GHil **Exercice** - *Une suite de variables aléatoires*

Soit X une variable aléatoire réelle de densité f_θ définie par

$$f_\theta(x) = (1-\theta)1_{[-\frac{1}{2};0]}(x) + (1+\theta)1_{]0;\frac{1}{2}]}(x)$$

où θ est un paramètre réel tel que $|\theta| \neq 1$.

1. A quelles conditions sur θ la fonction f_θ est bien une densité de probabilité ?
2. Calculer l'espérance de X.
3. Soient n variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ indépendantes et identiquement distribuées selon la loi de X. On définit les variables aléatoires :

$$U_n = \sum_{i=1}^{n} 1_{]-\infty;0]}(X_i) \qquad V_n = \sum_{i=1}^{n} 1_{]0;+\infty[}(X_i)$$

   (a) Vérifier que si $1 \leqslant i \leqslant n$ alors la variable aléatoire $1_{]0;+\infty[}(X_i)$ suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre.

   (b) En déduire que V_n suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

   (c) Vérifier que la variable aléatoire $U_n + V_n$ est constante.

   (d) Calculer l'espérance de la variable aléatoire $\dfrac{V_n - U_n}{n}$.

   (e) Vérifier que $\mathbb{E}(U_n V_n) = (n^2 - n)\frac{1-\theta^2}{4}$ et en déduire $\mathrm{cov}(U_n, V_n)$.

   (f) Montrer que la variance de $\dfrac{V_n - U_n}{n}$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.