Ex

Racine multiple

Montrer que le polynôme $P(X) = 1 + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \ldots + \frac{X^n}{n!}$ n'a pas de racine multiple.

✓

Raisonnement par l'absurde : a est racine multiple ssi $P(a) = P'(a) = 0$. On a :

$$P(X) = 1 + X + \frac{X^2}{2!} + \ldots + \frac{X^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{X^n}{n!}$$

$$P'(X) = 1 + X + \frac{X^2}{2!} + \ldots + \frac{X^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\left.\begin{array}{l} P(a) = 0 \quad \Leftrightarrow 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \ldots + \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{a^n}{n!} = 0 \\ P'(a) = 0 \Leftrightarrow 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \ldots + \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a^n}{n!} = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

or 0 n'est pas racine car $P(0) = 1$, donc a ne peut pas être racine simultanément de P et P'. a ne peut pas être racine multiple.