Anwendung Höherer Mathematik

Sebastian Matkovich

FH Campus Wien
sebastianmatkovich@gmail.com

July 18, 2024

Presentation Overview

Differenzialrechnung

Die Ableitung einer Umkehrfunktion $f^{-1}(y) = x(y)$ erhalten wir ganz leicht über die Leibnizschreibweise folgendermaßen:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \tag{1}$$

Ein einfaches Beispiel, das häufig bei Differenzialgleichungen auftritt, bei denen das Ergebnis dieser Rechnung integriert wird, ist die Ableitung von $\ln(x)$ nach x.

$$\frac{d\ln(y)}{dy} = \frac{1}{\frac{de^x}{dx}} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y} \tag{2}$$

Damit ist das häufig bei Differenzialgleichungen auftretende Integral über $\frac{1}{x}$:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(|x|) + c \tag{3}$$

Partielle Integration

Aus der Produktregel für zwei Funktionen u(x) und v(x) können wir eine Regel Für Partielle Integration herleiten.

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \tag{4}$$

Integrieren wir auf beiden Seiten, erhalten wir

$$\int (u \cdot v)' dx = \int (u' \cdot v) dx + \int (u \cdot v') dx \Big| - \int u \cdot v dx \tag{5}$$

$$u \cdot v + c - \int (u \cdot v) dx = \int (u' \cdot v) dx \tag{6}$$

$$\int (u' \cdot v) dx = u \cdot v + c - \int (u \cdot v) dx \tag{7}$$

Ziel ist es die Integration durch Ableitung eines Terms so zu vereinfachen, dass ein schon bekanntes Integral entsteht, oder das ursprüngliche Integral, das dann wie eine Gleichung gelöst werden kann.

Mit folgendem Trick lässt sich ln(x) so integrieren:

$$\int \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{v} dx = \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\ln(x) + c}_{v} - \int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{v'} dx = x \cdot \ln(x) + x + c = \tag{8}$$

$$x(\ln(x) + 1) + c \tag{9}$$

So lässt sich auch das Integral über $\sin(x) \cdot \cos(x)$ durchführen.

$$\int \underbrace{\sin(x)}_{u} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{v'} dx = [\sin(x)]^2 + c - \int \underbrace{\cos(x)}_{u'} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{v} dx \Bigg| + \int \cos(x) \cdot \sin(x) dx \tag{10}$$

$$2 \cdot \int \sin(x) \cdot \cos(x) dx = [\sin(x)]^2 + c \Bigg| : 2 \tag{11}$$

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x) dx = \frac{[\sin(x)]^2}{2} + c' \tag{12}$$

Ähnlich funktionieren auch die Integrale über $[\sin(x)]^2$ oder $(\cos(x))^2$, nur, dass nach der ersten partiellen Integration ein Additionstheorem anzuwenden ist.

Differenzialgleichungen

Definition

Eine Differenzialgleichung ist eine Gleichung, deren Lösung keine Zahl, sondern eine Funktion ist.

Definition

Bei einer gewöhnlichen Differenzialgleichung ist die gesuchte Funktion von nur einer Variablen abhängig und es treten nur Ableitungen nach einer Variablen auf.

Beispiel

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = e^x$$

Definition

Bei einer partiellen Differenzialgleichung ist die gesuchte Funktion von mehreren Variablen abhängig und es treten partielle Ableitungen nach verschiedenen Variablen auf.

Beispiel

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial u}{\partial y} + u = e^x$

Definition

Eine Dgl. heißt von n-ter Ordnung, wenn die höchste in ihr auftretende Ableitung von n-ter Ordnung ist.

Definition

Es gibt noch die Unterscheidung zwischen homogenen und inhomogenen Dgln. Bei inhomogenen Dgln. tritt noch ein Ausdruck auf, der von der Variablen abhängt, von der die gesuchte Funktion abhängt, beziehungsweise einer Konstanten.

Beispiel

Die vorher gezeigten Beispiele sind inhomogene Dgln. In homogener Form würden sie so aussehen: $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 0$

Definition

Eine Dgl. deren höchste Potenz der Variablen, von der die gesuchte Funktion abhängt, n ist, nennen wir n-ten Grades.

Definition

Eine Dgl. vom Grad 1 nennen wir linear, vom Grad > 1, nichtlinear.

Einschub: Logarithmenregeln

$$y = e^x \tag{13}$$

$$x = e^y \tag{14}$$

$$\ln(y_1 \cdot y_2) = \ln(e^{x_1} \cdot e^{x_2}) = \ln(e^{x_1 + x_2}) = x_1 + x_2 = \ln(y_1) + \ln(y_2) \tag{15}$$

$$\ln(y^n) = \underbrace{\ln(y) \cdot \ln(y) \cdot \cdots \cdot \ln(y)}_{n-Mal} = n \cdot \ln(y) \tag{16}$$

Enführung anhand eines Beispiels

$$y' = y \tag{17}$$

Ziel ist es Ausdrücke mit derselben Variable auf einer Seite zu sammeln.

