Construction of a demand function from a fuzzy utility function

Santiago Matallana

June, 2008

Abstract

This article studies the problem of constructing a demand function from a utility function that represents a fuzzy preference relation. It analyzes a possible solution to the problem solved by individuals whose logic is non-Boolean, that is, individuals whose preference relation is represented by a fuzzy utility function. It is showed that a fuzzy demand function corresponds to individuals who violate axioms such as nonsatiation and transitivity of the preference relation, characteristic of the orthodox theory. Seo's (1996) work on constructing a fuzzy utility function is the starting point of this investigation.

Key words: fuzzy preference relation, fuzzy utility function, fuzzy demand function, uncertainty.

Construcción de una función de demanda a partir de una función de utilidad difusa

Santiago Matallana*

Junio de 2008

Resumen

Este artículo estudia el problema de construcción de una función de demanda a partir de una función de utilidad que representa una relación de preferencia difusa. Se analiza una posible solución al problema resuelto por individuos cuya lógica es no booleana, es decir, individuos cuya relación de preferencia es representada por una función de utilidad difusa. Se muestra que una función de demanda difusa corresponde a individuos que violan axiomas como el de no-saciabilidad y transitividad de la relación de preferencia, propios de la construcción ortodoxa. El aporte de Seo (1995) en la construcción de una función de utilidad difusa es el punto de partida de la investigación.

Palabras clave: relación de preferencia difusa, función de utilidad difusa, función de demanda difusa, incertidumbre.

* Agradezco a mi director Arsenio Pecha por su inmensa colaboración y paciencia. Desde luego, cualquier omisión es responsabilidad exclusivamente mía. A los lectores, por favor enviar sus comentarios a santiago.matallana@gmail.com.

Tabla de contenido

Far better an approximate answer to the right question, which is often vague, than the exact answer to the wrong question, which can always be made precise. J. W. Tukey (1962)

I. Introducción

La microeconomía clásica está construida a partir de una relación primitiva de preferencia, empleando una lógica binaria del tipo preferir/no-preferir. Al utilizar esta lógica, la teoría exige a los individuos ser decisivos frente a sus alternativas; no se admite que presenten grados de preferencia entre sus posibles elecciones, sino que precisan declarar sus preferencias de forma completa y, de acuerdo a esto, se asignan a las posibilidades de elección valores únicos de verdad: 1 y 0. Construir la relación con lógica binaria implica que, al individuo manifestarse conforme con cierto estado, forzadamente se está declarando en oposición a otro. Sin embargo, la ambigüedad y la vaguedad están generalmente presentes en el acto de elegir. La indeterminación y la indecisión son rasgos característicos de la conducta de los individuos en situaciones de elección.

La manera en la que se define la relación de preferencia determina la racionalidad con la que se dota a los individuos. Partiendo de una lógica binaria, la racionalidad maximizadora es unívoca porque ésta se expresa a través de la transitividad de la relación de preferencia; si la lógica es binaria, existe sólo una noción de transitividad de la relación. Si la relación primitiva se construye a partir de una lógica difusa[1], el axioma de transitividad puede interpretarse de diversas maneras y, en consecuencia, también la condición de racionalidad [Pecha y Villamil (2002)].

Algunas investigaciones que han abordado problemas de elección han mostrado que, en general, las soluciones que se obtienen cuando se construyen reglas de elección borrosas, tanto individuales como agregadas, son más consistentes con la conducta real de los individuos. Muestran que la racionalidad maximizadora, derivada de la condición de transitividad de la microeconomía clásica, es una condición fuerte que se viola sistemáticamente [Pecha y Villamil (2002); Pattanaik (1997)].

De forma más general, en las últimas cuatro décadas de investigación se ha generado un consenso sobre la idea de que una lógica basada en dos valores de verdad, *verdadero* y *falso*, es en ocasiones inadecuada para describir la manera en que los individuos razonan y actúan.

El objetivo de este trabajo es utilizar lógica difusa como herramienta alternativa para un problema particular de la teoría clásica del consumidor, con la pretensión de aportar soluciones diferentes que enriquezcan la manera en la que se entiende la

[1] Ver, por ejemplo, Orlovski (1978); Dutta, Panda y Pattanaik (1986); Gwét (2000); y Herrera-Viedma, Herrera, Chiclana y Luque (2004).

racionalidad del individuo y el aspecto microeconómico fundamental: el acto de elegir.

En un primer enfoque, la teoría clásica del consumidor parte de una relación de preferencia sobre un conjunto de elección y asume que dicha relación satisface ciertos axiomas de racionalidad. Esta metodología permite determinar que si una función de demanda es generada por preferencias racionales, entonces cumple ciertas propiedades. Un segundo enfoque parte de analizar observaciones del comportamiento del individuo al elegir e impone restricciones de consistencia sobre las elecciones, trazando una equivalencia frente a los axiomas de racionalidad. De esta manera, si una función de demanda cumple ciertas propiedades, entonces es posible encontrar unas preferencias que la racionalicen.

El presente trabajo está guiado por el primero de los enfoques descritos. El problema particular estudiado es el de la construcción de una función de demanda a partir de una función de utilidad que representa una relación de preferencia difusa. Es decir, se pretende analizar el problema que enfrentan individuos cuando la lógica de la cual se parte es no booleana, caso en el cual la función de utilidad es difusa. En su estudio sobre la toma de decisiones colectivas, Seo (1995) construye funciones de utilidad difusas tanto individuales como grupales. El primer tipo será el principal punto de referencia de la presente investigación.

El artículo está dividido de la siguiente forma. En la sección 1 se hace una breve introducción a la lógica difusa, con el objetivo de establecer las principales herramientas analíticas con las que se aborda el problema y explicitar así su pertinencia. Al final de la sección se presenta el *principio de extensión*, teorema fundamental para extender conceptos no borrosos al mundo de la lógica borrosa. La sección 2 presenta el problema de construcción de una función de utilidad difusa, en contraposición al análisis ortodoxo de la incertidumbre, y analiza el fundamento teórico del modelo difuso, aplicando inicialmente un ejemplo ilustrativo del principio de extensión y posteriormente presentando una síntesis del procedimiento empleado por Seo. En la sección 3 se construye, a partir del trabajo de Seo, una función de demanda difusa general y se compara con una función de demanda clásica. En la sección 4 se concluye.

1. Introducción a la lógica difusa

La lógica booleana asigna a sus proposiciones sólo dos valores de verdad. Así, un objeto puede únicamente o pertenecer o no pertenecer a determinado conjunto. Por ejemplo, la estatura de una persona determina si ésta es o no elemento del conjunto de personas altas. Si lo es, esta persona no puede considerarse, simultáneamente, perteneciente al conjunto de personas bajas. De la misma manera, si se acepta a una persona como adulta, ésta ya no puede ser considerada como joven. Esta condición, propia de la teoría clásica de conjuntos, impide tratar de manera formal información imprecisa y conceptos vagos, como *estatura media*, *temperatura media*, *muy pesado* o *mucho movimiento*.

La lógica difusa o borrosa, cuyo desarrollo se inicia en la década de 1960 [Zadeh (1965)], surge como herramienta para "abordar tareas como las denominadas del *mundo real*, donde la información se presenta masiva, imprecisa y distorsionada" [Martín y Sanz (2002, xv)]. A diferencia de la lógica booleana, que asigna el valor *verdadero* al número 1 y el valor *falso* al 0, la lógica difusa trabaja con el intervalo cerrado [0,1], donde los números reales entre el 0 y el 1 indican *grados de pertenencia*. Así, mientras la lógica booleana expresa todas sus proposiciones en términos binarios, la lógica difusa reemplaza los valores de verdad por *grados de verdad*.

