(x^3-5x)e^{\sin(x^3-5x)}\frac{d}{dx}(x^3-5x)\\&=5x^4+40x(5x^2+3)+(3x^2-5)\cos(x^3-5x)e^{\sin(x^3-5x)}\end{aligned}$$

de sorte que

$$dy=\left[5x^4+40x\left(5x^2+3\right)+\left(3x^2-5\right)\cos\left(x^3-5x\right)e^{\sin\left(x^3-5x\right)}\right]dx$$

b) $$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[\frac{x^3}{\operatorname{tg}\left(3x^2\right)}\right]=\frac{\operatorname{tg}\left(3x^2\right)\frac{d}{dx}\left(x^3\right)-x^3\frac{d}{dx}\left[\operatorname{tg}\left(3x^2\right)\right]}{\operatorname{tg}^2\left(3x^2\right)}$$

$$=\frac{3x^2\operatorname{tg}\left(3x^2\right)-x^3\sec^2\left(3x^2\right)\frac{d}{dx}\left(3x^2\right)}{\operatorname{tg}^2\left(3x^2\right)}$$

$$=\frac{3x^2\operatorname{tg}\left(3x^2\right)-\left(6x\right)x^3\sec^2\left(3x^2\right)}{\operatorname{tg}^2\left(3x^2\right)}$$

$$=\frac{3x^2\operatorname{tg}\left(3x^2\right)-6x^4\sec^2\left(3x^2\right)}{\operatorname{tg}^2\left(3x^2\right)}$$

$$=\frac{3x^2\left[\operatorname{tg}\left(3x^2\right)-2x^2\sec^2\left(3x^2\right)\right]}{\operatorname{tg}^2\left(3x^2\right)}$$

de sorte que $dy=\dfrac{3x^2\left[\operatorname{tg}\left(3x^2\right)-2x^2\sec^2\left(3x^2\right)\right]}{\operatorname{tg}^2\left(3x^2\right)}dx$.

2. a) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{3x+1}\right)=\tfrac{1}{2}\left(3x+1\right)^{-1/2}\dfrac{d}{dx}\left(3x+1\right)=\dfrac{1}{2\sqrt{3x+1}}\left(3\right)=\dfrac{3}{2\sqrt{3x+1}}$, de sorte que $dy=\dfrac{3}{2\sqrt{3x+1}}dx$.

Par conséquent, si $x=5$ et $dx=0{,}02$, alors

$$dy=\frac{3}{2\sqrt{3\left(5\right)+1}}\left(0{,}02\right)=0{,}007\,5$$

b) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}\left[\sec\left(2x\right)\right]=\sec\left(2x\right)\operatorname{tg}\left(2x\right)\dfrac{d}{dx}\left(2x\right)=2\sec\left(2x\right)\operatorname{tg}\left(2x\right)$, de sorte que $dy=\left[2\sec\left(2x\right)\operatorname{tg}\left(2x\right)\right]dx$.

Par conséquent, si $x=\pi/6$ et $dx=0{,}01$, alors

$$dy=\left[2\sec\left(\pi/3\right)\operatorname{tg}\left(\pi/3\right)\right]0{,}01=0{,}04\sqrt{3}\approx 0{,}07$$

c) $$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\ln\left[\operatorname{tg}\left(3x\right)\right]=\frac{1}{\operatorname{tg}\left(3x\right)}\frac{d}{dx}\left[\operatorname{tg}\left(3x\right)\right]=\operatorname{cotg}\left(3x\right)\sec^2\left(3x\right)\frac{d}{dx}\left(3x\right)$$

$$= 3 \cdot \frac{\cos(3x)}{\sin(3x)} \cdot \frac{1}{\cos^2(3x)} = \frac{3}{\sin(3x)\cos(3x)} = \frac{3}{\frac{1}{2}\sin(6x)} = 6\operatorname{cosec}(6x)$$

de sorte que $dy = [6\operatorname{cosec}(6x)]dx$.

