CALCUL 2e édition

différentiel

CHAPITRE 1

Question éclair 1.1

a) $\lim\limits_{x \to 1/2} (2x - 3) = -2$

b) $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{\sqrt{1-2x}}{2} = 3/2$

Questions éclair 1.2

1. La fonction $f(x) = x^2 - 2x + 1$ prend des valeurs de plus en plus proches de 4 lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de 3, mais inférieures à 3.
2. La fonction $f(x) = \sqrt{x+2} - 3$ prend des valeurs de plus en plus proches de -2 lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de -1, mais supérieures à -1.
3. $\lim\limits_{x \to -4} f(x) = 7$
4. $\lim\limits_{x \to 2/3} f(x) \nexists$

Exercices 1.1

1. *a)* $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 0$

b) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 2$

c) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 1$

d) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 1$

e) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$

f) $f(2) = 2$

g) $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = 4$

h) $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = 2$

i) $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$ n'existe pas.

j) $f(-3) = 4$

2.

Quand x s'approche de –2 par la gauche $\left(x \to -2^-\right)$,

Quand x s'approche de –2 par la droite $\left(x \to -2^+\right)$,

x	–2,1	–2,01	–2,001	–2,000 1	–2	–1,999 9	–1,999	–1,99	–1,9
$f(x)$	4,41	4,040 1	4,004 0	4,000 4	$\nexists$	3,999 6	3,996 0	3,960 1	3,61

$f(x)$ s'approche de 4.

$f(x)$ s'approche de 4.

Par conséquent, $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 2x^2}{x + 2} = 4$.

3.

Quand x s'approche de 3 par la gauche $\left(x \to 3^-\right)$,

Quand x s'approche de 3 par la droite $\left(x \to 3^+\right)$,

x	2,9	2,99	2,999	2,999 9	3	3,000 1	3,001	3,01	3,1
$f(x)$	2,59	2,059 9	2,006 00	2,000 60	2	2,000 03	2,000 25	2,002 50	2,024 85

$f(x)$ s'approche de 2.

$f(x)$ s'approche de 2.

Par conséquent, $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 2$.

4.

Quand x s'approche de 2 par la gauche $\left(x \to 2^-\right)$,

Quand x s'approche de 2 par la droite $\left(x \to 2^+\right)$,

x	1,9	1,99	1,999	1,999 9	2	2,000 1	2,001	2,01	2,1
$f(x)$	6,859	7,880 6	7,988 0	7,998 8	6	6,000 9	6,009 0	6,090 6	6,963 2

$f(x)$ s'approche de 8.

$f(x)$ s'approche de 6.

Par conséquent, $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ n'existe pas.

5. *a)* $\lim\limits_{x \to 15} C(x) = 120{,}44$ ¢

Quand x s'approche de 15 par la gauche $\left(x \to 15^-\right)$,

Quand x s'approche de 15 par la droite $\left(x \to 15^+\right)$,

x	14,9	14,99	14,999	14,999 9	15	15,000 1	15,001	15,01	15,1
$C(x)$	119,908	120,387	120,435	120,439	120,44	120,441	120,445	120,493	120,972

$C(x)$ s'approche de 120,44 ¢.

$C(x)$ s'approche de 120,44 ¢.

Par conséquent, $\lim\limits_{x \to 15} C(x) = 120{,}44$ ¢.

b) $\lim\limits_{x\to 40} C(x) = 275{,}34$ ¢

Quand x s'approche de 40 par la gauche $(x \to 40^-)$, → ← Quand x s'approche de 40 par la droite $(x \to 40^+)$,

x	39,9	39,99	39,999	39,999 9	40	40,000 1	40,001	40,01	40,1
$C(x)$	274,589	275,265	275,332	275,339	275,34	275,341	275,348	275,415	276,091

$C(x)$ s'approche de 275,34 ¢. → ← $C(x)$ s'approche de 275,34 ¢.

Par conséquent, $\lim\limits_{x\to 40} C(x) = 275{,}34$ ¢.