Ejemplo 1

Sea X el conjunto cerrado de los números reales entre 0 y 20, que se denominará *universo de discurso*, y A en X el conjunto cerrado de los números reales entre 7 y 15. Tenemos $X = [0, 20]$ y $A = [7, 15]$.

La función característica de A, $\mu_A : X \to \{0,1\}$, asigna a cada $x \in X$ un número $\mu_A(x) \in \{0,1\}$, tal que $\mu_A(x) = 0$ significa que $x \in X$ no pertenece al conjunto A, y $\mu_A(x) = 1$ significa que ese x sí pertenece al conjunto A. La representación de A mediante su función característica es

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x \in [7,15] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{1.1}$$

Gráficamente,

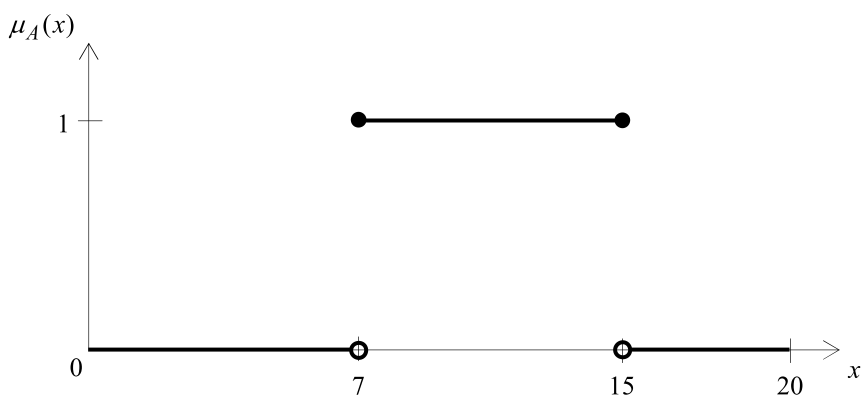


Figura 1: Función de pertenencia ejemplo 1 (lógica binaria)

Los elementos de X que tienen asignado el número 1 pertenecen entonces al conjunto A; los que tienen asignado el 0 son elementos que no pertenecen a A. Nótese que ningún $x \in X$ tiene la característica de pertenecer y no pertenecer, a la vez, al conjunto A. En este primer caso la lógica empleada es booleana.

Ejemplo 2

Sea Y el conjunto de todas las personas (universo de discurso). Y sea B el conjunto de personas adultas. Parece razonable definir como personas adultas a todas aquellas cuya edad esté entre los 30 y 40 años. En términos binarios podría afirmarse que una persona que recién ha cumplido 41 años ha dejado de ser adulta para convertirse, por ejemplo, en anciana. Asimismo, una persona que esté muy cerca de llegar a los treinta no podrá ser considerada como adulta; deberá incluirse, por ejemplo, en el conjunto de personas jóvenes. En ese sentido, parece plausible incluir completamente a ciertas personas en el conjunto B, pero a otras sólo en cierto grado. Si bien es cierto que una persona de 24 años puede no considerarse adulta, también resulta exagerado excluirla del todo de esa categoría.

Así las cosas, considérese un equivalente de la función característica del caso anterior, que represente el grado en el cual una persona $y \in Y$ pertenece al conjunto de personas adultas B.

Sea $\mu_B : Y \rightarrow [0,1]$ la *función de pertenencia* de *B* que indica el grado en el que $y \in Y$ pertenece al conjunto borroso *B*. La función μ_B asigna a cada $y \in Y$ un número $\mu_B(y) \in [0,1]$, tal que $\mu_B(y) = 0$ significa que $y \in Y$ no pertenece al conjunto de personas adultas y $\mu_B(y) = 1$ significa que ese y sí pertenece. Si $\mu_B(y) = 0,2$, por ejemplo, entonces ese *y* corresponde a una persona que apenas está entrando a formar parte del conjunto de personas adultas.

Gráficamente esta situación puede ser representada de la siguiente manera.

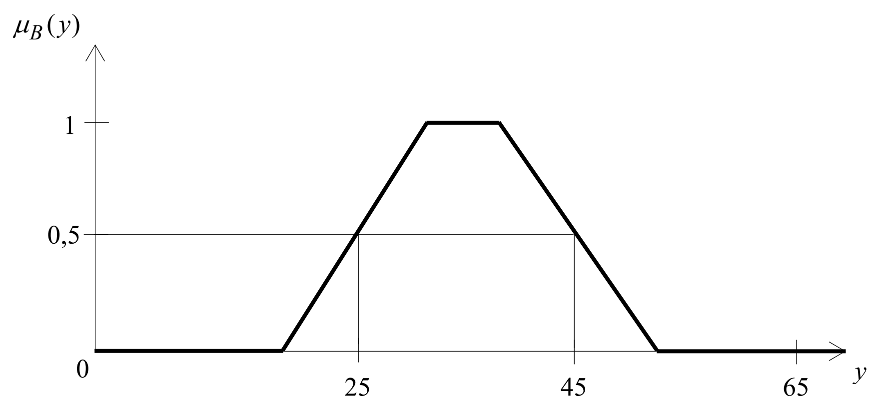


Figura 2: Función de pertenencia ejemplo 2 (lógica difusa)

En este caso, la regla que asigna elementos al conjunto no es binaria; el conjunto es, como ya se dijo, borroso. La gráfica muestra claramente que aun cuando algunas personas, según su edad, se excluyen del conjunto de personas adultas y otras, por la misma razón, se incluyen, otras se consideran pertenecientes al conjunto sólo en cierto grado. Según esta representación arbitraria podría decirse, por ejemplo, que las personas de 25 y 45 años de edad son personas 50% adultas.

Es importante notar la distinción entre lógica difusa y probabilidad. Si bien las dos operan sobre el mismo intervalo numérico y los valores extremos (0 y 1) tienen la misma representación[1], implican ideas claramente diferentes. El anterior ejemplo, visto de manera probabilística, implicaría que una persona de 25 años de edad tiene un "chance" de 50% de ser adulta, mientras que empleando lógica difusa implica que una persona de 25 años tiene un grado de pertenencia al conjunto de personas adultas de 0,5. La diferencia es significativa: la primera aproximación supone que la persona es o no es adulta (tiene cierto "chance" de serlo); la segunda supone que la persona sí es adulta, pero en cierto grado, es decir, supone que la persona es más o menos adulta. No deben confundirse lógica difusa y probabilidad; de hecho, la teoría probabilística está basada en la lógica aristotélica. La lógica difusa no trata el problema de la probabilidad de que un elemento pertenezca a un conjunto; permite transiciones graduales desde la pertenencia hacia la no-pertenencia, y viceversa.

Abundan ejemplos de "situaciones de la vida real", o de problemas ambiguos, que de alguna manera justifican la utilización de lógica no binaria. Por mencionar sólo algunos:

[1] Tanto en probabilidad como en lógica difusa el 0 implica la no pertenencia de un elemento a un conjunto y el 1 la pertenencia "completa" o "con toda seguridad" a un conjunto.

1. Supóngase que los sabores de la comida pueden reducirse a cuatro; el dulce, el salado, el amargo y el ácido. La afirmación “el sabor del postre de limón pertenece al conjunto dulce y al conjunto ácido, y no pertenece al conjunto salado ni al conjunto amargo” no sería muy realista. Sería más acertado afirmar, por ejemplo, que “el postre es muy dulce y algo ácido, definitivamente no salado, pero sí un poco amargo”.

