

différentiel

CHAPITRE 2

Question éclair 2.1

a) $\Delta t = 5 - 3 = 2 \text{ h}$

b)
$$\Delta N = N(5) - N(3) = \left(3\,000 - \frac{1\,800}{5+1}\right) - \left(3\,000 - \frac{1\,800}{3+1}\right)$$

$$= 2\,700 - 2\,550 = 150 \text{ bactéries}$$

Question éclair 2.2

- a) L'équation de la droite est de la forme $y = mx + b$. Déterminons la pente m de la droite :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-11 - 1}{5 - (-3)} = \frac{-12}{8} = -\frac{3}{2}$$

En remplaçant la pente m par sa valeur dans l'équation, on obtient $y = -\frac{3}{2}x + b$. Déterminons l'ordonnée à l'origine b de la droite. Comme celle-ci passe par le point $(-3, 1)$, on a $1 = -\frac{3}{2}(-3) + b \Rightarrow 1 = \frac{9}{2} + b \Rightarrow 1 - \frac{9}{2} = b \Rightarrow -\frac{7}{2} = b$. L'équation de la droite passant par les points $(-3, 1)$ et $(5, -11)$ est donc $y = -\frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$.

On aurait également pu obtenir l'équation de la droite en utilisant le fait qu'une droite de pente m passant par le point (x_1, y_1) a comme équation $y = m(x - x_1) + y_1$. Ici, comme la droite passe par $(-3, 1)$ et qu'elle a comme pente $m = -\frac{3}{2}$, son équation est $y = -\frac{3}{2}[x - (-3)] + 1 = -\frac{3}{2}(x + 3) + 1$, ce qui est équivalent à $y = -\frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$.

- b) Deux droites non verticales sont parallèles si elles ont la même pente. Comme la pente de la droite $y = -\frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$ est $-\frac{3}{2}$, la droite cherchée est de la forme $y = -\frac{3}{2}x + b$. Déterminons l'ordonnée à l'origine b de la droite. Comme celle-ci passe par le point $(-1, 4)$, on a $4 = -\frac{3}{2}(-1) + b \Rightarrow 4 = \frac{3}{2} + b \Rightarrow 4 - \frac{3}{2} = b \Rightarrow \frac{5}{2} = b$. L'équation de la droite cherchée est alors $y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$.

On aurait également pu obtenir l'équation de la droite en utilisant le fait qu'une droite de pente m passant par le point (x_1, y_1) a comme équation $y = m(x - x_1) + y_1$. Ici, comme la droite passe par $(-1, 4)$ et qu'elle a comme pente

différentiel

$m = -\frac{3}{2}$, son équation est $y = -\frac{3}{2}[x - (-1)] + 4 = -\frac{3}{2}(x + 1) + 4$, ce qui est équivalent à $y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$.

- c) Deux droites non verticales sont perpendiculaires si le produit de leurs pentes vaut -1 . Comme la pente de la droite $y = -\frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$ est $-\frac{3}{2}$, alors la pente d'une droite perpendiculaire à cette droite est $\frac{2}{3}$ (en effet, $-\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = -1$). Par conséquent, la droite cherchée est de la forme $y = \frac{2}{3}x + b$. Déterminons l'ordonnée à l'origine b de la droite. Comme celle-ci passe par le point $(-1, 4)$, on a $4 = \frac{2}{3}(-1) + b \Rightarrow 4 = -\frac{2}{3} + b \Rightarrow 4 + \frac{2}{3} = b \Rightarrow \frac{14}{3} = b$. L'équation de la droite cherchée est alors $y = \frac{2}{3}x + \frac{14}{3}$.

On aurait également pu obtenir l'équation de la droite en utilisant le fait qu'une droite de pente m passant par le point (x_1, y_1) a comme équation $y = m(x - x_1) + y_1$. Ici, comme la droite passe par $(-1, 4)$ et qu'elle a comme pente $m = \frac{2}{3}$, son équation est $y = \frac{2}{3}[x - (-1)] + 4 = \frac{2}{3}(x + 1) + 4$, ce qui est équivalent à $y = \frac{2}{3}x + \frac{14}{3}$.

Question éclair 2.3

On a $N(0) = 3\,000 - \frac{1\,800}{0+1} = 1\,200$ bactéries et $N(3) = 3\,000 - \frac{1\,800}{3+1} = 2\,550$ bactéries.

Le taux de variation moyen du nombre de bactéries dans la boîte de Petri au cours des 3 premières heures est

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{N(3) - N(0)}{3 - 0} = \frac{2\,550 - 1\,200}{3} = 450 \text{ bactéries/h}$$

Exercices 2.1

1. a) Il faut que $V(t) \geq 0$, car des ventes hebdomadaires ne peuvent être négatives. Or,

$$V(t) \geq 0$$

$$8\,100 - 100t^2 \geq 0$$

$$-100t^2 \geq -8\,100$$

$$t^2 \leq 81$$

$$\sqrt{t^2} \leq \sqrt{81}$$

$$|t| \leq 9$$

$$-9 \leq t \leq 9$$

différentiel

Comme $t \geq 0$ (le temps écoulé depuis la fin d'une campagne publicitaire ne peut être négatif), il faut donc que $t \in [0, 9]$.

- b) $\Delta t = 4 - 1 = 3$ semaines
- c) $\Delta V = V(4) - V(1) = 8\,100 - 100(4)^2 - [8\,100 - 100(1)^2] = -1\,500$ exemplaires
- d) $\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V(4) - V(1)}{3} = \frac{-1\,500}{3} = -500$ exemplaires/semaine
- e) Entre la première et la quatrième semaine suivant la fin de la campagne publicitaire, le nombre d'exemplaires vendus a chuté, en moyenne, de 500 exemplaires par semaine.
- f) Si on avait tracé la courbe décrite par la fonction $V(t) = 8\,100 - 100t^2$, la pente de la droite sécante joignant les points $(1, 8\,000)$ et $(4, 6\,500)$ aurait été de -500 .

2. a) $\Delta t = 5 - 0 = 5$ min
- b) $\Delta C = C(5) - C(0) = \frac{25(5)}{10+5} - \frac{25(0)}{10+0} = \frac{25}{3} = 8,\bar{3}$ g/L
- c) $\frac{\Delta C}{\Delta t} = \frac{C(5) - C(0)}{5} = \frac{\frac{25}{3}}{5} = \frac{5}{3} = 1,\bar{6}$ g/L/min
- d) Au cours des 5 premières minutes, la concentration en sel dans la citerne a augmenté, en moyenne, de $1,\bar{6}$ g/L par minute.

Exercice 2.2

$$\begin{aligned}
 a) \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3(2 + \Delta x) + 5 - [3(2) + 5]}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{6 + 3\Delta x + 5 - 11}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 3 \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

Le taux de variation instantané de la fonction $f(x) = 3x + 5$ en $x = 2$ est égal à 3.

différentiel

$$\begin{aligned}
 b) \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(1+\Delta x)^2 - 1^2}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1 + 2\Delta x + (\Delta x)^2 - 1}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\Delta x} (2 + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2 + \Delta x) \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

Le taux de variation instantané de la fonction $f(x) = x^2$ en $x = 1$ est égal à 2.

