cRYI **Exercice** - *Mélange de lois, fonction de répartition*

Soit Z une variable aléatoire admettant une fonction de répartition F_Z définie par :

$$F_Z(x) = \begin{cases} \frac{1}{(2-x)^2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 - \frac{1}{3x} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Graphique : `https://www.geogebra.org/m/vat8nub8`

1. Vérifier que F_Z définit bien une fonction de répartition.
2. Calculer $\mathrm{P}(Z = 0)$ et $\mathrm{P}(Z = 1)$. Peut-on dire que Z est une variable aléatoire absolument continue ?
3. On considère $Y : \Omega \to \{0; 1\}$ une variable aléatoire discrète dont la loi est définie par $\mathrm{P}(Y = k) = \alpha \mathrm{P}(Z = k)$ pour tout $k \in \{0; 1\}$ où α est un paramètre réel à déterminer.
   (a) Montrer que nécessairement, $\alpha = \frac{12}{5}$.
   (b) Déterminer la fonction de répartition F_Y de la variable aléatoire Y.
4. On pose $F(x) = F_Z(x) - \frac{5}{12} F_Y(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Tracer le graphe de la fonction F.
5. Démontrer qu'en multipliant F par une constante, on obtient la fonction de répartition d'une variable aléatoire que l'on notera X.
6. Déterminer une densité de probabilité de la variable X.