

1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières réelles suivantes :

$$(a) \sum_{n \geq 0} \frac{3n^2 - 1}{2^{2n+1}\sqrt{n+1}} x^n$$



On pose  $u_n(x) = \frac{3n^2 - 1}{2^{2n+1}\sqrt{n+1}} x^n$  et on utilise le théorème de d'Alembert :

$$\begin{aligned} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} &= \frac{(3(n+1)^2 - 1) \times 2^{2n+1}\sqrt{n+1}}{(2^{2(n+1)+1}\sqrt{n+1+1}) (3n^2 - 1)} \frac{|x^{n+1}|}{|x^n|} \\ &= \frac{1}{2^2} \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} \frac{3n^2 + 6n + 3 - 1}{3n^2 - 1} |x| \\ &\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{4} |x| \end{aligned}$$

Or  $\frac{1}{4}|x| < 1 \iff |x| < 4$  donc le rayon de convergence est  $R = 4$ .

$$(b) \sum_{n \geq 1} 9^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^n x^n$$



On pose  $u_n(x) = 9^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^n x^{2n}$  et on utilise le théorème de Cauchy :

$$\begin{aligned} (|u_n(x)|)^{\frac{1}{n}} &= \left( 9^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^n |x|^{2n} \right)^{\frac{1}{n}} \\ &= 9 \left(\frac{n-1}{n}\right) |x| \\ &\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 9|x| \end{aligned}$$

Or  $9|x| < 1 \iff |x| < \frac{1}{9}$  donc le rayon de convergence est  $R = \frac{1}{9}$ .

2. Que peut-on dire de la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{3n^2 - 1}{2^{2n+1}\sqrt{n+1}} \left(-\frac{9}{8}\right)^n$  ? Justifier.



On reconnaît la série entière de la question 1.(a) évaluée en  $x = -\frac{9}{8}$ . Or  $-\frac{9}{8} \in ]-4; 4[$  donc la série est absolument convergente.

3. Que peut-on dire de la série  $\sum_{n \geq 1} 9^n \left(\frac{2n-2}{3n}\right)^n$  ? Justifier.



On reconnaît la série entière de la question 1.(b) évaluée en  $x = \frac{2}{3}$ . Or  $\frac{2}{3} \notin [-\frac{1}{9}; \frac{1}{9}[$  donc la série est grossièrement divergente.