Question éclair 1.3

a) $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{2}{x-3} = -\infty$

b) $\lim\limits_{x\to -5^+} \dfrac{x+1}{x^2-25} = \infty$

Question éclair 1.4

La droite $x = \frac{1}{4}$ est une asymptote verticale à la courbe décrite par la fonction $f(x)$.

Question éclair 1.5

La fonction $f(x) = \dfrac{2x-4}{3x+5}$ prend des valeurs de plus en plus proches de $\frac{2}{3}$ lorsque x devient de plus en plus grand.

Questions éclair 1.6

1. La fonction $f(x)$ admet une seule asymptote horizontale, soit $y = -5$.
2. La fonction $f(x)$ admet deux asymptotes horizontales, soit $y = 1$ et $y = 3$.
3. La fonction $f(x)$ n'admet aucune asymptote horizontale.

Exercices 1.2

1. *a)* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x-1} = 1$

Quand x devient de plus en plus grand $(x \to \infty)$,

x	10	20	50	100	1000
$f(x)$	1,111 111	1,052 632	1,020 408	1,010 101	1,001 001

$f(x)$ s'approche de 1 $[f(x) \to 1]$.

Par conséquent, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x-1} = 1$.

b) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x}{x-1} = \infty$

Quand x s'approche de 1 par la droite $(x \to 1^+)$,

x	1	1,000 1	1,001	1,01	1,1	1,5
$f(x)$	$\nexists$	10 001	1001	101	11	3

$f(x)$ devient de plus en plus grand $[f(x) \to \infty]$.

Par conséquent, $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x}{x-1} = \infty$.

2. Asymptote verticale : $x = 1$; asymptote horizontale : $y = 1$.

3. *a)* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$

c) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$

d) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \infty$

e) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ n'existe pas.

4. Asymptotes verticales : $x = -2$ et $x = 2$; asymptote horizontale : $y = 2$.

Question éclair 1.7

a) $\lim_{x\to-4} f(x) = \lim_{x\to-4}(5-2x) = 5-2(-4) = 13$

b) $\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0}(x^2+x+7) = 0^2+0+7 = 7$

c) $\lim_{x\to-2^-} f(x) = \lim_{x\to-2^-}(5-2x) = 5-2(-2) = 9$ et

$\lim_{x\to-2^+} f(x) = \lim_{x\to-2^+}(x^2+x+7) = (-2)^2-2+7 = 9$

Par conséquent, $\lim_{x\to-2} f(x) = 9$.

Exercice 1.3

a) $\lim_{x\to-2}(x^3+4x^2-5) = (-2)^3+4(-2)^2-5 = 3$

b) $\lim_{t\to-2}\dfrac{t+2}{t^2+4} = \dfrac{\lim_{t\to-2}(t+2)}{\lim_{t\to-2}(t^2+4)} = \dfrac{-2+2}{(-2)^2+4} = \dfrac{0}{8} = 0$

c) $\lim_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{2x-5}}{4x-3} = \dfrac{\lim_{x\to0}\sqrt[3]{2x-5}}{\lim_{x\to0}(4x-3)} = \dfrac{\sqrt[3]{2(0)-5}}{4(0)-3} = \dfrac{\sqrt[3]{-5}}{-3} = \dfrac{\sqrt[3]{5}}{3}$

d) $\lim_{x\to-1}\left[(x+3)^3(2-4x)^2\right] = \left[\lim_{x\to-1}(x+3)^3\right]\left[\lim_{x\to-1}(2-4x)^2\right] = (-1+3)^3[2-4(-1)]^2 = 288$

e) $\lim_{x\to5} f(x) = \lim_{x\to5}\sqrt{x+1} = \sqrt{5+1} = \sqrt{6}$

f) $\lim_{x\to3^-} f(x) = \lim_{x\to3^-}(11-x^2) = 11-3^2 = 2$ et $\lim_{x\to3^+} f(x) = \lim_{x\to3^+}\sqrt{x+1} = \sqrt{3+1} = 2$, de sorte que $\lim_{x\to3} f(x) = 2$.

g) $\lim_{x\to4}\sqrt[3]{8-2x} = \sqrt[3]{8-2(4)} = 0$

h) $\lim_{x\to4^+}\sqrt[4]{8-2x}$ n'existe pas, car si $x>4$, alors $8-2x<0$. Par conséquent, $\lim_{x\to4}\sqrt[4]{8-2x}$ n'existe pas.

