CALCUL 2e édition

différentiel

CHAPITRE 5

Question éclair 5.1

a) $f'(x)=\dfrac{d}{dx}\left(x^4-8x^3+2\right)=4x^3-24x^2=4x^2(x-6)$.

b) $f'(x)=0 \iff 4x^2(x-6)=0 \iff 4x^2=0$ ou $x-6=0 \iff x=0$ ou $x=6$. Alors, les seules valeurs qui annulent la dérivée sont $x=0$ et $x=6$.

c)

	$]-\infty, 0[$		$]0, 6[$		$]6, \infty[$
x		0		6	
$f'(x)$	–	0	–	0	+
$f(x)$	↘	2	↘	–430	↗

d) La fonction $f(x)=x^4-8x^3+2$ est décroissante sur $]-\infty, 6]$ et croissante sur $[6, \infty[$.

Exercice 5.1

a) $f'(x)=\dfrac{d}{dx}\left(-3x^5+20x^3+4\right)=-15x^4+60x^2=-15x^2\left(x^2-4\right)=-15x^2(x-2)(x+2)$.

Déterminons les valeurs critiques :

- $f'(x)$ existe toujours.
- $f'(x)=0$ si $-15x^2=0$, $x-2=0$ ou $x+2=0$, c'est-à-dire si $x=0$, $x=2$ ou $x=-2$.

Construisons le tableau des signes de $f'(x)$:

	$]-\infty, -2[$		$]-2, 0[$		$]0, 2[$		$]2, \infty[$
x		–2		0		2	
$f'(x)$	–	0	+	0	+	0	–
$f(x)$	↘	–60	↗	4	↗	68	↘

Par conséquent, la fonction $f(x) = -3x^5 + 20x^3 + 4$ est croissante sur $[-2, 2]$ et décroissante sur $]-\infty, -2]$ et sur $[2, \infty[$.

b) $$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x^2-9}\right) = \frac{d}{dx}\left[(x^2-9)^{1/3}\right] = \tfrac{1}{3}(x^2-9)^{-2/3}\frac{d}{dx}(x^2-9)$$
$$= \frac{2x}{3(x^2-9)^{2/3}} = \frac{2x}{3[(x-3)(x+3)]^{2/3}}$$

Déterminons les valeurs critiques :

- $f'(x)$ n'existe pas si $3[(x-3)(x+3)]^{2/3} = 0$, c'est-à-dire si $x = 3$ ou $x = -3$.
- $f'(x) = 0$ si $2x = 0$, c'est-à-dire si $x = 0$.

Construisons le tableau des signes de $f'(x)$:

	$]-\infty, -3[$		$]-3, 0[$		$]0, 3[$		$]3, \infty[$
x		-3		0		3	
$f'(x)$	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\sqrt[3]{9}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

Par conséquent, la fonction $f(x) = \sqrt[3]{x^2-9}$ est croissante sur $[0, \infty[$ et décroissante sur $]-\infty, 0]$.

c) $$f'(x) = \frac{d}{dx}(2xe^{-3x}) = 2x\frac{d}{dx}(e^{-3x}) + e^{-3x}\frac{d}{dx}(2x) = -6xe^{-3x} + 2e^{-3x} = 2e^{-3x}(-3x+1).$$

Déterminons les valeurs critiques :

- $f'(x)$ existe toujours.
- Puisque $2e^{-3x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors $f'(x) = 0$ si $-3x + 1 = 0$, c'est-à-dire si $x = \tfrac{1}{3}$.

Construisons le tableau des signes de $f'(x)$:

	]−∞, ⅓[		]⅓, ∞[
x		$\frac{1}{3}$	
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	$\frac{2}{3e}$	↘

Par conséquent, la fonction $f(x) = 2xe^{-3x}$ est croissante sur $]-\infty, \frac{1}{3}]$ et décroissante sur $[\frac{1}{3}, \infty[$.

Question éclair 5.2

Le tableau des signes de $f'(x)$ est le suivant :

	]−∞, −3[		]−3, −1[		]−1, 1[		]1, ∞[
x		−3		−1		1	
$f'(x)$	−	∄	+	0	−	∄	+
$f(x)$	↘	2 min. rel.	↗	6 max. rel.	↘	2 min. rel.	↗

Par conséquent, la fonction $f(x)$ admet un minimum relatif de 2 en $x = -3$, un maximum relatif de 6 en $x = -1$ et un minimum relatif de 2 en $x = 1$.

Exercice 5.2

a) À l'exercice 5.1 *a*, on a obtenu le tableau des signes suivant :

	]−∞, −2[		]−2, 0[		]0, 2[		]2, ∞[
x		−2		0		2	
$f'(x)$	−	0	+	0	+	0	−
$f(x)$	↘	−60 min. rel.	↗	4	↗	68 max. rel.	↘

Par conséquent, la fonction $f(x) = -3x^5 + 20x^3 + 4$ admet un minimum relatif de −60 en $x = -2$ et un maximum relatif de 68 en $x = 2$.

(Remarquons que la fonction $f(x) = -3x^5 + 20x^3 + 4$ n'admet pas de maximum relatif ni de minimum relatif en $x = 0$ puisque la dérivée ne change pas de signe en cette valeur de x.)

b) À l'exercice 5.1 *b*, on a obtenu le tableau des signes suivant :

	$]-\infty, -3[$		$]-3, 0[$		$]0, 3[$		$]3, \infty[$
x		-3		0		3	
$f'(x)$	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\sqrt[3]{9}$ min. rel.	$\nearrow$	0	$\nearrow$

Par conséquent, la fonction $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 9}$ admet un minimum relatif de $-\sqrt[3]{9} \approx -2{,}08$ en $x = 0$ et elle n'admet aucun maximum relatif.

(Remarquons que la fonction $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 9}$ n'admet pas de maximum relatif ni de minimum relatif en $x = -3$ et en $x = 3$ puisque la dérivée ne change pas de signe en ces valeurs de x.)

c) À l'exercice 5.1 *c*, on a obtenu le tableau des signes suivant :

	$]-\infty, \tfrac{1}{3}[$		$]\tfrac{1}{3}, \infty[$
x		$\tfrac{1}{3}$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\dfrac{2}{3e}$ max. rel.	$\searrow$

Par conséquent, la fonction $f(x) = 2xe^{-3x}$ admet un maximum relatif de $\dfrac{2}{3e} \approx 0{,}245$ en $x = \tfrac{1}{3}$ et elle n'admet aucun minimum relatif.

Question éclair 5.3

Le tableau des signes de $f'(x)$ est le suivant :

		$]-4,-2[$		$]-2,3[$		$]3,5[$	
x	-4		-2		3		5
$f'(x)$		$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\frac{3}{4}$ min. rel.	$\nearrow$	5 max. rel.	$\searrow$	-3 min. rel.	$\nearrow$	$\frac{5}{2}$ max. rel.

Par conséquent, sur l'intervalle $[-4,5]$, la fonction $f(x)$ admet un minimum relatif de $-\frac{3}{4}$ en $x=-4$, un maximum relatif de 5 en $x=-2$, un minimum relatif de -3 en $x=3$ et un maximum relatif de $\frac{5}{2}$ en $x=5$.

Exercice 5.3

a) $f'(x)=\dfrac{d}{dx}(4x^3-x^4)=12x^2-4x^3=4x^2(3-x)$.

