CHAPITRE 6

Question éclair 6.1

La fonction $f(x)=\dfrac{-3}{x-5}$ est définie lorsque son dénominateur est non nul. Or, on a

$$x-5=0 \iff x=5$$

La seule valeur réelle qui annule le dénominateur de $f(x)$ est $x=5$. Elle doit donc être exclue du domaine, de sorte que $\text{Dom}_f=\mathbb{R}\setminus\{5\}$.

Question éclair 6.2

On a $x^3-16x=x(x^2-16)=x(x-4)(x+4)$. Par conséquent,

$$x^3-16x=0 \iff x(x-4)(x+4)=0 \iff x=0,\ x=4 \text{ ou } x=-4$$

Le tableau des signes de x^3-16x est le suivant :

	$]-\infty,-4[$		$]-4,0[$		$]0,4[$		$]4,\infty[$
x		-4		0		4	
x^3-16x	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

L'expression x^3-16x est donc non négative si $x\in[-4,0]$ ou si $x\in[4,\infty[$.

Exercice 6.1

a) La fonction $f(x)=\dfrac{5}{2^x(x^2+x-6)}=\dfrac{5}{2^x(x-2)(x+3)}$ est définie lorsque son dénominateur est non nul. Or, puisque $2^x>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a

$$2^x(x-2)(x+3)=0 \iff x-2=0 \text{ ou } x+3=0 \iff x=2 \text{ ou } x=-3$$

Les seules valeurs réelles qui annulent le dénominateur de $f(x)$ sont $x=-3$ et $x=2$. Elles doivent donc être exclues du domaine, de sorte que $\text{Dom}_f=\mathbb{R}\setminus\{-3, 2\}$.

b) La fonction $f(x)=\sec x \operatorname{tg} x=\dfrac{1}{\cos x}\cdot\dfrac{\sin x}{\cos x}=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$ est définie lorsque son dénominateur est non nul. Or, on a

$$\cos^2 x=0 \;\Leftrightarrow\; \cos x=0 \Leftrightarrow\; x=(2k+1)\frac{\pi}{2} \text{ où } k\in\mathbb{Z}$$

Les seules valeurs réelles qui annulent le dénominateur de $f(x)$ sont $x=(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, où $k\in\mathbb{Z}$. Elles doivent donc être exclues du domaine, de sorte que $\text{Dom}_f=\mathbb{R}\setminus\left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2}\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

c) La fonction $f(x)=\sqrt[3]{9-x^2}$ est définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ puisqu'il s'agit de la racine troisième, soit une racine $n^{\text{ième}}$ où n est impair, de la fonction $9-x^2$ qui est définie pour tout $x\in\mathbb{R}$. Par conséquent, $\text{Dom}_f=\mathbb{R}$.

d) Une racine paire est définie seulement si la quantité sous le radical n'est pas négative. La fonction $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ est donc définie si et seulement si $9-x^2\geq 0$. Or,

$$9-x^2\geq 0 \;\Leftrightarrow\; x^2\leq 9 \;\Leftrightarrow\; |x|\leq 3 \;\Leftrightarrow\; -3\leq x\leq 3$$

Par conséquent, $\text{Dom}_f=[-3, 3]$.

e) On ne peut évaluer le logarithme d'une quantité que si elle est positive. La fonction $f(x)=3+\ln(3-2x)$ est donc définie si et seulement si $3-2x>0$. Or,

$$3-2x>0 \;\Leftrightarrow\; 2x<3 \;\Leftrightarrow\; x<3/2$$

Par conséquent, $\text{Dom}_f=\left]-\infty, 3/2\right[$.

Question éclair 6.3

Les valeurs de x susceptibles de produire une asymptote verticale sont celles qui annulent le dénominateur d'une fraction ou celles qui annulent l'argument d'un logarithme.

a) On a $x^4 - 6x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3(x-6) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 6$. Les seules valeurs de x qui annulent le dénominateur de la fonction $f(x) = \frac{x-1}{x^4 - 6x^3}$ sont $x = 0$ et $x = 6$. Ces deux valeurs sont donc les seules susceptibles de produire une asymptote verticale.

b) On a $x^2 - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-5) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 5$. Les seules valeurs de x qui annulent l'argument du logarithme dans l'expression de la fonction $g(x) = \ln(x^2 - 4x - 5)$ sont $x = -1$ et $x = 5$. Ces deux valeurs sont donc les seules susceptibles de produire une asymptote verticale.

Question éclair 6.4

Les valeurs susceptibles de produire une asymptote verticale sont les valeurs de x qui annulent le dénominateur de la fonction $f(x) = \frac{-3}{x-5}$. Or,

$$x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

La seule valeur qui annule le dénominateur de la fonction est $x = 5$. Étudions le comportement de la fonction $f(x)$ autour de $x = 5$:

$$\lim_{x \to 5^-} f(x) = \underbrace{\lim_{x \to 5^-} \frac{-3}{x-5}}_{\text{forme } \frac{-3}{0^-}} = \infty$$

et

$$\lim_{x \to 5^+} f(x) = \underbrace{\lim_{x \to 5^+} \frac{-3}{x-5}}_{\text{forme } \frac{-3}{0^+}} = -\infty$$

Par conséquent, la droite $x = 5$ est une asymptote verticale à la courbe décrite par la fonction $f(x)$.

Exercice 6.2

a) Les valeurs susceptibles de produire une asymptote verticale sont les valeurs de x qui annulent le dénominateur de la fonction $f(x)=\dfrac{x^2-4}{2-x}$. Or,

$$2-x=0 \Leftrightarrow x=2$$

La seule valeur qui annule le dénominateur de la fonction est $x=2$. Étudions le comportement de la fonction $f(x)$ autour de $x=2$:

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{2-x}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{-\cancel{(x-2)}}=\lim_{x\to 2}[-(x+2)]=-4$$

Par conséquent, la courbe décrite par la fonction $f(x)$ n'admet pas d'asymptote verticale. La fonction admet toutefois une discontinuité non essentielle par trou en $x=2$.

b) Les valeurs susceptibles de produire une asymptote verticale sont les valeurs de x qui annulent le dénominateur de la fonction $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2-3x}=\dfrac{2x+1}{x(x-3)}$. Or,

$$x(x-3)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x-3=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=3$$

Les seules valeurs qui annulent le dénominateur de la fonction sont $x=0$ et $x=3$. Étudions le comportement de la fonction $f(x)$ autour de $x=0$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\underbrace{\lim_{x\to 0^-}\frac{2x+1}{x(x-3)}}_{\text{forme } \frac{1}{0^+}}=\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\underbrace{\lim_{x\to 0^+}\frac{2x+1}{x(x-3)}}_{\text{forme } \frac{1}{0^-}}=-\infty$$

Par conséquent, la droite $x=0$ est une asymptote verticale à la courbe décrite par la fonction $f(x)$.

Étudions le comportement de la fonction $f(x)$ autour de $x=3$:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\underbrace{\lim_{x\to 3^-}\frac{2x+1}{x(x-3)}}_{\text{forme } \frac{7}{0^-}}=-\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 3^+} f(x)=\underbrace{\lim_{x\to 3^+}\frac{2x+1}{x(x-3)}}_{\text{forme } \frac{7}{0^+}}=\infty$$

Par conséquent, la droite $x = 3$ est aussi une asymptote verticale à la courbe décrite par la fonction $f(x)$.

c) Les valeurs susceptibles de produire une asymptote verticale sont les valeurs de x sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ qui annulent le dénominateur de la fonction $f(x) = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$. Or, sur l'intervalle $[0, 2\pi]$, on a

$$\cos x = 0 \iff x = \tfrac{\pi}{2} \text{ ou } x = \tfrac{3\pi}{2}$$

Les seules valeurs qui annulent le dénominateur de la fonction sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ sont $x = \tfrac{\pi}{2}$ et $x = \tfrac{3\pi}{2}$. Étudions le comportement de la fonction $f(x)$ autour de $x = \tfrac{\pi}{2}$:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \underbrace{\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\cos x}}_{\text{forme } \frac{1}{0^+}} = \infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \underbrace{\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\cos x}}_{\text{forme } \frac{1}{0^-}} = -\infty$$

Par conséquent, la droite $x = \tfrac{\pi}{2}$ est une asymptote verticale à la courbe décrite par la fonction $f(x)$.

Étudions le comportement de la fonction $f(x)$ autour de $x = \tfrac{3\pi}{2}$:

$$\lim_{x \to \frac{3\pi}{2}^-} f(x) = \underbrace{\lim_{x \to \frac{3\pi}{2}^-} \frac{1}{\cos x}}_{\text{forme } \frac{1}{0^-}} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to \frac{3\pi}{2}^+} f(x) = \underbrace{\lim_{x \to \frac{3\pi}{2}^+} \frac{1}{\cos x}}_{\text{forme } \frac{1}{0^+}} = \infty$$

Par conséquent, la droite $x = \tfrac{3\pi}{2}$ est aussi une asymptote verticale à la courbe décrite par la fonction $f(x)$.

d) Les valeurs susceptibles de produire une asymptote verticale sont les valeurs de x qui annulent l'argument du logarithme dans l'expression de la fonction $f(x) = \ln(3x+1)$. Or,

$$3x + 1 = 0 \iff 3x = -1 \iff x = -\tfrac{1}{3}$$

La seule valeur qui annule l'argument du logarithme dans l'expression de la fonction $f(x)$ est $x = -\tfrac{1}{3}$. Étudions le comportement de la fonction $f(x)$ à droite de $x = -\tfrac{1}{3}$ puisque $\text{Dom}_f = \left]-\tfrac{1}{3}, \infty\right[$:

$$\lim_{x\to -\frac{1}{3}^+} f(x) = \underbrace{\lim_{x\to -\frac{1}{3}^+} \ln(3x+1)}_{\text{forme } \ln(0^+)} = -\infty$$

Par conséquent, la droite $x = -\frac{1}{3}$ est une asymptote verticale à la courbe décrite par la fonction $f(x)$.

Question éclair 6.5

a) $$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+5}{3x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}\left(2+\frac{5}{x}\right)}{\cancel{x}\left(3-\frac{2}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{5}{x}}{3-\frac{2}{x}} = \frac{2+0}{3-0} = \frac{2}{3}$$

b) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x+5}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(2+\frac{5}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(2+\frac{5}{x}\right)}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x}\left(2+\frac{5}{x}\right)}{-\cancel{x}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2+\frac{5}{x}}{-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \frac{2+0}{-\sqrt{1-0}} = -2$$

Question éclair 6.6

On a

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \underbrace{\lim_{x\to-\infty}\left(4+\frac{1}{x+2}\right)}_{\text{forme } 4+\frac{1}{-\infty}} = 4+0 = 4$$

et

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \underbrace{\lim_{x\to\infty}\left(4+\frac{1}{x+2}\right)}_{\text{forme } 4+\frac{1}{\infty}} = 4+0 = 4$$

Par conséquent, la droite $y = 4$ est la seule asymptote horizontale à la courbe décrite par la fonction $f(x) = 4 + \frac{1}{x+2}$.

Exercice 6.3

a) On a

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{x^2-3x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{3}{x}\right)} = \underbrace{\lim_{x\to-\infty} \frac{2+\frac{1}{x}}{x\left(1-\frac{3}{x}\right)}}_{\text{forme } \frac{2+0}{-\infty(1-0)}} = 0$$

et

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{x^2-3x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{3}{x}\right)} = \underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{1}{x}}{x\left(1-\frac{3}{x}\right)}}_{\text{forme } \frac{2+0}{\infty(1-0)}} = 0$$

Par conséquent, la droite $y=0$ est la seule asymptote horizontale à la courbe décrite par la fonction $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2-3x}$.

b) On a

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \underbrace{\lim_{x\to-\infty} \left(2e^{-x^2}+1\right)}_{\text{forme } 2e^{-\infty}+1} = 0+1 = 1$$

et

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \underbrace{\lim_{x\to\infty} \left(2e^{-x^2}+1\right)}_{\text{forme } 2e^{-\infty}+1} = 0+1 = 1$$

Par conséquent, la droite $y=1$ est la seule asymptote horizontale à la courbe décrite par la fonction $f(x) = 2e^{-x^2}+1$.

c) On a

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(3-\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\right) = \lim_{x\to-\infty} \left[3-\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}}\right] = \lim_{x\to-\infty} \left(3-\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(3-\frac{\cancel{x}}{-\cancel{x}\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(3+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}\right) = 3+\frac{1}{\sqrt{1+0}} = 4$$

De plus,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \left(3-\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\right) = \lim_{x\to\infty} \left[3-\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}}\right] = \lim_{x\to\infty} \left(3-\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(3-\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}\right) = \lim_{x\to\infty} \left(3-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}\right) = 3-\frac{1}{\sqrt{1+0}} = 2$$

Par conséquent, la courbe décrite par la fonction $f(x) = 3 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$ admet deux asymptotes horizontales : $y = 2$ et $y = 4$.

