Übung (8.–9.5.2018): Keplerproblem

Problemstellung:

Die Bewegungsgleichung für einen Planeten mit der Masse m_e im Gravitationsfeld der Sonne ist gegeben durch:

$$m_e \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = -G\ \vec{r}(t)\frac{m_s m_e}{|\vec{r}(t)|^3}.$$

$\vec{r}$ ist ein Vektor in $\mathbb{R}^2$. Die notwendigen Konstanten und Parameter sind gegeben durch:

$$m_s = 1.989 \times 10^{30}\ \text{kg}, \qquad m_e = 5.972 \times 10^{24}\ \text{kg},$$

$$r_e = 1.4959787 \times 10^{11}\ \text{m}, \qquad G = 6.67408 \times 10^{-11}\ \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}.$$

Aufgaben:

1. Arbeiten Sie mit geeigneten Einheiten. Wechseln Sie von SI (kg, m, s) nach Erdmassen, AU (astronomical units) und Tagen.

$$m_s = \qquad\qquad \text{m}_\text{e}, \qquad m_e = 1,$$

$$r_e = 1\ \text{AU}, \qquad G = \qquad\qquad \frac{\text{r}_\text{e}^3}{\text{m}_\text{e} \cdot \text{Days}^2}$$

2. Schreiben Sie die Bewegungsgleichung in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung um.

   Schreiben Sie ein Programm, daß das System gekoppelter Differentialgleichungen mit Hilfe des expliziten Euler-Verfahrens erster Ordnung integriert. Die Anfangswerte sind gegeben durch:

$$\vec{r}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{AU}, \qquad \dot{\vec{r}}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.017326 \end{pmatrix} \text{AU/Day}.$$

3. Verwenden Sie das Euler-Verfahren um die Bewegungsgleichung über einen Zeitraum von 365 Tagen zu integrieren und erzeugen Sie eine Grafik des Orbits mit `gnuplot`. Verwenden Sie dazu unterschiedliche Zeitschritte mit $\Delta t = 1$ Day und $\Delta t = 0.01$ Day.
4. Implementieren Sie das Runge-Kutta-Verfahren (RK4). Wiederholen Sie 3 mit RK4 anstelle des Euler-Verfahrens.
5. Die Gesamtenergie des Systems ist gegeben durch

$$E(t_n) = \frac{m_e|\dot{\vec{r}}(t_n)|^2}{2} - \frac{G\ m_s\ m_e}{|\vec{r}(t_n)|}.$$

   Berechnen Sie $E(t_n)$ mit Hilfe des Euler- und RK4-Verfahrens ($\Delta t = 0.01$ Day) als Funktion der Zeit. Erzeugen Sie mit `gnuplot` eine Grafik die $E(t_n)$ darstellt. Ist die berechnete Gesamtenergie eine Erhaltungsgröße?
   VORSICHT: Betrachten Sie $E(t_n)$ für beide Verfahren genau!

Bonus:
Ändern Sie die Anfangsgeschwindigkeit so, daß die Lösung $\vec{r}(t)$ dem Hohmann-Transfer-Orbit zwischen Erde und Mars entspricht. Nehmen Sie dazu an, daß die Marsumlaufbahn in etwa kreisförmig mit einem Radius von 1.5AU ist. Achten Sie auf die Konvergenz des Transfer-Orbits mit der Schrittweite. Wie lange dauert der Transfer?