

On considère  $n$  lampes,  $n \in \mathbb{N}^*$ . La durée de vie (en années) d'une lampe est une variable aléatoire absolument continue dont la densité  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f: t \mapsto \frac{1}{16}te^{-\frac{t}{4}}\mathbf{1}_{[0;+\infty[}(t)$$

On suppose que les lampes évoluent de manière indépendante.

Pour tout entier  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on note  $X_i$  la variable aléatoire égale à la durée de vie de la  $i$ -ème lampe.

1. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire  $X_1$ .

On note  $F_{X_1}$  la fonction de répartition de la variable aléatoire  $X_1$ . Par définition,

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}, F_{X_1}(t) &= \int_{-\infty}^t f(x)dx \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \int_0^t \frac{1}{16}xe^{-\frac{x}{4}}dx & \text{si } t \geq 0 \end{cases}\end{aligned}$$

c'est-à-dire pour  $t \in \mathbb{R}^+$ ,

$$\begin{aligned}F_{X_1}(t) &= \left[ \frac{-1}{4}xe^{-\frac{x}{4}} \right]_0^t + \int_0^t \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}dx \quad \text{par une I.P.P.} \\ &= \frac{-1}{4}te^{-\frac{t}{4}} + \left[ -e^{-\frac{x}{4}} \right]_0^t \\ &= 1 - e^{-\frac{t}{4}} \left( \frac{t}{4} + 1 \right)\end{aligned}$$

Finalement on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_{X_1}(t) = \left( 1 - e^{-\frac{t}{4}} \left( \frac{t}{4} + 1 \right) \right) \mathbf{1}_{[0;+\infty[}(t)$$

2. Un appareil de type  $A$  comporte 6 lampes, toutes nécessaires à son fonctionnement. On note  $T = \min_{i \in \{1, \dots, 6\}} (X_i)$ .

- (a) Que modélise la variable aléatoire  $T$  ?

La variable aléatoire  $T$  modélise la durée de fonctionnement de l'appareil de type  $A$ .

- (b) Déterminer la loi de  $T$ .

On détermine la fonction de répartition de  $T$  :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_T(t) = \mathbb{P}(T \leq t).$$

Si  $t \leq 0$ ,  $F(t) = 0$ . Soit  $t \in \mathbb{R}^+$ . Alors

$$\begin{aligned}F_T(t) &= \mathbb{P}(\min_{i \in \{1, \dots, 6\}} (X_i) \leq t) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\min_{i \in \{1, \dots, 6\}} (X_i) > t) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\{X_1 > t\} \cap \dots \cap \{X_6 > t\}) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^6 \mathbb{P}(X_i > t) \quad \text{par indépendance des } (X_i)_{i \in \{1, \dots, 6\}} \\ &= 1 - \mathbb{P}(X_1 > t)^6 \quad \text{car les } (X_i)_{i \in \{1, \dots, 6\}} \text{ sont de même loi} \\ &= 1 - (1 - F_{X_1}(t))^6.\end{aligned}$$

En utilisant la question 1, on en déduit que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_T(t) = \left( 1 - e^{-\frac{3t}{2}} \left( 1 + \frac{t}{4} \right)^6 \right) \mathbf{1}_{[0;+\infty[}(t).$$

- (c) Calculer la probabilité que l'appareil de type  $A$  fonctionne de manière continue pendant au moins 4 ans à partir de sa mise en marche, sans changer de lampe.

On cherche à déterminer la probabilité  $\mathbb{P}(T \geq 4)$  :

$$\mathbb{P}(T \geq 4) = 1 - \mathbb{P}(T < 4) = 1 - F_T(4) = 2^6 e^{-6} \simeq 0.1586.$$

La probabilité que l'appareil de type  $A$  fonctionne de manière continue pendant au moins 4 ans à partir de sa mise en marche est d'environ 15.86%.

3. Un appareil de type  $B$  fonctionne avec une lampe seulement. On dispose cette fois d'une lampe de remplacement. Lorsque l'appareil fonctionne et que la lampe tombe en panne, celle-ci est immédiatement remplacée par la lampe de remplacement. Soit  $U$  la variable aléatoire donnant la durée de fonctionnement d'un appareil de type  $B$  avec une lampe de remplacement.

- (a) Exprimer  $U$  en fonction de  $X_1$  et  $X_2$ .

D'après l'énoncé,  $U = X_1 + X_2$ .

- (b) Déterminer la loi de  $U$ .

Comme  $U$  est une somme de deux variables aléatoires indépendantes de densité  $f$ , une densité de  $U$  se calcule à l'aide du produit de convolution : pour  $s \in \mathbb{R}$ ,

$$f_U(s) = f * f(s)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(s-x)f(x)dx$$

$$= \frac{1}{16^2}e^{-\frac{s}{4}}\mathbf{1}_{[0;+\infty[}(s) \int_0^s x(s-x)dx$$

$$= \frac{1}{16^2}e^{-\frac{s}{4}}\mathbf{1}_{[0;+\infty[}(s) \left[ \frac{1}{2}x^2s - \frac{1}{3}x^3 \right]_{x=0}^{x=s}$$

$$= \frac{1}{16^2}e^{-\frac{s}{4}}\mathbf{1}_{[0;+\infty[}(s) \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) s^3$$

$$= \frac{1}{16^2 \times 6} s^3 e^{-\frac{s}{4}} \mathbf{1}_{[0;+\infty[}(s)$$

$$= \frac{1}{1536} s^3 e^{-\frac{s}{4}} \mathbf{1}_{[0;+\infty[}(s),$$

ce qui détermine la loi de  $U$ .

4. On dispose de 4 appareils de type  $B$ , sans aucune lampe de remplacement. On met en marche ces 4 appareils simultanément. On note  $V$  le temps durant lequel au moins un des 4 appareils fonctionne.

- (a) Exprimer  $V$  en fonction de  $X_1, X_2, X_3, X_4$ .

D'après l'énoncé,  $V = \max_{i \in \{1, \dots, 4\}} (X_i)$ .

- (b) En déduire la loi de  $V$ .

Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a :

$$F_V(t) = \mathbb{P}(\max_{i \in \{1, \dots, 4\}} (X_i) \leq t)$$

$$= \mathbb{P}(\{X_1 \leq t\} \cap \dots \cap \{X_4 \leq t\})$$

$$= \prod_{i=1}^4 \mathbb{P}(X_i \leq t) \quad \text{par indépendance des } (X_i)_{i \in \{1, \dots, 4\}}$$

$$= F_{X_1}(t)^4 \quad \text{car les } (X_i)_{i \in \{1, \dots, 4\}} \text{ sont de même loi}$$

$$= \left( 1 - e^{-\frac{t}{4}} \left( 1 + \frac{t}{4} \right) \right)^4 \mathbf{1}_{[0;+\infty[}(t)$$