Question éclair 6.7

Soit la fonction $f(x) = \dfrac{15x^2+14x-10}{5x-2}$. Effectuons une division de polynômes :

$$\begin{array}{r|l} \boxed{15x^2}+14x-10 & \boxed{5x}-2 \\ \cline{2-2} -(15x^2-6x) & 3x+4 \\ \cline{1-1} \boxed{20x}-10 & \\ -(20x-8) & \\ \cline{1-1} -2 & \end{array}$$

On obtient

$$f(x) = \frac{15x^2+14x-10}{5x-2} = 3x+4-\frac{2}{5x-2}$$

Vérifions si la droite $y = 3x+4$ est une asymptote oblique à la courbe décrite par la fonction $f(x)$. On a

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-(3x+4)] = \underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{5x-2}}_{\text{forme } \frac{-2}{\infty}} = 0 \text{ et } \lim_{x\to-\infty}[f(x)-(3x+4)] = \underbrace{\lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{5x-2}}_{\text{forme } \frac{-2}{-\infty}} = 0$$

Par conséquent, la droite $y = 3x+4$ est l'asymptote oblique à la courbe décrite par la fonction $f(x)$.

Question éclair 6.8

a) $$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x+1}{x(x-3)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}\left(2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(1-\frac{3}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{3}{x}} = \frac{2-0+0}{1-0} = 2$$

b) $$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-2x\right] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-x+1}{x-3}-2x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x+1-2x(x-3)}{x-3} = \lim_{x\to\infty}\frac{5x+1}{x-3}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}\,(5+\frac{1}{x})}{\cancel{x}\,(1-\frac{3}{x})} = \lim_{x\to\infty} \frac{5+\frac{1}{x}}{1-\frac{3}{x}} = \frac{5+0}{1-0} = 5$$

c) Comme $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 = m \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ et $\lim_{x\to\infty} \left[f(x) - mx\right] = \lim_{x\to\infty} \left[f(x) - 2x\right] = 5 = b \in \mathbb{R}$, la droite $y = mx + b = 2x + 5$ est une asymptote oblique à la courbe décrite par la fonction $f(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{x-3}$.

Question éclair 6.9

On a

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-3\cancel{x}}{\cancel{x}\,(x-5)} = \underbrace{\lim_{x\to-\infty} \frac{-3}{x-5}}_{\text{forme } \frac{-3}{-\infty}} = 0 \notin \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

et

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-3\cancel{x}}{\cancel{x}\,(x-5)} = \underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{-3}{x-5}}_{\text{forme } \frac{-3}{\infty}} = 0 \notin \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Par conséquent, la courbe décrite par la fonction $f(x) = \frac{-3x}{x-5}$ n'admet pas d'asymptote oblique.

Exercice 6.4

a) Soit la fonction $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{2x+1}$. Effectuons une division de polynômes :

$$\begin{array}{r|l} \boxed{x^2} - 3x & \boxed{2x} + 1 \\ \cline{2-2} -\left(x^2 + \frac{1}{2}x\right) & \frac{1}{2}x - \frac{7}{4} \\ \hline \boxed{-\frac{7}{2}x} & \\ -\left(\frac{7}{2}x - \frac{7}{4}\right) & \\ \hline \frac{7}{4} & \end{array}$$

On obtient

$$f(x)=\frac{x^2-3x}{2x+1}=\tfrac{1}{2}x-\tfrac{7}{4}+\frac{7}{4(2x+1)}$$

Vérifions si la droite $y=\tfrac{1}{2}x-\tfrac{7}{4}$ est une asymptote oblique à la courbe décrite par la fonction $f(x)$. On a

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-\left(\tfrac{1}{2}x-\tfrac{7}{4}\right)\right]=\underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{7}{4(2x+1)}}_{\text{forme }\frac{7}{\infty}}=0$$

et

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\left(\tfrac{1}{2}x-\tfrac{7}{4}\right)\right]=\underbrace{\lim_{x\to-\infty}\frac{7}{4(2x+1)}}_{\text{forme }\frac{7}{-\infty}}=0$$

Par conséquent, la droite $y=\tfrac{1}{2}x-\tfrac{7}{4}$ est l'asymptote oblique à la courbe décrite par la fonction $f(x)$.

On aurait également pu obtenir ce résultat en constatant que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x}{x(2x+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}\left(1-\tfrac{3}{x}\right)}{\cancel{x^2}\left(2+\tfrac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\tfrac{3}{x}}{2+\tfrac{1}{x}}=\frac{1}{2}=m\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

et

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-\tfrac{1}{2}x\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-3x}{2x+1}-\frac{x}{2}\right)=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2(x^2-3x)-x(2x+1)}{2(2x+1)}\right]$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-7x}{4x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-7\cancel{x}}{\cancel{x}\left(4+\tfrac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{-7}{4+\tfrac{2}{x}}=-\frac{7}{4}=b\in\mathbb{R}$$

Par conséquent, la droite $y=mx+b=\tfrac{1}{2}x-\tfrac{7}{4}$ est une asymptote oblique à la courbe décrite par la fonction $f(x)$.

On obtient de façon similaire que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{2}$ et que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\tfrac{1}{2}x\right]=-\tfrac{7}{4}$, de sorte que la droite $y=\tfrac{1}{2}x-\tfrac{7}{4}$ est la seule asymptote oblique à la courbe décrite par la fonction $f(x)$.

b) La fonction $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2-3x}$ n'admet pas d'asymptote oblique puisque

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x(x^2-3x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x(2+1/x)}{x^3(1-3/x)}=\underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{2+1/x}{x^2(1-3/x)}}_{\text{forme }\frac{2+0}{\infty(1-0)}}=0\notin\mathbb{R}\backslash\{0\}$$

et

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{x(x^2-3x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(2+1/x)}{x^3(1-3/x)}=\underbrace{\lim_{x\to-\infty}\frac{2+1/x}{x^2(1-3/x)}}_{\text{forme }\frac{2+0}{\infty(1-0)}}=0\notin\mathbb{R}\backslash\{0\}$$

c) On a

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}&=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\sqrt{x^2+4}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\sqrt{x^2(1+4/x^2)}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-|x|\sqrt{1+4/x^2}}{x}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{3-x\sqrt{1+4/x^2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(3/x-\sqrt{1+4/x^2}\right)=0-\sqrt{1+0}=-1=m_1\in\mathbb{R}\backslash\{0\}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}[f(x)-(-x)]&=\lim_{x\to\infty}\left(3-\sqrt{x^2+4}+x\right)=3+\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2+4}\right)\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)}{x+\sqrt{x^2+4}}\\&=3+\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-(x^2+4)}{x+\sqrt{x^2+4}}=3+\underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{-4}{x+\sqrt{x^2+4}}}_{\text{forme }\frac{-4}{\infty+\infty}}=3+0=3=b_1\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

Par conséquent, $y=m_1x+b_1=-x+3$ est une asymptote oblique à la courbe décrite par la fonction $f(x)$.

De plus,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}&=\lim_{x\to-\infty}\frac{3-\sqrt{x^2+4}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3-\sqrt{x^2(1+4/x^2)}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3-|x|\sqrt{1+4/x^2}}{x}\\&=\lim_{x\to-\infty}\frac{3-(-x)\sqrt{1+4/x^2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(3/x+\sqrt{1+4/x^2}\right)=0+\sqrt{1+0}=1=m_2\in\mathbb{R}\backslash\{0\}\end{aligned}$$

et

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to-\infty}\left(3-\sqrt{x^2+4}-x\right)=3-\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)\left(x-\sqrt{x^2+4}\right)}{x-\sqrt{x^2+4}}$$

$$=3-\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-\left(x^2+4\right)}{x-\sqrt{x^2+4}}=3-\underbrace{\lim_{x\to-\infty}\frac{-4}{x-\sqrt{x^2+4}}}_{\text{forme }\frac{-4}{-\infty-\infty}}=3-0=3=b_2\in\mathbb{R}$$

Par conséquent, $y=m_2x+b_2=x+3$ est une autre asymptote oblique à la courbe décrite par la fonction $f(x)$.

Question éclair 6.10

a) $f'(x)=\dfrac{d}{dx}\left(x^6-3x^5+4\right)=6x^5-15x^4$

$f''(x)=\dfrac{d}{dx}\left(6x^5-15x^4\right)=30x^4-60x^3=30x^3(x-2)$

b) $f''(x)=0 \Leftrightarrow 30x^3(x-2)=0 \Leftrightarrow 30x^3=0$ ou $x-2=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=2$. Ainsi, les seules valeurs qui annulent la dérivée seconde sont $x=0$ et $x=2$.

c)

	$]-\infty, 0[$		$]0, 2[$		$]2, \infty[$
x		0		2	
$f''(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	$\cup$	4	$\cap$	–28	$\cup$

d) La fonction $f(x)=x^6-3x^5+4$ est concave vers le haut sur l'intervalle $]-\infty, 0]$ et sur l'intervalle $[2, \infty[$, et concave vers le bas sur l'intervalle $[0, 2]$.

Question éclair 6.11

Les valeurs de x susceptibles de produire des points d'inflexion sont les valeurs de $x\in \text{Dom}_f$ qui sont telles que $f''(x)$ n'existe pas ou telles que $f''(x)=0$. Or,

- $f''(x)\not\exists$ si $(x-2)^{4/5}=0$, c'est-à-dire si $x=2$.

- $f''(x) = 0$ si $x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$.

Par conséquent, les seules valeurs susceptibles d'engendrer des points d'inflexion sont $x = 2$, $x = \sqrt{3}$ et $x = -\sqrt{3}$.

Question éclair 6.12

Le tableau des signes de $f''(x)$ est le suivant :

	$]-\infty, -4[$		$]-4, -1[$		$]-1, 2[$		$]2, \infty[$
x		-4		-1		2	
$f''(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cup$	1	$\cup$	7 point inflexion	$\cap$	3 point inflexion	$\cup$

Par conséquent, les points $(-1, 7)$ et $(2, 3)$ sont les points d'inflexion de la fonction $f(x)$ puisqu'il y a un changement de concavité en $x = -1$ et en $x = 2$.

Exercice 6.5

Les valeurs de x susceptibles de produire un point d'inflexion sont celles qui appartiennent au domaine de la fonction, et qui sont telles que $f''(x)$ n'existe pas ou telles que $f''(x) = 0$.

a) $$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[(4 - x^2)^2\right] = 2(4 - x^2)\frac{d}{dx}(4 - x^2) = -4x(4 - x^2) = -16x + 4x^3$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(-16x + 4x^3) = -16 + 12x^2$$

Déterminons les valeurs susceptibles de produire des points d'inflexion :

- $f''(x)$ existe toujours.
- $f''(x) = 0$ si $12x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 16/12 = 4/3 \Leftrightarrow x = 2/\sqrt{3} = 2\sqrt{3}/3$ ou $x = -2\sqrt{3}/3$.

Construisons le tableau des signes de $f''(x)$:

	$\left]-\infty, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right[$		$\left]-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right[$		$\left]\frac{2\sqrt{3}}{3}, \infty\right[$
x		$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$		$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cup$	$\frac{64}{9}$ point inflexion	$\cap$	$\frac{64}{9}$ point inflexion	$\cup$

La fonction $f(x)$ est concave vers le haut sur $\left]-\infty, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$ et sur $\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}, \infty\right[$. Elle est concave vers le bas sur $\left[-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$. La fonction change donc de concavité en $x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ et en $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, de sorte que la courbe admet des points d'inflexion en $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{64}{9}\right)$ et en $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{64}{9}\right)$.

b)
$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x^2+16}\right) = \frac{(x^2+16)\frac{d}{dx}(x) - x\frac{d}{dx}(x^2+16)}{(x^2+16)^2}$$
$$= \frac{x^2+16-x(2x)}{(x^2+16)^2} = \frac{16-x^2}{(x^2+16)^2}$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{16-x^2}{(x^2+16)^2}\right] = \frac{(x^2+16)^2\frac{d}{dx}(16-x^2) - (16-x^2)\frac{d}{dx}\left[(x^2+16)^2\right]}{\left[(x^2+16)^2\right]^2}$$
$$= \frac{-2x(x^2+16)^2 - 2(x^2+16)(16-x^2)\frac{d}{dx}(x^2+16)}{(x^2+16)^4}$$
$$= \frac{-2x(x^2+16)^2 - 4x(x^2+16)(16-x^2)}{(x^2+16)^4}$$
$$= \frac{-2x(x^2+16)\left[(x^2+16)+2(16-x^2)\right]}{(x^2+16)^4}$$
$$= \frac{-2x(x^2+16+32-2x^2)}{(x^2+16)^3} = \frac{-2x(48-x^2)}{(x^2+16)^3}$$

Déterminons les valeurs susceptibles de produire des points d'inflexion :

- $f''(x)$ existe toujours, car $(x^2+16)^3 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- $f''(x)=0$ si $-2x=0$ ou $48-x^2=0$, soit si $x=0$ ou $x^2=48$, c'est-à-dire si $x=0$, $x=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$ ou $x=-4\sqrt{3}$.