Question éclair 1.8

a) $\underbrace{\lim_{x\to 4^+} \frac{5-3x}{8-2x}}_{\text{forme } \frac{-7}{0^-}} = \infty$

b) $\underbrace{\lim_{x\to -3^-} \frac{x^2+1}{x+3}}_{\text{forme } \frac{10}{0^-}} = -\infty$

Exercices 1.4

1. *a)* $\underbrace{\lim_{x\to 3^-} \frac{\sqrt{x+1}}{9-x^2}}_{\text{forme } \frac{2}{0^+}} = \infty$ et $\underbrace{\lim_{x\to 3^+} \frac{\sqrt{x+1}}{9-x^2}}_{\text{forme } \frac{2}{0^-}} = -\infty$, de sorte que $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}}{9-x^2}$ n'existe pas.

   b) $\underbrace{\lim_{x\to 0^-} \frac{3-x}{x^4}}_{\text{forme } \frac{3}{0^+}} = \infty$ et $\underbrace{\lim_{x\to 0^+} \frac{3-x}{x^4}}_{\text{forme } \frac{3}{0^+}} = \infty$, de sorte que $\lim_{x\to 0} \frac{3-x}{x^4} = \infty$.

2. On a $\underbrace{\lim_{x\to -2^-} \frac{x-1}{3x+6}}_{\text{forme } \frac{-3}{0^-}} = \infty$ et $\underbrace{\lim_{x\to -2^+} \frac{x-1}{3x+6}}_{\text{forme } \frac{-3}{0^+}} = -\infty$, de sorte que la droite $x=-2$ est une asymptote verticale à la courbe décrite par la fonction $f(x) = \frac{x-1}{3x+6}$.

Question éclair 1.9

a) $3x-5 = x\left(3 - \frac{5}{x}\right)$

b) $x^2-4x+3 = x^2\left(1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}\right)$

c) $4+2x-x^3 = x^3\left(\frac{4}{x^3} + \frac{2}{x^2} - 1\right)$

Question éclair 1.10

$\sqrt{16x^2} = \sqrt{16}\sqrt{x^2} = 4|x|$

Exercice 1.5

a) $\underbrace{\lim_{x\to\infty}\left(x^2+2x\right)}_{\text{forme } \infty+\infty}=\infty$

b) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{4}{x^3-4x^2-5}=\underbrace{\lim_{x\to-\infty}\dfrac{4}{x^3\left(1-\frac{4}{x}-\frac{5}{x^3}\right)}}_{\text{forme } \frac{4}{-\infty(1-0-0)}}=0$

c) $\lim_{x\to\infty}\sqrt{2x-5}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x\left(2-\frac{5}{x}\right)}=\underbrace{\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x}\sqrt{2-\frac{5}{x}}\right)}_{\text{forme } \infty\sqrt{2-0}}=\infty$

d) $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-x-2}=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2}\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}\right)=\underbrace{\lim_{x\to-\infty}\left(|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}\right)}_{\text{forme } \infty\sqrt{1-0-0}}=\infty$

Questions éclair 1.11

1. Puisque $P(3)=2\left(3^2\right)-5(3)-3=0$, on a que $x=3$ est une racine (ou un zéro) de $P(x)$. Par le théorème de factorisation, $x-3$ est un facteur de $P(x)$ et alors $P(x)=(x-3)Q(x)$. On peut utiliser la division de polynômes pour déterminer $Q(x)$.

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 2x^2-5x-3 & x-3 \\ \cline{3-3}
 & -\left(2x^2-6x\right) & 2x+1 \\ \cline{2-2}
 & x-3 & \\
 & -(x-3) & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}
$$

Par conséquent, $P(x)=(x-3)(2x+1)$.