Exercices 2.3

1. La pente de la droite tangente à la courbe décrite par la fonction $f(x) = 2x - x^2$ en $x = -2$ est donnée par

$$\begin{aligned}
 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-2 + \Delta x) - f(-2)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[2(-2 + \Delta x) - (-2 + \Delta x)^2] - [2(-2) - (-2)^2]}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-4 + 2\Delta x - [4 - 4\Delta x + (\Delta x)^2] - (-8)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-4 + 2\Delta x - 4 + 4\Delta x - (\Delta x)^2 + 8}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{6\Delta x - (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\Delta x} (6 - \Delta x)}{\cancel{\Delta x}} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (6 - \Delta x) \\
 &= 6
 \end{aligned}$$

La droite tangente passe par le point $(-2, -8)$, de sorte que son équation est $y = 6[x - (-2)] - 8$ ou $y = 6x + 4$.

On aurait également pu déterminer l'ordonnée à l'origine de la droite. Comme la droite est de pente 6, son équation est de la forme $y = 6x + b$. Puisqu'elle passe par le point $(-2, -8)$, on a $-8 = 6(-2) + b \Rightarrow -8 = -12 + b \Rightarrow 4 = b$. Par conséquent, l'équation de la droite tangente passant par le point $(-2, -8)$ est $y = 6x + 4$.

différentiel

2. L'équation de la droite tangente à la courbe décrite par la fonction $f(x) = 2x - x^2$ en $x = -2$ est $y = 6x + 4$. Puisque la droite normale est perpendiculaire à la droite tangente, le produit de leurs pentes vaut -1 , de sorte que la pente m de la droite normale satisfait à l'équation $6m = -1$, d'où $m = -\frac{1}{6}$. La droite normale passe par le point $(-2, -8)$, de sorte que son équation est $y = -\frac{1}{6}[x - (-2)] - 8$ ou $y = -\frac{1}{6}x - \frac{25}{3}$.

On aurait également pu déterminer l'ordonnée à l'origine de la droite. Comme la droite est de pente $-\frac{1}{6}$, son équation est de la forme $y = -\frac{1}{6}x + b$. Puisqu'elle passe par le point $(-2, -8)$, on a $-8 = -\frac{1}{6}(-2) + b \Rightarrow -8 = \frac{1}{3} + b \Rightarrow -\frac{25}{3} = b$. Par conséquent, l'équation de la droite normale passant par le point $(-2, -8)$ est $y = -\frac{1}{6}x - \frac{25}{3}$.

Exercices 2.4

$$\begin{aligned}
 1. \quad a) \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{V(2 + \Delta t) - V(2)}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{8\,100 - 100(2 + \Delta t)^2 - [8\,100 - 100(2^2)]}{\Delta t} \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{8\,100 - 100[4 + 4\Delta t + (\Delta t)^2] - 7\,700}{\Delta t} \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{8\,100 - 400 - 400\Delta t - 100(\Delta t)^2 - 7\,700}{\Delta t} \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{-400\Delta t - 100(\Delta t)^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{-100\cancel{\Delta t}(4 + \Delta t)}{\cancel{\Delta t}} \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [-100(4 + \Delta t)] \\
 &= -400 \text{ exemplaires/semaine}
 \end{aligned}$$

- b) Deux semaines après la fin de la campagne publicitaire, les ventes du DVD chutent à raison de 400 exemplaires par semaine.
- c) Si on avait tracé la courbe décrite par la fonction $V(t) = 8\,100 - 100t^2$, la pente de la droite tangente à la courbe décrite par cette fonction en $t = 2$ aurait été de -400 .

$$2. \quad a) \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{C(10 + \Delta t) - C(10)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{25(10 + \Delta t)}{10 + (10 + \Delta t)} - \frac{25(10)}{10 + 10}}{\Delta t}$$

différentiel

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{250 + 25\Delta t}{20 + \Delta t} - \frac{25}{2}}{\Delta t} \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{2(250 + 25\Delta t)}{2(20 + \Delta t)} - \frac{25(20 + \Delta t)}{2(20 + \Delta t)}}{\Delta t} \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{2(250 + 25\Delta t) - 25(20 + \Delta t)}{2(20 + \Delta t)} \cdot \frac{1}{\Delta t} \right] \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{500 + 50\Delta t - 500 - 25\Delta t}{2\Delta t(20 + \Delta t)} \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{25\cancel{\Delta t}}{2\cancel{\Delta t}(20 + \Delta t)} \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{25}{40 + 2\Delta t} \\
 &= \frac{5}{8} \text{ g/L/min}
 \end{aligned}$$

- b) Dix minutes après le début de l'introduction de la solution saline, la concentration en sel dans la citerne augmente à raison de $\frac{5}{8}$ g/L/min.

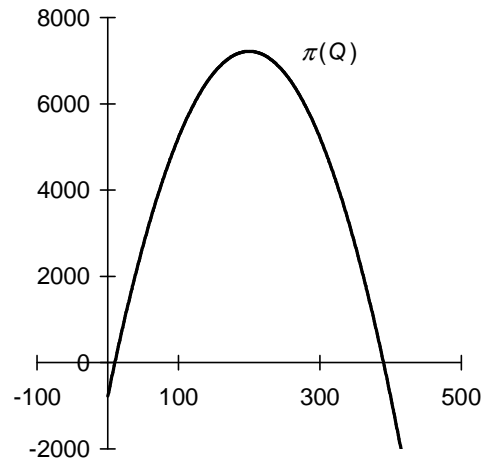
Exercices 2.5

$$\begin{aligned}
 1. \quad f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{x(1)}{x(x + \Delta x)} - \frac{1(x + \Delta x)}{x(x + \Delta x)}}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{x - (x + \Delta x)}{x(x + \Delta x)} \cdot \frac{1}{\Delta x} \right] \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x - x - \Delta x}{x(x + \Delta x)\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\cancel{\Delta x}}{x(x + \Delta x)\cancel{\Delta x}} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x + \Delta x)} \\
 &= -\frac{1}{x^2}
 \end{aligned}$$

différentiel

2. a) $\pi(Q) = -0,2Q^2 + 80Q - 780 = -0,2(Q - 390)(Q - 10)$, où $Q \geq 0$, de sorte que $\pi(Q) \geq 0$ si et seulement si $10 \leq Q \leq 390$. L'entreprise doit donc vendre entre 10 et 390 pièces.

On peut aussi constater ce résultat en traçant le graphique de la fonction $\pi(Q)$: il s'agit d'une parabole ouverte vers le bas puisque le coefficient du terme dominant (celui du terme en Q^2) est négatif ($a = -0,02 < 0$).