Construisons le tableau des signes de $f''(x)$:

	$]-\infty,-4\sqrt{3}[$		$]-4\sqrt{3},0[$		$]0,4\sqrt{3}[$		$]4\sqrt{3},\infty[$
x		$-4\sqrt{3}$		0		$4\sqrt{3}$	
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$	$-\sqrt{3}/16$ point inflexion	$\cup$	0 point inflexion	$\cap$	$\sqrt{3}/16$ point inflexion	$\cup$

La fonction $f(x)$ est concave vers le haut sur $\left[-4\sqrt{3},0\right]$ et sur $\left[4\sqrt{3},\infty\right[$. Elle est concave vers le bas sur $\left]-\infty,-4\sqrt{3}\right]$ et sur $\left[0,4\sqrt{3}\right]$. La fonction change donc de concavité en $x=-4\sqrt{3}$, en $x=0$ et en $x=4\sqrt{3}$, de sorte que la courbe admet des points d'inflexion en $\left(-4\sqrt{3},-\sqrt{3}/16\right)$, en $(0,0)$ et en $\left(4\sqrt{3},\sqrt{3}/16\right)$.

c) $f'(x)=\dfrac{d}{dx}(x^2e^{3x})=x^2\dfrac{d}{dx}(e^{3x})+e^{3x}\dfrac{d}{dx}(x^2)=x^2e^{3x}\dfrac{d}{dx}(3x)+2xe^{3x}=(3x^2+2x)e^{3x}$

$$\begin{aligned}
f''(x)&=\frac{d}{dx}\left[(3x^2+2x)e^{3x}\right]\\
&=(3x^2+2x)\frac{d}{dx}(e^{3x})+e^{3x}\frac{d}{dx}(3x^2+2x)\\
&=e^{3x}(3x^2+2x)\frac{d}{dx}(3x)+e^{3x}(6x+2)\\
&=3e^{3x}(3x^2+2x)+e^{3x}(6x+2)\\
&=e^{3x}(9x^2+12x+2)
\end{aligned}$$

Déterminons les valeurs susceptibles de produire des points d'inflexion :

- $f''(x)$ existe toujours.
- Comme $e^{3x}>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f''(x)=0$ si $9x^2+12x+2=0$. Or,

$$9x^2+12x+2=0 \Leftrightarrow x=\frac{-12\pm\sqrt{12^2-4(9)(2)}}{2(9)}$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{-12\pm\sqrt{72}}{18}=\frac{-12\pm6\sqrt{2}}{18}$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{-2-\sqrt{2}}{3} \text{ ou } x=\frac{-2+\sqrt{2}}{3}$$

Construisons le tableau des signes de $f''(x)$:

x	$\left]-\infty, \frac{-2-\sqrt{2}}{3}\right[$	$\frac{-2-\sqrt{2}}{3}$	$\left]\frac{-2-\sqrt{2}}{3}, \frac{-2+\sqrt{2}}{3}\right[$	$\frac{-2+\sqrt{2}}{3}$	$\left]\frac{-2+\sqrt{2}}{3}, \infty\right[$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cup$	0,043 point inflexion	$\cap$	0,021 point inflexion	$\cup$

La fonction $f(x)$ est concave vers le haut sur $\left]-\infty, \frac{-2-\sqrt{2}}{3}\right]$ et sur $\left[\frac{-2+\sqrt{2}}{3}, \infty\right[$. Elle est concave vers le bas sur $\left[\frac{-2-\sqrt{2}}{3}, \frac{-2+\sqrt{2}}{3}\right]$. La fonction change donc de concavité en $x=\frac{-2-\sqrt{2}}{3}\approx-1{,}138$ et en $x=\frac{-2+\sqrt{2}}{3}\approx-0{,}195$, de sorte que la courbe admet des points d'inflexion en $(-1{,}138; 0{,}043)$ et en $(-0{,}195;\ 0{,}021)$.

Exercice 6.6

Nous utiliserons les abréviations et les symboles suivants :

- « max. » pour maximum et « min. » pour minimum;
- « abs. » pour absolu et « rel. » pour relatif;
- p.i. pour point d'inflexion;
- a.v. pour asymptote verticale;
- $\nearrow$ pour désigner un intervalle de croissance et $\searrow$ pour désigner un intervalle de décroissance;
- ◟ ou ◞ pour désigner un intervalle de concavité vers le haut et ◜ ou ◝ pour désigner un intervalle de concavité vers le bas.

a) Effectuons l'étude de la fonction $f(x)=x^3-3x$ en respectant les étapes proposées.

1) Détermination du domaine de la fonction

La fonction $f(x)=x^3-3x$ est définie pour toutes les valeurs réelles de x. Par conséquent, on a $\text{Dom}_f=\mathbb{R}$.

2) Recherche des asymptotes

- Les valeurs de x susceptibles de produire une asymptote verticale sont celles qui annulent le dénominateur d'une fraction ou celles qui annulent l'argument d'un logarithme. La courbe décrite par la fonction $f(x)=x^3-3x$ n'admet donc aucune asymptote verticale.

- La courbe décrite par la fonction $f(x)=x^3-3x$ n'admet aucune asymptote horizontale puisque

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(x^3-3x\right)=\underbrace{\lim_{x\to\infty}\left[x^3\left(1-\tfrac{3}{x^2}\right)\right]}_{\text{forme } \infty(1-0)}=\infty$$

et

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x^3-3x\right)=\underbrace{\lim_{x\to-\infty}\left[x^3\left(1-\tfrac{3}{x^2}\right)\right]}_{\text{forme } -\infty(1-0)}=-\infty$$

- La courbe décrite par la fonction $f(x)=x^3-3x$ n'admet aucune asymptote oblique puisque

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-3x}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(x^2-3\right)=\infty$$

et

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-3x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(x^2-3\right)=\infty$$

3) Détermination des valeurs critiques de la fonction

Une valeur critique d'une fonction est une valeur appartenant au domaine de la fonction qui annule la dérivée de la fonction ou qui est telle que la dérivée de la fonction évaluée en cette valeur n'existe pas.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^3 - 3x\right) = 3x^2 - 3 = 3\left(x^2 - 1\right) = 3(x-1)(x+1)$$

Déterminons les valeurs critiques :

- $f'(x)$ existe toujours.
- $f'(x) = 0$ si $x - 1 = 0$ ou $x + 1 = 0$, c'est-à-dire si $x = 1$ ou $x = -1$.

Les valeurs critiques de $f(x)$ sont $x = -1$ et $x = 1$.

4) Détermination des valeurs susceptibles de produire des points d'inflexion

Une valeur susceptible de produire un point d'inflexion est une valeur appartenant au domaine de la fonction qui annule la dérivée seconde de la fonction ou qui est telle que la dérivée seconde de la fonction évaluée en cette valeur n'existe pas.

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(3x^2 - 3\right) = 6x$$

Déterminons les valeurs susceptibles de produire des points d'inflexion :

- $f''(x)$ existe toujours.
- $f''(x) = 0$ si $6x = 0$, c'est-à-dire si $x = 0$.

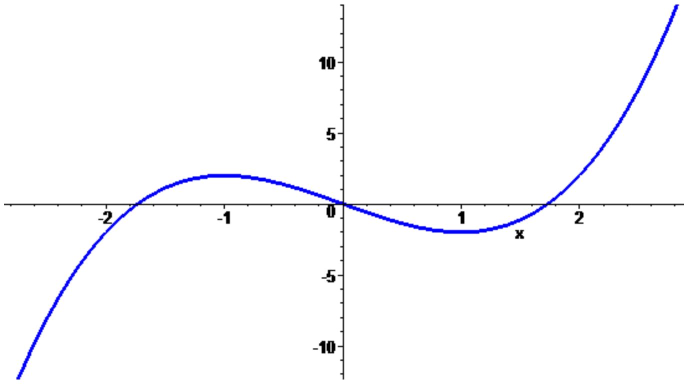
La seule valeur susceptible de produire un point d'inflexion est $x = 0$.

5) Construction du tableau des signes

	$]-\infty, -1[$		$]-1, 0[$		$]0, 1[$		$]1, \infty[$
x		-1		0		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↗ (	2 max. rel.	↘)	0 p.i.	↘ (	-2 min. rel.	↗)

Comme $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(x^3 - 3x\right) = \infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3 - 3x\right) = -\infty$, la fonction $f(x)$ n'admet ni maximum absolu, ni minimum absolu.

6) Esquisse de la courbe décrite par la fonction



b) Effectuons l'étude de la fonction $f(x)=x^4-18x^2+20$ en respectant les étapes proposées.

1) Détermination du domaine de la fonction

La fonction $f(x)=x^4-18x^2+20$ est définie pour toutes les valeurs réelles de x. Par conséquent, on a $\text{Dom}_f=\mathbb{R}$.

2) Recherche des asymptotes

- Les valeurs de x susceptibles de produire une asymptote verticale sont celles qui annulent le dénominateur d'une fraction ou celles qui annulent l'argument d'un logarithme. La courbe décrite par la fonction $f(x)=x^4-18x^2+20$ n'admet donc aucune asymptote verticale.

- La courbe décrite par la fonction $f(x)=x^4-18x^2+20$ n'admet aucune asymptote horizontale puisque

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(x^4-18x^2+20\right)=\underbrace{\lim_{x\to\infty}\left[x^4\left(1-\tfrac{18}{x^2}+\tfrac{20}{x^4}\right)\right]}_{\text{forme } \infty(1-0+0)}=\infty$$

et

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x^4-18x^2+20\right)=\underbrace{\lim_{x\to-\infty}\left[x^4\left(1-\tfrac{18}{x^2}+\tfrac{20}{x^4}\right)\right]}_{\text{forme } \infty(1-0+0)}=\infty$$

- La courbe décrite par la fonction $f(x)=x^4-18x^2+20$ n'admet aucune asymptote oblique puisque

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-18x^2+20}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4\left(1-{}^{18}\!/_{x^2}+{}^{20}\!/_{x^4}\right)}{x}$$
$$=\underbrace{\lim_{x\to\infty}\left[x^3\left(1-{}^{18}\!/_{x^2}+{}^{20}\!/_{x^4}\right)\right]}_{\text{forme } \infty(1-0+0)}=\infty$$

et

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4-18x^2+20}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4\left(1-{}^{18}\!/_{x^2}+{}^{20}\!/_{x^4}\right)}{x}$$
$$=\underbrace{\lim_{x\to-\infty}\left[x^3\left(1-{}^{18}\!/_{x^2}+{}^{20}\!/_{x^4}\right)\right]}_{\text{forme } -\infty(1-0+0)}=-\infty$$

3) Détermination des valeurs critiques de la fonction

Une valeur critique d'une fonction est une valeur appartenant au domaine de la fonction qui annule la dérivée de la fonction ou qui est telle que la dérivée de la fonction évaluée en cette valeur n'existe pas.

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(x^4-18x^2+20\right)=4x^3-36x=4x\left(x^2-9\right)=4x(x-3)(x+3)$$

Déterminons les valeurs critiques :

- $f'(x)$ existe toujours.
- $f'(x)=0$ si $4x=0$, $x-3=0$ ou $x+3=0$, c'est-à-dire si $x=0$, $x=3$ ou $x=-3$.

Les valeurs critiques de $f(x)$ sont $x=-3$, $x=0$ et $x=3$.

4) Détermination des valeurs susceptibles de produire des points d'inflexion

Une valeur susceptible de produire un point d'inflexion est une valeur appartenant au domaine de la fonction qui annule la dérivée seconde de la fonction ou qui est telle que la dérivée seconde de la fonction évaluée en cette valeur n'existe pas.

$$f''(x)=\frac{d}{dx}\left(4x^3-36x\right)=12x^2-36=12\left(x^2-3\right)=12\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)$$

Déterminons les valeurs susceptibles de produire des points d'inflexion :

- $f''(x)$ existe toujours.

- $f''(x) = 0$ si $x - \sqrt{3} = 0$ ou $x + \sqrt{3} = 0$, c'est-à-dire si $x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$.

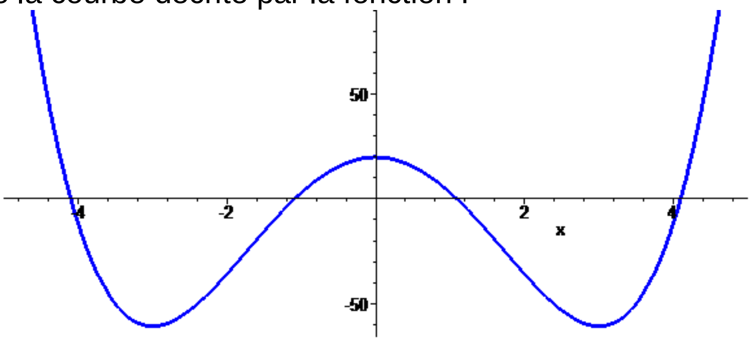
Les valeurs susceptibles de produire des points d'inflexion sont $x = -\sqrt{3}$ et $x = \sqrt{3}$.

