

On tire sur une cible munie d'un repère orthonormé centrée sur son origine O . On note (X, Y) les coordonnées cartésiennes d'un tir. On remarque que lorsque le tireur vise le centre de la cible, la loi suivie par (X, Y) admet une densité

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{\frac{-x^2 - y^2}{2}}$$

On note R la distance entre le point d'impact et le point visé.

1. Calculer les lois marginales du couple (X, Y) . Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Ecrire la fonction de répartition de R sous la forme d'une intégrale double, puis effectuer le changement de variables en coordonnées polaires pour simplifier l'expression.
3. En déduire une densité de R . La loi obtenue s'appelle la loi de Rayleigh .
4. Montrer que R^2 suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(1/2)$.
5. Montrer que si Θ est la variable aléatoire telle que $X = R \cos(\Theta)$, $Y = R \sin(\Theta)$, alors Θ suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.
6. En déduire une simulation de la loi du couple (X, Y) .