On peut obtenir les zéros de la parabole à l'aide de la formule quadratique.

$$Q = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-80 \pm \sqrt{6\,400 - 4(-0,2)(-780)}}{2(-0,2)} = \frac{-80 \pm 76}{-0,4} = 10 \text{ ou } 390$$

On voit bien sur le graphique que $\pi(Q) \geq 0$ si et seulement si $10 \leq Q \leq 390$.

$$\begin{aligned} b) \quad \pi'(Q) &= \lim_{\Delta Q \rightarrow 0} \frac{\pi(Q + \Delta Q) - \pi(Q)}{\Delta Q} \\ &= \lim_{\Delta Q \rightarrow 0} \frac{-0,2(Q + \Delta Q)^2 + 80(Q + \Delta Q) - 780 - [-0,2Q^2 + 80Q - 780]}{\Delta Q} \\ &= \lim_{\Delta Q \rightarrow 0} \frac{-0,2[Q^2 + 2Q(\Delta Q) + (\Delta Q)^2] + 80Q + 80\Delta Q - 780 + 0,2Q^2 - 80Q + 780}{\Delta Q} \\ &= \lim_{\Delta Q \rightarrow 0} \frac{-0,4Q(\Delta Q) - 0,2(\Delta Q)^2 + 80\Delta Q}{\Delta Q} \\ &= \lim_{\Delta Q \rightarrow 0} \frac{\cancel{\Delta Q}(-0,4Q - 0,2\Delta Q + 80)}{\cancel{\Delta Q}} \\ &= \lim_{\Delta Q \rightarrow 0} (-0,4Q - 0,2\Delta Q + 80) \\ &= (-0,4Q + 80) \text{ \$/pièce} \end{aligned}$$

différentiel

- c) $\pi'(150) = -0,4(150) + 80 = 20$ \$/pièce
- d) Lorsque le niveau de vente est de 150 pièces, le profit tiré de la vente d'une pièce additionnelle est de 20 \$. Ou encore, lorsque ce niveau est de 150 pièces, le profit augmente à raison de 20 \$ par pièce.
- e) $\pi'(300) = -0,4(300) + 80 = -40$ \$/pièce
- f) Lorsque le niveau de vente est de 300 pièces, la chute de profit entraînée par la vente d'une pièce additionnelle est de 40 \$. Ou encore, lorsque ce niveau est de 300 pièces, le profit diminue à raison de 40 \$ par pièce si on augmente le nombre de pièces vendues.

3. a) $A = c^2 \Rightarrow c = \sqrt{A} \Rightarrow L = 4c = 4\sqrt{A}$ m

$$\begin{aligned}
 b) \quad L'(A) &= \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{L(A + \Delta A) - L(A)}{\Delta A} \\
 &= \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{4\sqrt{A + \Delta A} - 4\sqrt{A}}{\Delta A} \\
 &= \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{(4\sqrt{A + \Delta A} - 4\sqrt{A})(4\sqrt{A + \Delta A} + 4\sqrt{A})}{\Delta A(4\sqrt{A + \Delta A} + 4\sqrt{A})} \\
 &= \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{(4\sqrt{A + \Delta A})^2 + 4\sqrt{A + \Delta A} \cdot 4\sqrt{A} - 4\sqrt{A} \cdot 4\sqrt{A + \Delta A} - (4\sqrt{A})^2}{\Delta A(4\sqrt{A + \Delta A} + 4\sqrt{A})} \\
 &= \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{16(A + \Delta A) - 16A}{\Delta A(4\sqrt{A + \Delta A} + 4\sqrt{A})} \\
 &= \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{16\cancel{\Delta A}}{\cancel{\Delta A}(4\sqrt{A + \Delta A} + 4\sqrt{A})} \\
 &= \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{16}{4\sqrt{A + \Delta A} + 4\sqrt{A}} \\
 &= \frac{16}{8\sqrt{A}} \text{ m/m}^2 \\
 &= \frac{2}{\sqrt{A}} \text{ m/m}^2
 \end{aligned}$$

c) $L'(100) = \frac{2}{\sqrt{100}} = 0,2$ m/m²

- d) Interprétation géométrique : si on avait tracé la courbe décrite par la fonction $L = 4\sqrt{A}$, la pente de la droite tangente à cette courbe lorsque $A = 100$ aurait été de 0,2. Interprétation contextuelle : lorsque l'aire du potager est de

différentiel

100 m², la longueur de la clôture augmente à raison de 0,2 m par mètre carré d'augmentation de l'aire du potager.

$$e) \quad L'(156,25) = \frac{2}{\sqrt{156,25}} = 0,16 \text{ m/m}^2$$

f) Interprétation géométrique : si on avait tracé la courbe décrite par la fonction $L = 4\sqrt{A}$, la pente de la droite tangente à cette courbe lorsque $A = 156,25$ aurait été de 0,16. Interprétation contextuelle : lorsque l'aire du potager est de 156,25 m², la longueur de la clôture augmente à raison de 0,16 m par mètre carré d'augmentation de l'aire du potager.

Exercices 2.6

1. La fonction $f(x)$ n'est dérivable ni en $x = -1$ ni en $x = 0$ puisque son graphique y présente des points anguleux. Elle n'est pas dérivable en $x = 1$ puisque son graphique y admet une discontinuité essentielle par saut. Elle n'est pas dérivable en $x = 3$ puisque la droite tangente à la courbe qu'elle décrit est verticale, de sorte que la dérivée de $f(x)$ en $x = 3$ n'est pas définie.

$$2. \quad a) \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(3 + \Delta x) - f(3)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|3 + \Delta x - 1| - |3 - 1|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 + \Delta x - 2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1, \text{ de sorte que } f'(3) = 1, \text{ d'où la fonction est dérivable en } x = 3.$$

$$b) \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|1 + \Delta x - 1| - |1 - 1|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}. \text{ Or, } \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1 \text{ et } \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1, \text{ de sorte que } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} \text{ n'existe pas. La fonction } f(x) \text{ n'est donc pas dérivable en } x = 1.$$

Question éclair 2.4

$$a) \quad \text{Comme } -\sqrt{3} \text{ est une constante, } \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(-\sqrt{3}) = 0.$$

$$b) \quad \frac{dg}{dt} = \frac{d}{dt}(-4t) = -4 \frac{d}{dt}(t) = -4(1) = -4$$

$$c) \quad \frac{dh}{du} = \frac{d}{du}\left(\frac{3u}{4}\right) = \frac{d}{du}\left(\frac{3}{4}u\right) = \frac{3}{4} \frac{d}{du}(u) = \frac{3}{4}(1) = \frac{3}{4}$$

différentiel

Question éclair 2.5

$$a) \quad \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(4 - 3x) = \frac{d}{dx}(4) - \frac{d}{dx}(3x) = 0 - 3 \frac{d}{dx}(x) = -3(1) = -3$$

$$b) \quad \frac{dg}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{2t-1}{5}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{2}{5}t - \frac{1}{5}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{2}{5}t\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{2}{5} \frac{d}{dt}(t) - 0 = \frac{2}{5}(1) = \frac{2}{5}$$

Question éclair 2.6

$$\begin{aligned} a) \quad \frac{df}{dx} &= \frac{d}{dx}[(2x-1)(5-3x)] = (2x-1) \frac{d}{dx}(5-3x) + (5-3x) \frac{d}{dx}(2x-1) \\ &= (2x-1)[0-3(1)] + (5-3x)[2(1)-0] = -3(2x-1) + 2(5-3x) \\ &= -6x+3+10-6x = 13-12x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad \frac{dg}{dt} &= \frac{d}{dt}[-4t(5t+\frac{1}{2})] = -4t \frac{d}{dt}(5t+\frac{1}{2}) + (5t+\frac{1}{2}) \frac{d}{dt}(-4t) \\ &= -4t[5(1)+0] + (5t+\frac{1}{2})[-4(1)] = 5(-4t) - 4(5t+\frac{1}{2}) \\ &= -20t-20t-2 = -40t-2 = -2(20t+1) \end{aligned}$$

