jI8R ⊵ **Exercice** - *Fonction de répartition, démonstration de cours*

Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire X quelconque. Démontrer que F est une fonction croissante et continue à droite sur $\mathbb{R}$.

Soit X une variable aléatoire : alors si $x \leqslant y$, on a l'inclusion d'événements $]-\infty; x] \subset]-\infty; y]$ puis par croissance d'une mesure de probabilité, $\mathrm{P}(]-\infty; x]) \leqslant \mathrm{P}(]-\infty; y])$ soit $F_X(x) \leqslant F_X(y)$. Le point 1 est démontré.
Soit $t \in \mathbb{R}$ et une suite (h_n) qui converge vers 0 et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h_n \geqslant 0$. Quitte à extraire une sous-suite décroissante, on suppose que la suite (h_n) est décroissante. Alors $F_X(t+h_n) - F_X(t) = \mathrm{P}(X \in]t; t+h_n]$. Or la suite d'événements (A_n) définie par $A_n = \{X \in]t; t+h_n]\}$ est décroissante donc d'après le théorème de continuité décroissante, $\mathrm{P}(A_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{P}(\bigcap A_n) = \mathrm{P}(\varnothing) = 0$. Le point 2 est démontré.