2. Puisque $P(-1)=4(-1)^3+6(-1)^2+5(-1)+3=0$, on a que $x=-1$ est une racine (ou un zéro) de $P(x)$. Par le théorème de factorisation, $x-(-1)=x+1$ est un facteur de $P(x)$ et $P(x)=(x+1)Q(x)$. On peut utiliser la division de polynômes pour déterminer $Q(x)$.

$$\begin{array}{r|l} 4x^3+6x^2+5x+3 & x+1 \\ \cline{2-2} -(4x^3+4x^2) & 4x^2+2x+3 \\ \hline 2x^2+5x+3 & \\ -(2x^2+2x) & \\ \hline 3x+3 & \\ -(3x+3) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Par conséquent, $P(x)=(x+1)(4x^2+2x+3)$.

Question éclair 1.12

1. $\dfrac{4}{x-1}-\dfrac{2}{x+2}=\dfrac{4(x+2)}{(x-1)(x+2)}-\dfrac{2(x-1)}{(x+2)(x-1)}$
$=\dfrac{4(x+2)-2(x-1)}{(x-1)(x+2)}=\dfrac{4x+8-2x+2}{(x-1)(x+2)}=\dfrac{2x+10}{(x-1)(x+2)}$

2. $\dfrac{3}{3x+1}-\dfrac{4}{5-x}=\dfrac{3(5-x)}{(3x+1)(5-x)}-\dfrac{4(3x+1)}{(5-x)(3x+1)}$
$=\dfrac{3(5-x)-4(3x+1)}{(3x+1)(5-x)}=\dfrac{15-3x-12x-4}{(3x+1)(5-x)}=\dfrac{-15x+11}{(3x+1)(5-x)}$

Questions éclair 1.13

1. $f(x+3)=2(x+3)+3=2x+6+3=2x+9$
2. $f(x-1)=\sqrt{3-(x-1)}=\sqrt{3-x+1}=\sqrt{4-x}$
3. $f(x+h)=4(x+h)^2-1=4(x^2+2xh+h^2)-1=4x^2+8xh+4h^2-1$
4. $f(x+\Delta x)=\dfrac{4}{5-3(x+\Delta x)}=\dfrac{4}{5-3x-3\Delta x}$

Questions éclair 1.14

1. $\left(\sqrt{3x+1}-5\right)\left(\sqrt{3x+1}+5\right)=\left(\sqrt{3x+1}\right)^2+\cancel{5\sqrt{3x+1}}-\cancel{5\sqrt{3x+1}}-25$
$=3x+1-25=3x-24$

2. $(\sqrt{2x-1}+\sqrt{3-4x})(\sqrt{2x-1}-\sqrt{3-4x})$

$$= (\sqrt{2x-1})^2 - \cancel{\sqrt{2x-1}\sqrt{3-4x}} + \cancel{\sqrt{3-4x}\sqrt{2x-1}} - (\sqrt{3-4x})^2$$

$$= 2x-1-(3-4x) = 2x-1-3+4x = 6x-4$$

Exercice 1.6

a) $$\lim_{x\to 2}\frac{4x^2-7x-2}{x^2+3x-10} = \lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(4x+1)}{\cancel{(x-2)}(x+5)} = \lim_{x\to 2}\frac{4x+1}{x+5} = \frac{9}{7}$$

b) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2+x}{x^3-x^2-x+1} = \lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x^2-x)}{\cancel{(x-1)}(x^2-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x\cancel{(x-1)}}{(x+1)\cancel{(x-1)}} = \lim_{x\to 1}\frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}$$

c) $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[2-(2+\Delta x)^2\right]-(-2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[2-4-4\Delta x-(\Delta x)^2\right]+2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-4\Delta x-(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\cancel{\Delta x}(4+\Delta x)}{\cancel{\Delta x}} = \lim_{\Delta x\to 0}-(4+\Delta x) = -4$$

