Ex

Estimation et loi puissance

En 2008, le célèbre opérateur FSR proposait un forfait téléphonique de 1 heure mensuelle. Pour étudier la consommation des clients ayant opté pour ce forfait, il a relevé la proportion mensuelle du forfait consommé par 15 clients et a obtenu, après avoir ordonné les résultats :

$$0.29 \quad 0.46 \quad 0.51 \quad 0.61 \quad 0.70 \quad 0.72 \quad 0.76 \quad 0.79$$

$$0.84 \quad 0.85 \quad 0.86 \quad 0.92 \quad 0.94 \quad 0.96 \quad 1$$

Cette répartition suggère de modéliser les observations à l'aide d'une loi puissance de paramètre $(\lambda, 1)$ avec $\lambda > 0$ dont la fonction densité est :

$$f_\lambda(x) = \lambda\, x^{\lambda-1} \mathbf{1}_{[0;1]}(x)$$

1. Á l'aide de la méthode du maximum de vraisemblance, construire un estimateur du paramètre λ, pour un n-échantillon $(X_1, ..., X_n)$. On notera cet estimateur $\widehat{\lambda_n}$.

✓

Avec la log-vraisemblance, on obtient l'estimateur $\widehat{\lambda_n} = \frac{n}{-\sum \ln(x_i)}$.

2. On admet que la variable aléatoire $2n\,\frac{\lambda}{\widehat{\lambda_n}}$ suit une loi $\chi^2(2n)$. En déduire l'expression d'un intervalle de confiance de niveau $1-\alpha$ sous la forme $]-\infty\ ;\ T]$ pour le paramètre λ.

✓

Si on note $q_{\alpha,n}$ le quantile tel que $\mathrm{P}(Z < q_{\alpha,n}) = 1-\alpha$ où $Z \sim \chi^2(n)$, on obtient un intervalle de confiance

$$]-\infty\ ;\ q_{\alpha,2n}\,\frac{\widehat{\lambda_n}}{2n}]$$