5) Construction du tableau des signes

	$]-\infty, -3[$		$]-3, -\sqrt{3}[$		$]-\sqrt{3}, 0[$		$]0, \sqrt{3}[$		$]\sqrt{3}, 3[$		$]3, \infty[$
x		-3		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		3	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\searrow$ (	-61 min. rel. et abs.	$\nearrow$)	-25 p.i.	$\nearrow$ (	20 max. rel.	$\searrow$)	-25 p.i.	$\searrow$ (	-61 min. rel. et abs.	$\nearrow$)

Le minimum relatif de -61 en $x = -3$ et en $x = 3$ est également le minimum absolu de la fonction $f(x)$ puisqu'en regardant le tableau, on constate que $f(x) \geq -61$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par contre le maximum relatif de 20 en $x = 0$ n'est pas absolu, car $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} (x^4 - 18x^2 + 20) = \infty$, de sorte que la fonction $f(x)$ prend des valeurs de plus en plus grandes lorsque $x \to \infty$.

6) Esquisse de la courbe décrite par la fonction :



c) Effectuons l'étude de la fonction $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$ en respectant les étapes proposées.

1) Détermination du domaine de la fonction

La fonction $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$ est définie si $x - 1 \neq 0$, c'est-à-dire si $x \neq 1$. Par conséquent, $\mathrm{Dom}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

De plus, comme $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{\cancel{x-1}}=\lim\limits_{x\to1}(x^2+x+1)=3$, la courbe décrite par la fonction $f(x)$ présente un trou en $(1,3)$ et est ailleurs la même que celle décrite par la fonction $g(x)=x^2+x+1$, de sorte que nous allons faire l'étude de cette dernière fonction plutôt que d'analyser $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}$.

2) Recherche des asymptotes de la fonction $g(x)=x^2+x+1$

- Les valeurs de x susceptibles de produire une asymptote verticale sont celles qui annulent le dénominateur d'une fraction ou celles qui annulent l'argument d'un logarithme. La courbe décrite par la fonction $g(x)=x^2+x+1$ n'admet donc aucune asymptote verticale.

- La courbe décrite par la fonction $g(x)=x^2+x+1$ n'admet aucune asymptote horizontale puisque

$$\lim_{x\to\infty} g(x)=\underbrace{\lim_{x\to\infty}(x^2+x+1)}_{\text{forme } \infty+\infty+1}=\infty$$

et

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^2+x+1)=\underbrace{\lim_{x\to-\infty}\left[x^2\left(1+\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{x^2}\right)\right]}_{\text{forme } \infty(1+0+0)}=\infty$$

- La courbe décrite par la fonction $g(x)=x^2+x+1$ n'admet aucune asymptote oblique puisque

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1+\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{x^2}\right)}{x}=\underbrace{\lim_{x\to\infty}\left[x\left(1+\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{x^2}\right)\right]}_{\text{forme } \infty(1+0+0)}=\infty$$

et

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x+1}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(1+\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{x^2}\right)}{x}$$
$$=\underbrace{\lim_{x\to-\infty}\left[x\left(1+\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{x^2}\right)\right]}_{\text{forme } -\infty(1+0+0)}=-\infty$$

3) Détermination des valeurs critiques de la fonction $g(x)=x^2+x+1$

Une valeur critique d'une fonction est une valeur appartenant au domaine de la fonction qui annule la dérivée de la fonction ou qui est telle que la dérivée de la fonction évaluée en cette valeur n'existe pas.

$$g'(x)=\frac{d}{dx}(x^2+x+1)=2x+1$$

Déterminons les valeurs critiques :

- $g'(x)$ existe toujours.
- $g'(x)=0$ si $2x+1=0$, c'est-à-dire si $x=-\frac{1}{2}$.

La seule valeur critique de $g(x)$, et donc de $f(x)$, est $x=-\frac{1}{2}$.

4) Détermination des valeurs susceptibles de produire des points d'inflexion de la fonction $g(x)=x^2+x+1$

Une valeur susceptible de produire un point d'inflexion est une valeur appartenant au domaine de la fonction qui annule la dérivée seconde de la fonction ou qui est telle que la dérivée seconde de la fonction évaluée en cette valeur n'existe pas.

$$g''(x)=\frac{d}{dx}(2x+1)=2$$

Déterminons les valeurs susceptibles de produire des points d'inflexion :

- $g''(x)$ existe toujours.
- $g''(x)\neq 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

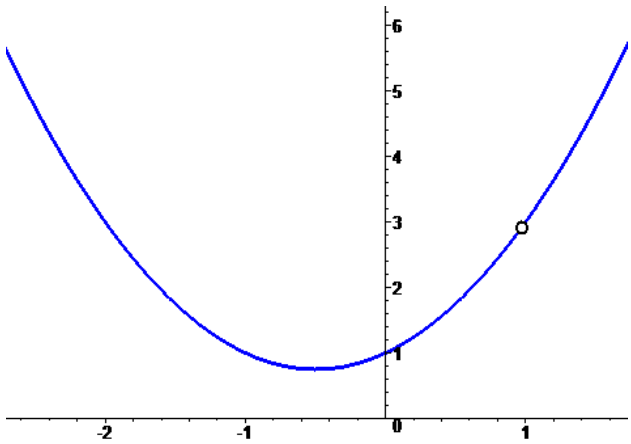
La fonction $g(x)$ n'admet aucun point d'inflexion et il en est de même pour la fonction $f(x)$.

5) Construction du tableau des signes

	$]-\infty, -\tfrac{1}{2}[$		$]-\tfrac{1}{2}, 1[$		$]1, \infty[$
x		$-\tfrac{1}{2}$		1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	$\nexists$	$+$
$f(x)$	$\searrow$ (	$\tfrac{3}{4}$ min. rel. et abs.	$\nearrow$)	$\nexists$ trou	$\nearrow$)

Le minimum relatif de $\tfrac{3}{4}$ en $x = -\tfrac{1}{2}$ est également le minimum absolu de $f(x)$, car la fonction $f(x)$ est décroissante sur $]-\infty, -\tfrac{1}{2}]$ et croissante sur $[-\tfrac{1}{2}, \infty[\setminus \{1\}$. Elle atteint donc sa plus petite valeur en $x = -\tfrac{1}{2}$. De plus, la fonction n'admet pas de maximum absolu puisqu'elle ne possède pas de maximum relatif.

6) Esquisse de la courbe décrite par la fonction



d) Effectuons l'étude de la fonction $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x+1) = x^{\frac{5}{3}} + x^{\frac{2}{3}}$ en respectant les étapes proposées.

1) Détermination du domaine de la fonction

La fonction $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x+1)$ est définie pour toutes les valeurs réelles de x. Par conséquent, on a $\text{Dom}_f = \mathbb{R}$.

2) Recherche des asymptotes

- Les valeurs de x susceptibles de produire une asymptote verticale sont celles qui annulent le dénominateur d'une fraction ou celles qui annulent l'argument d'un logarithme. La courbe décrite par la fonction $f(x)=x^{2/3}(x+1)$ n'admet donc aucune asymptote verticale.

- La courbe décrite par la fonction $f(x)=x^{2/3}(x+1)$ n'admet aucune asymptote horizontale puisque

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\underbrace{\lim_{x\to\infty}\left[x^{2/3}(x+1)\right]}_{\text{forme } \infty\times\infty}=\infty$$

et

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\underbrace{\lim_{x\to-\infty}\left[x^{2/3}(x+1)\right]}_{\text{forme } \infty\times(-\infty)}=-\infty$$

- La courbe décrite par la fonction $f(x)=x^{2/3}(x+1)$ n'admet aucune asymptote oblique puisque

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{2/3}(x+1)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{5/3}(1+1/x)}{x}=\underbrace{\lim_{x\to\infty}\left[x^{2/3}(1+1/x)\right]}_{\text{forme } \infty(1+0)}=\infty$$

et

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^{2/3}(x+1)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^{5/3}(1+1/x)}{x}=\underbrace{\lim_{x\to-\infty}\left[x^{2/3}(1+1/x)\right]}_{\text{forme } \infty(1+0)}=\infty$$

3) Détermination des valeurs critiques de la fonction

Une valeur critique d'une fonction est une valeur appartenant au domaine de la fonction qui annule la dérivée de la fonction ou qui est telle que la dérivée de la fonction évaluée en cette valeur n'existe pas.

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(x^{5/3}+x^{2/3}\right)=\tfrac{5}{3}x^{2/3}+\tfrac{2}{3}x^{-1/3}=\frac{5x^{2/3}}{3}+\frac{2}{3x^{1/3}}=\frac{5x+2}{3x^{1/3}}$$

Déterminons les valeurs critiques :

- $f'(x)\nexists$ si $3x^{1/3}=0$, c'est-à-dire si $x=0$.
- $f'(x)=0$ si $5x+2=0$, c'est-à-dire si $x=-2/5$.

Les valeurs critiques de $f(x)$ sont $x = -\frac{2}{5}$ et $x = 0$.

4) Détermination des valeurs susceptibles de produire des points d'inflexion

Une valeur susceptible de produire un point d'inflexion est une valeur appartenant au domaine de la fonction qui annule la dérivée seconde de la fonction ou qui est telle que la dérivée seconde de la fonction évaluée en cette valeur n'existe pas.

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\tfrac{5}{3}x^{2/3} + \tfrac{2}{3}x^{-1/3}\right) = \tfrac{10}{9}x^{-1/3} - \tfrac{2}{9}x^{-4/3} = \frac{10}{9x^{1/3}} - \frac{2}{9x^{4/3}} = \frac{10x-2}{9x^{4/3}}$$

Déterminons les valeurs susceptibles de produire des points d'inflexion :

- $f''(x) \nexists$ si $9x^{4/3} = 0$, c'est-à-dire si $x = 0$.
- $f''(x) = 0$ si $10x - 2 = 0$, c'est-à-dire si $x = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

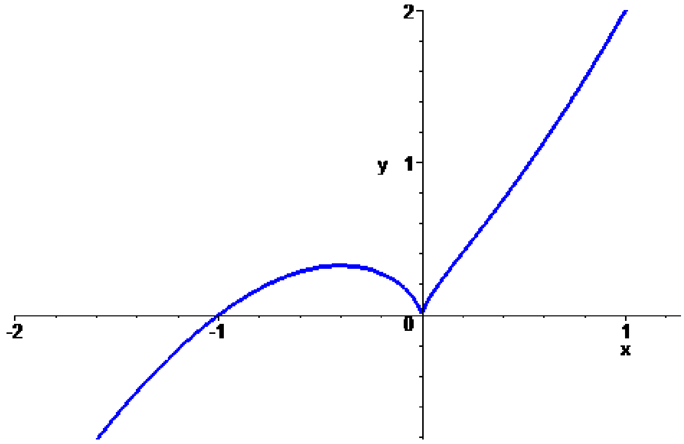
Les valeurs susceptibles de produire des points d'inflexion sont $x = 0$ et $x = \frac{1}{5}$.

5) Construction du tableau des signes

	$]-\infty, -\frac{2}{5}[$		$]-\frac{2}{5}, 0[$		$]0, \frac{1}{5}[$		$]\frac{1}{5}, \infty[$
x		$-\frac{2}{5}$		0		$\frac{1}{5}$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow ($	0,33 max. rel.	$\searrow)$	0 min. rel.	$\nearrow ($	0,41 p.i.	$\nearrow)$

Comme $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\left[x^{2/3}(x+1)\right] = \infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[x^{2/3}(x+1)\right] = -\infty$, la fonction $f(x)$ n'admet ni maximum absolu, ni minimum absolu.

6) Esquisse de la courbe décrite par la fonction



Exercice 6.7

Note : Nous utiliserons les abréviations et les symboles suivants :

- « max. » pour maximum et « min. » pour minimum;
- « abs. » pour absolu et « rel. » pour relatif;
- p.i. pour point d'inflexion;
- a.v. pour asymptote verticale;
- ↗ pour désigner un intervalle de croissance et ↘ pour désigner un intervalle de décroissance;
- ◟ ou ◞ pour désigner un intervalle de concavité vers le haut et ◜ ou ◝ pour désigner un intervalle de concavité vers le bas.

a) Effectuons l'étude de la fonction $f(x) = -\dfrac{x}{x^2+1}$ en respectant les étapes proposées.