d) $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{2}{1-(x+h)}-\dfrac{2}{1-x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{2(1-x)}{(1-x-h)(1-x)}-\dfrac{2(1-x-h)}{(1-x)(1-x-h)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{2(1-x)-2(1-x-h)}{(1-x-h)(1-x)}}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{2-2x-2+2x+2h}{(1-x-h)(1-x)}\cdot\frac{1}{h}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\cancel{h}}{\cancel{h}(1-x-h)(1-x)} = \lim_{h\to 0}\frac{2}{(1-x-h)(1-x)} = \frac{2}{(1-x)^2}$$

e) $$\lim_{x\to 8}\frac{8-x}{\sqrt{2x}-4} = \lim_{x\to 8}\frac{(8-x)(\sqrt{2x}+4)}{(\sqrt{2x}-4)(\sqrt{2x}+4)} = \lim_{x\to 8}\frac{(8-x)(\sqrt{2x}+4)}{(\sqrt{2x})^2+\cancel{4\sqrt{2x}}-\cancel{4\sqrt{2x}}-16}$$

$$= \lim_{x\to 8}\frac{(8-x)(\sqrt{2x}+4)}{2x-16} = \lim_{x\to 8}\frac{\cancel{(8-x)}(\sqrt{2x}+4)}{-2\cancel{(8-x)}} = \lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{2x}+4}{-2} = -4$$

f) $$\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-4} = \lim_{x\to -2}\left[\left(\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-4}\right)\left(\frac{\sqrt{2-x}+\sqrt{x+6}}{\sqrt{2-x}+\sqrt{x+6}}\right)\right]$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{\left(\sqrt{2-x}\right)^2 + \cancel{\sqrt{2-x}\sqrt{x+6}} - \cancel{\sqrt{x+6}\sqrt{2-x}} - \left(\sqrt{x+6}\right)^2}{(x^2-4)\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{x+6}\right)}$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{2-x-(x+6)}{(x^2-4)\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{x+6}\right)}$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{-2x-4}{(x^2-4)\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{x+6}\right)}$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{-2\cancel{(x+2)}}{(x-2)\cancel{(x+2)}\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{x+6}\right)}$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{-2}{(x-2)\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{x+6}\right)} = \frac{-2}{-4(2+2)} = \frac{1}{8}$$

Question éclair 1.15

a) $$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+2x+1}{x^2+4} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(1+\frac{4}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{4}{x^2}} = \frac{3+0+0}{1+0} = 3$$

b) $$\lim_{x\to -\infty} \frac{1-x^4}{x^3+2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^4\left(\frac{1}{x^4}-1\right)}{x^3\left(1+\frac{2}{x^3}\right)} = \underbrace{\lim_{x\to -\infty} \frac{x\left(\frac{1}{x^4}-1\right)}{1+\frac{2}{x^3}}}_{\text{forme } \frac{-\infty(0-1)}{1+0}} = \infty$$

Question éclair 1.16

$$\lim_{x\to -\infty} (2x^3-3x+2) = \underbrace{\lim_{x\to -\infty} \left[x^3\left(2-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)\right]}_{\text{forme } -\infty(2-0+0)} = -\infty$$

Question éclair 1.17

$$\frac{6}{9-x^2} - \frac{2}{x+3} = \frac{6}{(3-x)(3+x)} - \frac{2}{x+3} = \frac{6}{(3-x)(3+x)} - \frac{2(3-x)}{(x+3)(3-x)}$$

$$= \frac{6-2(3-x)}{(3-x)(3+x)} = \frac{6-6+2x}{(3-x)(3+x)} = \frac{2x}{(3-x)(3+x)}$$

Exercice 1.7

a) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x+2}{1-x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x^3\left(\frac{1}{x^3}-1\right)}=\underbrace{\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}{x\left(\frac{1}{x^3}-1\right)}}_{\text{forme }\frac{1-0+0}{-\infty(0-1)}}=0$$

b) $$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-8}{2x^3+x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^3}\left(4-\frac{8}{x^3}\right)}{\cancel{x^3}\left(2+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{8}{x^3}}{2+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}=\frac{4-0}{2+0-0}=2$$

c) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{3-x^2}{2x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(\frac{3}{x^2}-1\right)}{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}=\underbrace{\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(\frac{3}{x^2}-1\right)}{2+\frac{1}{x}}}_{\text{forme }\frac{-\infty(0-1)}{2+0}}=\infty$$

d) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2-1}}{x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(4-\frac{1}{x^2}\right)}}{x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2}\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}}{x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\cancel{x}\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}}{\cancel{x}\left(1+\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{2}{x}}=\frac{-\sqrt{4-0}}{1+0}=-2$$

e) $$\lim_{x\to1^+}\left[\frac{3}{(x-1)^2}-\frac{2}{x-1}\right]=\lim_{x\to1^+}\left[\frac{3}{(x-1)^2}-\frac{2(x-1)}{(x-1)(x-1)}\right]=\lim_{x\to1^+}\frac{3-2(x-1)}{(x-1)^2}$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{3-2x+2}{(x-1)^2}=\underbrace{\lim_{x\to1^+}\frac{5-2x}{(x-1)^2}}_{\text{forme }\frac{3}{0^+}}=\infty$$

f) $$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2+\cancel{\sqrt{x+1}\sqrt{x}}-\cancel{\sqrt{x}\sqrt{x+1}}-\left(\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}}_{\text{forme }\frac{1}{\infty+\infty}}=0$$

Questions éclair 1.18

1. La fonction $f(x)$ admet une discontinuité non essentielle par déplacement en $x=2$.

2. La fonction $f(x)$ admet une discontinuité essentielle par saut en $x=-3$.

3. On a $\underbrace{\lim_{x\to -1^-} \frac{1}{x+1}}_{\text{forme } \frac{1}{0^-}} = -\infty$. La fonction $f(x)$ admet donc une discontinuité essentielle infinie en $x = -1$.

4. On a $\lim_{x\to 3} \frac{2x-6}{x^2-9} = \lim_{x\to 3} \frac{2\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}(x+3)} = \lim_{x\to 3} \frac{2}{x+3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. De plus, la fonction $f(x)$ n'est pas définie en $x = 3$ puisque le dénominateur vaut 0 en cette valeur de x. La fonction $f(x)$ admet donc une discontinuité non essentielle par trou en $x = 3$.

Exercices 1.8

1. *a)* La fonction admet une discontinuité non essentielle par trou en $x = -5$, une discontinuité essentielle infinie en $x = -4$, une discontinuité essentielle par saut en $x = -2$ et une discontinuité non essentielle par déplacement en $x = 3$.

   b) La droite $x = -4$ est l'asymptote verticale à la courbe décrite par la fonction.

   c) La droite $y = 2$ est l'asymptote horizontale à la courbe décrite par la fonction.

2. *a)* La fonction est discontinue en $t = 4n$, où n est un entier positif.

   b) Aux moments où le patient reçoit une nouvelle injection de médicament.

3. On a $f(-4) = k$ et $\lim_{x\to -4} \frac{16-x^2}{x+4} = \lim_{x\to -4} \frac{(4-x)\cancel{(4+x)}}{\cancel{x+4}} = \lim_{x\to -4}(4-x) = 8$. Pour que la fonction soit continue en $x = -4$, il faut que $\lim_{x\to -4} f(x) = f(-4)$. Par conséquent, il faut que $k = 8$.

Exercices 1.9

1. *a)* Comme $f(x)$ est une fonction rationnelle, elle est discontinue là où le dénominateur est nul, soit en $x = 1$ et en $x = -3/2$. Par conséquent, $f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-3/2, 1\}$.

   b) Vérifions d'abord la continuité de la fonction aux endroits où la fonction change d'expression, soit en $x = 1$ et en $x = 4$.

On a $f(1)=\sqrt{1}=1$, $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} x^2=1$ et $\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\sqrt{x}=1$, de sorte que la fonction est continue en $x=1$ puisque $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$.

Par contre, $\lim_{x\to 4} f(x)$ n'existe pas, parce que $\lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4^-}\sqrt{x}=2$ et $\lim_{x\to 4^+} f(x)=\lim_{x\to 4^+}\frac{2x+1}{6-x}=\frac{9}{2}$, de sorte que la fonction $f(x)$ est discontinue en $x=4$.