$$\frac{dy}{dx} = y \Big| : y \tag{18}$$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = 1 \Big| \int dx \tag{19}$$

$$\int \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} dx = \int 1 dx \tag{20}$$

Fortsetzung des Beispiels

$$\int \frac{1}{y} dy = \int 1 dx \tag{21}$$

$$\ln(|y|) = x + \ln(c) \Big| e^{()} \tag{22}$$

$$|y| = c \cdot e^x \tag{23}$$

Inhomogenitäten, Variation der Konstanten (nach Lagrange)

Bei einer inhomogenen Dgl. wird zuerst die Inhomegenität = 0 gesetzt und wir sagen wir lösen die homogene Dgl. Danach kann bei linearen Dgln. 1. Ordnung von der Integrationskonstante c angenommen werden, dass sie von der Variable abhängt, von der auch die gesuchte Funktion abhängt, üblicherweise c(x) oder c(t) und die Lösung der homogenen Gleichung in die inhomogene Dgl. eingesetzt. Damit kann nach der Funktion c aufgelöst werden. Die Lösung der homogenen Dgl. nennen wir homogene Lösung und eine Lösung der inhomogenen Dgl. nennen wir partikuläre Lösung. Die allgemeine Lösung ergibt sich aus der Summe der homogenen und der partikulären Lösung.

Theorem (Superpositionsprinzip)

Sind y_1 und y_2 Lösungen einer Dgl., so ist auch eine Superposition Lösung der Dgl.

Beweis.

Sei $y' = A(x) \cdot y$ und $y = \alpha \cdot y_1 + \beta \cdot y_2$.
Dann ist $y' = (\alpha \cdot y_1 + \beta \cdot y_2)' = \alpha \cdot y_1' + \beta \cdot y_2' = \alpha \cdot A \cdot y_1 + \beta \cdot A \cdot y_2 = A(\alpha \cdot y_1 + \beta \cdot y_2)$ $\square$

Demonstration der Variation der Konstanten anhand eines Beispiels

Zu bestimmen ist die allgemeine Lösung der linearen Dgl. erster Ordnung

$$xy' + y - xe^{-2x} = 0. \tag{24}$$

In Normalform:

$$y' + \frac{y}{x} = e^{-2x} \tag{25}$$

Die homogene Dgl.:

$$y' + \frac{y}{x} = 0 \tag{26}$$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x} | \int dx \tag{27}$$

$$\ln(|y|) = -\ln(|x|) + \ln(c)[= \ln(\frac{c}{|x|})] \tag{28}$$

$$|y| = \frac{c}{|x|} \tag{29}$$

Demonstration der Variation der Konstanten anhand eines Beispiels - Fortsetzung

$$y = \frac{c(x)}{x} \tag{30}$$

$$y' = \frac{c'(x) \cdot x - c(x)}{x^2} \tag{31}$$

$$\frac{c'(x) \cdot x - c(x)}{x^2} + \frac{c(x)}{x^2} = \frac{c'(x)}{x} = e^{-2x} \tag{32}$$

$$c'(x) = x \cdot e^{2x} \tag{33}$$

$$c(x) = \int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{e^{2x}}_{v'} dx = \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\frac{e^{2x}}{2} + k}_{v} - \int \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\frac{e^{2x}}{2}}_{v} =$$

$\frac{x \cdot e^{2x}}{2} + k - \frac{e^{2x}}{4} = \frac{e^{2x}}{2}(x - \frac{1}{2}) + k$

$$y = \frac{e^{2x}}{2}(1 - \frac{1}{2x}) + \frac{k}{x} \tag{34}$$

Dgln. höherer Ordnung

Eine lineare Dgl. n-ter Ordnung läßt sich auf folgende Normalform bringen:

$$a_n(x) \cdot y^{(n)} + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x) \cdot y' + a_0(x) \cdot y = g(x) \quad (35)$$

mit $a_n(x) \neq 0$. Ist g(x) = 0, so heißt die Dgl. homogen, sonst heißt sie inhomogen. Für die Lösung linearer Dgln. höherer Ordnung haben die folgenden zwei Sätze große Bedeutung:

1. Satz 1: Die homogene Dgl. n-ter Ordnung besitzt genau n voneinander linear unabhängige Lösungen $y_1, \ldots, y_n$, deren Linearkombination die allgemeine Lsüng der Dgl. darstellt.
2. Satz 2: Die allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl. n-ter Ordnung ist gleich der Summe aus der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen und einer speziellen Lösung der inhomogenen Dgl.

Lösungsweg:

Nachdem die gegebene homogene lineare Dgl. auf die Normalform gebracht worden ist [g(x)=0], wird die zugehörige charakteristische Gleichung gebildet. Dazu wird der Ansatz

$$y(x) = e^{\lambda \cdot x} \tag{36}$$

in die homogene Dgl. (35) eingesetzt. Dabei entsteht:

$$e^{\lambda \cdot x} \cdot [a_n(x) \cdot \lambda^n + a_{n-1}(x) \cdot \lambda^{n-1} + \cdots + a_1(x) \cdot \lambda + a_0(x)] = 0 \tag{37}$$

Durch Division durch $e^{\lambda \cdot x}$ (da $e^{\lambda \cdot x} \neq 0$ für alle λ und alle x) erhalten wir die sogenannte charakteristische Gleichung:

$$a_n(x) \cdot \lambda^n + a_{n-1}(x) \cdot \lambda^{n-1} + \cdots + a_1(x) \cdot \lambda + a_0(x) = 0 \tag{38}$$

Bei der Lösung unterscheiden wir 4 Fälle.

