

On souhaite calculer à l'aide d'une méthode de Monte Carlo une approximation de l'intégrale

$$I = \int_0^1 \sin(\sqrt{x}) dx$$

Soit  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées selon une loi uniforme  $\mathcal{U}([0; 1])$ .

- Démontrer que si on définit la suite de variables aléatoires  $(I_n)$  par

$$I_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin(\sqrt{X_k})$$

alors la suite  $(I_n)$  converge presque sûrement vers la constante  $I$ .

- Compléter le code Python suivant, comportant deux champs manquants, afin qu'il affiche une approximation de  $I$ .

```
n=1000
S=0
for i in range(n):
    u = ...
    S= S+sin(sqrt(u))
print("Valeur approchée de I = ")
print(...)
```

- Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $Y_k = \sin(\sqrt{X_k})$ . Les variables aléatoires  $(X_k)$  étant i.i.d., les variables aléatoires  $(Y_k)$  le sont aussi et on note  $\mu$  leur espérance et  $\sigma^2$  leur variance.

- Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire  $I_n$  en fonction de  $\mu$ ,  $\sigma$  et  $n$ .
- Déterminer, en justifiant, une approximation de la loi de la variable aléatoire

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(I_n - I)$$

lorsque  $n$  est suffisamment grand.

- En déduire le nombre d'itérations  $N_0$  (dépendant de  $\sigma$ ) à partir duquel la suite  $(I_n)$  réalise une approximation de  $I$  à  $10^{-3}$  près avec une confiance de 95%.
- Soit la variable

$$V_n = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n (Y_{2k} - Y_{2k-1})^2$$

Vérifier que la suite  $(V_n)$  permet d'approcher la valeur de  $\sigma^2$ .