Par ailleurs, si $x<1$, la fonction $f(x)=x^2$ est continue, car c'est un polynôme.

De plus, si $1<x<4$, la fonction $f(x)=\sqrt{x}$ est continue, car $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{\lim_{x\to a} x}=\sqrt{a}=f(a)$ pour tout $1<a<4$ (par la propriété 8).

Finalement, si $x>4$, la fonction $f(x)=\frac{2x+1}{6-x}$ est une fonction rationnelle qui admet seulement une discontinuité en $x=6$ (car c'est la seule valeur qui annule le dénominateur).

Par conséquent, la fonction $f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{4,6\}$.

2. *a)* $\lim_{x\to -2}\left|4x^2+2x+1\right|=\left|4(-2)^2+2(-2)+1\right|=13$

b) $\lim_{x\to 0}\left|\frac{\sqrt{x+4}+3}{5x-1}\right|=\left|\frac{\sqrt{0+4}+3}{5(0)-1}\right|=\left|\frac{5}{-1}\right|=|-5|=5$

c) $\lim_{x\to 3}\left(\frac{1-x^2}{2x-2}\right)^5=\left(\frac{1-9}{6-2}\right)^5=(-2)^5=-32$

Exercices 1.10

1. *a)* La fonction $f(x)=\sqrt{x+3}$ est continue sur $]-3,\infty[$ puisque $x+3>0$ sur cet intervalle, de sorte que si $a>-3$, alors $\lim_{x\to a}\sqrt{x+3}=\sqrt{a+3}=f(a)$. De plus, $\lim_{x\to -3^+} f(x)=\lim_{x\to -3^+}\sqrt{x+3}=0=f(-3)$, de sorte que la fonction est continue sur $[-3,\infty[$.

b) La fonction $f(x)=\dfrac{5x-4}{x^2-16}$ n'est pas définie en $x=-4\in[-5,3]$ puisque le dénominateur est nul en cette valeur de x. Par conséquent, la fonction $f(x)=\dfrac{5x-4}{x^2-16}$ n'est pas continue sur l'intervalle $[-5,3]$.

c) Vérifions d'abord la continuité de la fonction aux endroits où la fonction change d'expression, soit en $x=0$ et en $x=3$.

On a $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2+1)=0^2+1=1$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{1+x}=1$ et $f(0)=0^2+1=1$, de sorte que la fonction est continue en $x=0$ puisque $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$.

De même, $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\sqrt{1+x}=2$, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{3x+1}{x+2}=2$ et $f(3)=\dfrac{3(3)+1}{3+2}=2$, de sorte que la fonction est continue en $x=3$ puisque $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3)$.

Par ailleurs, la fonction x^2+1 est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction $\sqrt{1+x}$ est continue sur $[-1,\infty[$ et la fonction $\dfrac{3x+1}{x+2}$ est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$, de sorte que les composantes de la fonction $f(x)$ sont continues sur les intervalles utilisés pour définir celle-ci. Par conséquent, la fonction $f(x)$ est continue sur l'intervalle $[-1,5]$.

2. *a)* Les composantes de la fonction $f(x)$ sont continues parce qu'elles sont des polynômes. Il suffit donc de s'assurer que la fonction est continue à l'endroit où elle change d'expression, soit en $x=-1$. On a $f(-1)=-4-2(-1)=-2$, $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}(-4-2x)=-2$ et $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}(x^2+kx-2)=-1-k$. Pour que la fonction soit continue en $x=-1$, il faut donc que $-1-k=-2$, c'est-à-dire que $k=1$.

b) Les composantes de la fonction $f(x)$ sont continues parce qu'elles sont des polynômes. Il suffit donc de s'assurer que la fonction est continue à l'endroit où elle change d'expression, soit en $x=2$. On a $f(2)=2k-\tfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(4-kx^2)=4-4k$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(kx-\tfrac{1}{2})=2k-\tfrac{1}{2}$. Pour que la fonction soit continue en $x=2$, il faut donc que $4-4k=2k-\tfrac{1}{2}$, c'est-à-dire que $k=\tfrac{3}{4}$.