Déterminons les valeurs critiques appartenant à $]1,4[$:

- $f'(x)$ existe toujours.
- $f'(x)=0$ si $4x^2=0$ ou $3-x=0$, c'est-à-dire si $\underbrace{x=0}_{\text{à rejeter, car } 0\notin\,]1,4[}$ ou $x=3$.

Construisons le tableau des signes de $f'(x)$ sur $[1,4]$:

		$]1,3[$		$]3,4[$	
x	1		3		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	3 min. rel.	$\nearrow$	27 max. rel.	$\searrow$	0 min. rel.

Par conséquent, sur l'intervalle $[1,4]$, la fonction $f(x)=4x^3-x^4$ admet un minimum relatif de 3 en $x=1$, un maximum relatif de 27 en $x=3$ et un minimum relatif de 0 en $x=4$.

b) $f'(x)=\dfrac{d}{dx}\left(-4x\sqrt{x+2}\right)=-4x\dfrac{d}{dx}\left[(x+2)^{\frac{1}{2}}\right]+(x+2)^{\frac{1}{2}}\dfrac{d}{dx}(-4x)$

$$= -4x\left[\tfrac{1}{2}(x+2)^{-1/2}\right]\frac{d}{dx}(x+2)+(x+2)^{1/2}\frac{d}{dx}(-4x)$$
$$= -\frac{2x}{(x+2)^{1/2}}-4(x+2)^{1/2} = -\frac{2x+4(x+2)}{(x+2)^{1/2}} = -\frac{6x+8}{\sqrt{x+2}}$$

Déterminons les valeurs critiques appartenant à $]-2, 2[$:

- $f'(x)$ existe toujours, car $x+2>0$ lorsque $x \in\,]-2, 2[$.
- $f'(x)=0$ si $6x+8=0$, c'est-à-dire si $x=-\tfrac{4}{3}$.

Construisons le tableau des signes de $f'(x)$ sur $[-2, 2]$:

		$]-2, -\tfrac{4}{3}[$		$]-\tfrac{4}{3}, 2[$	
x	-2		$-\tfrac{4}{3}$		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0 min. rel.	$\nearrow$	$\dfrac{16\sqrt{6}}{9}$ max. rel.	$\searrow$	-16 min. rel.

Par conséquent, sur l'intervalle $[-2, 2]$, la fonction $f(x)=-4x\sqrt{x+2}$ admet un minimum relatif de 0 en $x=-2$, un maximum relatif de $\dfrac{16\sqrt{6}}{9}\approx 4{,}35$ en $x=-\tfrac{4}{3}$ et un minimum relatif de -16 en $x=2$.

c) $$f'(x)=\frac{d}{dx}(2\cos x+\sin^2 x) = -2\sin x+2\sin x\frac{d}{dx}(\sin x)$$
$$= -2\sin x+2\sin x\cos x = 2\sin x(\cos x-1)$$

Déterminons les valeurs critiques appartenant à $]0, 2\pi[$:

- $f'(x)$ existe toujours.
- $f'(x)=0$ si $\sin x=0$ ou $\cos x=1$, c'est-à-dire si $x=k\pi$ ou $x=2k\pi$ (où $k\in\mathbb{Z}$). Sur l'intervalle $]0, 2\pi[$, on ne retient que $x=\pi$ comme valeur critique.

Construisons le tableau des signes de $f'(x)$ sur $[0, 2\pi]$:

		$]0, \pi[$		$]\pi, 2\pi[$	
x	0		π		2π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	2 max. rel.	$\searrow$	-2 min. rel.	$\nearrow$	2 max. rel.

Par conséquent, sur l'intervalle $[0, 2\pi]$, la fonction $f(x) = 2\cos x + \sin^2 x$ admet un maximum relatif de 2 en $x = 0$, un minimum relatif de -2 en $x = \pi$ et un maximum relatif de 2 en $x = 2\pi$.

Question éclair 5.4

a) $f'(x) = \dfrac{d}{dx}(x^3 + 3x^2 - 5) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$.

Déterminons les valeurs critiques :

- $f'(x)$ existe toujours.
- $f'(x) = 0$ si $3x = 0$ ou $x + 2 = 0$, c'est-à-dire si $x = 0$ ou $x = -2$.

b) $f''(x) = \dfrac{d}{dx}(3x^2 + 6x) = 6x + 6$. Évaluons la dérivée seconde à chacune des valeurs critiques :

$$f''(0) = 6(0) + 6 = 6 > 0$$

$$f''(-2) = 6(-2) + 6 = -6 < 0$$

Par conséquent, en vertu du test de la dérivée seconde, la fonction $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5$ admet un minimum relatif de $f(0) = -5$ en $x = 0$ et un maximum relatif de $f(-2) = -1$ en $x = -2$.

Exercice 5.4

a) $f'(x) = \dfrac{d}{dx}(x^3 - 12x + 1) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 3(x-2)(x+2)$.

Déterminons les valeurs critiques :

- $f'(x)$ existe toujours.
- $f'(x) = 0$ si $x - 2 = 0$ ou $x + 2 = 0$, c'est-à-dire si $x = 2$ ou $x = -2$.

De plus, $f''(x) = \frac{d}{dx}(3x^2 - 12) = 6x$. Évaluons la dérivée seconde à chacune des valeurs critiques :

$$f''(2) = 6(2) = 12 > 0$$
$$f''(-2) = 6(-2) = -12 < 0$$

Par conséquent, en vertu du test de la dérivée seconde, la fonction $f(x) = x^3 - 12x + 1$ admet un minimum relatif de $f(2) = -15$ en $x = 2$ et un maximum relatif de $f(-2) = 17$ en $x = -2$.

b) $$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x^2 - 4}\right) = \frac{d}{dx}\left[(x^2 - 4)^{1/3}\right] = \tfrac{1}{3}(x^2 - 4)^{-2/3}\frac{d}{dx}(x^2 - 4)$$
$$= \frac{2x}{3(x^2 - 4)^{2/3}} = \frac{2x}{3[(x-2)(x+2)]^{2/3}}$$

Déterminons les valeurs critiques :

- $f'(x)$ n'existe pas si $3[(x-2)(x+2)]^{2/3} = 0$, c'est-à-dire si $x = 2$ ou $x = -2$.
- $f'(x) = 0$ si $2x = 0$, c'est-à-dire si $x = 0$.

Le test de la dérivée seconde ne s'applique pas en $x = 2$ et en $x = -2$, mais il s'appliquerait en $x = 0$. Toutefois, il est plus simple d'obtenir le résultat souhaité à partir du tableau des signes de $f'(x)$, la dérivée seconde de la fonction étant relativement longue à calculer.

	$]-\infty, -2[$		$]-2, 0[$		$]0, 2[$		$]2, \infty[$
x		-2		0		2	
$f'(x)$	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\sqrt[3]{4}$ min. rel.	$\nearrow$	0	$\nearrow$

Par conséquent, la fonction $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 4}$ admet un minimum relatif de $-\sqrt[3]{4} \approx -1{,}587$ en $x = 0$ et elle n'admet aucun maximum relatif.

(Remarquons que la fonction $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 4}$ n'admet pas de maximum relatif ni de minimum relatif en $x = -2$ et en $x = 2$ puisque la dérivée ne change pas de signe en ces valeurs de x.)

Question éclair 5.5

La fonction $f(x)=\sqrt{x+5}$ est continue sur $[-5,\infty[$; elle est donc continue sur l'intervalle fermé $[-4,11]$. En vertu du théorème 5.6, la fonction $f(x)=\sqrt{x+5}$ admet un maximum absolu et un minimum absolu sur l'intervalle fermé $[-4,11]$.

