Calcul I (201-103-RE)
Automne 2017

SOLUTIONNAIRE EXERCICES DE RÉVISION – EXAMEN 2

1. Calculer les dérivées demandées :

a) Soit $f(x)=\sqrt{x^2-3}$. Trouver $f\,'(x)$.

$$f\,'(x)=\left(\left(x^2-3\right)^{\frac{1}{2}}\right)'$$
$$=\frac{1}{2}\left(x^2-3\right)^{-\frac{1}{2}}\left(x^2-3\right)'$$
$$=\frac{1}{\cancel{2}}\left(x^2-3\right)^{-\frac{1}{2}}(\cancel{2}x)$$
$$=\frac{x}{\left(x^2-3\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{x}{\sqrt{x^2-3}}$$

b) Soit $f(x)=\dfrac{3x+1}{5-x}$. Trouver $f\,''(x)$.

$$f\,'(x)=\left(\frac{3x+1}{5-x}\right)'$$
$$=\frac{(3x+1)'(5-x)-(3x+1)(5-x)'}{(5-x)^2}$$
$$=\frac{3(5-x)-(3x+1)(-1)}{(5-x)^2}$$
$$=\frac{15-3x+3x+1}{(5-x)^2}$$
$$=\frac{16}{(5-x)^2}$$

$$f\,''(x)=\left(16(5-x)^{-2}\right)'$$
$$=16(-2)(5-x)^{-3}(5-x)'$$
$$=-32(5-x)^{-3}\cdot(-1)$$
$$=\frac{32}{(5-x)^3}$$

c) Soit $y=(5x-3)(7x+2)^3$. Trouver $\dfrac{dy}{dx}$.

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d\left((5x-3)(7x+2)^3\right)}{dx} \\
&= \frac{d(5x-3)}{dx}(7x+2)^3+(5x-3)\frac{d(7x+2)^3}{dx} \\
&= 5(7x+2)^3+(5x-3)\cdot 3(7x+2)^2\cdot\frac{d(7x+2)}{dx} \\
&= 5(7x+2)^3+(5x-3)\cdot 3(7x+2)^2\cdot 7 \\
&= 5(7x+2)^3+21(5x-3)(7x+2)^2 \\
&= (7x+2)^2\left(5(7x+2)+21(5x-3)\right) \\
&= (7x+2)^2\left(35x+10+105x-63\right) \\
&= (7x+2)^2\left(140x-53\right)
\end{aligned}$$

d) Soit $f(x)=x^7+8x^5+2x$. Trouver $f^{(24)}(x)$.

$$f^{(24)}(x)=0$$

e) Soit $5x^2+2y^3=7xy^2$. Trouver $\dfrac{dy}{dx}$.

$$\frac{d}{dx}(5x^2+2y^3)=\frac{d}{dx}(7xy^2) \quad \text{dérivation implicite}$$

$$\frac{d(5x^2)}{dx}+\frac{d(2y^3)}{dx}=\frac{d(7x)}{dx}\cdot y^2+(7x)\cdot\frac{d(y^2)}{dx}$$

$$10x+6y^2\frac{dy}{dx}=7y^2+7x\cdot 2y\frac{dy}{dx}$$

$$10x+6y^2\frac{dy}{dx}=7y^2+14xy\frac{dy}{dx}$$

$$6y^2\frac{dy}{dx}-14xy\frac{dy}{dx}=7y^2-10x$$

$$\frac{dy}{dx}\left(6y^2-14xy\right)=7y^2-10x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{7y^2-10x}{6y^2-14xy}=\frac{7y^2-10x}{2y(3y-7x)}$$

f) Soit $f(x)=x^2\sqrt{x}$. Trouver $f'(4)$.

$$f(x)=x^2\sqrt{x}=x^2\cdot x^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{5}{2}}$$

$$f'(x)=\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$$

$$f'(4)=\frac{5}{2}(4)^{\frac{3}{2}}=\frac{5}{2}(\sqrt{4})^3=\frac{5}{2}(2)^3=\frac{5}{2}\cdot 8=20$$

g) Soit $y=3x-x^3+\dfrac{2}{\sqrt{x}}+\pi^2$. Trouver $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}$.

