nxfH ▷ **Exercice** - *Convergence d'une suite de variables aléatoires*

Soit X une variable aléatoire de densité f_θ définie par :

$$f_\theta(x) = \theta x^{\theta-1} 1_{]0;1[}(x)$$

où $\theta > 0$. Soit une suite (X_n) de variables aléatoires indépendantes suivant chacune la même loi que X. On pose

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad\qquad U_n = \frac{\overline{X}_n}{1-\overline{X}_n}$$

1. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$.

   On calcule les moments d'ordre 1 et 2 : $\mathbb{E}(X) = \int_0^1 \theta x^\theta dx = \frac{\theta}{\theta+1}$ et $\mathbb{E}(X^2) = \int_0^1 \theta x^{\theta+1} dx = \frac{\theta}{\theta+2}$ d'où $V(X) = \frac{\theta}{(\theta+1)^2(\theta+2)}$.

2. Montrer que la suite $(\overline{X}_n)$ converge en probabilité vers un réel $g(\theta)$ que l'on précisera.

   D'après la loi faible des grands nombres, $\overline{X}_n \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathbb{E}(X) = \frac{\theta}{\theta+1}$.

3. En déduire que la suite (U_n) converge en probabilité vers le réel θ.

   La fonction $f : y \mapsto \frac{y}{1-y}$ est continue sur $]0;1[$ donc par composition, $f(\overline{X}_n) = U_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} h(g(\theta)) = \theta$.

4. On pose

$$T_n = \frac{1}{1+U_n}\sqrt{\frac{U_n}{U_n+2}}$$

   La suite (T_n) converge-t-elle en probabilité ? Si oui, déterminer sa limite.

   De même, $T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \frac{1}{1+\theta}\sqrt{\frac{\theta}{\theta+2}}$.

5. Vérifier que la suite (V_n) définie par

$$V_n = \sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \frac{\theta}{\theta+1}\right)$$

   converge en loi vers une loi normale dont on précisera les paramètres.

   D'après le Théorème Central Limite,

$$\frac{\overline{X}_n - \mathbb{E}(\overline{X}_n)}{\sqrt{V(\overline{X}_n)}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

   avec $\mathbb{E}(\overline{X}_n) = n \times \frac{\theta}{n(\theta+1)} = \frac{\theta}{\theta+1}$ et $V(\overline{X}_n) = \frac{1}{n^2} \times n \times \frac{\theta}{(\theta+1)^2(\theta+2)}$. Donc

$$\frac{\overline{X}_n - \frac{\theta}{\theta+1}}{\sqrt{\frac{\theta}{n(\theta+1)^2(\theta+2)}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

   donc

$$\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \frac{\theta}{\theta+1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2 = \frac{\theta}{(\theta+1)^2(\theta+2)}\right)$$

6. Déterminer une suite de réels (a_n) et un un réel $m(\theta)$ tels que la suite de variables aléatoires (Z_n) définie par

$$Z_n = a_n \frac{\overline{X}_n - m(\theta)}{T_n}$$

   converge en loi vers une limite à préciser.

   On sait que $T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \frac{1}{1+\theta}\sqrt{\frac{\theta}{\theta+2}}$ donc $T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \frac{1}{1+\theta}\sqrt{\frac{\theta}{\theta+2}}$ et d'après la propriété de Slutsky, la suite de variables $\left(\frac{V_n}{T_n}\right)$ converge vers $\frac{V}{\frac{1}{1+\theta}\sqrt{\frac{\theta}{\theta+2}}}$ où V suit une loi $\mathcal{N}\left(0, \sigma^2 = \frac{\theta}{(\theta+1)^2(\theta+2)}\right)$. Donc $\frac{V}{\frac{1}{1+\theta}\sqrt{\frac{\theta}{\theta+2}}}$ suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$.