Question éclair 2.7

$$\begin{aligned} a) \quad \frac{df}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{-5}{4x-3}\right) = \frac{(4x-3) \frac{d}{dx}(-5) - (-5) \frac{d}{dx}(4x-3)}{(4x-3)^2} \\ &= \frac{(4x-3)(0) - (-5)[4(1)-0]}{(4x-3)^2} = \frac{20}{(4x-3)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad \frac{dg}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{5-t}{3t-2}\right) = \frac{(3t-2) \frac{d}{dt}(5-t) - (5-t) \frac{d}{dt}(3t-2)}{(3t-2)^2} \\ &= \frac{(3t-2)(0-1) - (5-t)[3(1)-0]}{(3t-2)^2} = \frac{-3t+2-15+3t}{(3t-2)^2} = \frac{-13}{(3t-2)^2} \end{aligned}$$

Exercice 2.7

$$\begin{aligned} a) \quad \frac{df}{dx} &= \frac{d}{dx}(3x^2+5x-3) = \frac{d}{dx}(3x^2) + \frac{d}{dx}(5x) - \frac{d}{dx}(3) \\ &= 3 \frac{d}{dx}(x^2) + 5 \frac{d}{dx}(x) - 0 = 3(2x) + 5(1) = 6x+5 \end{aligned}$$

différentiel

$$b) \quad \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=2} = 6(2) + 5 = 17$$

$$\begin{aligned} c) \quad \frac{d}{dx}[(x^2 + 1)f(x)] &= \frac{d}{dx}[(x^2 + 1)(3x^2 + 5x - 3)] \\ &= (x^2 + 1) \frac{d}{dx}(3x^2 + 5x - 3) + (3x^2 + 5x - 3) \frac{d}{dx}(x^2 + 1) \\ &= (x^2 + 1)(6x + 5) + (3x^2 + 5x - 3) \left[\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(1) \right] \\ &= (x^2 + 1)(6x + 5) + (3x^2 + 5x - 3)(2x + 0) \\ &= (x^2 + 1)(6x + 5) + 2x(3x^2 + 5x - 3) \\ &= 6x^3 + 5x^2 + 6x + 5 + 6x^3 + 10x^2 - 6x \\ &= 12x^3 + 15x^2 + 5 \end{aligned}$$

Exercices 2.8

$$1. \quad a) \quad \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(-3\pi) = 0, \text{ car } -3\pi \text{ est une constante.}$$

$$b) \quad \frac{dg}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{3t}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{3}{4}t \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4} \frac{d}{dt}(t) + 0 = \frac{3}{4}(1) = \frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned} c) \quad \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}[(x^3 + 5x)(3x - x^2 + 1)] \\ &= (x^3 + 5x) \frac{d}{dx}(3x - x^2 + 1) + (3x - x^2 + 1) \frac{d}{dx}(x^3 + 5x) \\ &= (x^3 + 5x)(3 - 2x) + (3x - x^2 + 1)(3x^2 + 5) \\ &= 3x^3 - 2x^4 + 15x - 10x^2 + 9x^3 + 15x - 3x^4 - 5x^2 + 3x^2 + 5 \\ &= -5x^4 + 12x^3 - 12x^2 + 30x + 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d) \quad \frac{dh}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{3t^2 - 4t + 2}{1 - 2t} \right) \\ &= \frac{(1 - 2t) \frac{d}{dt}(3t^2 - 4t + 2) - (3t^2 - 4t + 2) \frac{d}{dt}(1 - 2t)}{(1 - 2t)^2} \\ &= \frac{(1 - 2t)(6t - 4) - (3t^2 - 4t + 2)(-2)}{(1 - 2t)^2} \\ &= \frac{6t - 4 - 12t^2 + 8t + 6t^2 - 8t + 4}{(1 - 2t)^2} \end{aligned}$$

différentiel

$$= \frac{-6t^2 + 6t}{(1-2t)^2}$$

$$= \frac{-6t(t-1)}{(1-2t)^2}$$

$$e) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left(3x^{\sqrt{2}} - \frac{4}{x^2} + 5\sqrt{x} - 6 \right) = \frac{d}{dx} (3x^{\sqrt{2}} - 4x^{-2} + 5x^{\frac{1}{2}} - 6)$$

$$= 3\sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1} + 8x^{-3} + \frac{5}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 3\sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1} + \frac{8}{x^3} + \frac{5}{2\sqrt{x}}$$

$$f) \quad \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} \left(x^2\sqrt{x} - \frac{4}{x^3} + \frac{1}{x} - 2 \right) = \frac{d}{dx} (x^{\frac{5}{2}} - 4x^{-3} + x^{-1} - 2)$$

$$= \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} + 12x^{-4} - x^{-2} = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} + \frac{12}{x^4} - \frac{1}{x^2}$$

2. Comme $f(-8) = \sqrt[3]{-8} = -2$, la droite tangente et la droite normale cherchées passent par le point $(-8, -2)$. La pente de la droite tangente à la courbe décrite par $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en $x = -8$ est $f'(-8)$. Déterminons donc $f'(x)$.

$$f'(x) = \frac{d}{dx} (\sqrt[3]{x}) = \frac{d}{dx} (x^{\frac{1}{3}}) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$$

On a $f'(-8) = \frac{1}{3(-8)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(-8)^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{64}} = \frac{1}{12}$. Par conséquent, l'équation de la

droite tangente à la courbe décrite par $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en $x = -8$ est $y = \frac{1}{12}[x - (-8)] + (-2) = \frac{1}{12}(x + 8) - 2$ ou $y = \frac{1}{12}x - \frac{4}{3}$.

On aurait également pu déterminer l'ordonnée à l'origine de la droite tangente d'une autre façon. Comme la droite tangente est de pente $\frac{1}{12}$, son équation est de la forme $y = \frac{1}{12}x + b$. Puisqu'elle passe par le point $(-8, -2)$, on a $-2 = \frac{1}{12}(-8) + b \Rightarrow -2 = -\frac{2}{3} + b \Rightarrow -\frac{4}{3} = b$. Par conséquent, l'équation de la droite tangente passant par le point $(-8, -2)$ est $y = \frac{1}{12}x - \frac{4}{3}$.

Comme la droite normale est perpendiculaire à la droite tangente, le produit de leurs pentes vaut -1 , de sorte que la pente m de la droite normale satisfait à l'équation $\frac{1}{12}m = -1$, d'où $m = -12$. Par conséquent, l'équation de la droite normale à la courbe décrite par $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en $x = -8$ est $y = -12[x - (-8)] + (-2) = -12(x + 8) - 2$ ou $y = -12x - 98$.

On aurait également pu déterminer l'ordonnée à l'origine de la droite normale d'une autre façon. Comme la droite normale est de pente -12 , son équation est

différentiel

de la forme $y = -12x + b$. Puisqu'elle passe par le point $(-8, -2)$, on a $-2 = -12(-8) + b \Rightarrow -2 = 96 + b \Rightarrow -98 = b$. Par conséquent, l'équation de la droite normale passant par le point $(-8, -2)$ est $y = -12x - 98$.

3. $C'(Q) = \frac{d}{dQ}(Q^3 - 10Q^2 + 40Q + 100) = 3Q^2 - 20Q + 40$, de sorte que $C'(10) = 140$ \$/unité et que $C'(12) = 232$ \$/unité. On obtient les mêmes résultats qu'à l'exemple 2.12, mais de manière beaucoup plus efficace.