$$y=3x-x^3+2(x)^{\frac{-1}{2}}+\pi^2$$

$$\frac{dy}{dx}=3-3x^2+\cancel{2}\cdot\frac{-1}{\cancel{2}}(x)^{\frac{-3}{2}}+0$$

$$=3-3x^2-x^{\frac{-3}{2}}$$

$$=3-3x^2-\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}=\frac{3x^{\frac{3}{2}}-3x^2x^{\frac{3}{2}}-1}{x^{\frac{3}{2}}}=\frac{3x^{\frac{3}{2}}-3x^{\frac{7}{2}}-1}{x^{\frac{3}{2}}}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}=3-3(1)^2-\frac{1}{1^{\frac{3}{2}}}=3-3-1=-1$$

h) Soit $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$. Trouver $f'(x)$.

$$f'(x)=\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)'$$

$$=\frac{(x^2-1)'(x^2+1)-(x^2-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{2x(x^2+1)-(x^2-1)(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{2x^3+2x-2x^3+2x}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

i) Soit $f(x)=\dfrac{6}{\sqrt[3]{x^3+1}}$. Trouver $f'(x)$.

$$f'(x)=\left(6\cdot\left(x^3+1\right)^{\frac{-1}{3}}\right)'$$

$$=6\cdot\frac{-1}{3}\left(x^3+1\right)^{\frac{-4}{3}}\cdot(x^3+1)'$$

$$=6\cdot\frac{-1}{\cancel{3}}\left(x^3+1\right)^{\frac{-4}{3}}\cdot\cancel{3}x^2$$

$$=-6x^2\left(x^3+1\right)^{\frac{-4}{3}}$$

$$=\frac{-6x^2}{\left(x^3+1\right)^{\frac{4}{3}}}$$

j) Soit $f(x)=\left(\dfrac{2-x}{x^2+3}\right)^3$. Trouver $f'(x)$.

$$f'(x)=3\left(\frac{2-x}{x^2+3}\right)^2\cdot\left(\frac{2-x}{x^2+3}\right)'$$

$$=3\left(\frac{2-x}{x^2+3}\right)^2\frac{(2-x)'(x^2+3)-(2-x)(x^2+3)'}{(x^2+3)^2}$$

$$=3\left(\frac{2-x}{x^2+3}\right)^2\frac{(-1)(x^2+3)-(2-x)(2x)}{(x^2+3)^2}$$

$$=3\left(\frac{2-x}{x^2+3}\right)^2\frac{-x^2-3-4x+2x^2}{(x^2+3)^2}$$

$$=3\left(\frac{2-x}{x^2+3}\right)^2\frac{x^2-4x-3}{(x^2+3)^2}$$

$$=\frac{3(2-x)^2(x^2-4x-3)}{(x^2+3)^4}$$ (Produit/somme ne fonctionne pas)

k) Soit $y=\dfrac{3}{x^2}$. Trouver $\dfrac{d^4y}{dx^4}$.

$$y=3x^{-2}$$

$$\frac{dy}{dx}=-6x^{-3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=18x^{-4}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=-72x^{-5}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4}=360x^{-6}=\frac{360}{x^6}$$

l) Soit $f(x)=\dfrac{5x}{\sqrt{3x+1}}$. Trouver $f'(x)$.

$$f'(x)=\frac{(5x)'\left(\sqrt{3x+1}\right)-(5x)\left((3x+1)^{1/2}\right)'}{(\sqrt{3x+1})^2}$$

$$=\frac{5\left(\sqrt{3x+1}\right)-(5x)\left(\frac{1}{2}(3x+1)^{-1/2}(3x+1)'\right)}{3x+1}$$

$$=\frac{5\left(\sqrt{3x+1}\right)-(5x)\left(\frac{1}{2(3x+1)^{1/2}}\cdot 3\right)}{3x+1}$$

$$=\frac{5\left(\sqrt{3x+1}\right)-\frac{15x}{2\sqrt{3x+1}}}{3x+1}$$

$$=\frac{\frac{5\left(\sqrt{3x+1}\right)\cdot 2\sqrt{3x+1}-15x}{2\sqrt{3x+1}}}{3x+1}$$

$$=\frac{\frac{10(3x+1)-15x}{2\sqrt{3x+1}}}{3x+1}$$

$$=\frac{\frac{30x+10-15x}{2\sqrt{3x+1}}}{3x+1}$$

$$=\frac{15x+10}{2\sqrt{3x+1}}\cdot\frac{1}{3x+1}$$

$$=\frac{5(3x+2)}{2(3x+1)^{3/2}}$$

m) Soit $g(t)=2+\sqrt{t}$. Trouver $\dfrac{dg}{dt}$.

$$\frac{dg}{dt}=\frac{1}{2}t^{\frac{-1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{t}}$$

n) Soit $h(x)=\sqrt[9]{(5x^2+3x)^7}$. Trouver $h'(x)$.