2. Una casa tiene sólo dos habitaciones. Para la mayoría de ubicaciones de una persona dentro de la casa, es acertado afirmar que la persona se encuentra en una de las habitaciones y no en la otra. Si se encuentra en el umbral de la puerta que separa las dos habitaciones, la afirmación “la persona ni se encuentra en una habitación, ni se encuentra en la otra” no sería la más indicada. Tampoco sería acertado “se encuentra en la primera habitación con una probabilidad de 40% y en la segunda con una probabilidad de 60%”. Mucho mejor afirmar que “la persona se encuentra parcialmente en cada habitación”.

3. ¿Cómo definir el conjunto de los números reales *cercanos* a cero? ¿Es $[-1,1]$ el conjunto que define los números reales cercanos a cero? ¿Lo es el conjunto $(-2,2)$? ¿O es mejor respuesta $[-0.999, 0.001]$? No hay respuesta correcta a la pregunta; la pregunta es vaga. Si la respuesta se fundamenta en lógica binaria, se acepta arbitrariamente que algunos números reales no son cercanos a cero mientras que otros sí lo son. ¿No sería más acertado plantear que todos los

números reales son cercanos a cero, pero que unos lo son más que otros? Si todos los números reales son, en cierto grado, cercanos a cero, la siguiente función de pertenencia sería, por ejemplo, una respuesta "más correcta" a la pregunta.

$$\mu_A(x) = \frac{1}{1+x^2}, \tag{1.2}$$

donde A es el conjunto difuso "número real cercano a cero" y $x \in \mathbb{R}$.

Gráficamente,

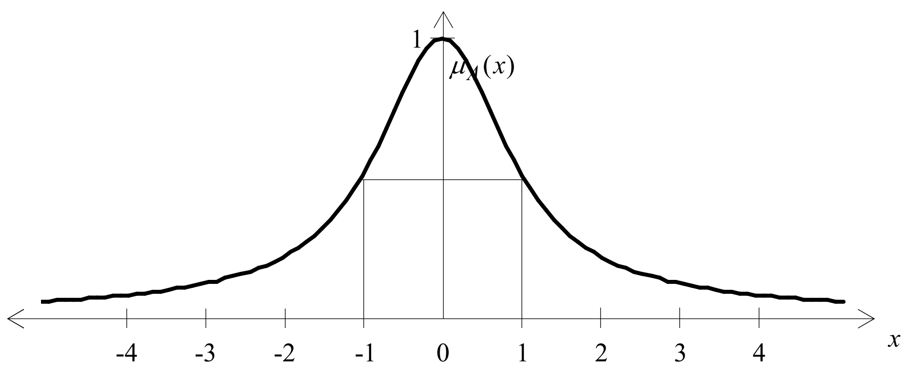


Figura 3: Función de pertenencia ejemplo "números reales cercanos a cero"

1.1. Números difusos triangulares

Los conjuntos difusos, como los presentados en las figuras 2 y 3, se denominan también *números difusos*. Existen varios tipos de números difusos (triangulares, trapezoidales, de campana, entre otros), de los cuales los números triangulares son los más utilizados porque simplifican enormemente ciertos procedimientos. Vale la pena definirlos, en esta introducción, pues se utilizarán en las siguientes secciones.

Un número difuso triangular es representado con tres elementos así: $A=(a_1/a_2/a_3)$. Su función de pertenencia es:[2]

$$\mu_A(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<a_1 \\ \dfrac{x-a_1}{a_2-a_1} & \text{si} \quad a_1\le x\le a_2 \\ \dfrac{a_3-x}{a_3-a_2} & \text{si} \quad a_2\le x\le a_3 \\ 0 & \text{si} \quad x>a_3. \end{cases} \tag{1.3}$$

En adelante, la representación del conjunto difuso A será, para el caso discreto $A=\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\mu_A(x_i)}{x_i}$ y para el caso continuo $A=\int\left(\mu_A(x)\right)/x$.[3]

1.2. El Principio de Extensión de Zadeh

El estudio de conjuntos difusos ha probado ser pertinente como herramienta para el análisis de ciertos problemas en ingeniería, finanzas, informática, entre otras

[2] Lee (2005, 137).
[3] Nótese que la sumatoria, aplicada a elementos de conjuntos difusos, denota unión y no suma.

disciplinas[4]. Uno de los primeros problemas que deben ser resueltos para poder aplicar esta herramienta es cómo extender conceptos no borrosos al mundo de la lógica borrosa. El *principio de extensión* se presenta como respuesta a este interrogante.

Sea $h:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ una función no-difusa, $z=h(x)$ para $x\in[a,b]$ y $z\in\mathbb{R}$. Y sea $H\left(\overline{X}\right)=\overline{Z}$ una función difusa con una variable independiente $\overline{X}$ e imagen $\overline{Z}$.[5] Toda $h:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ puede extenderse a $H\left(\overline{X}\right)=\overline{Z}$ así:

$$\overline{Z}(z)=\sup_{x}\left\{\overline{X}(x)\mid h(x)=z,\ a\leq x\leq b\right\}. \tag{1.4}$$

Esta ecuación define la función de pertenencia de $\overline{Z}$ para cualquier número triangular $\overline{X}$ en $[a,b]$. [Buckley, Eslami y Feuring (2002, 13)].[6]

[4] Para una bibliografía completa ver Martín y Sanz (2002).
[5] Generalmente la variable independiente y la imagen de la función difusa son números triangulares.
[6] Para otras definiciones ver, por ejemplo, Lee (2005, 81) o Martín y Sanz (2002, 258).

2. Función de utilidad difusa

2.1. Incertidumbre clásica

El análisis probabilístico de la utilidad, basado en el teorema de la utilidad esperada (UE) de von Neumann y Morgenstern (1944), ha sido el enfoque tradicional en el estudio de la elección bajo incertidumbre. En dos puntos puede resumirse la hipótesis de la UE:

i) $x_s \succsim x_r \Leftrightarrow u\left(x_s\right) \geq u\left(x_r\right)$, y (2.1)

ii) $UE = \sum_{i=1}^{n} p_i u\left(c_i\right) = u\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\left(c_i\right)\right)$, (3.1)

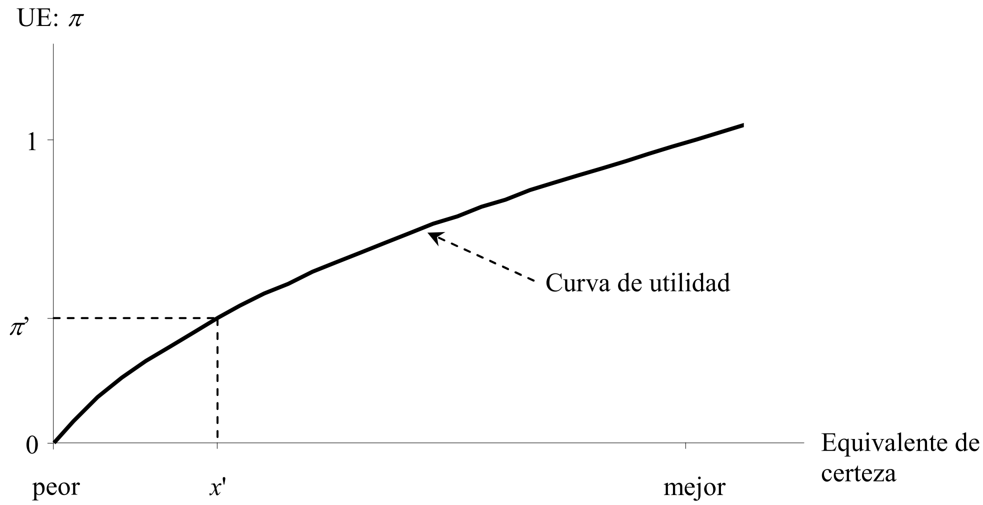
donde $\succsim$ denota una relación de preferencia completa[7] y transitiva[8] definida sobre el conjunto de elección *X*, $u(\cdot)$ es una función de utilidad que representa a $\succsim$ y p_i es la probabilidad asociada al resultado c_i ($i = 1 \ldots n$) de la lotería *x*.

