

**Ex 1 - Loi de Poisson et estimation par maximum de vraisemblance**

On considère un échantillon  $X_1, \dots, X_n$  suivant une loi de Poisson  $\mathcal{P}(\lambda)$ . On cherche un estimateur de  $\lambda$  par la méthode du maximum de vraisemblance. On note  $(x_1, \dots, x_n)$  une réalisation de cet échantillon.

- Exprimer la fonction de vraisemblance  $L(x_1, \dots, x_n, \lambda)$  en fonction de l'échantillon et du paramètre  $\lambda$  à estimer.

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i) \text{ or } X_i \sim \mathcal{P}(\lambda) \text{ donc}$$

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda) = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda}$$

- Trouver pour quelle valeur de  $\lambda$  la fonction de vraisemblance atteint son maximum.

On a

$$\begin{aligned} \ln L(x_1, \dots, x_n, \lambda) &= \sum_{i=1}^n (\ln(\lambda^{x_i}) - \lambda - \ln(x_i!)) \\ &= (\ln \lambda) \sum_{i=1}^n x_i - n\lambda - \sum_{i=1}^n \ln(x_i!) \end{aligned}$$

donc en dérivant par rapport à  $\lambda$ ,

$$\frac{\partial L(x_1, \dots, x_n, \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n x_i - n.$$

Or

$$\frac{\partial L(x_1, \dots, x_n, \lambda)}{\partial \lambda} = 0 \iff \lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

- Conclure.

L'estimateur par maximum de vraisemblance de  $\lambda$  est  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  et une estimation de  $\lambda$  est

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$