$$h(x)=(5x^2+3x)^{7/9}$$

$$h'(x)=\frac{7}{9}(5x^2+3x)^{-2/9}(5x^2+3x)'$$

$$=\frac{7}{9}(5x^2+3x)^{-2/9}(10x+3)$$

$$=\frac{7(10x+3)}{9(5x^2+3x)^{2/9}}=\frac{7(10x+3)}{9(x(5x+3))^{2/9}}=\frac{7(10x+3)}{9x^{2/9}(5x+3)^{2/9}}$$

2. Déterminer l'équation de la droite tangente à la courbe décrite par l'équation suivante : $x^2+4xy+y^3=4$ au point (-2,0).

$$\frac{d}{dx}\left(x^2+4xy+y^3\right)=\frac{d}{dx}(4)$$

$$\frac{d(x^2)}{dx}+\frac{d(4xy)}{dx}+\frac{d(y^3)}{dx}=0$$

$$2x+\frac{d(4x)}{dx}y+4x\frac{dy}{dx}+3y^2\frac{dy}{dx}=0$$

$$2x+4y+4x\frac{dy}{dx}+3y^2\frac{dy}{dx}=0$$

$$4x\frac{dy}{dx}+3y^2\frac{dy}{dx}=-2x-4y$$

$$\frac{dy}{dx}\left(4x+3y^2\right)=-2x-4y$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2x-4y}{4x+3y^2}=\frac{-2(x+2y)}{4x+3y^2}$$

$$m_{\tan}=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(-2,0)}=\frac{-2(-2+2(0))}{4(-2)+3(0)^2}=\frac{4}{-8}=\frac{-1}{2}$$

$$y=mx+b$$

$$y=\frac{-1}{2}x+b \quad \text{point (-2,0)}$$

$$0=\frac{-1}{2}(-2)+b \Rightarrow b=-1$$

$$y=\frac{-1}{2}x-1$$

3. La position, en mètres, d'un objet qui se déplace sur l'axe des abscisses est donnée par $s(t) = \frac{t^3}{3} - 5t^2 + 24t$, où t est le temps, mesuré en secondes.

a) Quelle est la position initiale de l'objet?

$$s(0) = \frac{0^3}{3} - 5(0)^2 + 24(0) = 0\,m$$

b) Déterminer la vitesse de l'objet au temps *t*.

$$v(t) = s'(t) = t^2 - 10t + 24 = (t-4)(t-6)$$

c) À quel(s) moment(s) la vitesse de l'objet est de 15 m/s?

$$v(t) = 15$$
$$t^2 - 10t + 24 = 15$$
$$t^2 - 10t + 9 = 0$$
$$(t-1)(t-9) = 0 \Rightarrow t = 1s \text{ et } t = 9s$$

d) Dans quelle direction l'objet se déplace-t-il initialement?

$v(0) = 24 > 0$. La vitesse initiale est positive, donc l'objet se déplace vers la droite.

e) Quelle est l'accélération de l'objet après 2 secondes?

$$a(t) = v'(t) = 2t - 10 = 2(t-5)$$
$$a(2) = 2(2-5) = -6\ {}^{m}/_{s^2}$$

4. Pour quelle(s) valeur(s) de x la droite tangente à la courbe décrite par $y=(2x^2-3x)(x-5)^2$ est-elle horizontale?

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\left((2x^2-3x)(x-5)^2\right)}{dx}$$
$$=\frac{d(2x^2-3x)}{dx}(x-5)^2+(2x^2-3x)\frac{d(x-5)^2}{dx}$$
$$=(4x-3)(x-5)^2+(2x^2-3x)2(x-5)\cdot\frac{d(x-5)}{dx}$$
$$=(4x-3)(x-5)^2+2(2x^2-3x)(x-5)\cdot 1$$
$$=(x-5)((4x-3)(x-5)+2(2x^2-3x))$$
$$=(x-5)\left(4x^2-20x-3x+15+4x^2-6x\right)$$
$$=(x-5)\left(8x^2-29x+15\right)$$ Produit/Somme: P=120 et S=-29: les 2 nombres sont -24 et -5.
$$=(x-5)\left(8x^2-24x-5x+15\right)$$
$$=(x-5)\left(8x(x-3)-5(x-3)\right)$$
$$=(x-5)(x-3)(8x-5)$$

Si la tangente est horizontale, sa pente est nulle, donc $\frac{dy}{dx}=0$

$(x-5)(x-3)(8x-5)=0\Rightarrow(x-5)=0$ ou $(x-3)=0$ ou $(8x-5)=0\Rightarrow x=5,\ x=3,\ x=\frac{5}{8}$.