Utilizando como referente el equivalente de certeza, es posible construir una función de utilidad así:

---

[7] Para todo $x, y \in X$ se tiene $\left(x \succsim y\right) \vee \left(y \succsim x\right)$.

[8] Para todo $x, y, z \in X$, si $\left(x \succsim y\right) \wedge \left(y \succsim z\right) \Rightarrow x \succsim z$.



Valor de la utilidad esperada (UE): π
$U(x) \equiv \pi$

Figura 4: Función de utilidad esperada

Aunque las probabilidades representan la creencia de los individuos sobre la ocurrencia de un evento, dado un estado de la naturaleza, los supuestos sobre la racionalidad de los individuos son los mismos que en situaciones de certidumbre. Aquí, la incertidumbre se da sobre el "chance" de ocurrencia de eventos posibles, no sobre la relación de preferencia de los individuos. Sin embargo, en entornos realistas de decisión, las preferencias humanas no se presentan unívocas, sino relativas. Investigaciones empíricas, como las realizadas por Kahneman y Tversky (1979), contradicen de distintas maneras la hipótesis de la UE y sugieren que el problema de las preferencias de los individuos debería tratarse como "un problema de grado"[9] [Seo (1995, 212)].

[9] La lógica binaria es inapropiada para analizar las preferencias de los individuos.

Utilizando lógica no-binaria es posible incorporar incertidumbre al problema de elección, partiendo de la ambigüedad de la relación de preferencia y por lo tanto de la función de utilidad; no de las probabilidades inciertas de ocurrencia de algunos eventos.

En las siguientes secciones se estudia el problema de construcción de una función de utilidad difusa (FUD), tomando como referencia el principio de extensión y presentando el trabajo de Seo (1995). La FUD, según la premisa metodológica de este trabajo, es el punto de partida en el estudio de la función de demanda difusa.

2.2. Aplicación del principio de extensión. Un ejemplo

El siguiente ejemplo ilustra el procedimiento de construcción de una FUD, al aplicar el principio de extensión a una función no-difusa bastante simple, que propaga la borrosidad de una variable difusa (de la variable independiente a la dependiente).

Sea B el número difuso $(2/7/9)$ definido sobre el universo de discurso *X*. La representación gráfica de este número triangular es:

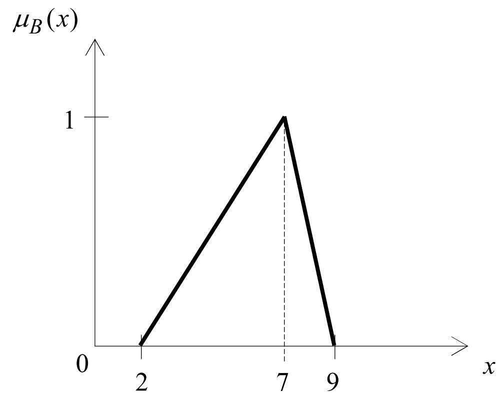


Figura 5: aplicación del principio de extensión (número triangular)

Sean $f(x) = x^{1/2}$ y $z = f(x)$ tal que $f:[0,10] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \in [0,10]$ y $z \in \mathbb{R}$.

La siguiente gráfica ilustra el conjunto difuso (número difuso en este caso) B y la función no-difusa $f(x)$ que propagará la borrosidad de la variable independiente a la dependiente.

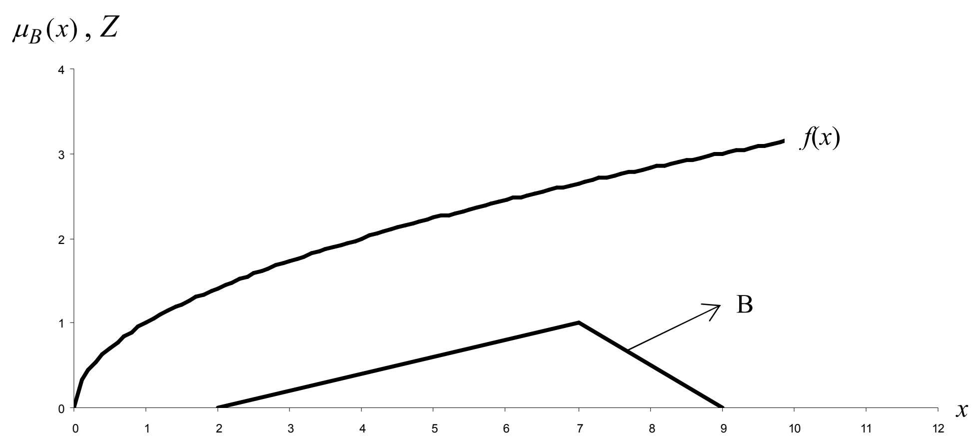


Figura 6: aplicación del p. de extensión (número triangular y función no-difusa)

En general, el grado de pertenencia de $x \in X$ a B está representado por $B = \int (\mu_B(x))/x$. Una aproximación discreta es un método válido de solución del problema de extensión. Es decir, considérese el número difuso $(2/7/9)$ como equivalente, por ejemplo, al número

$$B = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_B(x_i)}{x_i},\ i = (2,3,\ldots,9). \tag{3.2}$$

Entonces,

$$B = \left\{ \frac{0}{2} + \frac{0,2}{3} + \frac{0,4}{4} + \frac{0,6}{5} + \frac{0,8}{6} + \frac{1}{7} + \frac{0,5}{8} + \frac{0}{9} \right\} \tag{3.3}$$

denota la pertenencia de cada elemento del conjunto $[2,9] \in \mathbb{Z}$ al conjunto *B*.[10]

Según el principio de extensión, la imagen de *x* es igual a

$$Z\left(x^{1/2}\right) = \sup_{x} \left\{ X(x) \mid h(x) = x^{1/2}, x \in [0,10] \right\}. \tag{3.4}$$

Entonces los elementos de *Z*, por aproximación discreta, son:

[10] Es importante recordar que el símbolo "+" implica unión, no adición (ver sección 1.1).

x_i	$\mu_B(x_i)$	$Z(x_i)$
2	0	1,4142
3	0,2	1,7321
4	0,4	2
5	0,6	2,2361
6	0,8	2,4495
7	1	2,6458
8	0,5	2,8284
9	0	3

Figura 7: aplicación del principio de extensión (aproximación discreta)

Gráficamente, la imagen de B bajo $f(x)$ es:

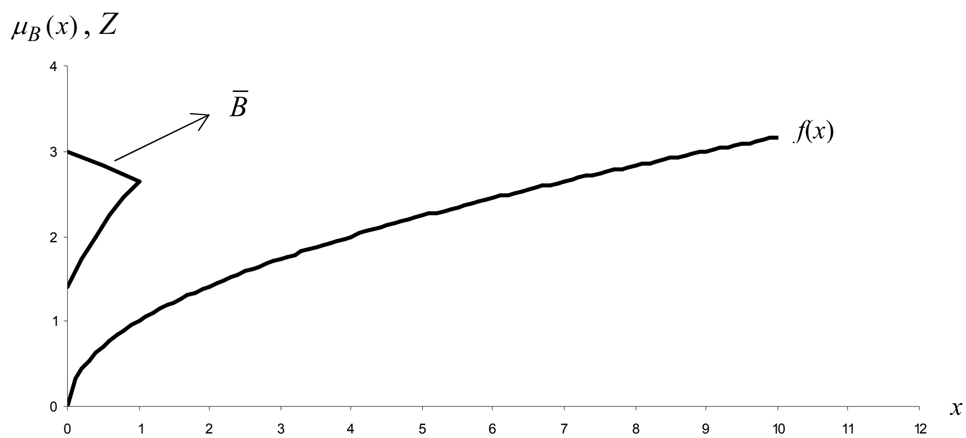


Figura 8: aplicación del principio de extensión (imagen)

Así, se tiene la imagen de una variable difusa, cuya borrosidad es propagada por una función no-difusa.