Par conséquent, si $x = 3\pi/4$ et $dx = -0{,}1$, alors

$$dy = \left[6\operatorname{cosec}\left(6 \cdot 3\pi/4\right)\right](-0{,}1) = \left[6\operatorname{cosec}\left(9\pi/2\right)\right](-0{,}1) = 6(1)(-0{,}1) = -0{,}6$$

Question éclair 4.5

Soit x la mesure du côté du carré (en centimètres) et A l'aire du carré (en centimètres carrés). On a $A = x^2 \Rightarrow \dfrac{dA}{dx} = 2x \Rightarrow dA = 2x\,dx$. Par conséquent, si $x = 4\text{ cm}$ et $dx = -0{,}1\text{ cm}$, alors

$$\Delta A \approx dA = 2(4)(-0{,}1) = -0{,}8\text{ cm}^2$$

et

$$\frac{\Delta A}{A} \approx \frac{dA}{A} = \frac{-0{,}8}{4^2} = -0{,}05 = -5\ \%$$

Ainsi, sous l'effet du froid, l'aire de la surface métallique carrée de 4 cm de côté diminue d'environ 0,8 cm^2, ce qui représente une diminution d'environ 5 %.

Exercices 4.3

1. Soit D le diamètre de la tumeur (en millimètres), r son rayon (en millimètres), A l'aire de sa surface (en millimètres carrés) et V son volume (en millimètres cubes). La variation d'une fonction f est $\Delta f \approx df$ et sa variation relative est $\dfrac{\Delta f}{f} \approx \dfrac{df}{f}$.

   a) On a $D = 2r \Rightarrow \dfrac{dD}{dr} = 2 \Rightarrow dD = 2dr \Rightarrow dr = \frac{1}{2}dD$. Par conséquent, si $D = 10\text{ mm}$ (ou $r = 5\text{ mm}$) et $dD = 10{,}4 - 10 = 0{,}4\text{ mm}$, alors

$$\Delta r \approx dr = \tfrac{1}{2}dD = \tfrac{1}{2}(0{,}4) = 0{,}2\text{ mm}$$

   et

$$\frac{\Delta r}{r} \approx \frac{dr}{r} = \frac{0{,}2}{5} = 0{,}04 = 4\ \%$$

b) On a $A = 4\pi r^2 \Rightarrow \frac{dA}{dr} = 8\pi r \Rightarrow dA = 8\pi r\,dr$. Par conséquent, si $r = 5\text{ mm}$ et $dr = 0{,}2\text{ mm}$ (valeurs déterminées en *a*), alors

$$\Delta A \approx dA = 8\pi(5)(0{,}2) = 8\pi\text{ mm}^2 \approx 25{,}1\text{ mm}^2$$

et

$$\frac{\Delta A}{A} \approx \frac{dA}{A} = \frac{8\pi}{4\pi(5)^2} = 0{,}08 = 8\ \%$$

c) On a $V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \frac{dV}{dr} = 4\pi r^2 \Rightarrow dV = 4\pi r^2 dr$. Par conséquent, si $r = 5\text{ mm}$ et $dr = 0{,}2\text{ mm}$ (valeurs déterminées en *a*), alors

$$\Delta V \approx dV = 4\pi(5)^2(0{,}2) = 20\pi\text{ mm}^3 \approx 62{,}8\text{ mm}^3$$

et

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} = \frac{20\pi}{\frac{4}{3}\pi(5)^3} = 0{,}12 = 12\ \%$$

2. On a $\frac{dv}{dh} = \frac{d}{dh}\left(\sqrt{6{,}2+4{,}9h}\right) = \frac{1}{2}(6{,}2+4{,}9h)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dh}(6{,}2+4{,}9h) = \frac{4{,}9}{2\sqrt{6{,}2+4{,}9h}}$, de sorte que $dv = \frac{4{,}9}{2\sqrt{6{,}2+4{,}9h}}dh$.

Par conséquent, si $h = 2\text{ m}$ et $dh = 0{,}1\text{ m}$, alors $v = \sqrt{6{,}2+4{,}9(2)} = 4\text{ m/s}$ et

$$\Delta v \approx dv = \frac{4{,}9}{2\sqrt{6{,}2+4{,}9(2)}}(0{,}1) = \frac{49}{800}\text{ m/s} \approx 0{,}06\text{ m/s}$$

et

$$\frac{\Delta v}{v} \approx \frac{dv}{v} = \frac{49/800}{4} = \frac{49}{3\,200} \approx 0{,}015 = 1{,}5\ \%$$

Question éclair 4.6

En général, lorsque dx est de faible amplitude, on a $f(x+dx) \approx f(x) + f'(x)\,dx$.