On peut trouver assez facilement ces extremums absolus. En effet, comme $f'(x)=\frac{d}{dx}(x+5)^{1/2}=\frac{1}{2}(x+5)^{-1/2}\frac{d}{dx}(x+5)=\frac{1}{2\sqrt{x+5}}>0$ pour tout $x\in\,]-4,11[$, alors la fonction $f(x)=\sqrt{x+5}$ est croissante sur $[-4,11]$. Elle admet donc un minimum absolu de $f(-4)=1$ en $x=-4$ et un maximum absolu de $f(11)=4$ en $x=11$.

Question éclair 5.6

On a $16-x^2\geq 0 \Leftrightarrow x^2\leq 16 \Leftrightarrow \sqrt{x^2}\leq\sqrt{16} \Leftrightarrow |x|\leq 4 \Leftrightarrow -4\leq x\leq 4$. La fonction $f(x)=\sqrt{16-x^2}$ est donc continue sur $[-4,4]$, et, par conséquent, elle est continue sur l'intervalle fermé $[-2,3]$. Ses extremums absolus sont donc atteints aux extrémités de l'intervalle ou en une valeur critique de $f(x)$ appartenant à $]-2,3[$.

On a $f'(x)=\frac{d}{dx}\left[(16-x^2)^{1/2}\right]=\frac{1}{2}(16-x^2)^{-1/2}\frac{d}{dx}(16-x^2)=\frac{1}{2\sqrt{16-x^2}}(-2x)=\frac{-x}{\sqrt{16-x^2}}$.

Déterminons les valeurs critiques appartenant à $]-2,3[$:

- $f'(x)$ existe toujours, car $16-x^2>0$ lorsque $x\in\,]-2,3[$.
- $f'(x)=0$ si $-x=0$, c'est-à-dire si $x=0$.

Évaluons la fonction $f(x)$ aux extrémités de l'intervalle ainsi qu'à la valeur critique :

$$f(-2)=\sqrt{16-(-2)^2}=\sqrt{12}\approx 3{,}46$$
$$f(0)=\sqrt{16-0^2}=\sqrt{16}=4$$
$$f(3)=\sqrt{16-3^2}=\sqrt{7}\approx 2{,}65$$

Par conséquent, sur l'intervalle $[-2,3]$, la fonction $f(x)=\sqrt{16-x^2}$ admet un minimum absolu de $\sqrt{7}\approx 2{,}65$ en $x=3$ et un maximum absolu de 4 en $x=0$.

Exercice 5.5

a) La fonction $f(x)=\dfrac{x}{x^2+2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (quotient de deux polynômes dont le dénominateur ne s'annule jamais); elle est donc continue sur l'intervalle fermé $[-1,3]$. Ses extremums absolus sont donc atteints aux extrémités de l'intervalle ou en une valeur critique de $f(x)$ appartenant à $]-1,3[$. On a

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x^2+2}\right)=\frac{(x^2+2)\frac{d}{dx}(x)-x\frac{d}{dx}(x^2+2)}{(x^2+2)^2}=\frac{(x^2+2)-x(2x)}{(x^2+2)^2}=\frac{2-x^2}{(x^2+2)^2}$$

Déterminons les valeurs critiques appartenant à $]-1,3[$:

- $f'(x)$ existe toujours, car $(x^2+2)^2\neq 0$ pour tout $x\in\,]-1,3[$.
- $f'(x)=0$ si $2-x^2=0 \Leftrightarrow x^2=2$, c'est-à-dire si $\underbrace{x=-\sqrt{2}}_{\substack{\text{à rejeter, car}\\ -\sqrt{2}\notin\,]-1,3[}}$ ou $x=\sqrt{2}$.

Évaluons la fonction $f(x)=\dfrac{x}{x^2+2}$ aux extrémités de l'intervalle ainsi qu'à la valeur critique :

$$f(-1)=\frac{-1}{(-1)^2+2}=-\tfrac{1}{3}=-0,\overline{3}$$

$$f(\sqrt{2})=\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2+2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\approx 0,35$$

$$f(3)=\frac{3}{3^2+2}=\tfrac{3}{11}=0,\overline{27}$$

Par conséquent, sur l'intervalle $[-1,3]$, la fonction $f(x)=\dfrac{x}{x^2+2}$ admet un minimum absolu de $-\tfrac{1}{3}\approx -0,33$ en $x=-1$ et un maximum absolu de $\dfrac{\sqrt{2}}{4}\approx 0,35$ en $x=\sqrt{2}$.

b) La fonction $f(x)=x\sqrt[5]{3-x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (produit de deux fonctions continues sur l'ensemble des nombres réels); elle est donc continue sur l'intervalle fermé $[0, 4]$. Ses extremums absolus sont donc atteints aux extrémités de l'intervalle ou en une valeur critique de $f(x)$ appartenant à $]0, 4[$. On a

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x\sqrt[5]{3-x}\right) = x\frac{d}{dx}\left[(3-x)^{1/5}\right] + (3-x)^{1/5}\frac{d}{dx}(x)$$
$$= x\left[\tfrac{1}{5}(3-x)^{-4/5}\right]\frac{d}{dx}(3-x) + (3-x)^{1/5} = \frac{x}{5(3-x)^{4/5}}(-1) + (3-x)^{1/5}$$
$$= \frac{-x}{5(3-x)^{4/5}} + \frac{5(3-x)^{4/5}(3-x)^{1/5}}{5(3-x)^{4/5}} = \frac{-x+5(3-x)}{5(3-x)^{4/5}} = \frac{15-6x}{5(3-x)^{4/5}}$$

Déterminons les valeurs critiques appartenant à $]0, 4[$:

- $f'(x)$ n'existe pas si $5(3-x)^{4/5} = 0$, c'est-à-dire si $x = 3$.
- $f'(x) = 0$ si $15 - 6x = 0$, c'est-à-dire si $x = 5/2$.

Évaluons la fonction $f(x) = x\sqrt[5]{3-x}$ aux extrémités de l'intervalle ainsi qu'aux valeurs critiques :

$$f(0) = 0\sqrt[5]{3-0} = 0$$
$$f(5/2) = \frac{5}{2}\cdot\sqrt[5]{3-\frac{5}{2}} = \frac{5}{2}\cdot\sqrt[5]{\frac{1}{2}} = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2^{1/5}} = \frac{5}{2^{6/5}} \approx 2{,}18$$
$$f(3) = 3\sqrt[5]{3-3} = 0$$
$$f(4) = 4\sqrt[5]{3-4} = -4$$

Par conséquent, sur l'intervalle $[0, 4]$, la fonction $f(x) = x\sqrt[5]{3-x}$ admet un minimum absolu de -4 en $x = 4$ et un maximum absolu de $\frac{5}{2^{6/5}} \approx 2{,}18$ en $x = 5/2$.

c) La fonction $f(x) = x^2e^{3x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (produit de deux fonctions continues sur l'ensemble des nombres réels); elle est donc continue sur l'intervalle fermé $[-2, 1]$. Ses extremums absolus sont donc atteints aux extrémités de l'intervalle ou en une valeur critique de $f(x)$ appartenant à $]-2, 1[$. On a

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^2e^{3x}) = x^2\frac{d}{dx}(e^{3x}) + e^{3x}\frac{d}{dx}(x^2) = 3x^2e^{3x} + 2xe^{3x} = xe^{3x}(3x+2)$$

Déterminons les valeurs critiques appartenant à $]-2, 1[$:

- $f'(x)$ existe toujours.
- Puisque $e^{3x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors $f'(x) = 0$ si $x = 0$ ou $3x + 2 = 0$, c'est-à-dire si $x = 0$ ou $x = -\frac{2}{3}$.