2.3. Construcción de una función[11] de utilidad difusa

Seo (1995) construye una FUD general, considerando el equivalente difuso de la lotería probabilística de la microeconomía clásica. Este se construye con una *medida de posibilidad* o distribución de posibilidad $\prod$, que resulta conveniente por su similitud con los números difusos.

El ejemplo anterior es ilustrativo para el procedimiento empleado por Seo. El autor construye la FUD propagando la borrosidad de su “número triangular” (medida de posibilidad) a partir de una función cuasicóncava estricta.

La expresión

$$\prod_G = \left\{ \frac{\pi_G(u_1)}{u_1} + \frac{\pi_G(u_2)}{u_2} + \cdots + \frac{\pi_G(u_n)}{u_n} \right\} \tag{3.5}$$

denota un conjunto de posibilidades en términos del conjunto difuso G[12] (compáresela con la ecuación (3.3)).

Seo (1995) muestra que si u es un valor de utilidad para un valor x^o de un atributo x, entonces la FUD, $\tilde{u}(x)$, está definida con la función de pertenencia así:[13]

[11] Se le llama *función* en la teoría de conjuntos difusos; desde la perspectiva clásica debe entenderse como correspondencia.

[12] Este conjunto se define arbitrariamente; su significado se explica al analizar la figura 10 (página 19).

$$\tilde{u}(x) = \left\{ \frac{\mu_G(u_1)}{u_1(x^o)} + \frac{\mu_G(u_2)}{u_2(x^o)} + \cdots + \frac{\mu_G(u_n)}{u_n(x^o)} \right\}. \qquad (3.6)$$

Compárese la anterior expresión con la ecuación (2.2) de la UE. La ecuación (2.7) representa una diversificación de la evaluación de utilidad $u(x^o)$ para un valor de un atributo, mientras que la ecuación (2.2) representa una diversificación de la utilidad asignada a diferentes posibles consecuencias de acuerdo a los eventos ocurridos. La diferencia es notable. Naturalmente, surge la pregunta sobre el significado de la *diversificación de la evaluación de utilidad* $u(x^o)$.[14] A la luz del paradigma de la microeconomía clásica, no tiene sentido que un individuo racional vea representadas sus preferencias por una "función" que asigna muchos niveles de utilidad a un mismo atributo. Sin embargo en la FUD la *cuasi-lotería* refleja la ambigüedad de la relación de preferencia difusa. Es decir, la *diversificación de la evaluación de utilidad* $u(x^0)$ representa la respuesta ambigua del individuo a un problema de elección ambiguo.

La representación gráfica de la FUD de la ecuación (2.7) es:[15]

[13] Por definición, $\pi_U(u) = \mu_G(u)$.

[14] A esta diversificación de la utilidad se le conoce como *cuasi-lotería* o *lotería difusa*, en analogía a la lotería probabilística de la teoría de la utilidad esperada.

[15] Compáresela con la figura 8.

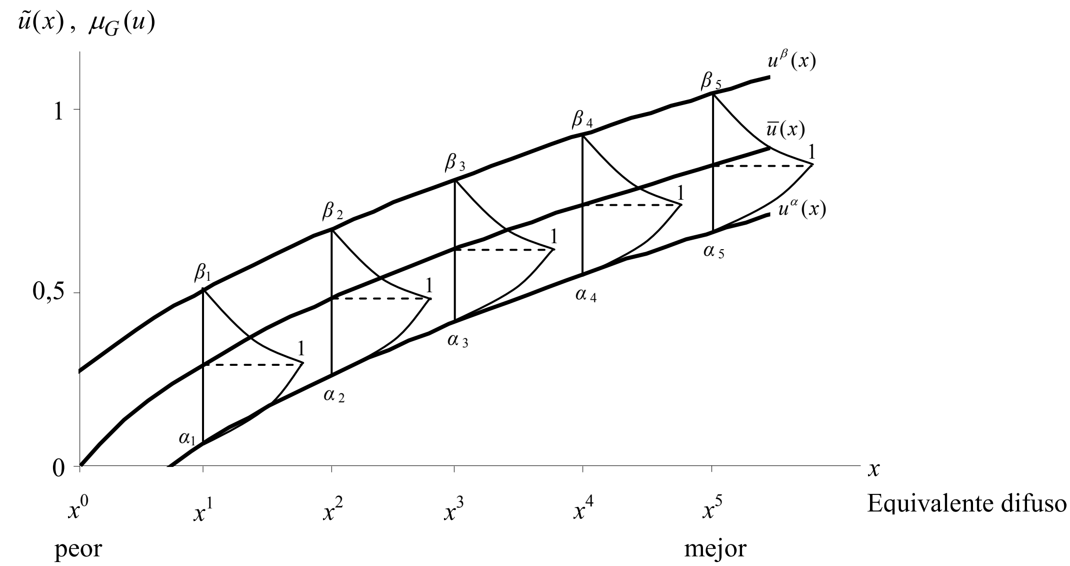


Figura 9: Función de utilidad difusa

A cada posibilidad corresponde, entonces, una preferencia sobre el mismo intervalo:

$$\begin{array}{ccc} \text{Posibilidad} & & \text{Preferencia} \\ \dfrac{\pi_U(u_1)}{u_1(x)} & \rightarrow & [0,1] \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\pi_U(u_n)}{u_n(x)} & \rightarrow & [0,1] \end{array} \tag{3.7}$$

La gráfica muestra que para un atributo x_i, la FUD se construye como la extensión de un número triangular [ver Seo (1995)], de manera similar a como se aplicó el principio de extensión de Zadeh en el ejemplo de la sección 2.2. Es decir,

$$\tilde{u}(x_i) \equiv \left(u^{\alpha}, \overline{u}, u^{\beta}\right) \equiv \left\{\left(u^{\alpha}\left(x_i^{o}\right), \overline{u}\left(x_i^{o}\right), u^{\beta}\left(x_i^{o}\right)\right)\right\}, \tag{3.8}$$

donde o denota un valor específico de un atributo x_i, $\overline{u}$ es el "valor promedio" de la utilidad difusa, y u^{α} y u^{β} son sus cotas izquierda y derecha respectivamente.

Considérese ahora la gráfica de la función de pertenencia de los valores de utilidad para un valor específico x^o, es decir, un corte transversal de la gráfica de la figura 9.

