

## Résolution numérique de l'équation de la chaleur

Les sources matlab doivent être récupérées sur le moodle du cours.

On s'intéresse dans ce TP à l'évolution de la température dans une pièce supposée bi-dimensionnelle, contenant des bureaux/objets/personnes (la conductivité n'est donc pas constante), soumise à une source de chaleur avec des conditions aux bords variés : Dirichlet (si la température est fixée), de Neumann ou plus généralement de Fourier (si il y a un climatiseur). Ce problème présente de multiples difficultés que nous allons aborder progressivement.

### Exercice 1. Problème stationnaire avec coefficients variables et conditions de Dirichlet

Soit  $\Omega$  un ouvert borné à frontière polygonale de  $\mathbb{R}^2$ . On s'intéresse au calcul de la température  $T \equiv T(x, y)$ , solution de l'équation de la chaleur en régime stationnaire, avec condition aux limites de Dirichlet :

Trouver  $T \in H^1(\Omega)$  telle que

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha T - \operatorname{div}(\sigma \nabla T) = S & \text{dans } \Omega \\ T = T_\Gamma & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}.$$

Les paramètres  $\alpha$  et  $\sigma$  sont tels que  $\alpha$  est une constante strictement positive, et la conductivité  $\sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction régulière par morceaux, et

$$\exists \sigma_{\max}, \sigma_{\min} > 0, \quad \sigma_{\min} \leq \sigma(x, y) \leq \sigma_{\max}, \quad \text{presque pour tout } (x, y) \in \Omega.$$

Les données sont la source de chaleur  $S \in L^2(\Omega)$ , et la température fixée au bord  $T_\Gamma$ , supposée constante.

**1.1** - Si on exprime la température  $T$  sous la forme  $T(x, y) = T_\Gamma + u(x, y)$ ,  $(x, y)$  parcourant  $\bar{\Omega}$ , montrer que la nouvelle inconnue  $u$  est solution du problème

Trouver  $u \in H^1(\Omega)$  telle que

$$(2) \quad \begin{cases} \alpha u - \operatorname{div}(\sigma \nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases},$$

en précisant la valeur du second membre  $f$ .

**1.2 -** Rappeler la formule d'intégration par parties avec la divergence, et vérifier que la formulation variationnelle du problème (2) s'écrit :

Trouver  $u \in H_0^1(\Omega)$  telle que

$$(3) \quad \alpha \int_{\Omega} uv \, d\Omega + \int_{\Omega} \sigma \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

**1.3 -** Montrer que la formulation variationnelle est bien posée.

### Discretisation :

Soit  $\mathcal{T}_h$  une triangulation du domaine  $\Omega$ , et  $V_h$  l'approximation de  $H^1(\Omega)$  par des éléments finis  $P^1$  associés à la triangulation  $\mathcal{T}_h$ . On note  $(T_\ell)_{\ell=1,L}$  les triangles de  $\mathcal{T}_h$ ,  $(M_I)_{I=1,N}$  les sommets des triangles et  $(w_I)_{I=1,N}$  la base de  $V_h$  définie par  $w_I(M_J) = \delta_{IJ}$ ,  $1 \leq I, J \leq N$ . Pour définir une approximation interne de  $H_0^1(\Omega)$ , on procède de la façon suivante : on suppose que les nœuds de la frontière  $\partial\Omega$  sont numérotés de  $N_0 + 1$  à  $N$  (et que les nœuds à l'intérieur sont numérotés de 1 à  $N_0$ ). On introduit :

$$V_h^0 = \text{Vect}(w_1, \dots, w_{N_0}).$$

Par construction,  $V_h^0 \subset H_0^1(\Omega)$ .

**1.4 -** Quelle est la formulation variationnelle discrète vérifiée par la solution approchée  $u_h$  ? Exprimer la température approchée  $T_h$  en fonction de  $u_h$ .