Évaluons la fonction $f(x) = x^2 e^{3x}$ aux extrémités de l'intervalle ainsi qu'aux valeurs critiques :

$$f(-2) = (-2)^2 e^{3(-2)} = \frac{4}{e^6} \approx 0{,}01$$

$$f(-\tfrac{2}{3}) = (-\tfrac{2}{3})^2 e^{3(-\frac{2}{3})} = \frac{4}{9e^2} \approx 0{,}06$$

$$f(0) = 0^2 e^{3(0)} = 0$$

$$f(1) = 1^2 e^{3(1)} = e^3 \approx 20{,}09$$

Par conséquent, sur l'intervalle $[-2, 1]$, la fonction $f(x) = x^2 e^{3x}$ admet un minimum absolu de 0 en $x = 0$ et un maximum absolu de $e^3 \approx 20{,}09$ en $x = 1$.

Question éclair 5.7

a) $\lim\limits_{x \to -4^+} \sqrt[3]{(9 - x^2)^2} = \sqrt[3]{(9 - 16)^2} = \sqrt[3]{49} \approx 3{,}66$

b) $\lim\limits_{x \to 2^-} \sqrt[3]{(9 - x^2)^2} = \sqrt[3]{(9 - 4)^2} = \sqrt[3]{25} \approx 2{,}92$

c) On a $f'(x) = \dfrac{-4x}{3(9 - x^2)^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{-4x}{3[(3 - x)(3 + x)]^{\frac{1}{3}}}$. Déterminons les valeurs critiques de la fonction $f(x)$ appartenant à $]-4, 2[$:

- $f'(x)$ n'existe pas si $3[(3 - x)(3 + x)]^{\frac{1}{3}} = 0$, c'est-à-dire si $\underbrace{x = 3}_{\text{à rejeter, car } 3 \notin\,]-4,\, 2[}$ ou $x = -3$.
- $f'(x) = 0$ si $-4x = 0$, c'est-à-dire si $x = 0$.

d) Construisons le tableau des signes de $f'(x)$ sur $]-4, 2[$:

	$]-4, -3[$		$]-3, 0[$		$]0, 2[$
x		-3		0	
$f'(x)$	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	0 min. rel.	$\nearrow$	$\sqrt[3]{81}$ max. rel.	$\searrow$

Par conséquent, sur l'intervalle $]-4, 2[$, la fonction $f(x)=\sqrt[3]{(9-x^2)^2}$ admet un minimum relatif de 0 en $x=-3$ et un maximum relatif de $\sqrt[3]{81}\approx 4{,}33$ en $x=0$.

e) On a obtenu en *d* que la fonction $f(x)$ atteint un minimum relatif de 0 en $x=-3$. Vérifions si ce minimum est également le minimum absolu de la fonction. Or, 0 est le plus petit minimum relatif de la fonction $f(x)$ puisque c'est le seul minimum relatif. De plus,

$$0<\lim_{x\to -4^+}\sqrt[3]{(9-x^2)^2}=\sqrt[3]{49} \text{ et } 0<\lim_{x\to 2^-}\sqrt[3]{(9-x^2)^2}=\sqrt[3]{25}$$

Par conséquent, 0 est le minimum absolu de la fonction $f(x)=\sqrt[3]{(9-x^2)^2}$ sur $]-4, 2[$ et il est atteint en $x=-3$.

Par ailleurs, on a obtenu en *d* que la fonction $f(x)$ atteint un maximum relatif de $\sqrt[3]{81}\approx 4{,}33$ en $x=0$. Vérifions si ce maximum est également le maximum absolu de la fonction. On a que $\sqrt[3]{81}\approx 4{,}33$ est le plus grand maximum relatif de la fonction $f(x)$ puisque c'est le seul maximum relatif. De plus,

$$\sqrt[3]{81}>\lim_{x\to -4^+}\sqrt[3]{(9-x^2)^2}=\sqrt[3]{49} \text{ et } \sqrt[3]{81}>\lim_{x\to 2^-}\sqrt[3]{(9-x^2)^2}=\sqrt[3]{25}$$

Par conséquent, $\sqrt[3]{81}\approx 4{,}33$ est le maximum absolu de la fonction $f(x)=\sqrt[3]{(9-x^2)^2}$ sur $]-4, 2[$ et il est atteint en $x=0$.

Exercice 5.6

a) On a $\lim_{x\to -1^+} f(x)=4(-1)^3-9(-1)^2-12(-1)+3=2$

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = 4(4)^3 - 9(4)^2 - 12(4) + 3 = 67$$

De plus,

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(4x^3 - 9x^2 - 12x + 3) = 12x^2 - 18x - 12 = 12(x + \tfrac{1}{2})(x - 2)$$

Déterminons les valeurs critiques appartenant à $]-1, 4[$:

- $f'(x)$ existe toujours.
- $f'(x) = 0$ si $x + \tfrac{1}{2} = 0$ ou $x - 2 = 0$, c'est-à-dire si $x = -\tfrac{1}{2}$ ou $x = 2$.

Construisons le tableau des signes de $f'(x)$ sur $]-1, 4[$:

	$]-1, -\tfrac{1}{2}[$		$]-\tfrac{1}{2}, 2[$		$]2, 4[$
x		$-\tfrac{1}{2}$		2	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\tfrac{25}{4}$ max. rel.	$\searrow$	-25 min. rel.	$\nearrow$

Par conséquent, sur l'intervalle $]-1, 4[$, la fonction $f(x) = 4x^3 - 9x^2 - 12x + 3$ atteint un maximum relatif de $\tfrac{25}{4}$ en $x = -\tfrac{1}{2}$. Vérifions si ce maximum est également le maximum absolu de la fonction $f(x)$.

On a que $\tfrac{25}{4}$ est le plus grand maximum relatif de la fonction $f(x)$ sur $]-1, 4[$ puisque c'est le seul maximum relatif sur cet intervalle. De plus, $\lim_{x\to 4^-} f(x) = 67 > \tfrac{25}{4}$, de sorte que la fonction $f(x)$ prend des valeurs plus grandes que $\tfrac{25}{4}$ sur $]-1, 4[$.

Par conséquent, sur l'intervalle $]-1, 4[$, la fonction $f(x) = 4x^3 - 9x^2 - 12x + 3$ n'atteint pas de maximum absolu.

Par ailleurs, sur $]-1, 4[$, la fonction $f(x)$ atteint un minimum relatif de -25 en $x = 2$. Vérifions si ce minimum est également le minimum absolu de la fonction $f(x)$.