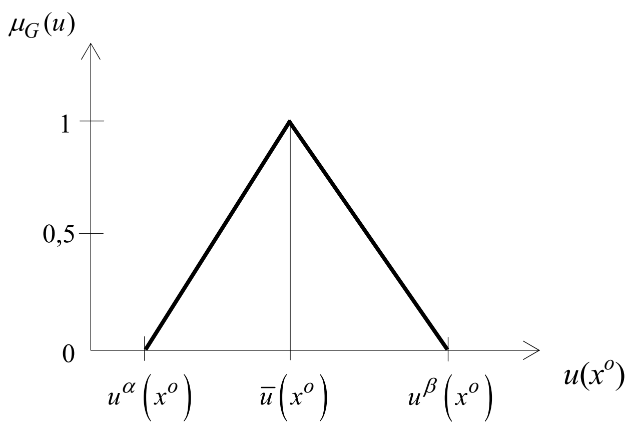


Figura 10: Función de pertenencia para un valor específico en la FUD

Esta figura, que no es otra cosa que un número difuso triangular, aclara la ya mencionada *diversificación de la evaluación de utilidad*. El conjunto difuso G se utiliza como predicado (o restricción) sobre u, y representa el conjunto de posibilidad de los valores intrínsecos de utilidad del individuo. Es decir, el conjunto G se define para acotar las evaluaciones de utilidad. Si el individuo no tiene *valores intrínsecos de utilidad*, cualquier atributo le generaría infinitos valores de utilidad y éste sería un conjunto no acotado.

Nótese que la FUD corresponde a individuos que no son racionales en sentido clásico. La relación de preferencia representada por la FUD no es transitiva; al menos no como lo es la relación de preferencia binaria. Consideremos por ejemplo un individuo que, de acuerdo a la figura 9, debe elegir entre los valores x^2, x^3 y x^4 del atributo x. Tenemos $u^\beta\left(x^2\right) > u^\beta\left(x^3\right) > u^\beta\left(x^4\right)$, $\bar{u}\left(x^2\right) > \bar{u}\left(x^3\right) > \bar{u}\left(x^4\right)$ y $u^\alpha\left(x^2\right) > u^\alpha\left(x^3\right) > u^\alpha\left(x^4\right)$. La transitividad de la relación de preferencia, expresada en términos de la utilidad, existe cuando se comparan las cotas inferiores y superiores o los valores promedio.[16] Sin embargo, dada la forma de la FUD, la transitividad no se satisface para todos los valores de $u \in G$. En resumen, la diversificación de la evaluación de la utilidad en la FUD implica que los individuos pueden ser inconsistentes en sus elecciones; los individuos pueden "cometer errores".

A continuación se estudia el problema de maximización de la utilidad cuando ésta es de la forma descrita en la ecuación (2.7), y se analiza la "función" de demanda resultante.

[16] La transitividad no sólo existe para esos casos. En general, existe cuando se comparan $u^{\alpha+\varepsilon}\left(x^1\right), u^{\alpha+\delta}\left(x^2\right), u^{\alpha+\phi}\left(x^3\right)$ tal que $0 \le \varepsilon \le \delta \le \phi \le \beta - \alpha$.

3. Función de demanda difusa

3.1. Función de demanda clásica

El problema de maximización de la utilidad (PMU) se resume así:

$$\begin{aligned} \max_{x \geq \mathbb{R}^L_+} \quad & u(x) \\ s.a. \quad & p \cdot x \leq m, \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde $\mathbb{R}^L_+$ es el conjunto de consumo y $p \in \mathbb{R}^L_+$ es el precio de las L mercancías. Si se define el conjunto presupuestal como $B(p,m) = \left\{ x \in \mathbb{R}^L_+ \mid p \cdot x \leq m \right\}$, entonces la función/correspondencia de demanda marshalliana es

$$x(p,m) = \arg \max_{x \in B(p,m)} u(x) \tag{3.2}$$

y arroja el conjunto óptimo de planes de consumo para cada par (p,m). Si la relación de preferencia representada por $u(x)$ es estrictamente convexa, entonces $x(p,m)$ es un conjunto unitario; el plan que maximiza es único.

3.2. Construcción de la función de demanda difusa

Ahora, si $u(x)$ es una "función" como la representada en la ecuación (2.7), entonces que $\overline{u}(x)$, $u^{\alpha}(x)$ y $u^{\beta}(x)$ sean cuasicóncavas estrictas[17] no implica que $x(p,m)$ sea unitario. Esto, simplemente, porque $\tilde{u}(x)$ no es una función de utilidad clásica. Es, mejor, un continuo de funciones de utilidad clásicas formado por una sucesión de números triangulares.

Lo anterior implica que cuando $u(x)=\tilde{u}(x)$, resolver el PMU corresponde a resolver un problema de optimización difusa. En este caso particular, un problema con restricción no-difusa y borrosidad de la función objetivo. Esta clase de problema, en el caso lineal, puede representarse de manera general así:[18]

$$\begin{aligned} \max \quad & z=\tilde{c}^{T}x \\ & \text{s.a.} \quad Ax \le b \\ & \qquad\;\; x \ge 0, \end{aligned} \tag{3.3}$$

donde $\tilde{c}=\left(\tilde{c}_1 \ldots \tilde{c}_n\right)$ es un vector n-dimensional de números difusos $\tilde{c}_j$ caracterizados por su función de membresía μ_j.

[17] Suponiendo que consideramos $\overline{u}(x)$, $u^{\alpha}(x)$ y $u^{\beta}(x)$ como funciones no-difusas independientes.
[18] Ver Báez (2002).

Existen varios métodos de solución al problema (3.3) [Báez (2002, 43)] y todos son métodos de comparación de números difusos: una *función ordenadora* se construye para comparar los números difusos en $\tilde{c}$ y así poder hallar el más grande.

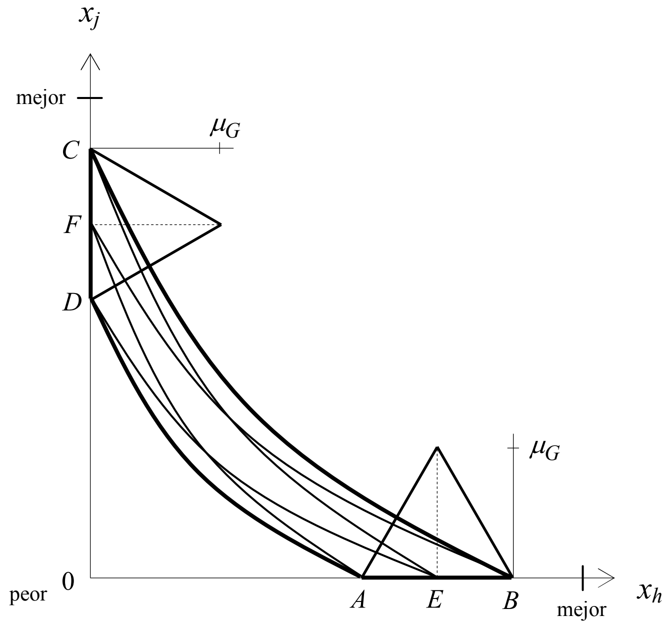
Aunque la FUD (función objetivo) es precisamente una sucesión de números triangulares, ninguno de esos conjuntos difusos es más grande que otro.[19] La diversificación de la evaluación de utilidad se asume idéntica para todo valor específico de x_i y lo que se considera fundamental es que los números triangulares incorporan la idea de vaguedad a la relación de preferencia del individuo. Pero si bien todos los números triangulares son iguales, los niveles de utilidad que representan no lo son. En ese sentido, el PMU puede resolverse aplicando el algoritmo de solución clásico para $u^{\alpha}(x)$, por ejemplo, y extendiendo la solución a $u^{\beta}(x)$. Si los números triangulares se asumen iguales, esto es equivalente a maximizar todas las funciones desde $u^{\alpha}(x)$ hasta $u^{\beta}(x)$, sujetas a la restricción no-difusa $p \cdot x \leq m$.

Sin embargo, al igual que en el ejemplo 2.2, es posible simplificar el problema mediante una aproximación discreta de la solución. En este caso ya no estaríamos aplicando el principio de extensión, sino optimizando por ejemplo $u^{\alpha}(x)$ y extendiendo la solución hasta $u^{\beta}(x)$.