1) Détermination du domaine de la fonction

La fonction $f(x) = -\dfrac{x}{x^2+1}$ est définie pour toutes les valeurs réelles de x. Par conséquent, on a $\text{Dom}_f = \mathbb{R}$.

2) Recherche des asymptotes

- Les valeurs de x susceptibles de produire une asymptote verticale sont celles qui annulent le dénominateur d'une fraction ou celles qui annulent l'argument d'un logarithme. Comme $x^2+1 \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, la courbe décrite par la fonction $f(x)=-\dfrac{x}{x^2+1}$ n'admet donc aucune asymptote verticale.

- La droite $y=0$ est l'asymptote horizontale à la courbe décrite par la fonction $f(x)=-\dfrac{x}{x^2+1}$ puisque

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{x}{x^2+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left[-\frac{x}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}\right]=\underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}_{\text{forme } \frac{-1}{\infty(1+0)}}=0$$

et

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{x}{x^2+1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{x}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}\right]=\underbrace{\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}_{\text{forme } \frac{-1}{-\infty(1+0)}}=0$$

- La courbe décrite par la fonction $f(x)=-\dfrac{x}{x^2+1}$ n'admet aucune asymptote oblique puisque

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left[-\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(x^2+1\right)}\right]=\underbrace{\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x^2+1}\right)}_{\text{forme } -\frac{1}{\infty}}=0$$

et

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(x^2+1\right)}\right]=\underbrace{\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{x^2+1}\right)}_{\text{forme } -\frac{1}{\infty}}=0$$

3) Détermination des valeurs critiques de la fonction

Une valeur critique d'une fonction est une valeur appartenant au domaine de la fonction qui annule la dérivée de la fonction ou qui est telle que la dérivée de la fonction évaluée en cette valeur n'existe pas.

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(-\frac{x}{x^2+1}\right)=-\frac{(x^2+1)\frac{d}{dx}(x)-x\frac{d}{dx}(x^2+1)}{(x^2+1)^2}$$
$$=-\frac{(x^2+1)-2x^2}{(x^2+1)^2}=-\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}=\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$$

Déterminons les valeurs critiques :

- $f'(x)$ existe toujours, car $(x^2+1)^2\neq 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
- $f'(x)=0$ si $x^2-1=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)=0 \Leftrightarrow x=1$ ou $x=-1$.

Les valeurs critiques de $f(x)$ sont $x=-1$ et $x=1$.

4) Détermination des valeurs susceptibles de produire des points d'inflexion

Une valeur susceptible de produire un point d'inflexion est une valeur appartenant au domaine de la fonction qui annule la dérivée seconde de la fonction ou qui est telle que la dérivée seconde de la fonction évaluée en cette valeur n'existe pas.

$$f''(x)=\frac{d}{dx}\left[\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}\right]=\frac{(x^2+1)^2\frac{d}{dx}(x^2-1)-(x^2-1)\frac{d}{dx}\left[(x^2+1)^2\right]}{\left[(x^2+1)^2\right]^2}$$
$$=\frac{2x(x^2+1)^2-2(x^2-1)(x^2+1)\frac{d}{dx}(x^2+1)}{(x^2+1)^4}$$
$$=\frac{2x(x^2+1)^2-4x(x^2-1)(x^2+1)}{(x^2+1)^4}$$
$$=\frac{2x(x^2+1)[(x^2+1)-2(x^2-1)]}{(x^2+1)^4}$$
$$=\frac{2x(x^2+1-2x^2+2)}{(x^2+1)^3}=\frac{2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}$$

Déterminons les valeurs susceptibles de produire des points d'inflexion :

- $f''(x)$ existe toujours, car $(x^2+1)^3\neq 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

- $f''(x)=0$ si $2x=0$ ou $3-x^2=0 \;\Leftrightarrow\; x=0$ ou $x^2=3$
  $\Leftrightarrow\; x=0,\ x=\sqrt{3}$ ou $x=-\sqrt{3}$

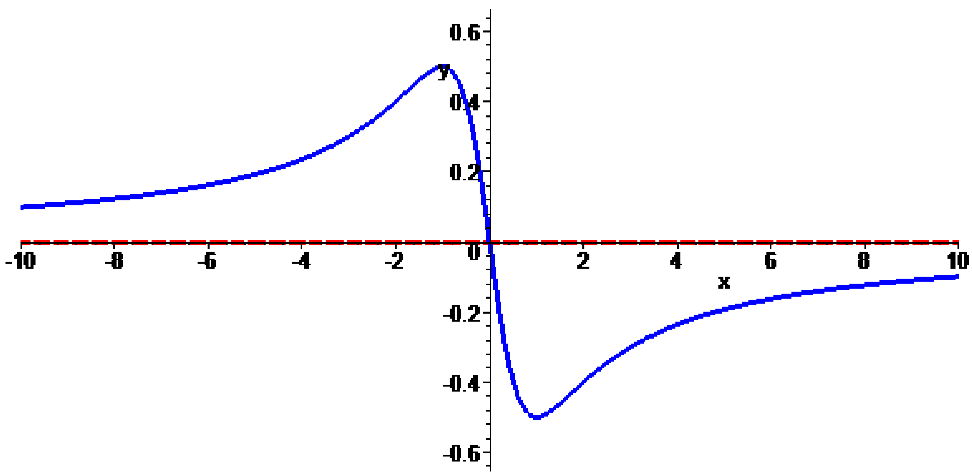
Les valeurs susceptibles de produire des points d'inflexion sont $x=0$, $x=\sqrt{3}$ et $x=-\sqrt{3}$.

5) Construction du tableau des signes

	$]-\infty,-\sqrt{3}[$		$]-\sqrt{3},-1[$		$]-1,0[$		$]0,1[$		$]1,\sqrt{3}[$		$]\sqrt{3},\infty[$
x		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$	
$f'(x)$	+	+	+	0	−	−	−	0	+	+	+
$f''(x)$	+	0	−	−	−	0	+	+	+	0	−
$f(x)$	↗)	$\sqrt{3}/4$ p.i.	↗ (	$1/2$ max. rel. et abs.	↘)	0 p.i.	↘ (	$-1/2$ min. rel. et abs.	↗)	$-\sqrt{3}/4$ p.i.	↗ (

Le maximum relatif de $1/2$ en $x=-1$ est également le maximum absolu de la fonction $f(x)$ puisque c'est le seul maximum relatif, et que $1/2>\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ et $1/2>\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$. De plus, le minimum relatif de $-1/2$ en $x=1$ est également le minimum absolu de la fonction $f(x)$ puisque c'est le seul minimum relatif, et que $-1/2<\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ et $-1/2<\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$.

6) Esquisse de la courbe décrite par la fonction



b) Effectuons l'étude de la fonction $f(x)=\dfrac{x(2-x)}{(x-1)^2}=\dfrac{2x-x^2}{(x-1)^2}$ en respectant les étapes proposées.

1) Détermination du domaine de la fonction

La fonction $f(x)=\dfrac{x(2-x)}{(x-1)^2}$ est définie si $(x-1)^2\neq 0$, c'est-à-dire si $x\neq 1$. Par conséquent, $\text{Dom}_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

2) Recherche des asymptotes

- La droite $x=1$ est l'asymptote verticale à la courbe décrite par la fonction $f(x)=\dfrac{x(2-x)}{(x-1)^2}=\dfrac{2x-x^2}{(x-1)^2}$ puisque

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\underbrace{\lim_{x\to 1^-}\frac{2x-x^2}{(x-1)^2}}_{\text{forme } \frac{1}{0^+}}=\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1^+} f(x)=\underbrace{\lim_{x\to 1^+}\frac{2x-x^2}{(x-1)^2}}_{\text{forme } \frac{1}{0^+}}=\infty$$

- La droite $y=-1$ est l'asymptote horizontale à la courbe décrite par la fonction $f(x)=\dfrac{x(2-x)}{(x-1)^2}=\dfrac{2x-x^2}{(x-1)^2}$ puisque

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-x^2}{(x-1)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}\left(\frac{2}{x}-1\right)}{\cancel{x^2}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}-1}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{0-1}{(1-0)^2}=-1$$

et

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-x^2}{(x-1)^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^2}\left(\frac{2}{x}-1\right)}{\cancel{x^2}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2}{x}-1}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{0-1}{(1-0)^2}=-1$$

- La courbe décrite par la fonction $f(x)=\dfrac{x(2-x)}{(x-1)^2}=\dfrac{2x-x^2}{(x-1)^2}$ n'admet aucune asymptote oblique puisque

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-x^2}{x(x-1)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(\frac{2}{x}-1\right)}{x^3\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}=\underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}-1}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}}_{\text{forme }\frac{0-1}{\infty(1-0)^2}}=0$$

et

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-x^2}{x(x-1)^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(\frac{2}{x}-1\right)}{x^3\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}=\underbrace{\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2}{x}-1}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}}_{\text{forme }\frac{0-1}{-\infty(1-0)^2}}=0$$

3) Détermination des valeurs critiques de la fonction

Une valeur critique d'une fonction est une valeur appartenant au domaine de la fonction qui annule la dérivée de la fonction ou qui est telle que la dérivée de la fonction évaluée en cette valeur n'existe pas.

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left[\frac{2x-x^2}{(x-1)^2}\right]=\frac{(x-1)^2\frac{d}{dx}(2x-x^2)-(2x-x^2)\frac{d}{dx}(x-1)^2}{\left[(x-1)^2\right]^2}$$

$$=\frac{(x-1)^2(2-2x)-2(2x-x^2)(x-1)\frac{d}{dx}(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$=\frac{2(x-1)^2(1-x)-2(2x-x^2)(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$=\frac{2(x-1)\left[(x-1)(1-x)-(2x-x^2)\right]}{(x-1)^4}$$

$$=\frac{2(x-x^2-1+x-2x+x^2)}{(x-1)^3}=-\frac{2}{(x-1)^3}$$

Déterminons les valeurs critiques :

- $f'(x)\,\nexists$ si $(x-1)^3=0$, c'est-à-dire si $x=1$.
- $f'(x)\neq 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

La fonction $f(x)$ n'admet pas de valeur critique puisque $1\notin \mathrm{Dom}_f$.

4) Détermination des valeurs susceptibles de produire des points d'inflexion

Une valeur susceptible de produire un point d'inflexion est une valeur appartenant au domaine de la fonction qui annule la dérivée seconde de la fonction ou qui est telle que la dérivée seconde de la fonction évaluée en cette valeur n'existe pas.

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left[-\frac{2}{(x-1)^3}\right] = \frac{d}{dx}\left[-2(x-1)^{-3}\right]$$
$$= 6(x-1)^{-4}\frac{d}{dx}(x-1) = \frac{6}{(x-1)^4}$$

Déterminons les valeurs susceptibles de produire des points d'inflexion :

- $f''(x) \nexists$ si $(x-1)^4 = 0$, c'est-à-dire si $x = 1$.
- $f''(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

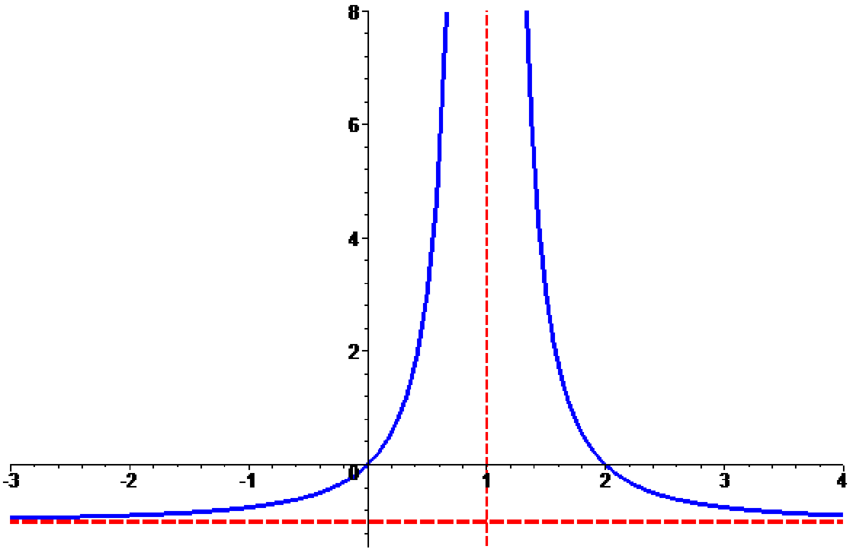
Aucune valeur n'est susceptible de produire un point d'inflexion puisque $1 \notin \text{Dom}_f$.

5) Construction du tableau des signes

	$]-\infty, 1[$		$]1, \infty[$
x		1	
$f'(x)$	$+$	$\nexists$	$-$
$f''(x)$	$+$	$\nexists$	$+$
$f(x)$	$\nearrow\cup$	$\nexists$ a.v.	$\searrow\cup$

La fonction n'admet pas de maximum absolu ni de minimum absolu, car elle n'a pas de maximum relatif ni de minimum relatif.