4. $T'(L) = \frac{d}{dL}\left(2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\right) = \frac{d}{dL}\left(2\pi\frac{\sqrt{L}}{\sqrt{g}}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\frac{d}{dL}(L^{\frac{1}{2}}) = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\left(\frac{1}{2}L^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{2\pi}{2L^{\frac{1}{2}}\sqrt{g}} = \frac{\pi}{\sqrt{Lg}}$, de sorte que $T'(0,5) = \frac{\pi}{\sqrt{0,5g}}$ s/m $\approx 1,419$ s/m et que $T'(1) = \frac{\pi}{\sqrt{g}}$ s/m $\approx 1,004$ s/m. On obtient les mêmes résultats qu'à l'exemple 2.13, mais de manière beaucoup plus efficace.

5. $\frac{dC}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{25t}{10+t}\right) = \frac{(10+t)\frac{d}{dt}(25t) - 25t\frac{d}{dt}(10+t)}{(10+t)^2} = \frac{25(10+t) - 25t(1)}{(10+t)^2} = \frac{250}{(10+t)^2}$

Par conséquent, $C'(10) = \frac{dC}{dt}\bigg|_{t=10} = \frac{250}{(10+10)^2} = \frac{5}{8}$ g/L/min. On obtient le même résultat qu'au numéro 2 a des exercices 2.4, mais de manière beaucoup plus efficace.

Exercices 2.9

1. La fonction $f(x)$ est décroissante sur les intervalles $]-\infty, -1[$ et $]2, \infty[$, et elle est croissante sur l'intervalle $]-1, 2[$. Ainsi, la fonction dérivée $f'(x)$ doit être négative sur les intervalles $]-\infty, -1[$ et $]2, \infty[$, c'est-à-dire que la courbe qui la décrit doit être sous l'axe des abscisses sur ces deux intervalles, et elle doit être positive sur l'intervalle $]-1, 2[$, c'est-à-dire que la courbe qui la décrit doit être au-dessus de l'axe des abscisses sur cet intervalle. De plus, comme la pente de la droite tangente à la courbe décrite par $f(x)$ est nulle en $x = -1$ et en $x = 2$, la dérivée $f'(x)$ doit couper l'axe des abscisses à ces valeurs. Seule la courbe correspondant au graphique *b* remplit ces conditions.

différentiel

2. a) $\pi'(Q) = \frac{d}{dQ}(-0,2Q^2 + 80Q - 780) = (-0,4Q + 80) \$/\text{pièce}$
- b) On constate que si $\pi'(Q) > 0$, alors $-0,4Q + 80 > 0$, de sorte que $-0,4Q > -80$, ce qui est équivalent à $Q < 200$. Par un raisonnement similaire, on obtient que $\pi'(Q) < 0$ lorsque $Q > 200$. Par conséquent, le profit augmente jusqu'à ce que le niveau de vente atteigne 200 pièces puis diminue par la suite, de sorte que la compagnie atteint un profit maximal lorsque le niveau de vente est de 200 pièces.
- c) Le profit maximal est donc de $\pi(200) = -0,2(200)^2 + 80(200) - 780 = 7220 \$$.
- d) Puisque $\pi(Q) = -0,2Q^2 + 80Q - 780$ et que $a = -0,2 < 0$, le graphique représentant $\pi(Q)$ est une parabole ouverte vers le bas. Le maximum de $\pi(Q)$ est donc atteint au sommet de la parabole, dont l'abscisse est $Q = \frac{-b}{2a} = \frac{-80}{2(-0,2)} = 200$ pièces, ce qui correspond au résultat obtenu en b.
3. a) $1,5 + 1 = 2,5$ m/s. La jeune fille se déplace vers la droite à raison de 2,5 m/s.
- b) $1,5 - 1 = 0,5$ m/s. La jeune fille se déplace vers la droite à raison de 0,5 m/s.
- c) $1,5 - 2 = -0,5$ m/s. La jeune fille se déplace vers la gauche à raison de 0,5 m/s.
- d) Il s'agit d'une illustration de la règle selon laquelle $\frac{d}{dx}(u + v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$.

Question éclair 2.8

- a) Comme $b^2 - 4ac = 13^2 - 4(-6)(-6) = 169 - 144 = 25 > 0$, on a

$$-6x^2 + 13x - 6 = a(x - r_1)(x - r_2)$$

où

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-13 - \sqrt{25}}{2(-6)} = \frac{-18}{-12} = \frac{3}{2}$$

et

$$r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-13 + \sqrt{25}}{2(-6)} = \frac{-8}{-12} = \frac{2}{3}$$

Par conséquent,

$$-6x^2 + 13x - 6 = a(x - r_1)(x - r_2) = -6(x - \frac{3}{2})(x - \frac{2}{3})$$

différentiel

b) Comme $b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(5)(2) = 1 - 40 = -39 < 0$, le polynôme $5x^2 - x + 2$ est irréductible, c'est-à-dire qu'il ne se décompose pas en un produit de deux binômes à coefficients réels de degré 1.

c) Comme $b^2 - 4ac = 7^2 - 4(2)(-4) = 49 + 32 = 81 > 0$, on a

$$2x^2 + 7x - 4 = a(x - r_1)(x - r_2)$$

où

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-7 - \sqrt{81}}{2(2)} = \frac{-16}{4} = -4$$

et

$$r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-7 + \sqrt{81}}{2(2)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Par conséquent,

$$2x^2 + 7x - 4 = a(x - r_1)(x - r_2) = 2[x - (-4)](x - \frac{1}{2}) = 2(x + 4)(x - \frac{1}{2})$$

Exercices 2.10

1. $f(x) = \frac{3x^3 + 2x^2 - x}{9 - x^2} = \frac{x(3x^2 + 2x - 1)}{(3 - x)(3 + x)} = \frac{x \cdot 3(x - \frac{1}{3})(x + 1)}{(3 - x)(3 + x)}$, de sorte que les valeurs de x qui annulent le numérateur ou le dénominateur sont $x = 0$, $x = \frac{1}{3}$, $x = -1$, $x = 3$ et $x = -3$. Construisons un tableau des signes de la fonction $f(x)$.

	$]-\infty, -3[$	-3	$]-3, -1[$	-1	$]-1, 0[$	0	$]0, \frac{1}{3}[$	$\frac{1}{3}$	$]\frac{1}{3}, 3[$	3	$]3, \infty[$
x		-3		-1		0		$\frac{1}{3}$		3	
$f(x)$	+	$\cancel{\neq}$	-	0	+	0	-	0	+	$\cancel{\neq}$	-

Par conséquent, la fonction est positive sur les intervalles $]-\infty, -3[$, $]-1, 0[$ et $]\frac{1}{3}, 3[$; elle est négative sur les intervalles $]-3, -1[$, $]0, \frac{1}{3}[$ et $]3, \infty[$; elle est nulle en $x = -1$, en $x = 0$ et en $x = \frac{1}{3}$; elle n'est pas définie en $x = -3$ ni en $x = 3$.