**1.5 -** La solution approchée  $u_h$  s'écrit sous la forme

$$u_h(x, y) = \sum_{I=1}^{N_0} u_h(M_I) w_I(x, y), \quad \forall (x, y) \in \overline{\Omega}.$$

Exprimer la formulation variationnelle discrète sous la forme d'un système linéaire équivalent :

$$(4) \quad \mathbb{A}^0 \vec{U}^0 = \vec{L}^0,$$

où la  $I^{\text{ème}}$  composante du vecteur  $\vec{U}^0 \in \mathbb{R}^{N_0}$  vaut  $u_h(M_I)$  et où on écrira  $\mathbb{A}^0 = \alpha \mathbb{M}^0 + \mathbb{K}^0$ , avec  $\mathbb{M}^0$  la matrice de masse, et  $\mathbb{K}^0$  la matrice de rigidité. Quelles sont les propriétés fondamentales de la matrice  $\mathbb{A}^0$  ?

**1.6 -** Dans la pratique, plutôt que de résoudre le système linéaire (4), on préfère résoudre

$$(5) \quad \tilde{\mathbb{A}} \vec{U} = \tilde{L},$$

obtenu à l'aide de la technique de *pseudo-élimination*. Rappeler les expressions de  $\tilde{\mathbb{A}} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ,  $\vec{U} \in \mathbb{R}^N$  et  $\tilde{L} \in \mathbb{R}^N$  en fonction de  $\mathbb{A}^0$ ,  $\vec{U}^0$  et  $\vec{L}^0$ .

Avant d'effectuer la pseudo-élimination, nous allons donc calculer les matrices élémentaires

et assembler les matrices  $\tilde{\mathbf{A}}$  et  $\tilde{\mathbf{L}}$ .

### Géométrie et maillages :

On veut résoudre le problème dans un ouvert  $\Omega$  carré composé de deux zones  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ .

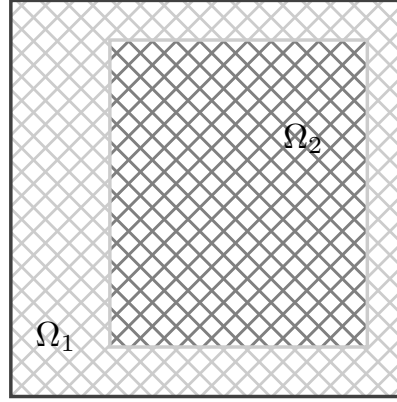


FIGURE 1 – Le domaine  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$

On appelle  $\sigma_1 = \sigma|_{\Omega_1}$  et  $\sigma_2 = \sigma|_{\Omega_2}$  les restrictions de  $\sigma$  à chacun des sous-domaines. C'est lors du calcul des matrices élémentaires qu'il faudra distinguer si un triangle est dans le domaine  $\Omega_1$  (dans ce cas, on prendra  $\sigma = \sigma_1$ ) ou dans le domaine  $\Omega_2$  (dans ce cas, on prendra  $\sigma = \sigma_2$ ).

### Calcul des matrices élémentaires par passage à l'élément fini de référence :

On se place sur un triangle  $T_\ell$ . Pour calculer les matrices élémentaires associées à ce triangle, nous allons utiliser une méthode de calcul, plus générale que les coordonnées barycentriques. Pour calculer les intégrales volumiques sur le triangle  $T_\ell$  (composé des points  $M_1, M_2$  et  $M_3$ ), on se ramène tout d'abord au triangle de référence  $\hat{T}$  (composé des points  $\hat{M}_1 = (0, 0)$ ,  $\hat{M}_2 = (1, 0)$  et  $\hat{M}_3 = (0, 1)$ ).