$f(x)=e^x \;\Rightarrow\; f'(x)=e^x$, de sorte que

$$\begin{aligned}
e^{0,05} &= f(0,05)\\
&= f(0+0,05)\\
&\approx f(0)+f'(0)(0,05)\\
&\approx e^0+e^0(0,05)\\
&\approx 1+1(0,05)\\
&\approx 1,05
\end{aligned}$$

Exercices 4.4

1. En général, lorsque dx est de faible amplitude, on a $f(x+dx)\approx f(x)+f'(x)\,dx$.

a) $f(x)=\sqrt{x} \;\Rightarrow\; f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, de sorte que

$$\begin{aligned}
\sqrt{26} &= f(26)\\
&= f(25+1)\\
&\approx f(25)+f'(25)(1)\\
&\approx \sqrt{25}+\frac{1}{2\sqrt{25}}(1)\\
&\approx 5+\frac{1}{10}\\
&\approx 5,1
\end{aligned}$$

b) $f(x)=\sin x \;\Rightarrow\; f'(x)=\cos x$, de sorte que

$$\begin{aligned}
\sin(0,05) &= f(0,05)\\
&= f(0+0,05)\\
&\approx f(0)+f'(0)(0,05)\\
&\approx \sin(0)+0,05\cos(0)\\
&\approx 0+0,05(1)\\
&\approx 0,05
\end{aligned}$$

c) $f(x)=\operatorname{tg} x \;\Rightarrow\; f'(x)=\sec^2 x$, de sorte que

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}(43°) &= f(43°) \\
&= f(45° - 2°) \\
&= f\left(\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\pi}{90}\right) \\
&\approx f\left(\tfrac{\pi}{4}\right) + f'\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\left(-\tfrac{\pi}{90}\right) \\
&\approx \operatorname{tg}\left(\tfrac{\pi}{4}\right) - \tfrac{\pi}{90}\sec^2\left(\tfrac{\pi}{4}\right) \\
&\approx 1 - \tfrac{\pi}{90}(2) \\
&\approx 1 - \tfrac{\pi}{45} \\
&\approx 0{,}93
\end{aligned}$$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x} \;\Rightarrow\; f'(x) = \tfrac{1}{3}x^{-2/3} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, de sorte que

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{1+\alpha} &= f(1+\alpha) \\
&\approx f(1) + f'(1)(\alpha) \\
&\approx \sqrt[3]{1} + \frac{1}{3\sqrt[3]{1^2}}(\alpha) \\
&\approx 1 + \frac{1}{3}(\alpha) \\
&\approx 1 + \frac{\alpha}{3}
\end{aligned}$$

2. On cherche $P(49) = 100 - \sqrt{2(49)} = 100 - \sqrt{98}$.

Or, $P = 100 - \sqrt{2Q} \;\Rightarrow\; \dfrac{dP}{dQ} = -\tfrac{1}{2}(2Q)^{-1/2}\dfrac{d}{dQ}(2Q) = -\dfrac{1}{2\sqrt{2Q}}(2) = -\dfrac{1}{\sqrt{2Q}}$. En général, lorsque dx est de faible amplitude, on a $f(x+dx) \approx f(x) + f'(x)\,dx$, de sorte que

$$\begin{aligned}
100 - \sqrt{98} &= P(49) \\
&= P(50-1) \\
&\approx P(50) + P'(50)(-1) \\
&\approx \left[100 - \sqrt{2(50)}\right] - \frac{1}{\sqrt{2(50)}}(-1) \\
&\approx 90 + \frac{1}{10} \\
&\approx 90{,}1
\end{aligned}$$

Question éclair 4.7

Soit x la mesure du côté du carré (en centimètres) et P son périmètre (en centimètres). On a $P = 4x \Rightarrow \frac{dP}{dx} = 4 \Rightarrow dP = 4\,dx$. Par conséquent, si $x = 8{,}3$ cm et $dx = 0{,}1$ cm, alors l'incertitude absolue sur le périmètre du carré est de

$$\Delta P \approx dP = 4(0{,}1) = 0{,}4 \text{ cm}$$

et l'incertitude relative sur le périmètre du carré est de

$$\frac{\Delta P}{P} \approx \frac{dP}{P} = \frac{0{,}4}{8{,}3} \approx 0{,}048 = 4{,}8\ \%$$