On a que -25 est le plus petit minimum relatif de la fonction $f(x)$ sur $]-1, 4[$ puisque c'est le seul minimum relatif sur cet intervalle. De plus,

$$-25 < \lim_{x\to -1^+} f(x) = 2 \text{ et } -25 < \lim_{x\to 4^-} f(x) = 67$$

Par conséquent, sur l'intervalle $]-1, 4[$, la fonction $f(x) = 4x^3 - 9x^2 - 12x + 3$ atteint un minimum absolu de -25 en $x = 2$.

b) Puisque $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \underbrace{\lim_{x\to 0^+} \frac{3-2x^2}{x}}_{\text{forme } \frac{3}{0^+}} = \infty$ et que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{3-2x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(\frac{3}{x^2}-2\right)}{x} = \underbrace{\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{3}{x^2}-2\right)}_{\text{forme } \infty(0-2)} = -\infty$$

la fonction $f(x) = \dfrac{3-2x^2}{x}$ n'admet aucun extremum absolu sur $]0, \infty[$.

c) On a $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1-x^2}{x^2+2}\right) = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{\cancel{x^2}\left(\frac{1}{x^2}-1\right)}{\cancel{x^2}\left(1+\frac{2}{x^2}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{\frac{1}{x^2}-1}{1+\frac{2}{x^2}} = \dfrac{0-1}{1+0} = -1$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-x^2}{x^2+2}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(\frac{1}{x^2}-1\right)}{\cancel{x^2}\left(1+\frac{2}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2}-1}{1+\frac{2}{x^2}} = \frac{0-1}{1+0} = -1$$

De plus,

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1-x^2}{x^2+2}\right) = \frac{(x^2+2)\frac{d}{dx}(1-x^2) - (1-x^2)\frac{d}{dx}(x^2+2)}{(x^2+2)^2}$$

$$= \frac{-2x(x^2+2) - 2x(1-x^2)}{(x^2+2)^2} = \frac{-2x^3 - 4x - 2x + 2x^3}{(x^2+2)^2} = -\frac{6x}{(x^2+2)^2}$$

Déterminons les valeurs critiques :

- $f'(x)$ existe toujours, car $(x^2+2)^2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- $f'(x) = 0$ si $6x = 0$, c'est-à-dire si $x = 0$.

Construisons le tableau des signes de $f'(x)$:

	$]-\infty, 0[$		$]0, \infty[$
x		0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$ max. rel.	$\searrow$

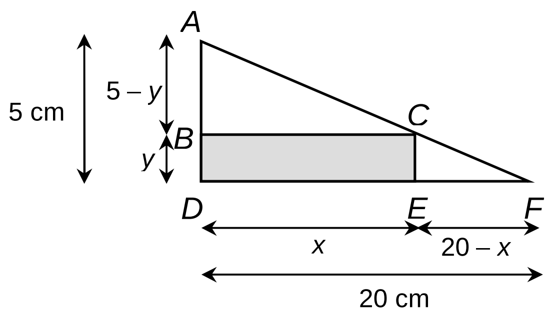
Par conséquent, la fonction $f(x)=\dfrac{1-x^2}{x^2+2}$ atteint un maximum relatif de $\frac{1}{2}$ en $x=0$. Vérifions si ce maximum est également le maximum absolu de la fonction $f(x)$.

Comme la fonction $f(x)$ est croissante sur $]-\infty, 0]$ et décroissante sur $[0, \infty[$, elle atteint sa plus grande valeur en $x=0$.

Par conséquent, la fonction $f(x)=\dfrac{1-x^2}{x^2+2}$ atteint un maximum absolu de $\frac{1}{2}$ en $x=0$. La fonction n'admet cependant pas de minimum absolu puisqu'elle n'a pas de minimum relatif.

Question éclair 5.8

a) On a le schéma suivant.



b) Le triangle CEF est semblable au triangle ADF. Alors,

$$\frac{y}{5}=\frac{20-x}{20} \Leftrightarrow y=\frac{5(20-x)}{20}=\tfrac{1}{4}(20-x) \Leftrightarrow y=5-\tfrac{1}{4}x$$

c) On veut maximiser l'aire du rectangle :

$$A=xy=x\left(5-\tfrac{1}{4}x\right)=5x-\tfrac{1}{4}x^2$$

d) Comme x et y sont respectivement la base et la hauteur du rectangle, ces valeurs ne peuvent être négatives. Il faut donc que $x \geq 0$ et que $y = 5 - \frac{1}{4}x \geq 0$. Cette dernière inéquation est équivalente à $x \leq 20$. On veut donc maximiser $A(x) = 5x - \frac{1}{4}x^2$, où $x \in [0, 20]$.

e) On a $A'(x) = \dfrac{d}{dx}\left(5x - \frac{1}{4}x^2\right) = 5 - \frac{1}{2}x$. Déterminons les valeurs critiques appartenant à $]0, 20[$:

- $A'(x)$ existe toujours.
- $A'(x) = 0$ si $5 - \frac{1}{2}x = 0$, c'est-à-dire si $x = 10$.

f) La fonction $A(x) = 5x - \frac{1}{4}x^2$ est continue sur $[0, 20]$, car c'est un polynôme. Le maximum absolu est donc atteint à une extrémité de l'intervalle ou en la valeur critique.

$$A(0) = 5(0) - \tfrac{1}{4}(0^2) = 0 \text{ cm}^2$$

$$A(10) = 5(10) - \tfrac{1}{4}(10^2) = 25 \text{ cm}^2$$

$$A(20) = 5(20) - \tfrac{1}{4}(20^2) = 0 \text{ cm}^2$$

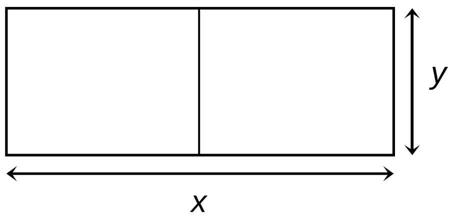
Par conséquent, les dimensions du rectangle d'aire maximale qu'on peut inscrire dans le triangle rectangle sont

$$x = 10 \text{ cm (base)}$$
$$y = 5 - \tfrac{1}{4}x = 5 - \tfrac{1}{4}(10) = \tfrac{5}{2} = 2{,}5 \text{ cm (hauteur)}$$

L'aire maximale du rectangle est 25 cm^2.

Exercices 5.7

1. On veut maximiser l'aire A de l'enclos ci-dessous.



On a $A = xy$. Exprimons A en fonction d'une seule variable.

Comme on dispose de 1 000 m de clôture, on a $2x + 3y = 1000$, d'où $3y = 1000 - 2x$, c'est-à-dire $y = \frac{1000}{3} - \frac{2}{3}x$. Par conséquent,

$$A = xy = x\left(\frac{1000}{3} - \frac{2}{3}x\right) = \frac{1000}{3}x - \frac{2}{3}x^2$$

Comme x et y sont respectivement la longueur et la largeur de l'enclos, ces valeurs ne peuvent être négatives. Il faut donc que $x \geq 0$ et que $y = \frac{1000}{3} - \frac{2}{3}x \geq 0$. Cette dernière inéquation est équivalente à $x \leq 500$. On veut donc maximiser $A(x) = \frac{1000}{3}x - \frac{2}{3}x^2$, où $x \in [0, 500]$.

Or, $A'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1000}{3}x - \frac{2}{3}x^2\right) = \frac{1000}{3} - \frac{4}{3}x = \frac{1}{3}(1000 - 4x)$. Déterminons les valeurs critiques appartenant à $]0, 500[$:

- $A'(x)$ existe toujours.
- $A'(x) = 0$ si $1000 - 4x = 0$, c'est-à-dire si $x = 250$.

