

Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires admettant pour densité la fonction  $f$  définie par

$$f(x, y) = \frac{3}{8}(x^2 + y^2)\mathbf{1}_{[-1;1]^2}(x, y)$$

Déterminer la loi de  $(X + Y, X - Y)$ .

On pose  $U = X + Y$ ,  $V = X - Y$  et on étudie la loi du couple  $(U, V)$ . D'après le théorème de transfert, si  $h$  est continue bornée,

$$\mathbb{E}(h(U, V)) = \frac{3}{8} \int_{[-1;1]^2} h(x+y, x-y)(x^2 + y^2) dx dy$$

Pour faire apparaître la densité de  $(U, V)$ , on effectue le changement de variable

$$(u, v) = (x + y, x - y)$$

(c'est une bijection de classe  $\mathcal{C}^1$ ). La réciproque s'écrit  $(x, y) = (\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2})$ . La matrice jacobienne est  $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$  et la valeur absolue de son déterminant est  $\frac{1}{2}$ . On peut donc écrire  $dx dy = \frac{1}{2} dudv$  et on a finalement :

$$\mathbb{E}(h(U, V)) = \frac{3}{8} \int_C h(u, v) \left(\frac{u^2 + v^2}{2}\right) \frac{1}{2} dudv$$

où  $C = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / -2 \leq u + v \leq 2 \text{ et } -2 \leq u - v \leq 2\}$  est le carré image de  $[-1; 1]^2$  par le changement de variables.

On en déduit que  $(U, V)$  a pour densité la fonction  $g$  définie par

$$g(u, v) = \frac{3}{16}(u^2 + v^2)\mathbf{1}_C(u, v)$$

Pour avoir indépendamment la loi de  $(X + Y)$  et  $(X - Y)$ , il resterait à calculer les lois marginales.