

On se propose de calculer le déterminant de VAN DER MONDE :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & x^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & x^3 \end{vmatrix}$$

1. Quel est le degré du polynôme $P(x) = \Delta$?

Si l'on développe le déterminant Δ par rapport à sa 4^{ème} colonne, on voit que $P(x)$ est un polynôme de degré au plus 3.

2. Sans calculer Δ , donner trois racines évidentes du polynôme $P(x)$. En déduire Δ .

Pour $x = a, \Delta = 0$ car deux colonnes sont identiques. De même, pour $x = b$ et pour $x = c$. Ainsi, a, b et c sont trois racines évidentes de $P(x)$. Ainsi :

$$P(x) = k \cdot (x - a)(x - b)(x - c)$$

où k est le coefficient de x^3 . Ainsi :

$$\begin{aligned} k &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} \\ &= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & c_2 & c_3 - c_2 \\ 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ a^2 & b+a & c-b \end{vmatrix} \\ &= (b-a)(c-a)(c-b) \end{aligned}$$

Conclusion :

$$P(x) = (b-a)(c-a)(c-b)(x-a)(x-b)(x-c)$$

3. Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{vmatrix} = P(-i) \text{ pour } a = 1, b = i \text{ et } c = -1. \text{ Aussi :}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{vmatrix} &= (i-1) \underbrace{(-1-1)}_{-2} (-1-i) (-i-1) \underbrace{(-i-i)}_{-2i} (-i+1) \\ &= 4i \underbrace{(i-1)(-1-i)}_2 \underbrace{(-i-1)(-i+1)}_{-2} \\ &= -16i \end{aligned}$$