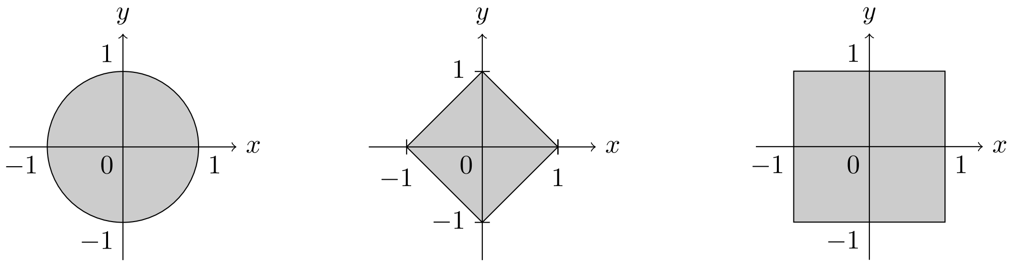
bOga ▷ **Exercice** - *Loi d'un couple de variables aléatoires*

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires admettant pour densité la fonction f définie par

$$f(x, y) = k \cdot \mathbf{1}_{\mathcal{C}}(x, y)$$

où $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leqslant 1\}$ et $k \in \mathbb{R}$.

1. Dire lequel de ces trois domaines de $\mathbb{R}^2$ représentés ci-dessous est le domaine $\mathcal{C}$.



D1 D2 D3

> Le domaine $\mathcal{C}$ est représenté en $D2$. C'est un carré d'aire = 2

2. Déterminer la valeur de $k \in \mathbb{R}$ telle que f définisse bien une fonction densité.

> On choisit k de telle sorte que $f \geqslant 0$ et $\iint f(x, y)dxdy = 1$. Or $\iint f(x, y)dxdy = k \iint_{\mathcal{C}} dxdy = k \times aire(\mathcal{C}) = 2k$. Donc il faut prendre $\boxed{k = \frac{1}{2}}$.
>
> On peut aussi faire calcul de manière analytique en utilisant la relation de Chasles (on distingue selon le signe de x et on encadre y) et le théorème de Fubini :
>
> $$\begin{aligned}\iint\limits_{\mathcal{C}} dxdy &= \int_{-1}^{0} \left(\int_{-1-x}^{1+x} dy \right) dx + \int_{0}^{1} \left(\int_{-1+x}^{1-x} dy \right) dx \\ &= \int_{-1}^{0} (2 + 2x)\, dx + \int_{0}^{1} (2 - 2x)\, dx \\ &= 2\end{aligned}$$

3. Déterminer les lois marginales du couple (X, Y).

> On calcule les densités marginales : pour tout $x \in \mathbb{R}$: Si $x > 1$ ou si $x < -1$: $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y)dy = \int_{\mathbb{R}} 0 = 0$;
> Si $x \in [0; 1]$:
>
> $$\begin{aligned}f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x, y)dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1+x}^{1-x} dy \\ &= 1 - x\end{aligned}$$
>
> Si $x \in [-1; 0]$:
>
> $$\begin{aligned}f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x, y)dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1-x}^{1+x} dy \\ &= 1 + x\end{aligned}$$
>
> Avec des fonctions indicatrices, cela se réécrit pour tout $x \in \mathbb{R}$:
>
> $$f_X(x) = \mathbf{1}_{[-1;0[}(x)(1 + x) + \mathbf{1}_{[0;1[}(x)(1 - x) = \mathbf{1}_{[-1;1]}(x)(1 - |x|)$$
>
> Les rôles étant symétriques en x et en y, on obtient de manière similaire que pour tout $y \in \mathbb{R}$:
>
> $$f_Y(y) = \mathbf{1}_{[-1;0[}(y)(1 + y) + \mathbf{1}_{[0;1[}(y)(1 - y) = \mathbf{1}_{[-1;1]}(y)(1 - |y|)$$

4. Déterminer $cov(X, Y)$.

> On utilise la formule de Huygens : $cov(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. Ainsi, on calcule :
>
> $$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)dx \\ &= \int_{-1}^{0} x(1 + x)dx + \int_{0}^{1} x(1 - x)dx \\ &= -\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \\ &= 0\end{aligned}$$
>
> Du fait que X et Y suivent la même loi, on déduit que $\mathbb{E}(Y) = 0$.
> Il reste à calculer :
>
> $$\begin{aligned}\mathbb{E}(XY) &= \iint\limits_{\mathbb{R}^2} xyf(x, y)dxdy \\ &= \frac{1}{2} \iint\limits_{\mathcal{C}} dxdy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{0} \left(\int_{-1-x}^{1+x} xydy \right) dx + \frac{1}{2} \int_{0}^{1} \left(\int_{-1+x}^{1-x} xydy \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{0} x \left[\frac{y^2}{2} \right]_{-1-x}^{1+x} dx + \frac{1}{2} \int_{0}^{1} x \left[\frac{y^2}{2} \right]_{-1+x}^{1-x} dydx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{0} (x \times 0)dx + \frac{1}{2} \int_{0}^{1} (x \times 0)dx \\ &= 0\end{aligned}$$
>
> On en déduit que $\boxed{\text{cov(X,Y)} = 0}$.

5. Étudier l'indépendance des variables X et Y.

> On pourrait penser que les variables sont indépendantes car leur covariance est nulle. Cependant, ce n'est pas une condition suffisante et on observe que $f_X(x)f_Y(y) \neq f(x, y)$. La conclusion est que $\boxed{X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes}}$.