**1.7 -** Calculer la transformation  $\mathcal{F}_\ell : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\forall \hat{M} \in \mathbb{R}^2, \mathcal{F}_\ell(\hat{M}) = \mathcal{B}_\ell \hat{M} + S_\ell, \mathcal{B}_\ell \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), S_\ell \in \mathbb{R}^2$$

qui permet de passer du triangle de référence au triangle  $T_\ell$  :

$$\forall i, \mathcal{F}_\ell(\hat{M}_i) = M_i.$$

Les intégrales de masse sur  $T_\ell$  peuvent alors s'écrire

$$\int_{T_\ell} w_I(M) w_J(M) d\Omega = \int_{\hat{T}} \hat{w}_I(\hat{M}) \hat{w}_J(\hat{M}) |\det \mathcal{B}_\ell| d\hat{\Omega}$$

et de rigidité

$$\int_{T_\ell} \sigma(M) \nabla w_I(M) \cdot \nabla w_J(M) d\Omega = \int_{\hat{T}} \sigma(\mathcal{F}_\ell(\hat{M})) \left[ (\mathcal{B}_\ell^T)^{-1} \hat{\nabla} \hat{w}_I(\hat{M}) \right] \cdot \left[ (\mathcal{B}_\ell^T)^{-1} \hat{\nabla} \hat{w}_J(\hat{M}) \right] |\det \mathcal{B}_\ell| d\hat{\Omega}.$$

**1.8** - Rappeler les expressions de  $\hat{w}_1$ ,  $\hat{w}_2$  et  $\hat{w}_3$ . En déduire le calcul de la matrice de masse élémentaire.

**1.9** - Quand les coefficients sont variables, il n'est pas toujours possible de calculer ces intégrales exactement. On approche alors ces intégrales à l'aide de formules de quadratures dites à  $N_q$  points : pour  $G$  une fonction continue par morceaux de  $T_\ell$

$$\int_{\hat{T}} G d\Omega \simeq \sum_{q=1}^{N_q} \omega^q G(\hat{S}^q).$$

où  $\hat{S}^q$  sont des points de quadrature dans  $\hat{T}$  et  $\omega^q$  les poids positifs associés aux points de quadrature. Il existe de nombreux points de quadrature (Gauss-Legendre, Gauss-Lobatto,...) qui fournissent des approximations des intégrales. Ces méthodes se différencient par le fait qu'elles intègrent exactement les polynômes d'un ordre donné, ce qui caractérise leur précision. On utilisera ici la formule de quadrature à 3 points de Gauss Legendre qui est d'ordre 2 et qui est définie sur le triangle de référence  $\hat{T}$  par

$$\left. \begin{array}{c} \hat{S}^q \\ \hat{\omega}^q \end{array} \right| \begin{array}{c} (s_0, s_0) \\ \omega_0 \end{array} \left| \begin{array}{c} (s_1, s_0) \\ \omega_0 \end{array} \right| \begin{array}{c} (s_0, s_1) \\ \omega_0 \end{array} \left|$$

avec

$$s_0 = \frac{1}{6}, \quad s_1 = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \frac{1}{6}.$$

À l'aide de ces éléments, modifier le calcul de la matrice de rigidité élémentaire. Il faudra modifier la routine `matK_elem.m`, en prenant comme argument supplémentaire le tableau `Reftri` pour déterminer à quelle zone chaque triangle appartient. En fonction de la zone, on utilisera les fonctions `sigma_1.m` et `sigma_2.m`, que vous pouvez modifier.

**1.10** - Valider le calcul pour un triangle quelconque dans le cas  $\sigma = 1$  en comparant au calcul de la matrice élémentaire du TP précédent.

#### Assemblage des matrices et vecteur second membre :

La routine `principal_chaleur.m` est le programme principal pour résoudre le problème (5), ce qui permet de calculer la température approchée  $T_h$ .

**1.11** - Reprendre la partie assemblage du TP précédent, permettant de construire la matrice  $\mathbb{A} = \alpha \mathbb{M} + \mathbb{K}$  et le vecteur  $\vec{L}$ , *avant la pseudo-élimination*. Comme au TP précédent, pour une donnée  $f \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ , le vecteur  $\vec{L}$  sera construit à l'aide d'une technique d'interpolation.