6) Esquisse de la courbe décrite par la fonction



c) Effectuons l'étude de la fonction $f(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x^2+x-2}=\dfrac{(x-2)(x+3)}{(x+2)(x-1)}$ en respectant les étapes proposées.

1) Détermination du domaine de la fonction

La fonction $f(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x^2+x-2}=\dfrac{(x-2)(x+3)}{(x+2)(x-1)}$ est définie si $(x+2)(x-1)\neq 0$, c'est-à-dire si $x\neq -2$ et $x\neq 1$. Par conséquent, $\text{Dom}_f=\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$.

2) Recherche des asymptotes

- Les droites $x=-2$ et $x=1$ sont les asymptotes verticales à la courbe décrite par la fonction $f(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x^2+x-2}=\dfrac{(x-2)(x+3)}{(x+2)(x-1)}$ puisque

$$\lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^-}\frac{x^2+x-6}{x^2+x-2}=\underbrace{\lim_{x\to -2^-}\frac{(x-2)(x+3)}{(x+2)(x-1)}}_{\text{forme } \frac{-4}{0^+}}=-\infty$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} \frac{x^2+x-6}{x^2+x-2} = \underbrace{\lim_{x\to -2^+} \frac{(x-2)(x+3)}{(x+2)(x-1)}}_{\text{forme } \frac{-4}{0^-}} = \infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+x-6}{x^2+x-2} = \underbrace{\lim_{x\to 1^-} \frac{(x-2)(x+3)}{(x+2)(x-1)}}_{\text{forme } \frac{-4}{0^-}} = \infty$$

et

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+x-6}{x^2+x-2} = \underbrace{\lim_{x\to 1^+} \frac{(x-2)(x+3)}{(x+2)(x-1)}}_{\text{forme } \frac{-4}{0^+}} = -\infty$$

- La droite $y=1$ est l'asymptote horizontale à la courbe décrite par la fonction $f(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x^2+x-2}$ puisque

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x-6}{x^2+x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(1+\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}} = \frac{1+0-0}{1+0-0} = 1$$

et

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+x-6}{x^2+x-2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(1+\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{1+\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}} = \frac{1+0-0}{1+0-0} = 1$$

- La courbe décrite par la fonction $f(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x^2+x-2}$ n'admet aucune asymptote oblique puisque

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-6}{x(x^2+x-2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}\right)}{x^3\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}$$

$$=\underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}{x\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}}_{\text{forme }\frac{1+0-0}{\infty(1+0-0)}}=0$$

et

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x-6}{x(x^2+x-2)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}\right)}{x^3\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}$$

$$=\underbrace{\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}{x\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}}_{\text{forme }\frac{1+0-0}{-\infty(1+0-0)}}=0$$

3) Détermination des valeurs critiques de la fonction

Une valeur critique d'une fonction est une valeur appartenant au domaine de la fonction qui annule la dérivée de la fonction ou qui est telle que la dérivée de la fonction évaluée en cette valeur n'existe pas.

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+x-6}{x^2+x-2}\right)$$

$$=\frac{(x^2+x-2)\frac{d}{dx}(x^2+x-6)-(x^2+x-6)\frac{d}{dx}(x^2+x-2)}{(x^2+x-2)^2}$$

$$=\frac{(x^2+x-2)(2x+1)-(x^2+x-6)(2x+1)}{(x^2+x-2)^2}$$

$$=\frac{(2x+1)\left[(x^2+x-2)-(x^2+x-6)\right]}{(x^2+x-2)^2}$$

$$=\frac{4(2x+1)}{(x^2+x-2)^2}=\frac{4(2x+1)}{(x+2)^2(x-1)^2}$$

Déterminons les valeurs critiques :

- $f'(x)\nexists$ si $(x+2)^2(x-1)^2=0$, c'est-à-dire si $x=-2$ ou $x=1$.
- $f'(x)=0$ si $2x+1=0$, c'est-à-dire si $x=-\frac{1}{2}$.

La seule valeur critique de $f(x)$ est $x=-\frac{1}{2}$ puisque $-2\notin \mathrm{Dom}_f$ et $1\notin \mathrm{Dom}_f$.

4) Détermination des valeurs susceptibles de produire des points d'inflexion

Une valeur susceptible de produire un point d'inflexion est une valeur appartenant au domaine de la fonction qui annule la dérivée seconde de la fonction ou qui est telle que la dérivée seconde de la fonction évaluée en cette valeur n'existe pas.

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{d}{dx}\left[\frac{8x+4}{\left(x^2+x-2\right)^2}\right] \\
&= \frac{\left(x^2+x-2\right)^2 \frac{d}{dx}(8x+4)-(8x+4)\frac{d}{dx}\left[\left(x^2+x-2\right)^2\right]}{\left[\left(x^2+x-2\right)^2\right]^2} \\
&= \frac{8\left(x^2+x-2\right)^2-2(8x+4)\left(x^2+x-2\right)\frac{d}{dx}\left(x^2+x-2\right)}{\left(x^2+x-2\right)^4} \\
&= \frac{8\left(x^2+x-2\right)^2-8(2x+1)\left(x^2+x-2\right)(2x+1)}{\left(x^2+x-2\right)^4} \\
&= \frac{8\left(x^2+x-2\right)^2-8(2x+1)^2\left(x^2+x-2\right)}{\left(x^2+x-2\right)^4} \\
&= \frac{8\left(x^2+x-2\right)\left[x^2+x-2-(2x+1)^2\right]}{\left(x^2+x-2\right)^4} \\
&= \frac{8\left[x^2+x-2-\left(4x^2+4x+1\right)\right]}{\left(x^2+x-2\right)^3} = \frac{8\left(-3x^2-3x-3\right)}{\left(x^2+x-2\right)^3} \\
&= -\frac{24\left(x^2+x+1\right)}{(x+2)^3(x-1)^3}
\end{aligned}
$$

Déterminons les valeurs susceptibles de produire des points d'inflexion :

- $f''(x) \nexists$ si $(x+2)^3(x-1)^3=0$, c'est-à-dire si $x=-2$ ou $x=1$.
- $f''(x)\neq 0$ pour tout $x\in \mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$ puisque $x^2+x+1\neq 0$ pour ces valeurs de x (en effet, $b^2-4ac=1^2-4(1)(1)=-3<0$).

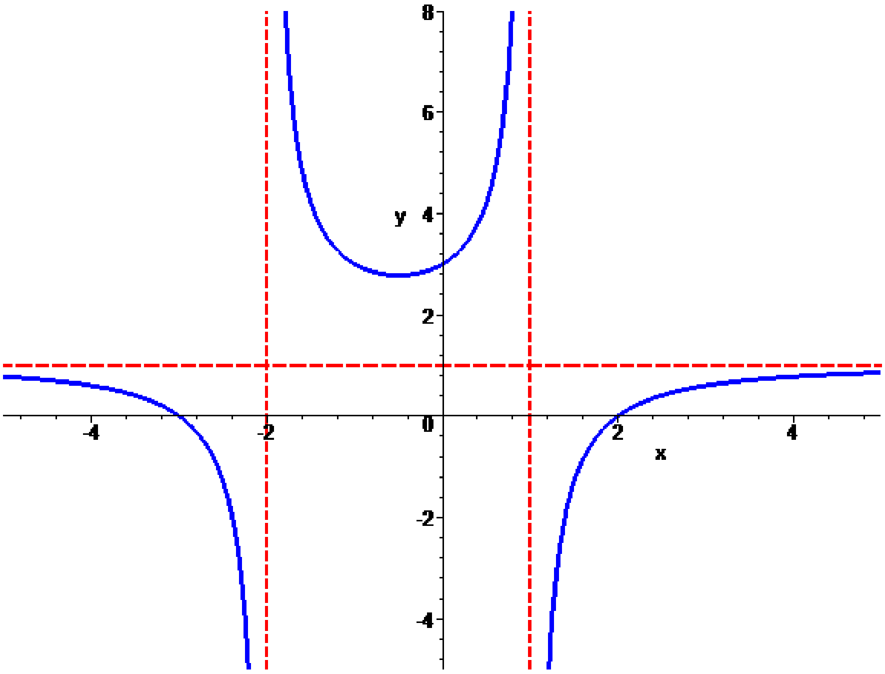
Aucune valeur n'est susceptible de produire un point d'inflexion puisque $-2\notin \mathrm{Dom}_f$ et $1\notin \mathrm{Dom}_f$.

5) Construction du tableau des signes

	$]-\infty, -2[$		$]-2, -\frac{1}{2}[$		$]-\frac{1}{2}, 1[$		$]1, \infty[$
x		-2		$-\frac{1}{2}$		1	
$f'(x)$	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$+$
$f''(x)$	$-$	$\nexists$	$+$	$+$	$+$	$\nexists$	$-$
$f(x)$	$\searrow$)	$\nexists$ a.v.	$\searrow$ (	$\frac{25}{9}$ min.rel.	$\nearrow$)	$\nexists$ a.v.	$\nearrow$ (

Comme $\lim_{x\to-2^-} f(x) = \lim_{x\to-2^-} \frac{x^2+x-6}{x^2+x-2} = -\infty$ et $\lim_{x\to-2^+} f(x) = \lim_{x\to-2^+} \frac{x^2+x-6}{x^2+x-2} = \infty$, la fonction n'admet pas de minimum absolu ni de maximum absolu.

6) Esquisse de la courbe décrite par la fonction



d) Effectuons l'étude de la fonction $f(x) = \frac{4x}{(2x+1)^2}$ en respectant les étapes proposées.

1) Détermination du domaine de la fonction

La fonction $f(x)=\dfrac{4x}{(2x+1)^2}$ est définie si $(2x+1)^2\neq 0$, c'est-à-dire si $x\neq -\tfrac{1}{2}$.

Par conséquent, $\text{Dom}_f=\mathbb{R}\backslash\{-\tfrac{1}{2}\}$.

2) Recherche des asymptotes

- La droite $x=-\tfrac{1}{2}$ est l'asymptote verticale à la courbe décrite par la fonction $f(x)=\dfrac{4x}{(2x+1)^2}$ puisque

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}^-} f(x)=\underbrace{\lim_{x\to -\frac{1}{2}^-}\frac{4x}{(2x+1)^2}}_{\text{forme } \frac{-2}{0^+}}=-\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to -\frac{1}{2}^+} f(x)=\underbrace{\lim_{x\to -\frac{1}{2}^+}\frac{4x}{(2x+1)^2}}_{\text{forme } \frac{-2}{0^+}}=-\infty$$

- La droite $y=0$ est l'asymptote horizontale à la courbe décrite par la fonction $f(x)=\dfrac{4x}{(2x+1)^2}$ puisque

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{(2x+1)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{x^2(2+\frac{1}{x})^2}=\underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x(2+\frac{1}{x})^2}}_{\text{forme } \frac{4}{\infty(2+0)^2}}=0$$

et

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x}{(2x+1)^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x}{x^2(2+\frac{1}{x})^2}=\underbrace{\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{x(2+\frac{1}{x})^2}}_{\text{forme } \frac{4}{-\infty(2+0)^2}}=0$$

- La courbe décrite par la fonction $f(x)=\dfrac{4x}{(2x+1)^2}$ n'admet aucune asymptote oblique puisque

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4\cancel{x}}{\cancel{x}(2x+1)^2}=\underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{4}{(2x+1)^2}}_{\text{forme } \frac{4}{\infty}}=0$$

et

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4\cancel{x}}{\cancel{x}(2x+1)^2}=\underbrace{\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{(2x+1)^2}}_{\text{forme }\frac{4}{\infty}}=0$$

3) Détermination des valeurs critiques de la fonction

Une valeur critique d'une fonction est une valeur appartenant au domaine de la fonction qui annule la dérivée de la fonction ou qui est telle que la dérivée de la fonction évaluée en cette valeur n'existe pas.

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left[\frac{4x}{(2x+1)^2}\right]=\frac{(2x+1)^2\frac{d}{dx}(4x)-4x\frac{d}{dx}(2x+1)^2}{\left[(2x+1)^2\right]^2}$$

$$=\frac{4(2x+1)^2-8x(2x+1)\frac{d}{dx}(2x+1)}{(2x+1)^4}=\frac{4(2x+1)^2-16x(2x+1)}{(2x+1)^4}$$

$$=\frac{4(2x+1)(2x+1-4x)}{(2x+1)^4}=\frac{4(1-2x)}{(2x+1)^3}=\frac{4-8x}{(2x+1)^3}$$

Déterminons les valeurs critiques :

- $f'(x)\nexists$ si $(2x+1)^3=0$, c'est-à-dire si $x=-\frac{1}{2}$.
- $f'(x)=0$ si $4-8x=0$, c'est-à-dire si $x=\frac{1}{2}$.