2. a) $v(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(t^3 - 15t^2 + 63t + 3) = 3t^2 - 30t + 63 = 3(t - 3)(t - 7)$ m/s

b) $v(4) = 3(4)^2 - 30(4) + 63 = -9$ m/s

différentiel

c) L'objet est au repos lorsque sa vitesse est nulle :
 $v(t) = 0 \Leftrightarrow 3(t-3)(t-7) = 0 \Leftrightarrow t = 3$ ou $t = 7$. Par conséquent, l'objet est au repos lorsque $t = 3$ s ou lorsque $t = 7$ s.

d) L'objet se déplace vers la droite lorsque sa vitesse est positive, soit lorsque $v(t) > 0$. Or,

$$\text{Si } t < 3, \text{ on a } 3 \underbrace{(t-3)}_{\text{négatif}} \underbrace{(t-7)}_{\text{négatif}} > 0$$

$$\text{Si } 3 < t < 7, \text{ on a } 3 \underbrace{(t-3)}_{\text{positif}} \underbrace{(t-7)}_{\text{négatif}} < 0$$

$$\text{Si } t > 7, \text{ on a } 3 \underbrace{(t-3)}_{\text{positif}} \underbrace{(t-7)}_{\text{positif}} > 0$$

Par conséquent, comme $t > 0$, la vitesse est positive sur les intervalles de temps $[0, 3[$ et $]7, \infty[$, de sorte que l'objet se déplace vers la droite sur ces intervalles de temps (exprimés en secondes).

e) L'objet se déplace vers la gauche lorsque sa vitesse est négative, soit lorsque $v(t) < 0$. On a déterminé en d) que $v(t) < 0$ si $3 < t < 7$.

Par conséquent, la vitesse est négative sur l'intervalle de temps $]3, 7[$, de sorte que l'objet se déplace vers la gauche sur cet intervalle de temps (exprimé en secondes).

f) On a $s(0) = 0^3 - 15(0^2) + 63(0) + 3 = 3$ m

$$s(3) = 3^3 - 15(3^2) + 63(3) + 3 = 84 \text{ m}$$

$$s(7) = 7^3 - 15(7^2) + 63(7) + 3 = 52 \text{ m}$$

$$s(10) = 10^3 - 15(10^2) + 63(10) + 3 = 133 \text{ m}$$

L'objet se déplace vers la droite durant les 3 premières secondes. L'objet change alors de direction et se déplace vers la gauche durant les 4 s qui suivent (entre $t = 3$ s et $t = 7$ s). Après 7 s, le mobile change à nouveau de direction et se déplace alors vers la droite. La distance totale parcourue pendant les 10 premières secondes est donnée par

$$\begin{aligned} \text{Distance totale} &= \underbrace{[s(3) - s(0)]}_{\text{distance parcourue sur } [0, 3]} + \underbrace{[s(3) - s(7)]}_{\text{distance parcourue sur } [3, 7]} + \underbrace{[s(10) - s(7)]}_{\text{distance parcourue sur } [7, 10]} \\ &= (84 - 3) + (84 - 52) + (133 - 52) \\ &= 194 \text{ m} \end{aligned}$$

différentiel

Question éclair 2.9

$$a) \quad g'(t) = \frac{d}{dt}(2\pi t + \sqrt{3}) = 2\pi$$

$$g''(t) = \frac{d}{dt}(2\pi) = 0$$

$$b) \quad f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^3 + x^2 - \frac{5}{4}x + 1\right) = \frac{3}{2}x^2 + 2x - \frac{5}{4}$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{3}{2}x^2 + 2x - \frac{5}{4}\right) = 3x + 2$$

Exercices 2.11

$$1. \quad a) \quad \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(x^6 - 2x^5 + 3x^4 + x^3 - 2x + 5) = 6x^5 - 10x^4 + 12x^3 + 3x^2 - 2$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(6x^5 - 10x^4 + 12x^3 + 3x^2 - 2) = 30x^4 - 40x^3 + 36x^2 + 6x$$

$$\frac{d^3f}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right) = \frac{d}{dx}(30x^4 - 40x^3 + 36x^2 + 6x) = 120x^3 - 120x^2 + 72x + 6$$

$$b) \quad \frac{dg}{dt} = \frac{d}{dt}(\sqrt{t}) = \frac{d}{dt}(t^{1/2}) = \frac{1}{2}t^{-1/2} \text{ ou } \frac{dg}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

$$\frac{d^2g}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dg}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}t^{-1/2}\right) = -\frac{1}{4}t^{-3/2} \text{ ou } \frac{d^2g}{dt^2} = -\frac{1}{4t^{3/2}}$$

$$\frac{d^3g}{dt^3} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^2g}{dt^2}\right) = \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{4}t^{-3/2}\right) = \frac{3}{8}t^{-5/2} \text{ ou } \frac{d^3g}{dt^3} = \frac{3}{8t^{5/2}}$$

$$c) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{-2}{x^3}\right) = \frac{d}{dx}(-2x^{-3}) = 6x^{-4} \text{ ou } \frac{dy}{dx} = \frac{6}{x^4}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(6x^{-4}) = -24x^{-5} \text{ ou } \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{24}{x^5}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d}{dx}(-24x^{-5}) = 120x^{-6} \text{ ou } \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{120}{x^6}$$

$$2. \quad a) \quad v(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(t^3 - 9t^2 + 24t) = (3t^2 - 18t + 24) \text{ m/s}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(3t^2 - 18t + 24) = (6t - 18) \text{ m/s}^2$$

$$b) \quad a(4) = 6(4) - 18 = 6 \text{ m/s}^2$$

différentiel

- c) La vitesse est décroissante lorsque l'accélération est négative, soit lorsque $6t - 18 < 0$, c'est-à-dire lorsque $t < 3$ s. Comme le temps ne peut être négatif, la vitesse est donc décroissante sur $[0, 3[$.
- d) La vitesse est croissante lorsque l'accélération est positive, soit lorsque $6t - 18 > 0$, c'est-à-dire lorsque $t > 3$ s. La vitesse est donc croissante sur $]3, \infty[$.
3. a) $C'(Q) = \frac{d}{dQ}(0,5Q^2 + 2Q + 8) = (Q + 2) \text{ \$/unité}$
- b) On ne considère que les valeurs de Q positives, de sorte que $C'(Q) = Q + 2 > 0$. Par conséquent, la fonction coût total de production est croissante.
- c) $C''(Q) = \frac{d}{dQ}\left(\frac{dC}{dQ}\right) = \frac{d}{dQ}(Q + 2) = 1 \text{ \$/unité}^2$
- d) Comme $C''(Q) = 1 > 0$ correspond à la dérivée du coût marginal, on peut en conclure que le coût marginal est toujours croissant. Par conséquent, le coût total de production augmente, et à un rythme de plus en plus rapide.

