Ex - Maximum de vraisemblance pour une loi géométrique

On rappelle qu'une variable X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$ si X est à valeurs dans $\mathbb{N}^* = \{1;2;3;...\}$ et si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$$

On cherche à estimer ce paramètre p à partir d'un échantillon.

1. On considère un échantillon $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ ayant pour loi mère une loi géométrique de paramètre p et on suppose que la suite $(3;4;4;2;3)$ constitue une réalisation de cet échantillon.

   (a) Exprimer la fonction de vraisemblance associée à cet échantillon.

   ✓

   D'après le cours, la fonction de vraisemblance associée à cet échantillon est donnée par :

   $$\begin{aligned} L(p) &= \mathrm{P}(X_1 = 3) \times \mathrm{P}(X_2 = 4) \times \mathrm{P}(X_3 = 4) \times \mathrm{P}(X_4 = 2) \times \mathrm{P}(X_5 = 3) \\ &= p(1-p)^2 \times p(1-p)^3 \times p(1-p)^3 \times p(1-p) \times p(1-p)^2 \\ &= p^5(1-p)^{11} \end{aligned}$$

   (b) En déduire une estimation de p par la méthode du maximum de vraisemblance.

   ✓

   On cherche à maximiser la fonction L sur $]0;1[$. Pour cela, on calcule la dérivée de L :

   $$\begin{aligned} L'(p) &= 5p^4(1-p)^{11} - 11p^5(1-p)^{10} \\ &= p^4(1-p)^{10}(5-11p) \end{aligned}$$

   La fonction L est dérivable sur $]0;1[$ et $L'(p) = 0$ si et seulement si $p = 0$, $p = 1$ ou $p = \frac{5}{11}$.
   Or, $L(0) = 0$, $L(1) = 0$ et $L(\frac{5}{11}) > 0$.
   Donc, L admet un maximum en $p = \frac{5}{11}$.
   En conclusion, la valeur la plus vraisemblable pour p est $\frac{5}{11}$. Il s'agit donc d'une estimation du paramètre p par la méthode du maximum de vraisemblance.

2. Afin de déterminer un estimateur de p, on considère maintenant un n-échantillon $(X_1, ..., X_n)$ ayant pour loi mère une loi géométrique de paramètre p et n entiers non nuls $(x_1, ..., x_n)$ constituant une réalisation de cet échantillon.

   (a) Exprimer la fonction de vraisemblance associée à cet échantillon.

   ✓

   $$\begin{aligned} L(x_1, ..., x_n, p) &= \mathrm{P}(X_1 = x_1) \times ... \times \mathrm{P}(X_n = x_n) \\ &= p(1-p)^{x_1-1} \times ... \times p(1-p)^{x_n-1} \\ &= p^n(1-p)^{x_1+...+x_n-n} \end{aligned}$$

   (b) En utilisant la méthode du maximum de vraisemblance, déterminer un estimateur du paramètre p.

   ✓

   On cherche à maximiser la fonction L sur $]0;1[$. Pour cela, on calcule la dérivée partielle de L par rapport à p :

   $$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial p}(x_1, ..., x_n, p) &= np^{n-1}(1-p)^{x_1+...+x_n-n} - p^n(x_1 + ... + x_n - n)(1-p)^{x_1+...+x_n-n-1} \\ &= p^{n-1}(1-p)^{x_1+...+x_n-n-1}(n - (x_1 + ... + x_n - n)p) \end{aligned}$$

   La fonction L est dérivable sur $]0;1[$ et $\frac{\partial L}{\partial p}(p) = 0$ si et seulement si $p = 0$, $p = 1$ ou $p = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}$.

   Or, $L(0) = 0$, $L(1) = 0$ et $L\left(\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}\right) > 0$.
   Donc, L admet un maximum en $p = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}$.
   Ceci étant vrai pour toute réalisation $(x_1, ..., x_n)$ de l'échantillon, on en déduit que $\widehat{p} = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}$ est un estimateur du paramètre p par la méthode du maximum de vraisemblance.