**1.12** - Ecrire une routine `matlab` dont la syntaxe est

`[tilde_AA, tilde_LL] = elimine(AA, LL, Refneu)`

qui réalise la pseudo-élimination des nœuds `i` correspondant à `Refneu(i)=1`. Insérer un appel à cette routine à un endroit approprié dans `principal_chaleur.m`.

## 5. Validation du code :

On veut vérifier que le code calcule une solution approchée  $u_h$  correcte. Pour cela, on résout le problème (2) avec les paramètres

$$\alpha = 1, \sigma_1 = 1, \sigma_2 = 1,$$

et une solution  $u$  égale à  $u(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ , pour  $(x, y) \in \overline{\Omega}$ .

**1.13** - Calculer la donnée  $f$  correspondante et modifier la routine `f.m`.

**1.14** - En assimilant  $u$  à son interpolée  $\pi_h u$ , donner une estimation de la norme  $L^2$  de l'erreur,  $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$ , faisant intervenir la matrice de masse  $\mathbb{M}^0$ . Comment évolue cette erreur en fonction de  $h$  ?

**1.15** - En assimilant  $u$  à son interpolée  $\pi_h u$ , donner une estimation de la semi-norme  $H^1$  de l'erreur,  $|u - u_h|_1 = \|\nabla u - \nabla u_h\|_{L^2(\Omega)^2}$ , faisant intervenir la matrice de rigidité  $\mathbb{K}^0$ . Comment évolue cette erreur en fonction de  $h$  ?

## Résolution numérique :

On choisit les valeurs suivantes pour les paramètres et données

$$\alpha = 1, \sigma_1 = 5, \sigma_2 = \sqrt{3}/2, S(x, y) = 600 \exp \left( - \left( \frac{x-1}{0.8} \right)^2 - \left( \frac{y-1}{0.8} \right)^2 \right), T_\Gamma = 290.$$

**1.16** - Résoudre le problème discret et représenter la température approchée  $T_h$ . Donner sa valeur maximale. Quel phénomène observe-t-on dans  $\Omega_2$  ?

**1.17** - On change maintenant seulement  $\sigma_2$

$$\sigma_2 = \sigma_{\text{var}} \quad \text{où} \quad \sigma_{\text{var}}(x, y) = 1/4(2 + \sin(16\pi x))(2 + \sin(16\pi y))$$

Résoudre le problème discret et représenter la température approchée  $T_h$ . Qu'observez vous ?

## Exercice 2. Equation de la chaleur stationnaire avec conditions de Fourier

On s'intéresse au calcul de la température  $T \equiv T(x, y)$ , solution de l'équation de la chaleur en régime stationnaire, avec condition aux limites de Fourier (qui modélise un climatiseur : le flux de chaleur est positif si  $T < T_c$  et négatif si  $T > T_c$ , où  $T_c$  est la température de référence du climatiseur) :

Trouver  $T \in H^1(\Omega)$  telle que

$$(6) \quad \begin{cases} \alpha T - \operatorname{div}(\sigma \nabla T) = S & \text{dans } \Omega \\ \sigma \nabla T \cdot n + \lambda(T - T_c) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}.$$

avec  $\alpha$ ,  $\sigma$  et  $S$  vérifiant les mêmes hypothèses que précédemment,  $\lambda > 0$  et  $T_c \in L^2(\partial\Omega)$ .

**2.1** - Ecrire la formulation variationnelle du problème (6).

**2.2** - On souhaite discrétiser (6) en utilisant des éléments finis de Lagrange  $P^1$ . Après avoir introduit l'espace d'approximation  $V_h$ , écrire la formulation discrète dans  $V_h$  et prouver que le problème discret se met sous la forme

$$(\mathcal{P}_h^N) \quad \begin{cases} \text{Trouver } \vec{U} \in \mathbb{R}^N \text{ telle que} \\ (\mathbb{K} + \alpha \mathbb{M} + \lambda \mathbb{S}) \vec{U} = \vec{F} \end{cases}$$

où on précisera la définition des différentes matrices et vecteurs.