5. Déterminer l'équation de la droite tangente à la courbe décrite par $y=(x-1)\left(\frac{\sqrt{3}}{x}\right)$ en $x=1$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d(x-1)}{dx}\left(\frac{\sqrt{3}}{x}\right)+(x-1)\frac{d(\sqrt{3}x^{-1})}{dx}$$
$$=1\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{x}\right)+(x-1)\left(-\sqrt{3}x^{-2}\right)$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{x}-\frac{(x-1)\sqrt{3}}{x^2}=\frac{\sqrt{3}x-(x-1)\sqrt{3}}{x^2}=\frac{\sqrt{3}x-\sqrt{3}x+\sqrt{3}}{x^2}=\frac{\sqrt{3}}{x^2}$$
$$m_{\tan}=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}=\frac{\sqrt{3}}{1^2}=\sqrt{3}$$
$$y=mx+b$$
$y=\sqrt{3}x+b$ Point: Si $x=1,\ y=(1-1)\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right)=0\Rightarrow(1,0)$

$$0=\sqrt{3}(1)+b\quad\Rightarrow b=-\sqrt{3}$$
$$y=\sqrt{3}x-\sqrt{3}=\sqrt{3}(x-1)$$

6. Soit $y=5t+3$, $t=z^2-\frac{4}{z}$ et $z=x+7$. Trouver $\frac{dy}{dx}$ en utilisant la règle de dérivation en chaîne et exprimer la réponse en fonction de *x*.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$$
$$=\frac{d(5t+3)}{dt}\cdot\frac{d(z^2-4z^{-1})}{dz}\cdot\frac{d(x+7)}{dx}$$
$$=5\cdot(2z+4z^{-2})\cdot(1)$$
$$=10\left(z+\frac{2}{z^2}\right)=10\left(\frac{z^3+2}{z^2}\right)=10\left(\frac{(x+7)^3+2}{(x+7)^2}\right)$$

7. Soit la fonction suivante : $f(x)=(x+1)(x^2+4x+3)$.
   a) Déterminer les intervalles où cette fonction est positive et ceux où elle est négative.

Dom $f=\mathbb{R}$

Produit/Somme :

$$\left.\begin{array}{l}P=3\\S=4\end{array}\right\}1 \text{ et } 3$$

$f(x)=(x+1)(x^2+4x+3)$

$f(x)=(x+1)(x+1)(x+3)$

$f(x)=0 \Rightarrow (x+1)(x+1)(x+3)=0 \Rightarrow x=-1$ ou $x=-3$

x	$-\infty$	-3		-1	∞
$x+1$	-	-	-	0	+
$x+1$	-	-	-	0	+
$x+3$	-	0	+	+	+
$f(x)$	-	0	+	0	+

$f(x)$ est positive sur $]-3,-1[\cup]-1,+\infty[$ et $f(x)$ est négative sur $]-\infty,-3[$.

b) Déterminer les intervalles de croissance et de décroissance de cette fonction.

Dom $f = \mathbb{R}$ et Dom $f' = \mathbb{R}$

$$f'(x) = (x+1)'(x^2+4x+3) + (x+1)(x^2+4x+3)'$$
$$f'(x) = 1 \cdot (x^2+4x+3) + (x+1)(2x+4)$$
$$f'(x) = x^2+4x+3+2x^2+4x+2x+4$$

$f'(x) = 3x^2+10x+7$ Produit/Somme: P=21 et S=10: les deux nombres sont 3 et 7.

$$f'(x) = 3x^2+3x+7x+7$$
$$f'(x) = 3x(x+1)+7(x+1)$$
$$f'(x) = (x+1)(3x+7)$$

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow (x+1)(3x+7) = 0 \Rightarrow \quad x = -1 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{7}{3}$$

