Soit $k \in \mathbb{R}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} kx(1-x) & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la valeur de k pour que f soit une densité de probabilité.

✓ On a :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx + \int_1^{+\infty} f(x)dx \\ &= 0 + \int_0^1 kx(1-x)dx + 0 \\ &= k\int_0^1 (x-x^2)dx \\ &= k\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 \\ &= k\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{k}{6}. \end{aligned}$$

On a donc $k = 6$.

2. Soit X une variable aléatoire réelle de densité f. Déterminer la fonction de répartition F de X.

✓ Soit $t \in \mathbb{R}$. Si $t \leqslant 0$, on a : $\mathrm{P}(X \leqslant t) = 0$. Si $t \geqslant 1$, on a : $\mathrm{P}(X \leqslant t) = 1$. Si $t \in]0,1[$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X \leqslant t) &= \int_{-\infty}^{t} f(x)dx \\ &= \int_0^t 6x(1-x)dx \\ &= 6\int_0^t (x-x^2)dx \\ &= 6\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^t \\ &= 6\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right) \\ &= 6\left(\frac{3t^2 - 2t^3}{6}\right) \\ &= 3t^2 - 2t^3. \end{aligned}$$

On a donc $F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ 3t^2 - 2t^3 & \text{si } t \in]0,1[\\ 1 & \text{si } t \geqslant 1. \end{cases}$

3. Déterminer la probabilité que X prenne une valeur dans l'intervalle $[0{,}5\,;\,1]$.

✓ On a :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(0{,}5 \leqslant X \leqslant 1) &= \mathrm{P}(X \leqslant 1) - \mathrm{P}(X \leqslant 0{,}5) \\ &= F(1) - F(0{,}5) \\ &= 1 - (3 \times 0{,}5^2 - 2 \times 0{,}5^3) \\ &= 1 - (3 \times 0{,}25 - 2 \times 0{,}125) \\ &= 1 - (0{,}75 - 0{,}25) \\ &= 1 - 0{,}5 \\ &= 0{,}5. \end{aligned}$$

4. Déterminer l'espérance et la variance de X.

✓ On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \\ &= \int_0^1 6x^2(1-x)dx \\ &= 6\int_0^1 (x^2 - x^3)dx \\ &= 6\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 \\ &= 6\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \\ &= 6 \times \frac{1}{12} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

On a aussi d'après le théorème de transfert :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx \\ &= \int_0^1 6x^3(1-x)dx \\ &= 6\int_0^1 (x^3 - x^4)dx \\ &= 6\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 \\ &= 6\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) \\ &= 6 \times \frac{1}{20} \\ &= \frac{3}{10}. \end{aligned}$$

On a donc $\mathrm{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$.

5. Soit la variable aléatoire $Y = X^2$. En distinguant éventuellement selon les valeurs de $t \in \mathbb{R}$, déterminer $a(t)$ et $b(t)$ de telle sorte que $\{Y \leqslant t\} = \{a(t) \leqslant X \leqslant b(t)\}$.

✓ Si $t < 0$, on a $\{Y \leqslant t\} = \varnothing$. Si $t \geqslant 0$, on a $\{Y \leqslant t\} = \{X \in [-\sqrt{t}, \sqrt{t}]\}$.

6. En déduire une expression de la fonction de répartition de Y puis une densité de probabilité de Y.

✓ Soit $t \in \mathbb{R}$. Si $t < 0$, on a $F_Y(t) = 0$. Si $t \geqslant 0$, on a :

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= \mathrm{P}(Y \leqslant t) \\ &= \mathrm{P}(X \in [-\sqrt{t}, \sqrt{t}]) \\ &= F(\sqrt{t}) - F(-\sqrt{t}) \\ &= F(\sqrt{t}) - 0 \\ &= \begin{cases} 3t - 2t^{3/2} & \text{si } t \in [0,1] \\ 1 & \text{si } t \geqslant 1. \end{cases} \end{aligned}$$

On a donc par dérivation $f_Y(x) = \begin{cases} 3 - 3\sqrt{x} & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.