La seule valeur critique de $f(x)$ est $x=\frac{1}{2}$ puisque $-\frac{1}{2}\notin \mathrm{Dom}_f$.

4) Détermination des valeurs susceptibles de produire des points d'inflexion

Une valeur susceptible de produire un point d'inflexion est une valeur appartenant au domaine de la fonction qui annule la dérivée seconde de la fonction ou qui est telle que la dérivée seconde de la fonction évaluée en cette valeur n'existe pas.

$$f''(x)=\frac{d}{dx}\left[\frac{4-8x}{(2x+1)^3}\right]$$

$$=\frac{(2x+1)^3\frac{d}{dx}(4-8x)-(4-8x)\frac{d}{dx}\left[(2x+1)^3\right]}{\left[(2x+1)^3\right]^2}$$

$$= \frac{-8(2x+1)^3 - 3(4-8x)(2x+1)^2 \dfrac{d}{dx}(2x+1)}{(2x+1)^6}$$

$$= \frac{-8(2x+1)^3 - 6(4-8x)(2x+1)^2}{(2x+1)^6}$$

$$= \frac{-2(2x+1)^2 [4(2x+1) + 3(4-8x)]}{(2x+1)^6}$$

$$= \frac{-2(8x+4+12-24x)}{(2x+1)^4} = \frac{-2(-16x+16)}{(2x+1)^4} = \frac{32(x-1)}{(2x+1)^4}$$

Déterminons les valeurs susceptibles de produire des points d'inflexion :

- $f''(x) \nexists$ si $(2x+1)^4 = 0$, c'est-à-dire si $x = -\tfrac{1}{2}$.
- $f''(x) = 0$ si $32(x-1) = 0$, c'est-à-dire si $x = 1$

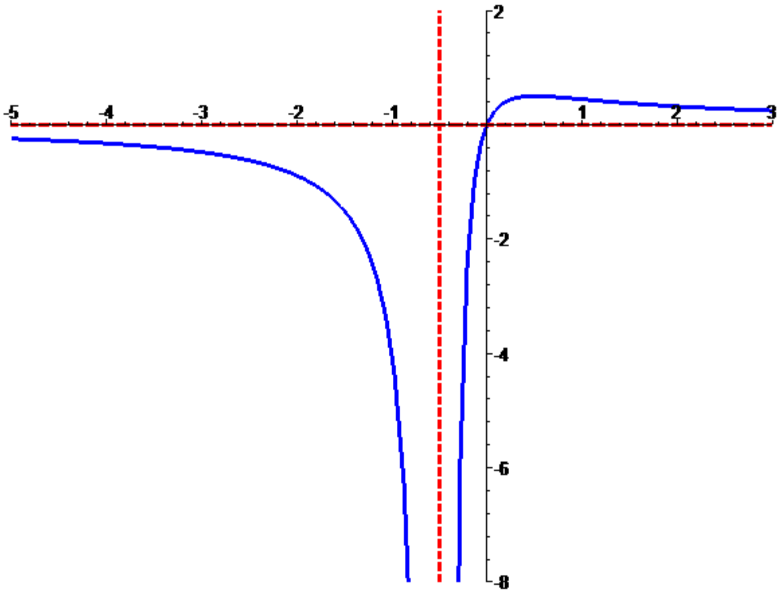
La seule valeur susceptible de produire un point d'inflexion est $x = 1$ puisque $-\tfrac{1}{2} \notin \text{Dom}_f$.

5) Construction du tableau des signes

	$]-\infty, -\tfrac{1}{2}[$		$]-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}[$		$]\tfrac{1}{2}, 1[$		$]1, \infty[$
x		$-\tfrac{1}{2}$		$\tfrac{1}{2}$		1	
$f'(x)$	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$\nexists$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘)	$\nexists$ a.v.	↗ (	$\tfrac{1}{2}$ max. rel. et abs.	↘)	$\tfrac{4}{9}$ p.i.	↘ (

Le maximum relatif de $\tfrac{1}{2}$ en $x = \tfrac{1}{2}$ est également le maximum absolu de la fonction $f(x)$ puisque c'est le seul maximum relatif, et que $\tfrac{1}{2} > \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$, $\tfrac{1}{2} > \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$, $\tfrac{1}{2} > \lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}^-} f(x) = -\infty$ et $\tfrac{1}{2} > \lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}^+} f(x) = -\infty$. La fonction n'admet cependant pas de minimum absolu puisqu'elle n'a pas de minimum relatif.

6) Esquisse de la courbe décrite par la fonction



e) Effectuons l'étude de la fonction $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ en respectant les étapes proposées.

1) Détermination du domaine de la fonction

La fonction $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ est définie si $x-1\neq 0$, c'est-à-dire si $x\neq 1$. Par conséquent, $\text{Dom}_f=\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

2) Recherche des asymptotes

- La droite $x=1$ est l'asymptote verticale à la courbe décrite par la fonction $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ puisque

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\underbrace{\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2}{x-1}}_{\text{forme }\frac{1}{0^-}}=-\infty \text{ et } \lim_{x\to 1^+} f(x)=\underbrace{\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2}{x-1}}_{\text{forme }\frac{1}{0^+}}=\infty$$

- La courbe décrite par la fonction $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ n'admet aucune asymptote horizontale puisque

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x(1-1/x)} = \underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{x}{1-1/x}}_{\text{forme } \frac{\infty}{1-0}} = \infty$$

et

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x(1-1/x)} = \underbrace{\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{1-1/x}}_{\text{forme } \frac{-\infty}{1-0}} = -\infty$$

- Vérifions si la courbe décrite par la fonction $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ admet des asymptotes obliques. On a

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x(x-1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}(1-1/x)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1-1/x} = \frac{1}{1-0} = 1 = m \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

et

$$\lim_{x\to\infty} [f(x)-mx] = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(1-1/x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1-1/x} = \frac{1}{1-0} = 1 = b \in \mathbb{R}$$

Par conséquent, la droite $y = mx + b = x + 1$ est une asymptote oblique à la courbe décrite par la fonction $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.

De plus,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x(x-1)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}(1-1/x)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1-1/x} = 1 = m \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

et

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x)-mx] = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - x(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(1-1/x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1-1/x} = 1 = b \in \mathbb{R}$$

Par conséquent, la droite $y = x+1$ est la seule asymptote oblique à la courbe décrite par la fonction $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.

3) Détermination des valeurs critiques de la fonction

Une valeur critique d'une fonction est une valeur appartenant au domaine de la fonction qui annule la dérivée de la fonction ou qui est telle que la dérivée de la fonction évaluée en cette valeur n'existe pas.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{x-1}\right) = \frac{(x-1)\dfrac{d}{dx}(x^2) - x^2\dfrac{d}{dx}(x-1)}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

Déterminons les valeurs critiques :

- $f'(x) \nexists$ si $(x-1)^2 = 0$, c'est-à-dire si $x = 1$.
- $f'(x) = 0$ si $x(x-2) = 0$, c'est-à-dire si $x = 0$ ou si $x = 2$.

Les seules valeurs critiques de $f(x)$ sont $x = 0$ et $x = 2$ puisque $1 \notin \text{Dom}_f$.

4) Détermination des valeurs susceptibles de produire des points d'inflexion

Une valeur susceptible de produire un point d'inflexion est une valeur appartenant au domaine de la fonction qui annule la dérivée seconde de la fonction ou qui est telle que la dérivée seconde de la fonction évaluée en cette valeur n'existe pas.

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}\right] = \frac{(x-1)^2\dfrac{d}{dx}(x^2-2x) - (x^2-2x)\dfrac{d}{dx}\left[(x-1)^2\right]}{\left[(x-1)^2\right]^2}$$
$$= \frac{(x-1)^2(2x-2) - 2(x^2-2x)(x-1)\dfrac{d}{dx}(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{2(x-1)^3 - 2(x^2-2x)(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2(x-1)\left[(x-1)^2 - (x^2-2x)\right]}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{2(x^2 - 2x + 1 - x^2 + 2x)}{(x-1)^3} = \frac{2}{(x-1)^3}$$

Déterminons les valeurs susceptibles de produire des points d'inflexion :

- $f''(x) \nexists$ si $(x-1)^3 = 0$, c'est-à-dire si $x = 1$.
- $f''(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R} \backslash \{1\}$.

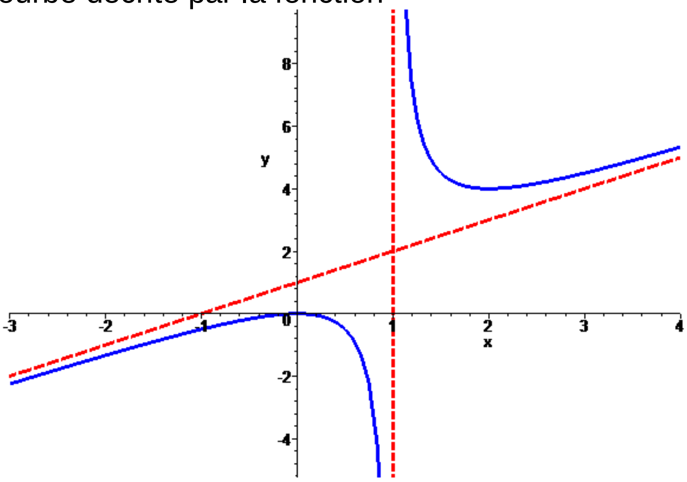
Aucune valeur n'est susceptible de produire un point d'inflexion puisque $1 \notin \text{Dom}_f$.

5) Construction du tableau des signes

	]−∞, 0[		]0, 1[		]1, 2[		]2, ∞[
x		0		1		2	
$f'(x)$	+	0	−	$\nexists$	−	0	+
$f''(x)$	−	−	−	$\nexists$	+	+	+
$f(x)$	↗(	0 max. rel.	↘)	$\nexists$ a.v.	↘(	4 min. rel.	↗)

Comme $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x-1} = \infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x-1} = -\infty$, la fonction $f(x)$ n'admet pas de maximum absolu ni de minimum absolu.

6) Esquisse de la courbe décrite par la fonction



f) Effectuons l'étude de la fonction $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x+1}$ en respectant les étapes proposées.

1) Détermination du domaine de la fonction

La fonction $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x+1}$ est définie si $x+1\neq 0$, c'est-à-dire si $x\neq -1$. Par conséquent, $\text{Dom}_f=\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

2) Recherche des asymptotes

- La droite $x=-1$ est l'asymptote verticale à la courbe décrite par la fonction $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x+1}$ puisque

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\underbrace{\lim_{x\to -1^-}\frac{x^2-x}{x+1}}_{\text{forme }\frac{2}{0^-}}=-\infty \quad\text{et}\quad \lim_{x\to -1^+} f(x)=\underbrace{\lim_{x\to -1^+}\frac{x^2-x}{x+1}}_{\text{forme }\frac{2}{0^+}}=\infty$$

- La courbe décrite par la fonction $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x+1}$ n'admet aucune asymptote horizontale puisque

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(1-1/x)}{x(1+1/x)}=\underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{x(1-1/x)}{1+1/x}}_{\text{forme }\frac{\infty(1-0)}{1+0}}=\infty$$

et

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2(1-1/x)}{x(1+1/x)}=\underbrace{\lim_{x\to-\infty}\frac{x(1-1/x)}{1+1/x}}_{\text{forme }\frac{-\infty(1-0)}{1+0}}=-\infty$$

- Vérifions si la courbe décrite par la fonction $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x+1}$ admet des asymptotes obliques. On a

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x}{x(x+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}(1-\frac{1}{x})}{\cancel{x^2}(1+\frac{1}{x})}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{1-0}{1+0}=1=m\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$$

et

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x}{x+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x-x(x+1)}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2\cancel{x}}{\cancel{x}(1+\frac{1}{x})}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{1+\frac{1}{x}}=-2=b\in\mathbb{R}$$

Par conséquent, la droite $y=mx+b=x-2$ est une asymptote oblique à la courbe décrite par la fonction $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x+1}$.

De plus,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x}{x(x+1)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^2}(1-\frac{1}{x})}{\cancel{x^2}(1+\frac{1}{x})}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{1-0}{1+0}=1=m\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$$

et

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-x}{x+1}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x-x(x+1)}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2\cancel{x}}{\cancel{x}(1+\frac{1}{x})}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{1+\frac{1}{x}}=-2$$

Par conséquent, la droite $y=x-2$ est la seule asymptote oblique à la courbe décrite par la fonction $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x+1}$.

3) Détermination des valeurs critiques de la fonction

Une valeur critique d'une fonction est une valeur appartenant au domaine de la fonction qui annule la dérivée de la fonction ou qui est telle que la dérivée de la fonction évaluée en cette valeur n'existe pas.