Exercices 2.12

1. a) $\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(3x^2 - 5x + 1)^{12}$
- $$= 12(3x^2 - 5x + 1)^{11} \frac{d}{dx}(3x^2 - 5x + 1)$$
- $$= 12(3x^2 - 5x + 1)^{11} (6x - 5)$$
- $$= 12(6x - 5)(3x^2 - 5x + 1)^{11}$$
- b) $\frac{dg}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{t^2 + 2}}\right)$
- $$= \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{(t^2 + 2)^{1/2}}\right]$$
- $$= \frac{d}{dt}(t^2 + 2)^{-1/2}$$
- $$= -\frac{1}{2}(t^2 + 2)^{-3/2} \frac{d}{dt}(t^2 + 2)$$

différentiel

$$= -\frac{1}{2}(t^2 + 2)^{-\frac{3}{2}}(2t)$$

$$= -\frac{t}{(t^2 + 2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \left[\sqrt[3]{(x^3 - 2x + 1)^5} \right] \\ &= \frac{d}{dx} (x^3 - 2x + 1)^{\frac{5}{3}} \\ &= \frac{5}{3}(x^3 - 2x + 1)^{\frac{2}{3}} \frac{d}{dx} (x^3 - 2x + 1) \\ &= \frac{5}{3}(x^3 - 2x + 1)^{\frac{2}{3}} (3x^2 - 2) \\ &= \frac{5}{3}(3x^2 - 2)(x^3 - 2x + 1)^{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \frac{dh}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{t^3 - 1}{4 - 3t} \right)^4 \\ &= 4 \left(\frac{t^3 - 1}{4 - 3t} \right)^3 \frac{d}{dt} \left(\frac{t^3 - 1}{4 - 3t} \right) \\ &= 4 \left(\frac{t^3 - 1}{4 - 3t} \right)^3 \left[\frac{(4 - 3t) \frac{d}{dt} (t^3 - 1) - (t^3 - 1) \frac{d}{dt} (4 - 3t)}{(4 - 3t)^2} \right] \\ &= 4 \left(\frac{t^3 - 1}{4 - 3t} \right)^3 \left[\frac{(4 - 3t)(3t^2) - (t^3 - 1)(-3)}{(4 - 3t)^2} \right] \\ &= 4 \frac{(t^3 - 1)^3}{(4 - 3t)^3} \left[\frac{12t^2 - 9t^3 + 3t^3 - 3}{(4 - 3t)^2} \right] \\ &= \frac{4(t^3 - 1)^3 (-6t^3 + 12t^2 - 3)}{(4 - 3t)^5} \\ &= \frac{-12(t^3 - 1)^3 (2t^3 - 4t^2 + 1)}{(4 - 3t)^5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \left[(6x^2 + 3)^2 (x^3 - 2)^3 \right] \\ &= (6x^2 + 3)^2 \frac{d}{dx} (x^3 - 2)^3 + (x^3 - 2)^3 \frac{d}{dx} (6x^2 + 3)^2 \\ &= (6x^2 + 3)^2 (3)(x^3 - 2)^2 \frac{d}{dx} (x^3 - 2) + (x^3 - 2)^3 (2)(6x^2 + 3) \frac{d}{dx} (6x^2 + 3) \\ &= 3(6x^2 + 3)^2 (x^3 - 2)^2 (3x^2) + 2(x^3 - 2)^3 (6x^2 + 3)(12x) \end{aligned}$$

différentiel

$$\begin{aligned}
 &= 9x^2(6x^2+3)^2(x^3-2)^2 + 24x(x^3-2)^3(6x^2+3) \\
 &= 3x(6x^2+3)(x^3-2)^2[3x(6x^2+3)+8(x^3-2)] \\
 &= 3x(6x^2+3)(x^3-2)^2(26x^3+9x-16)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f) \quad \frac{df}{dx} &= \frac{d}{dx} \left[\frac{(2x-1)^2}{(x^2+4)^3} \right] \\
 &= \frac{(x^2+4)^3 \frac{d}{dx}(2x-1)^2 - (2x-1)^2 \frac{d}{dx}(x^2+4)^3}{[(x^2+4)^3]^2} \\
 &= \frac{(x^2+4)^3(2)(2x-1) \frac{d}{dx}(2x-1) - (2x-1)^2(3)(x^2+4)^2 \frac{d}{dx}(x^2+4)}{(x^2+4)^6} \\
 &= \frac{2(x^2+4)^3(2x-1)(2) - 3(2x-1)^2(x^2+4)^2(2x)}{(x^2+4)^6} \\
 &= \frac{4(x^2+4)^3(2x-1) - 6x(2x-1)^2(x^2+4)^2}{(x^2+4)^6} \\
 &= \frac{2(x^2+4)^2(2x-1)[2(x^2+4) - 3x(2x-1)]}{(x^2+4)^6} \\
 &= \frac{2(2x-1)(-4x^2+3x+8)}{(x^2+4)^4}
 \end{aligned}$$

$$2. \quad a) \quad N(0) = 300 \left[10 - \frac{5}{(0^2+1)^2} \right] = 1500 \text{ bactéries.}$$

$$b) \quad N(2) = 300 \left[10 - \frac{5}{(2^2+1)^2} \right] = 2940 \text{ bactéries.}$$

$$c) \quad \text{On a } N(t) = 300 \left[10 - \frac{5}{(t^2+1)^2} \right] = 3000 - \frac{1500}{(t^2+1)^2}. \text{ Alors,}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \underbrace{\left[3000 - \frac{1500}{(t^2+1)^2} \right]}_{\text{forme } 3000 - \frac{1500}{\infty}} = 3000 - 0 = 3000 \text{ bactéries}$$

$$d) \quad \text{On a } N(t) = 300 \left[10 - \frac{5}{(t^2+1)^2} \right] = 3000 - \frac{1500}{(t^2+1)^2}. \text{ Alors,}$$

différentiel

$$\begin{aligned}
 N'(t) &= \frac{d}{dt} \left[3\,000 - \frac{1\,500}{(t^2 + 1)^2} \right] \\
 &= \frac{d}{dt} \left[3\,000 - 1\,500(t^2 + 1)^{-2} \right] \\
 &= 0 - 1\,500(-2)(t^2 + 1)^{-3} \frac{d}{dt}(t^2 + 1) \\
 &= \frac{3\,000}{(t^2 + 1)^3} (2t) \\
 &= \frac{6\,000t}{(t^2 + 1)^3} \text{ bactéries/h}
 \end{aligned}$$

e) Comme $t \geq 0$, on a $N'(t) \geq 0$ ($N'(t) = 0$ si et seulement si $t = 0$), de sorte que le taux de croissance de la population bactérienne est positif lorsque $t > 0$: la taille de la colonie bactérienne augmente avec le temps.

f)
$$N'(1) = \frac{6\,000(1)}{[(1)^2 + 1]^3} = 750 \text{ bactéries/h}$$

g) Après 1 h, le nombre de bactéries dans la boîte de Petri augmente à raison de 750 bactéries/heure.

h) La pente de la droite tangente à la courbe décrite par la fonction $N(t) = 300 \left[10 - \frac{5}{(t^2 + 1)^2} \right]$ en $t = 1$ est de 750.

i)
$$\begin{aligned}
 N''(t) &= \frac{d}{dt} \left[\frac{6\,000t}{(t^2 + 1)^3} \right] \\
 &= \frac{(t^2 + 1)^3 (6\,000) - 6\,000t(3)(t^2 + 1)^2 (2t)}{(t^2 + 1)^6} \\
 &= \frac{6\,000(t^2 + 1)^3 - 36\,000t^2(t^2 + 1)^2}{(t^2 + 1)^6} \\
 &= \frac{6\,000(t^2 + 1)^2 [(t^2 + 1) - 6t^2]}{(t^2 + 1)^6} \\
 &= \frac{6\,000(-5t^2 + 1)}{(t^2 + 1)^4} \text{ bactéries/h}^2
 \end{aligned}$$

j) Si $t > \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow t^2 > \frac{1}{5} \Rightarrow -5t^2 < -1 \Rightarrow -5t^2 + 1 < 0$, alors

$$N''(t) = \frac{\overbrace{6\,000}^{\text{positif}} \overbrace{(-5t^2 + 1)}^{\text{négatif}}}{\underbrace{(t^2 + 1)^4}_{\text{positif}}} < 0$$

de sorte que le taux de croissance de la population bactérienne diminue à compter de ce moment.