La fonction $A(x) = \frac{1000}{3}x - \frac{2}{3}x^2$ est continue sur $[0, 500]$, car c'est un polynôme. Le maximum absolu est donc atteint à une extrémité de l'intervalle ou en la valeur critique.

$$A(0) = \frac{1000}{3}(0) - \frac{2}{3}(0^2) = 0 \text{ m}^2$$

$$A(250) = \frac{1000}{3}(250) - \frac{2}{3}(250^2) = \frac{125\,000}{3} \approx 41\,666{,}67 \text{ m}^2$$

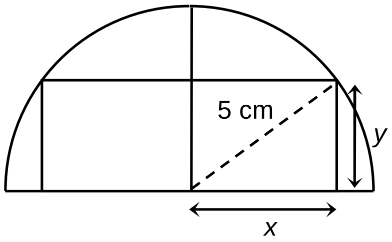
$$A(500) = \frac{1000}{3}(500) - \frac{2}{3}(500^2) = 0 \text{ m}^2$$

Par conséquent, les dimensions de l'enclos d'aire maximale sont

$$x = 250 \text{ m (longueur)}$$
$$y = \frac{1000}{3} - \frac{2}{3}x = \frac{1000}{3} - \frac{2}{3}(250) = \frac{500}{3} \approx 166{,}67 \text{ m (largeur)}$$

L'aire maximale de l'enclos est de $41\,666{,}67 \text{ m}^2$.

2. On a le schéma suivant.



On veut maximiser l'aire A du rectangle qui est donnée par l'expression $A = \underbrace{2x}_{\text{base}} \underbrace{y}_{\text{hauteur}}$, où $x \in [0, 5]$.

En vertu du théorème de Pythagore, on a $x^2 + y^2 = 5^2$, d'où $y = \sqrt{25 - x^2}$. Par conséquent, $A = 2xy = 2x\sqrt{25 - x^2}$.

$$\begin{aligned}
A'(x) &= \frac{d}{dx}\left(2x\sqrt{25-x^2}\right) = 2x\frac{d}{dx}\left(\sqrt{25-x^2}\right) + \sqrt{25-x^2}\,\frac{d}{dx}(2x) \\
&= 2x \cdot \tfrac{1}{2}\left(25-x^2\right)^{-1/2}\frac{d}{dx}\left(25-x^2\right) + 2\sqrt{25-x^2} \\
&= \frac{x}{\sqrt{25-x^2}}(-2x) + 2\sqrt{25-x^2} = \frac{-2x^2}{\sqrt{25-x^2}} + 2\sqrt{25-x^2} \\
&= \frac{-2x^2 + 2\left(25-x^2\right)}{\sqrt{25-x^2}} = \frac{50-4x^2}{\sqrt{25-x^2}}
\end{aligned}$$

Déterminons les valeurs critiques appartenant à $]0, 5[$:

- $A'(x)$ existe toujours, car $25 - x^2 > 0$ lorsque $x \in \,]0, 5[$.
- $A'(x) = 0$ si $50 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = 50 \Leftrightarrow x^2 = 25/2$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x = -\sqrt{\frac{25}{2}} = -\frac{5\sqrt{2}}{2}}_{\text{à rejeter, car } -\frac{5\sqrt{2}}{2} \notin \,]0,\, 5[} \text{ ou } x = \sqrt{\frac{25}{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

La fonction $A(x) = 2x\sqrt{25 - x^2}$ est continue sur $[0, 5]$, car c'est le produit de deux fonctions continues sur cet intervalle. Le maximum absolu est donc atteint à une extrémité de l'intervalle ou en la valeur critique.

$$A(0) = 2(0)\sqrt{25 - \left(0^2\right)} = 0 \text{ cm}^2$$

$$A\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)=2\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{25-\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2}=25\text{ cm}^2$$

$$A(5)=2(5)\sqrt{25-(5^2)}=0\text{ cm}^2$$

Par conséquent, les dimensions du rectangle d'aire maximale qu'on peut inscrire dans un demi-cercle de 5 cm de rayon sont

$$2x=2\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)=5\sqrt{2}\approx 7{,}07\text{ cm (base)}$$

$$y=\sqrt{25-x^2}=\sqrt{25-\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}\approx 3{,}54\text{ cm (hauteur)}$$

L'aire maximale du rectangle est de 25 cm^2.

3. Soit x la longueur du côté du carré (en mètres) et r le rayon du cercle (en mètres). On veut minimiser la somme des aires de ces figures, soit $S=x^2+\pi r^2$. Exprimons S en fonction d'une seule variable.

Comme la longueur du fil de fer qu'on coupe en deux pour former le carré et le cercle est de 60 m, la somme du périmètre du carré et de la circonférence du cercle est de 60 m, soit $4x+2\pi r=60$. Ainsi, $4x=60-2\pi r$, c'est-à-dire $x=15-\frac{\pi}{2}r$. Par conséquent,

$$S=x^2+\pi r^2=\left(15-\tfrac{\pi}{2}r\right)^2+\pi r^2$$

Comme r et x sont respectivement le rayon d'un cercle et la longueur du côté d'un carré, ces valeurs ne peuvent être négatives. Il faut donc que $r\geq 0$ et que $x=15-\frac{\pi}{2}r\geq 0$. Cette dernière inéquation est équivalente à $r\leq \frac{30}{\pi}$. On veut donc maximiser $S(r)=\left(15-\frac{\pi}{2}r\right)^2+\pi r^2$, où $r\in\left[0,\frac{30}{\pi}\right]$. Or,

$$\begin{aligned}S'(r)&=\frac{d}{dr}\left[\left(15-\tfrac{\pi}{2}r\right)^2+\pi r^2\right]=2\left(15-\tfrac{\pi}{2}r\right)\frac{d}{dr}\left(15-\tfrac{\pi}{2}r\right)+2\pi r\\&=(30-\pi r)\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)+2\pi r=-15\pi+\tfrac{\pi^2}{2}r+2\pi r\\&=-15\pi+\left(\tfrac{\pi}{2}+2\right)\pi r=-15\pi+\left(\frac{\pi+4}{2}\right)\pi r\end{aligned}$$

Déterminons les valeurs critiques appartenant à $\left]0,\frac{30}{\pi}\right[$:

- $S'(r)$ existe toujours.
- $S'(r)=0$ si $-15\pi+\left(\frac{\pi+4}{2}\right)\pi r=0 \Leftrightarrow \left(\frac{\pi+4}{2}\right)\pi r=15\pi$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\pi+4}{2}\right)r=15 \Leftrightarrow r=\frac{30}{\pi+4}$$

La fonction $S(r)=(15-{}^{\pi}\!/_{2}r)^2+\pi r^2$ est continue sur $[0, {}^{30}\!/_{\pi}]$, car c'est un polynôme. Le minimum absolu est donc atteint à une extrémité de l'intervalle ou en la valeur critique.

$$S(0)=[15-{}^{\pi}\!/_{2}(0)]^2+\pi(0^2)=225 \text{ m}^2$$

$$S\left(\frac{30}{\pi+4}\right)=\left[15-\frac{\pi}{2}\left(\frac{30}{\pi+4}\right)\right]^2+\pi\left(\frac{30}{\pi+4}\right)^2=\frac{900}{\pi+4}\approx 126{,}02 \text{ m}^2$$

$$S\left(\frac{30}{\pi}\right)=\left[15-\frac{\pi}{2}\left(\frac{30}{\pi}\right)\right]^2+\pi\left(\frac{30}{\pi}\right)^2=\frac{900}{\pi}\approx 286{,}48 \text{ m}^2$$

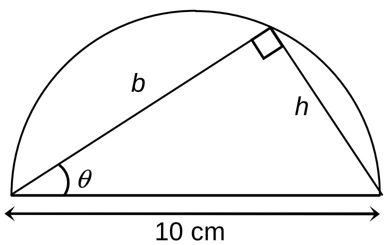
Par conséquent, la longueur du côté du carré et le rayon du cercle qui produisent la plus petite somme des aires de ces figures sont

$$r=\frac{30}{\pi+4}\approx 4{,}2 \text{ m}$$

$$x=15-{}^{\pi}\!/_{2}r=15-\frac{\pi}{2}\left(\frac{30}{\pi+4}\right)=\frac{60}{\pi+4}\approx 8{,}4 \text{ m}$$

La somme minimale des aires de ces figures est de $\frac{900}{\pi+4}\approx 126{,}02 \text{ m}^2$.

