

Soit  $X$  une variable aléatoire et soit  $F$  sa fonction de répartition. On suppose que  $F$  est continue sur  $\mathbb{R}$ . Soit la variable aléatoire  $Y = F(X)$ . Démontrer que  $Y$  suit une loi uniforme sur  $[0; 1]$ .

On cherche la fonction de répartition de la variable aléatoire  $Y$ . Soit  $t \in \mathbb{R}$ . Par définition :

$$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(F(X) \leq t).$$

Or la fonction de répartition  $F$  prend ses valeurs dans  $[0; 1]$ . On en déduit

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

Soit  $t \in [0; 1[$ . Comme la fonction de répartition  $F$  est croissante et supposée continue sur  $\mathbb{R}$ , il existe au moins un réel  $t_0$  tel que  $F(t_0) = t$ . Alors on a

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= \mathbb{P}(F(X) \leq t) \\ &= \mathbb{P}(F(X) \leq F(t_0)) \\ &= \mathbb{P}(X \leq t_0) \quad \text{car } F \text{ est croissante sur } \mathbb{R} \\ &= F(t_0) \\ &= t. \end{aligned}$$

On a ainsi obtenu

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t & \text{si } t \in [0; 1[ \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

qui correspond à la fonction de répartition de la loi uniforme sur  $[0; 1]$ . Donc  $Y \sim \mathcal{U}([0; 1])$ .