$$k) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} N'(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{6\,000t}{(t^2 + 1)^3} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{6\,000t}{t^6 (1 + \frac{1}{t^2})^3} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{6\,000}{t^5 (1 + \frac{1}{t^2})^3} = 0 \text{ bactérie/h}$$

l) Initialement, la population bactérienne comptait 1 500 individus. La taille de la population bactérienne augmente à raison de $\frac{6\,000t}{(t^2 + 1)^3}$ bactéries/h, un rythme

de croissance qui décroît à partir de $t = \frac{\sqrt{5}}{5}$ h, de sorte qu'à long terme, le taux de croissance de la population bactérienne devient nul et que le nombre de bactéries dans la boîte de Petri se stabilise à 3 000 individus.

Exercices 2.13

$$1. \quad \text{On a } \frac{dy}{du} = \frac{d}{du} \left(\frac{3}{u^2} \right) = \frac{d}{du} (3u^{-2}) = -6u^{-3} = -\frac{6}{u^3}$$

$$\frac{du}{dv} = \frac{d}{dv} (\sqrt{v} + 2) = \frac{1}{2} v^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{v}} \quad \text{et} \quad \frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx} (x^2 + 2) = 2x$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \left(\frac{dy}{du} \right) \left(\frac{du}{dv} \right) \left(\frac{dv}{dx} \right) \\ &= \left(-\frac{6}{u^3} \right) \left(\frac{1}{2\sqrt{v}} \right) (\cancel{2}x) \\ &= \left(-\frac{6}{(\sqrt{v} + 2)^3} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}} \right) (x) \\ &= \left(-\frac{6}{(\sqrt{x^2 + 2} + 2)^3} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}} \right) (x) \\ &= -\frac{6x}{(\sqrt{x^2 + 2} + 2)^3 \sqrt{x^2 + 2}} \end{aligned}$$

différentiel

2. Soit V le volume d'un ballon de rayon r . On a $V = \frac{4\pi}{3}r^3$, de sorte que

$$\frac{dV}{dt} = \left(\frac{dV}{dr} \right) \left(\frac{dr}{dt} \right) = \left[\frac{d}{dr} \left(\frac{4\pi}{3} r^3 \right) \right] \left(\frac{dr}{dt} \right) = \frac{4\pi}{3} (3r^2) \frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}. \quad \text{Par conséquent,}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dV}{dt}. \quad \text{Or, } \frac{dV}{dt} = -32, \text{ d'où } \left. \frac{dr}{dt} \right|_{r=2} = \frac{1}{4\pi(2^2)}(-32) = \frac{-32}{16\pi} = -\frac{2}{\pi} \text{ cm/s. À}$$

l'instant où le rayon du ballon est égal à 2 cm, il diminue à raison de $\frac{2}{\pi}$ cm/s.

Exercices 2.14

1. a) $x^2 + xy - 3x = 2 \Rightarrow xy = -x^2 + 3x + 2 \Rightarrow y = \frac{-x^2 + 3x + 2}{x} = -x + 3 + 2x^{-1}.$

Par conséquent,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(-x + 3 + 2x^{-1}) = -1 - 2x^{-2} = -1 - \frac{2}{x^2}$$

b) $x^2 + xy - 3x = 2 \Rightarrow \frac{d}{dx}(x^2 + xy - 3x) = \frac{d}{dx}(2)$

$$\Rightarrow 2x + \left(x \frac{dy}{dx} + y \frac{dx}{dx} \right) - 3 = 0$$

$$\Rightarrow x \frac{dy}{dx} = 3 - 2x - y$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3 - 2x - y}{x}$$

c) $\frac{3 - 2x - y}{x} = \frac{3 - 2x - (-x + 3 + 2x^{-1})}{x} = \frac{-x - 2x^{-1}}{x} = -1 - \frac{2}{x^2}$

2. a) $xy^2 + 3y = 4x \Rightarrow \frac{d}{dx}(xy^2 + 3y) = \frac{d}{dx}(4x)$

$$\Rightarrow x \frac{d}{dx}(y^2) + y^2 \frac{dx}{dx} + 3 \frac{dy}{dx} = 4 \frac{dx}{dx}$$

$$\Rightarrow x(2y) \frac{dy}{dx} + y^2 + 3 \frac{dy}{dx} = 4$$

$$\Rightarrow (2xy + 3) \frac{dy}{dx} = 4 - y^2$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{4 - y^2}{2xy + 3}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } xy + x^2 + 2y^3 &= 4 - 2y \Rightarrow \frac{d}{dx}(xy + x^2 + 2y^3) = \frac{d}{dx}(4 - 2y) \\ &\Rightarrow x \frac{dy}{dx} + y \frac{dx}{dx} + 2x + 2(3y^2) \frac{dy}{dx} = -2 \frac{dy}{dx} \\ &\Rightarrow x \frac{dy}{dx} + y + 2x + 6y^2 \frac{dy}{dx} = -2 \frac{dy}{dx} \\ &\Rightarrow x \frac{dy}{dx} + 6y^2 \frac{dy}{dx} + 2 \frac{dy}{dx} = -2x - y \\ &\Rightarrow (x + 6y^2 + 2) \frac{dy}{dx} = -(2x + y) \\ &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2x + y}{x + 6y^2 + 2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } x &= y\sqrt{y} - \frac{1}{y} = y^{3/2} - y^{-1}, \text{ de sorte que } \frac{dx}{dy} = \frac{3y^{1/2}}{2} + y^{-2} = \frac{3\sqrt{y}}{2} + \frac{1}{y^2} = \frac{3y^2\sqrt{y} + 2}{2y^2}, \\ \text{d'où, en vertu du théorème 2.11, } \frac{dy}{dx} &= \frac{2y^2}{3y^2\sqrt{y} + 2} = \frac{2y^2}{3y^{5/2} + 2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad x^{2/3} + y^{2/3} &= 4 \Rightarrow \frac{d}{dx}(x^{2/3} + y^{2/3}) = \frac{d}{dx}(4) \\ &\Rightarrow \frac{2}{3}x^{-1/3} + \frac{2}{3}y^{-1/3} \frac{dy}{dx} = 0 \\ &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{2}{3}x^{-1/3}}{\frac{2}{3}y^{-1/3}} = -\frac{x^{-1/3}}{y^{-1/3}} = -\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}} = -\left(\frac{y}{x}\right)^{1/3} \end{aligned}$$

Par conséquent, la pente de la droite tangente à la courbe décrite par l'équation $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$, au point $(1, -3\sqrt{3})$, est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} \Big|_{(1, -3\sqrt{3})} &= -\left(\frac{-3\sqrt{3}}{1}\right)^{1/3} = -(3^{3/2})^{1/3} = -\sqrt{3}. \text{ L'équation de la droite tangente est} \\ y &= \sqrt{3}(x - 1) - 3\sqrt{3} \text{ ou } y = \sqrt{3}x - 4\sqrt{3}. \end{aligned}$$