4. On a le schéma suivant.



On veut maximiser l'aire du triangle, soit $A=\frac{bh}{2}$. Exprimons A en fonction d'une seule variable.

On a $\cos\theta = \dfrac{b}{10} \Rightarrow b = 10\cos\theta$ et $\sin\theta = \dfrac{h}{10} \Rightarrow h = 10\sin\theta$. Par conséquent,

$$A = \frac{bh}{2} = \frac{(10\cos\theta)(10\sin\theta)}{2} = 50\sin\theta\cos\theta = 25\sin(2\theta)$$

Comme θ est un angle interne d'un triangle rectangle, on a $0 \le \theta \le \pi/2$. On veut donc maximiser $A(\theta) = 25\sin(2\theta)$, où $\theta \in [0, \pi/2]$.

Or, $A'(\theta) = \dfrac{d}{d\theta}[25\sin(2\theta)] = 25\cos(2\theta)\dfrac{d}{d\theta}(2\theta) = 50\cos(2\theta)$. Déterminons les valeurs critiques appartenant à $]0, \pi/2[$:

- $A'(\theta)$ existe toujours.
- $A'(\theta) = 0$ si $\cos(2\theta) = 0$, c'est-à-dire si $2\theta = (2k+1)\pi/2$, où $k \in \mathbb{Z}$, ce qui équivaut à $\theta = (2k+1)\pi/4$, où $k \in \mathbb{Z}$. Sur $]0, \pi/2[$, on ne retient que $\theta = \pi/4$ comme valeur critique.

La fonction $A(\theta) = 25\sin(2\theta)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et l'est par conséquent sur $[0, \pi/2]$. Le maximum absolu est donc atteint à une extrémité de l'intervalle ou en la valeur critique.

$$A(0) = 25\sin[2(0)] = 0 \text{ cm}^2$$

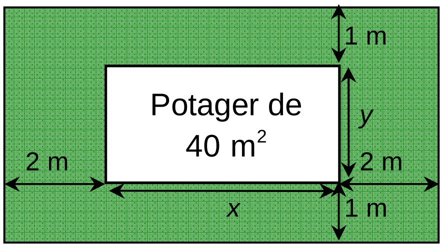
$$A(\pi/4) = 25\sin[2(\pi/4)] = 25 \text{ cm}^2$$

$$A(\pi/2) = 25\sin[2(\pi/2)] = 0 \text{ cm}^2$$

Par conséquent, l'aire maximale du triangle inscrit est de 25 cm^2 lorsque $\theta = \pi/4$ rad. On a alors un triangle rectangle isocèle dont les côtés de l'angle droit mesurent $5\sqrt{2}$ cm [$b = 10\cos(\pi/4) = 5\sqrt{2}$ et $h = 10\sin(\pi/4) = 5\sqrt{2}$], et dont l'hypoténuse mesure 10 cm.

Question éclair 5.9

On a le schéma suivant.



a) On veut minimiser l'aire du terrain rectangulaire comprenant le potager et la bordure de pelouse :

$$A=(x+4)(y+2)$$

b) Comme l'aire du potager est de 40 m^2, on a $xy=40 \Rightarrow y=\dfrac{40}{x}$. En substituant à y cette valeur dans l'équation de l'aire à minimiser, on obtient

$$A=(x+4)(y+2)=(x+4)\left(\frac{40}{x}+2\right)=40+2x+\frac{160}{x}+8=48+2x+\frac{160}{x}$$

c) Comme x et y sont respectivement la longueur et la largeur du potager, ces valeurs ne peuvent être négatives. Il faut donc que $x\geq 0$ et que $y=\dfrac{40}{x}\geq 0$. Or, $\dfrac{40}{x}\geq 0 \Leftrightarrow x>0$. On veut donc maximiser $A(x)=48+2x+\dfrac{160}{x}$, où $x\in\,]0,\infty[$.

d) On a $A'(x)=\dfrac{d}{dx}\left(48+2x+160x^{-1}\right)=2-160x^{-2}=2-\dfrac{160}{x^2}=\dfrac{2x^2-160}{x^2}$. Déterminons les valeurs critiques appartenant à $]0,\infty[$:

- $A'(x)$ existe toujours, car $x^2\neq 0$ lorsque $x\in\,]0,\infty[$.
- $A'(x)=0 \Leftrightarrow 2x^2-160=0 \Leftrightarrow x^2=80$
  $\Leftrightarrow \underbrace{x=-\sqrt{80}=-4\sqrt{5}}_{\text{à rejeter, car } -4\sqrt{5}\notin\,]0,\,\infty[}$ ou $x=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$

e) Construisons le tableau des signes de $A'(x)$ sur $]0,\infty[$:

x	$\left]0, 4\sqrt{5}\right[$	$4\sqrt{5}$	$\left]4\sqrt{5}, \infty\right[$
$A'(x)$	$-$	0	$+$
$A(x)$	$\searrow$	$48+16\sqrt{5}$ min. rel.	$\nearrow$

Par conséquent, sur l'intervalle $\left]0, \infty\right[$, la fonction $A(x)=48+2x+\dfrac{160}{x}$ atteint un minimum relatif de $48+16\sqrt{5}\approx 83{,}78$ en $x=4\sqrt{5}$. Vérifions si ce minimum est également le minimum absolu de la fonction $A(x)$.

Comme la fonction $A(x)$ est décroissante sur $\left]0, 4\sqrt{5}\right]$ et croissante sur $\left[4\sqrt{5}, \infty\right[$, elle atteint sa plus petite valeur en $x=4\sqrt{5}$.

Par conséquent, les dimensions du potager qui minimisent l'aire du terrain rectangulaire comprenant le potager et la bordure de pelouse sont

$$x=4\sqrt{5}\approx 8{,}94 \text{ m (longueur)}$$
$$y=\frac{40}{x}=\frac{40}{4\sqrt{5}}=\frac{10}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{10\sqrt{5}}{5}=2\sqrt{5}\approx 4{,}47 \text{ m (largeur)}$$

L'aire minimale du terrain rectangulaire est de $48+16\sqrt{5}\approx 83{,}78 \text{ m}^2$.

Exercices 5.8

1. Soit V le volume (en centimètres cubes), r le rayon (en centimètres) et h la hauteur (en centimètres) de la boîte cylindrique. On veut minimiser la quantité de métal utilisée pour la fabrication de la boîte, soit l'aire A de la boîte (en centimètres carrés), dont l'expression est

$$A=\underbrace{2\pi rh}_{\text{Aire de la paroi cylindrique}}+\underbrace{2\pi r^2}_{\text{Aire du dessus et du dessous de la boîte}}$$

Exprimons A en fonction d'une seule variable. On a $V=\pi r^2 h=540 \Rightarrow h=\dfrac{540}{\pi r^2}$. En substituant à h cette valeur dans l'équation de l'aire, on obtient

$$A=2\pi rh+2\pi r^2=2\pi r\left(\frac{540}{\pi r^2}\right)+2\pi r^2=\frac{1080}{r}+2\pi r^2$$

Comme r et h sont respectivement le rayon et la hauteur d'une boîte cylindrique, ces valeurs ne peuvent être négatives. Il faut donc que $r \geq 0$ et que $h = \dfrac{540}{\pi r^2} \geq 0$.