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2-x}{x+1}\right)=\frac{(x+1)\frac{d}{dx}(x^2-x)-(x^2-x)\frac{d}{dx}(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{(x+1)(2x-1)-(x^2-x)}{(x+1)^2}=\frac{2x^2-x+2x-1-x^2+x}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$$

Déterminons les valeurs critiques :

- $f'(x)\nexists$ si $(x+1)^2=0$, c'est-à-dire si $x=-1$.
- $f'(x)=0$ si $x^2+2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4(1)(-1)}}{2(1)} \Leftrightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{8}}{2}$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-2\pm2\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x=-1-\sqrt{2} \text{ ou } x=-1+\sqrt{2}$$

Les seules valeurs critiques de $f(x)$ sont $x=-1-\sqrt{2}\approx-2,41$ et $x=-1+\sqrt{2}\approx0,41$ puisque $-1\notin \mathrm{Dom}_f$.

4) Détermination des valeurs susceptibles de produire des points d'inflexion

Une valeur susceptible de produire un point d'inflexion est une valeur appartenant au domaine de la fonction qui annule la dérivée seconde de la fonction ou qui est telle que la dérivée seconde de la fonction évaluée en cette valeur n'existe pas.

$$f''(x)=\frac{d}{dx}\left[\frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}\right]=\frac{(x+1)^2\frac{d}{dx}(x^2+2x-1)-(x^2+2x-1)\frac{d}{dx}\left[(x+1)^2\right]}{\left[(x+1)^2\right]^2}$$

$$=\frac{(x+1)^2(2x+2)-2(x+1)(x^2+2x-1)\frac{d}{dx}(x+1)}{(x+1)^4}$$

$$=\frac{2(x+1)^3-2(x+1)(x^2+2x-1)}{(x+1)^4}=\frac{2(x+1)\left[(x+1)^2-(x^2+2x-1)\right]}{(x+1)^4}$$

$$=\frac{2(x^2+2x+1-x^2-2x+1)}{(x+1)^3}=\frac{4}{(x+1)^3}$$

Déterminons les valeurs susceptibles de produire des points d'inflexion :

- $f''(x)\nexists$ si $(x+1)^3=0$, c'est-à-dire si $x=-1$.

- $f''(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

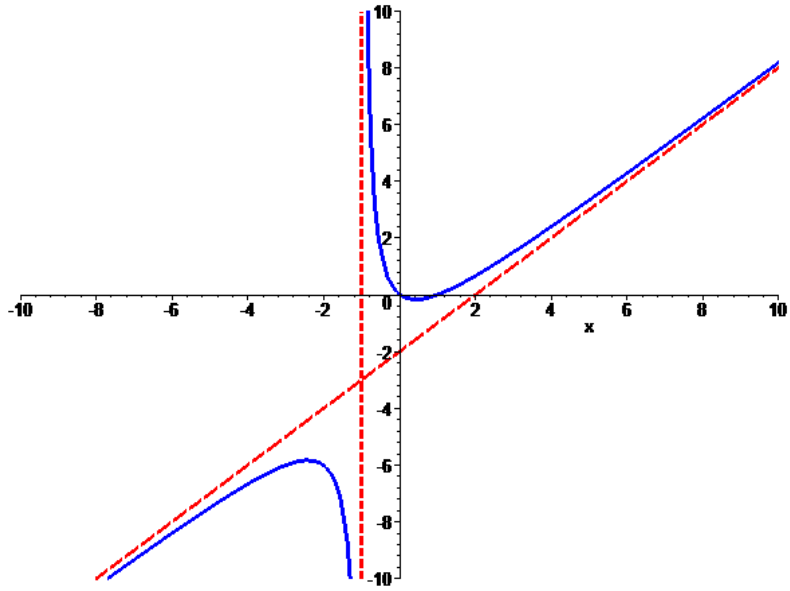
Aucune valeur n'est susceptible de produire un point d'inflexion puisque $-1 \notin \text{Dom}_f$.

5) Construction du tableau des signes

x	$]-\infty, -1-\sqrt{2}[$	$-1-\sqrt{2}$	$]-1-\sqrt{2}, -1[$	-1	$]-1, -1+\sqrt{2}[$	$-1+\sqrt{2}$	$]-1+\sqrt{2}, \infty[$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	$\nexists$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\nearrow ($	$-2\sqrt{2}-3$ max. rel.	$\searrow)$	$\nexists$ a.v.	$\searrow ($	$2\sqrt{2}-3$ min. rel.	$\nearrow)$

Comme $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, la fonction $f(x)$ n'admet pas de maximum absolu ni de minimum absolu.

6) Esquisse de la courbe décrite par la fonction



g) Effectuons l'étude de la fonction $f(x) = \dfrac{2(x^3 + x)}{x^2 - 1}$ en respectant les étapes proposées.

1) Détermination du domaine de la fonction

La fonction $f(x)=\dfrac{2(x^3+x)}{x^2-1}$ est définie si $x^2-1=(x-1)(x+1)\neq 0$, c'est-à-dire si $x\neq 1$ et $x\neq -1$. Par conséquent, $\text{Dom}_f=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

2) Recherche des asymptotes

- Les droites $x=-1$ et $x=1$ sont les asymptotes verticales de la fonction $f(x)=\dfrac{2(x^3+x)}{x^2-1}$ puisque

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\underbrace{\lim_{x\to -1^-}\frac{2(x^3+x)}{x^2-1}}_{\text{forme } \frac{-4}{0^+}}=-\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\underbrace{\lim_{x\to -1^+}\frac{2(x^3+x)}{x^2-1}}_{\text{forme } \frac{-4}{0^-}}=\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\underbrace{\lim_{x\to 1^-}\frac{2(x^3+x)}{x^2-1}}_{\text{forme } \frac{4}{0^-}}=-\infty$$

et

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\underbrace{\lim_{x\to 1^+}\frac{2(x^3+x)}{x^2-1}}_{\text{forme } \frac{4}{0^+}}=\infty$$

- La courbe décrite par la fonction $f(x)=\dfrac{2(x^3+x)}{x^2-1}$ n'admet aucune asymptote horizontale puisque

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2(x^3+x)}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}=\underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{2x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{1-\frac{1}{x^2}}}_{\text{forme } \frac{\infty(1+0)}{1-0}}=\infty$$

et

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2(x^3+x)}{x^2-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3(1+\frac{1}{x^2})}{x^2(1-\frac{1}{x^2})} = \underbrace{\lim_{x\to-\infty} \frac{2x(1+\frac{1}{x^2})}{(1-\frac{1}{x^2})}}_{\text{forme } \frac{-\infty(1+0)}{1-0}} = -\infty$$

- Vérifions si la courbe décrite par la fonction $f(x) = \dfrac{2(x^3+x)}{x^2-1}$ admet des asymptotes obliques. On a

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2(x^3+x)}{x(x^2-1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\cancel{x^3}(1+\frac{1}{x^2})}{\cancel{x^3}(1-\frac{1}{x^2})}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2(1+\frac{1}{x^2})}{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{2(1+0)}{1-0} = 2 = m \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

et

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{2(x^3+x)}{x^2-1} - 2x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{2(x^3+x) - 2x(x^2-1)}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4x}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x}{x^2(1-\frac{1}{x^2})} = \underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{4}{x(1-\frac{1}{x^2})}}_{\text{forme } \frac{4}{\infty(1-0)}} = 0 = b \in \mathbb{R}$$

Par conséquent, la droite $y = mx + b = 2x$ est une asymptote oblique à la courbe décrite par la fonction $f(x) = \dfrac{2(x^3+x)}{x^2-1}$.

De plus,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2(x^3+x)}{x(x^2-1)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2\cancel{x^3}(1+\frac{1}{x^2})}{\cancel{x^3}(1-\frac{1}{x^2})}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2(1+\frac{1}{x^2})}{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{2(1+0)}{1-0} = 2 = m \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

et

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2(x^3+x)}{x^2-1}-2x\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{2(x^3+x)-2x(x^2-1)}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x}{x^2-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x}{x^2(1-1/x^2)}=\underbrace{\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{x(1-1/x^2)}}_{\text{forme } \frac{4}{-\infty(1-0)}}=0=b\in\mathbb{R}$$

Par conséquent, la droite $y=2x$ est la seule asymptote oblique à la courbe décrite par la fonction $f(x)=\dfrac{2(x^3+x)}{x^2-1}$.

3) Détermination des valeurs critiques de la fonction

Une valeur critique d'une fonction est une valeur appartenant au domaine de la fonction qui annule la dérivée de la fonction ou qui est telle que la dérivée de la fonction évaluée en cette valeur n'existe pas.

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left[\frac{2(x^3+x)}{x^2-1}\right]$$

$$=\frac{(x^2-1)\frac{d}{dx}[2(x^3+x)]-2(x^3+x)\frac{d}{dx}(x^2-1)}{(x^2-1)^2}$$

$$=\frac{2(x^2-1)(3x^2+1)-4x(x^3+x)}{(x^2-1)^2}$$

$$=\frac{2(3x^4-2x^2-1)-4x^4-4x^2}{(x^2-1)^2}=\frac{2x^4-8x^2-2}{(x^2-1)^2}$$

Déterminons les valeurs critiques :

- $f'(x)\nexists$ si $(x^2-1)^2=(x-1)^2(x+1)^2=0$, c'est-à-dire si $x=1$ ou $x=-1$.
- $f'(x)=0$ si $2x^4-8x^2-2=0 \Leftrightarrow x^2=\dfrac{8\pm\sqrt{(-8)^2-4(2)(-2)}}{2(2)}$

$$\Leftrightarrow x^2=\frac{8\pm\sqrt{80}}{4}\Leftrightarrow x^2=\frac{8\pm4\sqrt{5}}{4}$$

$$\Leftrightarrow x^2=2+\sqrt{5} \text{ ou } \underbrace{x^2=2-\sqrt{5}}_{\text{à rejeter, car } x^2\geq 0}$$

$$\Leftrightarrow x=\sqrt{2+\sqrt{5}} \text{ ou } x=-\sqrt{2+\sqrt{5}}$$

Les seules valeurs critiques de $f(x)$ sont $x=\sqrt{2+\sqrt{5}}\approx 2{,}1$ et $x=-\sqrt{2+\sqrt{5}}\approx -2{,}1$ puisque $-1\notin \text{Dom}_f$ et $1\notin \text{Dom}_f$.

4) Détermination des valeurs susceptibles de produire des points d'inflexion

Une valeur susceptible de produire un point d'inflexion est une valeur appartenant au domaine de la fonction qui annule la dérivée seconde de la fonction ou qui est telle que la dérivée seconde de la fonction évaluée en cette valeur n'existe pas.

$$f''(x)=\frac{d}{dx}\left[\frac{2x^4-8x^2-2}{(x^2-1)^2}\right]$$

$$=\frac{(x^2-1)^2\frac{d}{dx}(2x^4-8x^2-2)-(2x^4-8x^2-2)\frac{d}{dx}\left[(x^2-1)^2\right]}{\left[(x^2-1)^2\right]^2}$$

$$=\frac{(x^2-1)^2(8x^3-16x)-2(x^2-1)(2x^4-8x^2-2)\frac{d}{dx}(x^2-1)}{(x^2-1)^4}$$

$$=\frac{8x(x^2-1)^2(x^2-2)-4x(x^2-1)(2x^4-8x^2-2)}{(x^2-1)^4}$$

$$=\frac{4x(x^2-1)\left[2(x^2-1)(x^2-2)-(2x^4-8x^2-2)\right]}{(x^2-1)^4}$$

$$=\frac{4x\left[2(x^4-3x^2+2)-2x^4+8x^2+2\right]}{(x^2-1)^3}=\frac{4x(2x^2+6)}{(x^2-1)^3}=\frac{8x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$

Déterminons les valeurs susceptibles de produire des points d'inflexion :

- $f''(x)\nexists$ si $(x^2-1)^3=(x-1)^3(x+1)^3=0$, c'est-à-dire si $x=1$ ou $x=-1$.
- Comme $x^2+3\neq 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f''(x)=0$ si $8x=0$, c'est-à-dire si $x=0$.

La seule valeur susceptible de produire un point d'inflexion est $x=0$ puisque $-1\notin \text{Dom}_f$ et $1\notin \text{Dom}_f$.

5) Construction du tableau des signes

	]−∞; − 2,1[		]−2,1; − 1[		]−1; 0[		]0; 1[		]1; 2,1[		]2,1; ∞[
x		−2,1		−1		0		1		2,1	
$f'(x)$	+	0	−	∄	−	−	−	∄	−	0	+
$f''(x)$	−	−	−	∄	+	0	−	∄	+	+	+
$f(x)$	↗ (	−6,7 max. rel.	↘)	∄ a.v.	↘ (	0 p.i.	↘)	∄ a.v.	↘ (	6,7 min. rel.	↗)

Comme $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, la fonction $f(x)$ n'admet pas de maximum absolu ni de minimum absolu.

6) Esquisse de la courbe décrite par la fonction