[19] Para comparación de números difusos ver Báez (2002, 27).

Antes de derivar la función de demanda difusa (FDD), consideremos las curvas de indiferencia de la FUD de la ecuación (2.7) considerando los atributos x_h y x_j. Sea G el conjunto de posibilidad (número triangular) de los valores intrínsecos de utilidad del individuo, y $\mu_G(u_i)$ el grado de pertenencia de u_i a G, para $i=(h,j)$.

Entonces, la representación gráfica[20] de una curva de indiferencia es:



$\{F\} \sim [A,B]$ (media: E)
$\{E\} \sim [C,D]$ (media: F)

Figura 11: Curvas de indiferencia según FUD

Cualquier par (x_h, x_j) dentro de la región $ABCD$, excluidas sus fronteras AD y BC, pertenece (en algún grado) al conjunto de posibilidad de los valores intrínsecos de

[20] Ver Seo (1995, 228).

utilidad del individuo, y por lo tanto es indiferente a todos los demás pares dentro de la misma región.

Ahora, ¿en qué consiste aplicar el algoritmo de solución clásico para optimizar la FUD? Para un atributo x el problema consiste, como ya se dijo, en optimizar desde $u^{\alpha}(x)$ hasta $u^{\beta}(x)$, cada una sujeta a $p_x \cdot x \leq m$. Si la FUD es la extensión, al "mundo de la lógica borrosa", de una función de utilidad clásica *bien comportada*[21], entonces la FDD resultante es la unión de las funciones de demanda clásicas $x^{\alpha}(p_x, m), \ldots, \bar{x}(p_x, m), \ldots, x^{\beta}(p_x, m)$. Es decir, la FDD, $\tilde{x}(p_x, \bar{m})$, se define con la función de pertenencia así:[22]

$$\tilde{x}(p_x, \bar{m}) = \left\{ \frac{\mu_G(x_1)}{x_1\left(p_x^o, \bar{m}\right)} + \frac{\mu_G(x_2)}{x_2\left(p_x^o, \bar{m}\right)} + \cdots + \frac{\mu_G(x_n)}{x_n\left(p_x^o, \bar{m}\right)} \right\}, \tag{3.4}$$

donde $\mu_G(x_j)$ denota el grado de pertenencia de la cantidad j del atributo x al conjunto de posibilidad G de los valores intrínsecos de utilidad del individuo.

Gráficamente,

[21] Ver figura 4.
[22] Asumiendo $m = \bar{m}$.

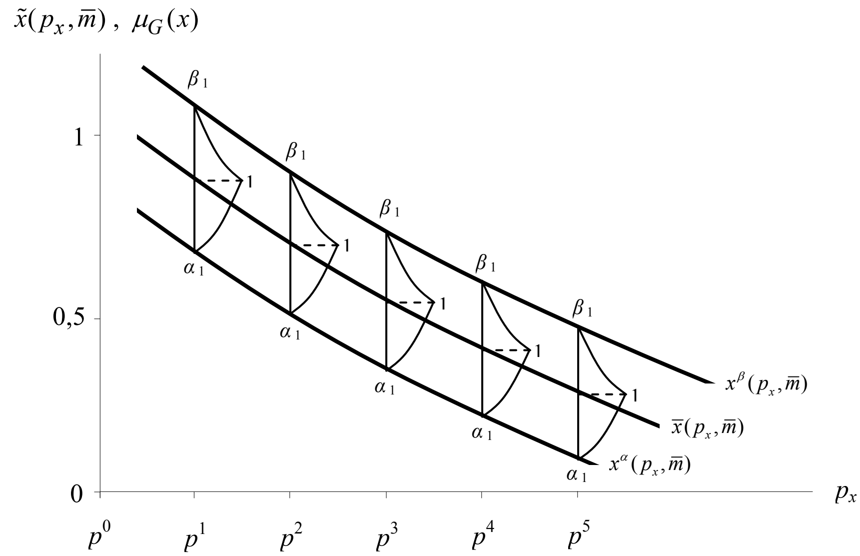


Figura 12: Función de demanda difusa

Nótese que para cualquier par $(p_x^o,\overline{m})$ el conjunto óptimo de planes de consumo no es unitario. Si consideráramos la gráfica de la función de pertenencia de las cantidades demandadas, dado un precio p^o y un presupuesto $\overline{m}$, ésta correspondería al número triangular ilustrado en la figura 11.

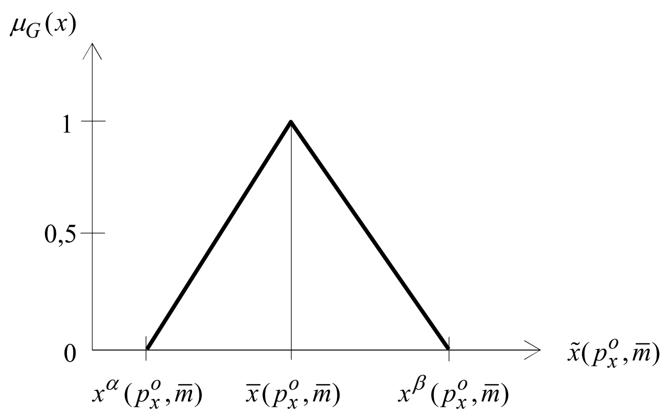


Figura 13: Función de pertenencia para un valor específico en la FDD

Lo que representa la FDD de la ecuación (3.3) es, a un precio dado p^o y presupuesto constante $\overline{m}$, una diversificación de la demanda de un atributo *x*. De nuevo, desde la perspectiva clásica, una falacia si se consideran individuos racionales. Sin embargo, en situaciones realistas de elección sí se observa que los individuos no tienen las grandes capacidades cognitivas y de procesamiento de información descritas en la teoría clásica; se caracterizan por preferencias ambiguas y elecciones "subóptimas" e inconsistentes.

Considérese, por ejemplo, la FDD para una cantidad $\tilde{x}(p_x, \overline{m})$ constante[23] así:

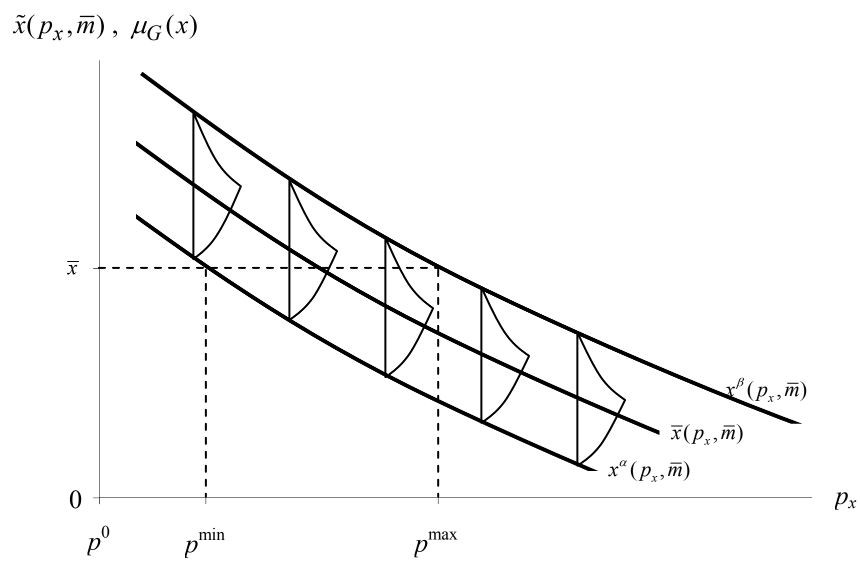


Figura 14: FDD (cantidad constante)

[23] En la figura, $\overline{x}$.