Or, $\dfrac{540}{\pi r^2} \geq 0 \iff r > 0$. On veut donc maximiser $A(r) = \dfrac{1080}{r} + 2\pi r^2$, où $r \in \left]0, \infty\right[$.

On a $A'(r) = \dfrac{d}{dr}\left(1080r^{-1} + 2\pi r^2\right) = -1080r^{-2} + 4\pi r = \dfrac{-1080}{r^2} + 4\pi r = \dfrac{4\pi r^3 - 1080}{r^2}$.

Déterminons les valeurs critiques appartenant à $\left]0, \infty\right[$:

- $A'(r)$ existe toujours, car $r^2 \neq 0$ lorsque $r \in \left]0, \infty\right[$.
- $A'(r) = 0 \iff 4\pi r^3 - 1080 = 0 \iff r^3 = \dfrac{1080}{4\pi} = \dfrac{270}{\pi} \iff r = \sqrt[3]{\dfrac{270}{\pi}}$

Construisons le tableau des signes de $A'(r)$ sur $\left]0, \infty\right[$:

	$\left]0, \sqrt[3]{270/\pi}\right[$		$\left]\sqrt[3]{270/\pi}, \infty\right[$
r		$\sqrt[3]{270/\pi}$	
$A'(r)$	$-$	0	$+$
$A(r)$	↘	367,09 min. rel.	↗

Par conséquent, sur l'intervalle $\left]0, \infty\right[$, la fonction $A(r) = \dfrac{1080}{r} + 2\pi r^2$ atteint un minimum relatif d'environ 367,09 en $r = \sqrt[3]{270/\pi} \approx 4,41$. Vérifions si ce minimum est également le minimum absolu de la fonction $A(r)$.

Comme la fonction $A(r)$ est décroissante sur $\left]0, \sqrt[3]{270/\pi}\right]$ et croissante sur $\left[\sqrt[3]{270/\pi}, \infty\right[$, elle atteint sa plus petite valeur en $r = \sqrt[3]{270/\pi}$.

Par conséquent, la quantité minimale de métal requise pour produire une boîte cylindrique dont le volume est de $540\ \text{cm}^3$ est d'environ $367,09\ \text{cm}^2$. Les dimensions de cette boîte sont alors

$$r = \sqrt[3]{270/\pi} \approx 4,41\ \text{cm}$$

$$h = \frac{540}{\pi r^2} = \frac{540}{\pi\left(\frac{270}{\pi}\right)^{2/3}} = \frac{2(270)}{\pi \frac{(270)^{2/3}}{\pi^{2/3}}} = \frac{2(270)^{1/3}}{\pi^{1/3}} = 2\sqrt[3]{\frac{270}{\pi}} \approx 8{,}83 \text{ cm}$$

2. On a

$$\text{tg}(\theta+\varphi) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{1{,}5+(2-1{,}6)}{x} = \frac{1{,}9}{x} \quad \Rightarrow \quad \theta+\varphi = \text{arctg}\left(\frac{1{,}9}{x}\right)$$

$$\text{tg}(\varphi) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{2-1{,}6}{x} = \frac{0{,}4}{x} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \text{arctg}\left(\frac{0{,}4}{x}\right)$$

Par conséquent, $\theta(x) = (\theta+\varphi)-\varphi = \text{arctg}\left(\frac{1{,}9}{x}\right) - \text{arctg}\left(\frac{0{,}4}{x}\right)$.

Comme x représente une distance, x ne peut être négatif. De plus, pour que $\theta(x)$ soit définie, il faut que $x \neq 0$. On veut donc maximiser la fonction $\theta(x)$ lorsque $x \in \left]0, \infty\right[$. Or,

$$\begin{aligned}
\theta'(x) &= \frac{d}{dx}\left[\text{arctg}\left(\frac{1{,}9}{x}\right) - \text{arctg}\left(\frac{0{,}4}{x}\right)\right] \\
&= \frac{1}{1+\left(\frac{1{,}9}{x}\right)^2}\frac{d}{dx}\left(1{,}9x^{-1}\right) - \frac{1}{1+\left(\frac{0{,}4}{x}\right)^2}\frac{d}{dx}\left(0{,}4x^{-1}\right) \\
&= \frac{1}{1+\frac{3{,}61}{x^2}}\left(-1{,}9x^{-2}\right) - \frac{1}{1+\frac{0{,}16}{x^2}}\left(-0{,}4x^{-2}\right) \\
&= \frac{-1{,}9}{x^2\left(1+\frac{3{,}61}{x^2}\right)} - \frac{-0{,}4}{x^2\left(1+\frac{0{,}16}{x^2}\right)} = \frac{-1{,}9}{x^2+3{,}61} + \frac{0{,}4}{x^2+0{,}16} \\
&= \frac{-1{,}9\left(x^2+0{,}16\right)+0{,}4\left(x^2+3{,}61\right)}{\left(x^2+3{,}61\right)\left(x^2+0{,}16\right)} = \frac{-1{,}5x^2+1{,}14}{\left(x^2+3{,}61\right)\left(x^2+0{,}16\right)}
\end{aligned}$$

Déterminons les valeurs critiques de $\theta'(x)$ appartenant à $\left]0, \infty\right[$:

- $\theta'(x)$ existe toujours, car $\left(x^2+3{,}61\right)\left(x^2+0{,}16\right) \neq 0$ lorsque $x \in \left]0, \infty\right[$.
- $\theta'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; -1{,}5x^2+1{,}14 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 = 0{,}76$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{x = -\sqrt{0,76}}_{\text{à rejeter, car } -\sqrt{0,76} \notin]0,\, \infty[} \quad \text{ou } x = \sqrt{0,76}$$

Construisons le tableau des signes de $\theta'(x)$ sur $]0,\, \infty[$:

	$]0,\, \sqrt{0,76}[$		$]\sqrt{0,76},\, \infty[$
x		$\sqrt{0,76}$	
$\theta'(x)$	$+$	0	$-$
$\theta(x)$	↗	0,71 max. rel.	↘

Par conséquent, sur l'intervalle $]0,\, \infty[$, la fonction $\theta(x) = \text{arctg}\left(\frac{1,9}{x}\right) - \text{arctg}\left(\frac{0,4}{x}\right)$ atteint un maximum relatif d'environ 0,71 en $x = \sqrt{0,76} \approx 0,87$. Vérifions si ce maximum est également le maximum absolu de la fonction $\theta(x)$.

Comme la fonction $\theta(x)$ est croissante sur $]0,\, \sqrt{0,76}]$ et décroissante sur $[\sqrt{0,76},\, \infty[$, elle atteint sa plus grande valeur en $x = \sqrt{0,76}$.

Par conséquent, l'observatrice doit se situer à une distance de $\sqrt{0,76} \approx 0,87$ m du mur sur lequel est accrochée la toile pour que l'angle d'observation soit maximal. Cet angle d'observation maximal est d'environ $0,71$ rad (ou d'environ $40,7°$).