Exercice 4.5

1. Soit x l'arête du cube (en centimètres), A son aire totale (en centimètres carrés), V son volume (en centimètres cubes), M sa masse (en grammes) et δ la densité de l'alliage métallique (en grammes par centimètre cube). On a $x = 4$ cm et $dx = 0{,}05$ cm ; de plus, $M = \delta V$.

   a) On a $A = 6x^2 \Rightarrow \frac{dA}{dx} = 12x \Rightarrow dA = 12x\,dx$, de sorte que, si $x = 4$ cm et $dx = 0{,}05$ cm, alors l'incertitude absolue sur l'aire totale du cube est de

   $$\Delta A \approx dA = 12(4)(0{,}05) = 2{,}4 \text{ cm}^2$$

   b) On a $A = 6x^2 \Rightarrow dA = 12x\,dx \Rightarrow \frac{dA}{A} = \frac{12x\,dx}{6x^2} = 2\left(\frac{dx}{x}\right)$, de sorte que, si $x = 4$ cm et $dx = 0{,}05$ cm, alors l'incertitude relative sur l'aire totale du cube est de

   $$\frac{\Delta A}{A} \approx \frac{dA}{A} = 2\left(\frac{0{,}05}{4}\right) = 0{,}025 = 2{,}5\ \%$$

   c) On a $V = x^3 \Rightarrow \frac{dV}{dx} = 3x^2 \Rightarrow dV = 3x^2\,dx$, de sorte que, si $x = 4$ cm et $dx = 0{,}05$ cm, alors l'incertitude absolue sur le volume du cube est de

   $$\Delta V \approx dV = 3(4^2)(0{,}05) = 2{,}4 \text{ cm}^3$$

d) On a $V = x^3 \Rightarrow dV = 3x^2\,dx \Rightarrow \frac{dV}{V} = \frac{3x^2\,dx}{x^3} = 3\left(\frac{dx}{x}\right)$, de sorte que, si $x = 4\text{ cm}$ et $dx = 0{,}05\text{ cm}$, alors l'incertitude relative sur le volume du cube est de

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} = 3\left(\frac{0{,}05}{4}\right) = 0{,}037\,5 = 3{,}75\ \%$$

e) On a $M = \delta V \Rightarrow \frac{dM}{dV} = \delta \Rightarrow dM = \delta\,dV$, de sorte que, si $x = 4\text{ cm}$, $dx = 0{,}05\text{ cm}$ et $\delta = 12\text{ g/cm}^3$, alors $dV = 2{,}4\text{ cm}^3$ (voir *c*) et l'incertitude absolue sur la masse du cube est de

$$\Delta M \approx dM = 12(2{,}4) = 28{,}8\text{ g}$$

f) On a $M = \delta V \Rightarrow dM = \delta\,dV \Rightarrow \frac{dM}{M} = \frac{\delta\,dV}{\delta V} = \frac{dV}{V}$, de sorte que, si $x = 4\text{ cm}$ et $dx = 0{,}05\text{ cm}$, alors $\frac{dV}{V} = 3{,}75\ \%$ (voir *d*) et l'incertitude relative sur la masse du cube est de

$$\frac{\Delta M}{M} \approx \frac{dM}{M} = \frac{dV}{V} = 3{,}75\ \%$$

2. Soit r le rayon du cercle et A son aire. On cherche $\frac{\Delta r}{r} \approx \frac{dr}{r}$ pour que $\frac{\Delta A}{A} \approx \frac{dA}{A} \leq 10\ \%$. Or, la formule de l'aire d'un cercle est $A = \pi r^2$. Par conséquent,

$$\frac{dA}{dr} = 2\pi r$$
$$dA = 2\pi r\,dr$$
$$\frac{dA}{A} = \frac{2\pi r\,dr}{\pi r^2}$$
$$\frac{dA}{A} = 2\left(\frac{dr}{r}\right)$$

Puisque $\frac{dA}{A} \leq 10\ \%$, alors $2\left(\frac{dr}{r}\right) \leq 10\ \%$, d'où $\frac{dr}{r} \leq 5\ \%$.

Pour que l'incertitude relative sur l'aire du cercle n'excède pas 10 %, il faut que l'incertitude relative sur le rayon du cercle n'excède pas 5 %. Donc l'incertitude relative maximale sur le rayon du cercle est de 5 %.

