Ex - Etude d'une loi de probabilité

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \lambda x & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0,1]. \end{cases}$$

1. Calculer λ pour que f soit la densité d'une variable aléatoire absolument continue X.

✓

Pour que f soit une densité, il faut que f soit positive sur $\mathbb{R}$ (ce qui est le cas ici) et que $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Or

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \lambda x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\lambda}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{\lambda}{2}$$

donc $\lambda = 2$.

2. Déterminer $\mathrm{P}\left(X \leqslant \frac{1}{3}\right)$ et $\mathrm{P}\left(X \leqslant \frac{2}{3} \mid X > \frac{1}{3}\right)$.

✓

$$\mathrm{P}\left(X \leqslant \frac{1}{3}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{1}{3}} f(x)\,\mathrm{d}x = [x^2]_0^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{9}$$

$$\mathrm{P}\left(X \leqslant \frac{2}{3} \mid X > \frac{1}{3}\right) = \frac{\mathrm{P}\left(\frac{1}{3} < X \leqslant \frac{2}{3}\right)}{\mathrm{P}\left(X > \frac{1}{3}\right)} = \frac{\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} 2x\,\mathrm{d}x}{1 - \mathrm{P}\left(X \leqslant \frac{1}{3}\right)} = \frac{[x^2]_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{8}{9}} = \frac{3}{8}$$

3. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$.

✓

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 2x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$\mathrm{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left[\frac{1}{2}x^4\right]_0^1 - \frac{4}{9} = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$$