**2.3** - Construire le terme  $\vec{F}$  pour une donnée  $S \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ , et  $T_c \in \mathcal{C}^0(\partial\Omega)$  à l'aide d'une technique d'interpolation.

**2.4** - Ecrire le code permettant de calculer la solution discrète. On complètera la routine `mat_elem_surface.m` qui à partir des coordonnées de 2 sommets donne la matrice élémentaire de masse surfacique.

**2.5** - Valider votre code et expliquer vos différentes validations.

**2.6** - Représenter la solution dans les 2 cas suivants

- (i)  $S(x, y) = \sin(\pi x/2) \sin(\pi y/2)$  et  $\alpha = 1$ ,  $\sigma = 1$ ,  $\lambda = 0$ ;
- (ii) Reprendre les données de la Question 1.17 avec  $\lambda = 1$  et  $T_c = 290$ .

Commenter.

### Exercice 3. Problème complet : Equation de la chaleur instationnaire avec des conditions aux limites mixtes

On veut maintenant modéliser l'équation de la chaleur, avec une température  $T \equiv T(x, y, t)$  dépendant du temps  $t$ . On résout dans ce cas

Trouver  $T(t) \in H^1(\Omega)$  telle que

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} - \operatorname{div}(\sigma \nabla T) = S & \text{dans } \Omega \times ]0, t_{max}[ \\ T = T_\Gamma & \text{sur } \partial\Omega \times ]0, t_{max}[ \\ T|_{t=0} = T_0 & \text{dans } \Omega \end{cases}.$$

$S \equiv S(x, y, t)$  est la source de chaleur, et  $T_0 \equiv T_0(x, y)$  est la valeur initiale de la température.

**3.1** - Introduire une inconnue  $u$  permettant de reformuler le modèle avec  $u(t) \in H_0^1(\Omega)$ .

**3.2** - On (semi-)discrétise en espace, en cherchant  $u_h(t) \in V_h^0$ , puis on discrétise en temps à l'aide d'un schéma implicite. Si on note  $\Delta t$  le pas de temps et  $t^k = k \Delta t$  les instants discrets,  $k$  variant de 0 à  $K = t_{max}/(\Delta t)$ , on approche  $u(t^k)$  par  $u_h^k \in V_h^0$  :

$$u_h^k(x, y) = \sum_{I=1}^{N_0} V_I^k w_I(x, y), \quad \forall (x, y) \in \overline{\Omega}.$$

Si on introduit le vecteur  $\vec{V}^k \in \mathbb{R}^{N_0}$  dont la  $I^{\text{ème}}$  composante vaut  $V_I^k$ , on doit résoudre les systèmes linéaires :

Trouver  $\vec{V}^k \in \mathbb{R}^{N_0}$ , pour  $k$  variant de 0 à  $K - 1$ , tels que

$$(8) \quad \begin{cases} \mathbb{M}^0 \frac{\vec{V}^{k+1} - \vec{V}^k}{\Delta t} + \mathbb{K}^0 \vec{V}^{k+1} = \vec{L}^{k+1}, \\ \vec{V}^0 = \vec{V}_0. \end{cases}$$

Reformuler (8) en faisant intervenir la matrice  $\mathbb{A}^0$  de (4).

On choisit les valeurs suivantes pour les paramètres et données

$$t_{max} = 1, \Delta t = 0.01 \text{ à changer éventuellement en fonction du maillage}$$

$$\sigma_1 = 5, \sigma_2 = \sigma_{\text{var}}, T_\Gamma = 280, T_0 = 300,$$

$$S(x, y, t) = 600e^{-5t} \exp \left( - \left( \frac{x-1}{0.8} \right)^2 - \left( \frac{y-1}{0.8} \right)^2 \right).$$

**3.3** - Résoudre le problème discret et représenter l'évolution de la température au cours du temps en plusieurs points.

**3.4** - On suppose maintenant que sur une partie du bord (un côté du carré par exemple) une condition de Fourier est imposée. Modifier les maillages et le code pour représenter la solution d'un tel problème. Vous choisirez les données et pourrez les faire varier.