

Exercice - Loi uniforme, max, min, stratégie

Etant donnés trois nombres réels dans l'intervalle $[0; 1]$, on définit deux stratégies :

Stratégie A : choisir le plus grand des trois nombres ;

Stratégie B : choisir la somme des deux nombres les plus petits.

Deux personnes jouent au jeu comportant les étapes suivantes :

- choisir entre la stratégie A et la stratégie B ;
- à l'aide d'un générateur pseudo aléatoire, tirer au hasard et de manière indépendante trois nombres réels entre 0 et 1 ;
- le gagnant est celui qui obtient la plus grande valeur, compte tenu de la stratégie choisie.

On note X_1, X_2, X_3 les nombres obtenus lors des tirages au sort. On note Y_A la variable égale à la valeur obtenue par la stratégie A et Y_B la variable égale à la valeur obtenue par la stratégie B.

1. Quelle la loi de probabilité suivie par chaque variable aléatoire $X_i, i \in \{1, 2, 3\}$?

X_1, X_2 et X_3 suivent une loi uniforme sur $[0; 1]$.

2. Exprimer Y_A en fonction des X_i .

$$Y_A = \max(X_1, X_2, X_3)$$

3. Exprimer Y_B en fonction de Y_A et des X_i .

$$Y_B = X_1 + X_2 + X_3 - Y_A$$

4. Déterminer la fonction de répartition de Y_A . En déduire que Y_A est une variable aléatoire absolument continue dont on déterminera la densité.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F_{Y_A}(t) = \mathbb{P}(Y_A \leq t) = \mathbb{P}(\max(X_1, X_2, X_3) \leq t) = \mathbb{P}(\{X_1 \leq t\} \cap \{X_2 \leq t\} \cap \{X_3 \leq t\}).$$

Comme les variables aléatoires X_i sont i.i.d., on obtient :

$$F_{Y_A}(t) = \mathbb{P}(X_1 \leq t)\mathbb{P}(X_2 \leq t)\mathbb{P}(X_3 \leq t) = (F_{X_1}(t))^3.$$

Donc $F_{Y_A}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t^3 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{si } t > 1 \end{cases}$. La variable aléatoire Y_A est donc absolument continue et sa densité vaut $f_{Y_A}(t) = F'_{Y_A}(t) = 3t^2 \mathbf{1}_{[0;1]}(t)$.

5. Y a-t-il une meilleure stratégie ?

Comparons l'espérance des variables aléatoires Y_A et Y_B :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_A) &= \int_0^1 x \times 3x^2 \, dx = \left[\frac{3}{4}x^4 \right]_0^1 = \frac{3}{4}, \\ \mathbb{E}(Y_B) &= \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) + \mathbb{E}(X_3) - \mathbb{E}(Y_A) = \frac{1}{2} \times 3 - \frac{3}{4} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Les deux stratégies sont donc équivalentes.

Pour comparer les deux stratégies plus finement, il faut calculer $\mathbb{P}(Y_B \geq Y_A)$.

Comme $\{Y_B \geq Y_A\} = \{X_1 + X_2 + X_3 - 2Y_A \geq 0\}$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_B \geq Y_A) &= \int_{[0;1]^3} \mathbb{1}_{\{x_1+x_2+x_3-2\max(x_1,x_2,x_3) \geq 0\}} \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 \\ &= \int_{D_1} dx_1 \, dx_2 \, dx_3 + \int_{D_2} dx_1 \, dx_2 \, dx_3 + \int_{D_3} dx_1 \, dx_2 \, dx_3 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in [0; 1]^3 \mid x_2 \leq x_1, x_3 \leq x_1, x_2 + x_3 \geq x_1\} \\ D_2 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in [0; 1]^3 \mid x_1 \leq x_2, x_3 \leq x_2, x_1 + x_3 \geq x_2\} \\ D_3 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in [0; 1]^3 \mid x_1 \leq x_3, x_2 \leq x_3, x_1 + x_2 \geq x_3\} \end{aligned}$$

Par permutations des indices, il est immédiat que les trois intégrales sont égales or

$$\int_{D_1} dx_1 \, dx_2 \, dx_3 = \int_0^1 \int_0^{x_1} \int_{x_1-x_2}^{x_1} dx_3 \, dx_2 \, dx_1 = \int_0^1 \int_0^{x_1} x_2 \, dx_2 \, dx_1 = \int_0^1 \frac{x_1^2}{2} \, dx_1 = \frac{1}{6}.$$

Ainsi $\mathbb{P}(Y_B \geq Y_A) = 3 \int_{D_1} dx = \frac{1}{2}$. On retrouve que les deux stratégies sont équivalentes, au sens où si le joueur A adopte la stratégie 1 et le joueur B adopte la stratégie 2, alors A et B ont la même probabilité $\frac{1}{2}$ de gagner.