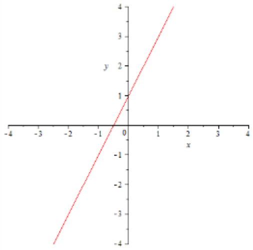
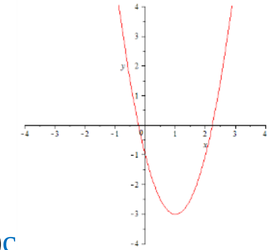
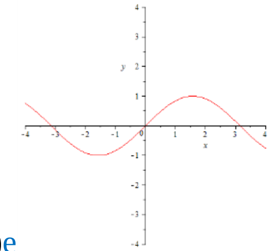
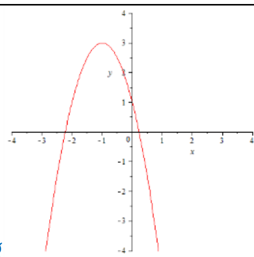
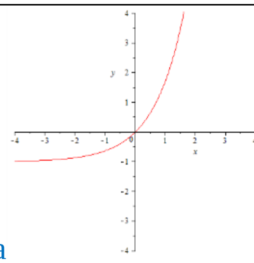
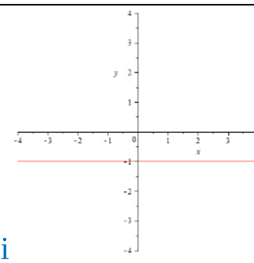
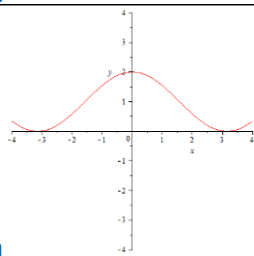
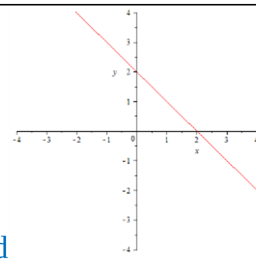
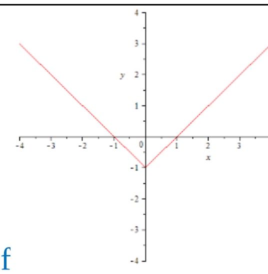
x	$-\infty$	-7/3		-1	∞
$3x+7$	-	0	+	+	+
$x+1$	-	-	-	0	+
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	Max rel	$\searrow$	Min rel	$\nearrow$

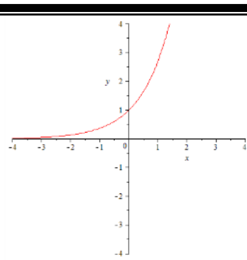
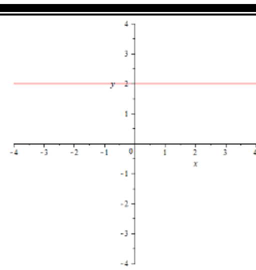
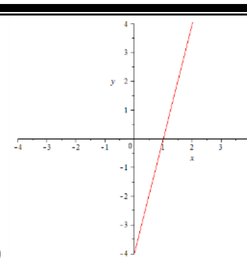
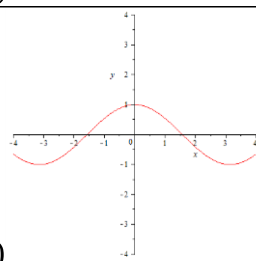
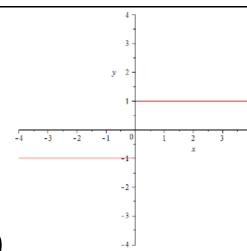
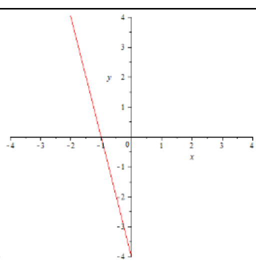
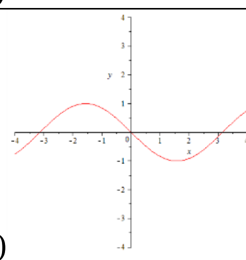
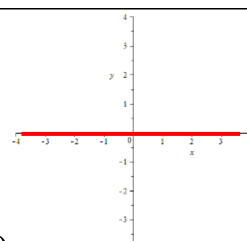
$f(x)$ est croissante sur $]-\infty, -7/3[\cup]-1, +\infty[$ et $f(x)$ est décroissante sur $]-7/3, -1[$.

8.

x		-4		-2		0		5		7	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$
$f(x)$	$\searrow$	Min -1	$\nearrow$	0	$\searrow$	Min 0	$\nearrow$	Max 2	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$

9. Associer à chacun des graphiques du haut représentant une fonction, le graphique de la fonction dérivée apparaissant dans le bas du tableau.

Fonctions		
 1)b	 2)c	 3)e
 4)g	 5)a	 6)i
 7)h	 8)d	 9)f

Fonctions dérivées		
 a)	 b)	 c)
 d)	 e)	 f)
 g)	 h)	 i)