Hubl ▷ **Exercice** - *Variations autour de la série harmonique*

1. (a) Calculer $\sum_{n=1}^{k} (\ln(n+1) - \ln(n))$ pour tout $k \geqslant 1$ et en déduire la nature de la série :

$$\sum_{n \geqslant 1} (\ln(n+1) - \ln(n))$$

C'est une série télescopique :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{k} (\ln(n+1) - \ln(n)) &= \ln(k+1) - \ln(k) + \ln(k) - \ln(k-1) + ... - \ln(2) + \ln(2) - \ln(1) \\ &= \ln(k+1) - \ln(1) \\ &= \ln(k+1) \xrightarrow[k \to +\infty]{} +\infty\end{aligned}$$

Donc par définition d'une série convergente, la série $\sum_{n \geqslant 1} (\ln(n+1) - \ln(n))$ diverge car la suite des sommes partielles diverge.

(b) On admet que pour tout $x \geqslant 0$, $\ln(1+x) \leqslant x$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}$$

.

On remarque que $\ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ or d'après la question précédente, $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}$.

(c) En déduire que la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge.

D'après la question 1.b), on a

$$\sum_{n=1}^{k} (\ln(n+1) - \ln(n)) \leqslant \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n}$$

donc par théorème des gendarmes, $\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} \xrightarrow[k \to +\infty]{} +\infty$ ce qui permet de redémontrer le résultat du cours : la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$ est une série divergente.

2. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose :

$$u_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}$$

(a) Déterminer $\lim_{n \to +\infty} e^{-\frac{\ln(n)}{n}}$.

Par théorème de croissances comparées, on sait que $\frac{\ln(n)}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc par composition de limites, $e^{-\frac{\ln(n)}{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{-0} = 1$.

(b) Démontrer que $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Il suffit de calculer la limite du quotient et montrer qu'elle est égale à 1 :

$$\begin{aligned}\frac{u_n}{\frac{1}{n}} &= n \times u_n = n \times \left(\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}} \\ &= n \times \frac{1}{n} \times \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \\ &= \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \\ &= e^{\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right)} \\ &= e^{-\frac{\ln(n)}{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1\end{aligned}$$

(c) La série $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ est-elle convergente ?

La série $\sum u_n$ est une série à termes positifs, le terme général est équivalent au terme général d'une série de Riemann divergente donc la série $\sum u_n$ est divergente.

(d) La série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{u_n}{n^{\frac{1}{10}} + \frac{1}{10}}$ est-elle convergente ?

Il est clair que $n^{\frac{1}{10}} + \frac{1}{10} \underset{n \to +\infty}{\sim} n^{\frac{1}{10}}$ donc par quotient d'équivalents :

$$\frac{u_n}{n^{\frac{1}{10}} + \frac{1}{10}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{n}}{n^{\frac{1}{10}}} = \frac{1}{n^{\frac{11}{10}}}$$

. On reconnaît le terme général d'une série de Riemann convergente. Par équivalence, la série à termes positifs $\sum \frac{u_n}{n^{\frac{1}{10}} + \frac{1}{10}}$ est convergente.