Un comportamiento del individuo en situaciones de subasta, por ejemplo, se ilustra en esta figura. El individuo sabe, *más o menos*, qué tanto desea obtener el artículo subastado y, en esa medida, está dispuesto a pagar un precio en un rango determinado. Ese rango lo define la relación de preferencia del individuo; si ésta no es binaria, modela el hecho de que el individuo tiene tan sólo una *idea* de la intensidad con que desea obtener el bien y, en esa medida, puede tomar decisiones de elección "irracionales".

Sen (1997) planteó hace ya una década que el acto de elección tiene una relevancia particular en el comportamiento maximizador por al menos dos razones: 1) las preferencias pueden ser sensibles al proceso de elección, incluyendo la identidad misma del individuo,[24] y 2) las elecciones deben hacerse independientemente de si el proceso cognitivo se ha completado.[25] En este sentido, la modelación del proceso de elección a partir de una estructura como la descrita en este estudio, es un nuevo punto de referencia para el análisis de procesos realistas de elección.

Por otra parte, los resultados obtenidos apoyan algunas de las tesis defendidas por Hodgson (2000). Cuando el "tipo de acción o de decisión" involucra problemas de *vastedad*, *complejidad*, *incertidumbre*, *conocimiento* y/o *aprendizaje*, la optimización racional se convierte en un procedimiento irracional (porque puede redundar en elecciones subóptimas, inconsistentes y costosas) y cobran importancia mecanismos

[24] *Process significance* o *framing*.
[25] *Decisional inescapability*.

de decisión como los *hábitos* y las *reglas*. Por ejemplo, si la racionalidad se ve limitada por la capacidad computacional del individuo y no porque la información sea escasa o sea costoso acceder a ella, tiene sentido hablar de *satisfacción*[26] o de búsqueda de elecciones *satisfactorias*, en contraposición al concepto de *racionalidad global*. Por otra parte, en situaciones de *incertidumbre radical*, en las que es imposible calcular o atribuirle una probabilidad numérica a los eventos, y en las que incluso la atribución de probabilidades subjetivas es poco plausible, la determinación de las elecciones individuales a partir del proceso clásico de optimización es tan costosa, si no inviable, que los individuos deciden imitar el comportamiento de otros, bajo el supuesto de que el resto del mundo está quizá mejor informado [Hodgson (2000, 25)]. En este sentido, la *medida de posibilidad* de la lógica difusa es tal vez una herramienta analítica más apropiada que la teoría de la probabilidad aplicada al problema de la incertidumbre en economía.

[26] Concepto acuñado por Simon [Hogson (2000, 23)].

4. Conclusiones

1. La FDD, por ser derivada de una función que representa una relación de preferencia no-binaria, no comparte las propiedades de la función de demanda marshalliana clásica. La homogeneidad de grado cero se mantiene, pues la restricción es no-difusa. Sin embargo, ni la ley de Walras se satisface, ni el conjunto óptimo de planes de consumo es unitario. La prueba es directa: el axioma de no-saciabilidad local no es una propiedad de la relación de preferencia y esto se refleja en la diversificación de la demanda a un precio dado. Es decir, existe un conjunto de *posibles elecciones* delimitado por las cotas x^{α} y x^{β}.

2. Si se considera deseable relajar los axiomas de racionalidad del individuo, es útil abordar este problema con las herramientas de los sistemas difusos. Este tipo de lógica puede emplearse como base para aportar soluciones que permitan comprender el proceso complejo de elección de los individuos, partiendo de los problemas planteados por la microeconomía clásica. De hecho, ha probado ser una potente herramienta para el análisis del razonamiento y el comportamiento de los individuos y ha servido de base, por ejemplo, a la solución de problemas de agregación de preferencias, tema en el que recientemente se ha venido avanzando.

3. La lógica difusa puede ser una potente herramienta para incorporar en la teoría económica la idea de que en el mundo real existe un grado de incertidumbre en el

sentido de Keynes (*incertidumbre radical*). Si los entornos realistas de elección son inciertos, complejos y los individuos tienen restricciones cognitivas y de procesamiento de información, los resultados de la presente investigación de alguna manera sustentan las tesis de “elección por surgimiento de hábitos y reglas”.

4. Si bien este estudio no es el primero dedicado a la utilización de los sistemas difusos como herramienta para abordar problemas de elección, sí propone un programa de investigación: la “reconstrucción” de la estructura de la microeconomía clásica basada en la aplicación de lógica difusa. En esa línea, la posibilidad de investigaciones futuras es inmensa.

5. Referencias

BÁEZ, A. (2002): *Métodos y modelos de programación lineal difusa*. Tesis inédita. Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias, Bogotá.

BUCKLEY, J., ESLAMI, E. Y FEURING, T. (2002): *Fuzzy Mathematics in Economics and Engineering*. Physica-Verlag, Heidelberg.

DEBREU, G. (1959): *Theory of Value: An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium*. Cowles Foundation, Yale University.

DUTTA, B., PANDA, S.C., Y PATTANAIK, P.K. (1986): "Exact Choice and Fuzzy Preferences," *Mathematical Social Science*, 11, 53–68.

GWÉT, H. (2000): "Fuzzy Utility and Non-Cardinal Representation of Preferences," *Health and System Science*, 4, 117–132.

HERRERA-VIEDMA, E., HERRERA, F., CHICLANA, F. Y LUQUE, M. (2004): "Some Issues on Consistency of Fuzzy Preference Relations," *European Journal of Operational Research*, 154 (1), 98–109.

HODGSON, G. (2000): "La ubicuidad de los hábitos y las reglas", *Revista de Economía Institucional 3*, 11–43.

KACPRZYK, J., NURMI, H. Y FEDRIZZI, M. (1997): *Consensus Under Fuzziness*. Kluwer Academic Publishers.

KAHNEMAN, D. Y TVERSKY, A. (1979): “Prospect Theory: An Analysis of Decision Under Risk,” *Econometrica*, Vol. 47, Issue 2 (Mar., 1979), 263–292.

LEE, K.H. (2005): *First Course on Fuzzy Theory and Applications*. Springer, Berlin.

MARTIN B.B. Y SANZ M.A. (2002): *Redes neuronales y sistemas difusos*. Alfaomega, 2a ed., México.

ORLOVSKI, S. (1978): “Decision-making with a Fuzzy Preference Relation,” *Fuzzy Sets and Systems*, 1, 155–167.

PATTANAIK, P.K. (1997): “Fuzziness and The Normative Theory of Social Choice”, en: Kacprzyk, J. et.al. (1997), 17–26.

PECHA, A. Y VILLAMIL, J. (2002): “Relaciones de preferencia y elección social en una estructura difusa”, *Cuadernos de economía*, v. xxi, n. 37, Bogotá, 33–55.

SEN, A. (1997): “Maximization and the Act of Choice,” *Econometrica*, Vol. 65, No. 4 (Jul., 1997), 745–779.

SEO, F. (1995): “Construction of Fuzzy Utility Functions in Group Decision Making,” en: Kacprzyk, J. et.al. (1997), 211–230.

VON NEUMANN, J., Y MORGENSTERN, O. (1944): *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press.

ZADEH, L. (1965): “Fuzzy sets,” *Information and Control*, 8, 338–353.

——— (1990): “The Birth and Evolution of Fuzzy Logic,” *International Journal of General Systems*, 17, 95–105.

——— (1994): “Soft Computing and Fuzzy Logic,” *IEEE Software*, 11(6), 48–56.

——— (2000): “From Computing with Numbers to Computing with Words - From Manipulation of Measurements to Manipulation of Perceptions,” *Intelligent Systems and Soft Computing 2000*, 3–40.