1. Fall 1: Alle Lösungen von (38) sind reell und voneinander verschieden
   Die allgemeine Lösung von (35) lautet dann:

   $$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x}$$

   wobei $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ die reellen Nullstellen der charakteristischen Gleichung (38) sind.
2. Fall 2: In (38) treten mehrfache reelle Lösungen auf (im vorliegenden Fall eine k-fache Lösung)
   Dann lautet die allgemeine Lösung von (35)

   $$y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \cdots + C_{k+1} x^{k+1}) e^{\lambda_1 x} + C_{k+2} e^{\lambda_{k+2} x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x}$$

   wobei λ_1 die k-fache Nullstelle der charakteristischen Gleichung (38) ist.

3. Fall 3: Alle Lösungen von (38) sind einfach, je zwei zueinander konjugiert komplex

$$\lambda_{1,2} = a_1 \pm b_1 j; \quad \lambda_{3,4} = a_3 \pm b_3 j; \ldots;$$

$\lambda_{n-1,n} = a_{n-1} \pm b_{n-1} j; \quad n$ gerade Die allgemeine Lösung von (35) lautet:

$$\begin{aligned} y =& e^{a_1 x} \left(C_1 \cos b_1 x + C_2 \sin b_1 x \right) + e^{a_3 x} \left(C_3 \cos b_3 x \right. \\ & \left. + C_4 \sin b_3 x \right) + \ldots + e^{a_{n-1} x} \left(C_{n-1} \cos b_{n-1} x + C_n \sin b_{n-1} x \right) \end{aligned}$$

wobei $a_1, a_2, \ldots, a_n$ die reellen Teile der komplexen Wurzeln der charakteristischen Gleichung (38) und $b_1, b_2, \ldots, b_n$ die imaginären Teile der komplexen Wurzeln der charakteristischen Gleichung (38) sind.

4. Fall 4: Die Kombination der 3 Fälle.

Lists

Bullet Points and Numbered Lists

- Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit
- Aliquam blandit faucibus nisi, sit amet dapibus enim tempus
  - Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit
  - Nam cursus est eget velit posuere pellentesque
- Nulla commodo, erat quis gravida posuere, elit lacus lobortis est, quis porttitor odio mauris at libero

1. Nam cursus est eget velit posuere pellentesque
2. Vestibulum faucibus velit a augue condimentum quis convallis nulla gravida

Blocks of Highlighted Text

Block Title

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Integer lectus nisl, ultricies in feugiat rutrum, porttitor sit amet augue.

Example Block Title

Aliquam ut tortor mauris. Sed volutpat ante purus, quis accumsan.

Alert Block Title

Pellentesque sed tellus purus. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos himenaeos.

Suspendisse tincidunt sagittis gravida. Curabitur condimentum, enim sed venenatis rutrum, ipsum neque consectetur orci.

Multiple Columns

Subtitle

Heading

1. Statement
2. Explanation
3. Example

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Integer lectus nisl, ultricies in feugiat rutrum, porttitor sit amet augue. Aliquam ut tortor mauris. Sed volutpat ante purus, quis accumsan dolor.

Table

Subtitle

Treatments	Response 1	Response 2
Treatment 1	0.0003262	0.562
Treatment 2	0.0015681	0.910
Treatment 3	0.0009271	0.296

Table: Table caption

Figure

Figure: Creodocs logo.

Definitions & Examples

Definition

A prime number is a number that has exactly two divisors.

Example

- 2 is prime (two divisors: 1 and 2).
- 3 is prime (two divisors: 1 and 3).
- 4 is not prime (three divisors: 1, 2, and 4).

You can also use the , , and environments.

Theorem, Corollary & Proof

Theorem (Mass–energy equivalence)

$E = mc^2$

Corollary

$x + y = y + x$

Proof.

$\omega + \phi = \epsilon$ □

Equation

$$\cos^3\theta = \frac{1}{4}\cos\theta + \frac{3}{4}\cos 3\theta \tag{39}$$

Verbatim

Example (Theorem Slide Code)

Slide without title.

Citing References

An example of the \ command to cite within the presentation:

This statement requires citation [Smith, 2022, Kennedy, 2023].

References

[Smith, 2022] John Smith (2022)
Publication title
Journal Name 12(3), 45 – 678.

[Kennedy, 2023] Annabelle Kennedy (2023)
Publication title
Journal Name 12(3), 45 – 678.

Acknowledgements

Smith Lab

- Alice Smith
- Devon Brown

Cook Lab

- Margaret
- Jennifer
- Yuan

Funding

- British Royal Navy
- Norwegian Government

The End

Questions? Comments?