

Un système électronique est constitué de  $n$  composants disposés en série. Cela implique que la panne d'un composant entraîne la panne de tout le système. Chacun des composants a une durée de vie  $T_k$  qui suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda = 1$ , pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ . On admet que les variables aléatoires  $T_1, \dots, T_n$  sont indépendantes. On note  $S$  la durée de vie du système et on note  $t \geq 0$  la variable de temps.

1. Soit  $t \geq 0$ . Pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ , on note  $R_k(t) = P(T_k > t)$  la fiabilité du composant  $k$  à l'instant  $t$ . C'est la probabilité que le composant  $k$  fonctionne encore après un temps d'utilisation  $t$ . Déterminer  $R_k(t)$ .



$$R_k(t) = \int_t^{+\infty} e^{-x} dx = e^{-t} \text{ pour tout } t \geq 0.$$

2. Calculer  $\mathbb{E}(T_k)$  et déterminer la probabilité que le composant  $k$  fonctionne après un temps d'utilisation égal à  $\mathbb{E}(T_k)$ .



$$\mathbb{E}(T_k) = \frac{1}{\lambda} = 1 \text{ et } R_k(\mathbb{E}(T_k)) = e^{-\mathbb{E}(T_k)} = e^{-1} \approx 0,37.$$

3. On note  $R(t) = P(S > t)$  la fiabilité du système à l'instant  $t$ . C'est la probabilité que le système fonctionne encore après un temps d'utilisation  $t$ . Exprimer  $R(t)$  en fonction de  $R_1(t), \dots, R_n(t)$  et en déduire que  $S$  suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.



$$R(t) = P(S > t) = P(T_1 > t, \dots, T_n > t) = \prod_{k=1}^n P(T_k > t) = \prod_{k=1}^n R_k(t) = e^{-nt} \text{ pour tout } t \geq 0. \text{ Donc } S \text{ suit une loi exponentielle de paramètre } n.$$

4. Déterminer le temps moyen de bon fonctionnement du système.



$$\mathbb{E}(S) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{n}.$$