

Soit la fonction  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$f(x, y) = \frac{x + y}{x^2 + y^2}$$

1. Donner l'ensemble de définition de  $f$ .



La fonction  $f$  est définie pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tels que  $x^2 + y^2 \neq 0$ , c'est-à-dire  $(x, y) \neq (0, 0)$ . L'ensemble de définition est donc  $\mathcal{D}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) \neq (0, 0)\}$ .

2. Montrer que la courbe de niveau  $k = 0$  est une droite dont on précisera l'équation.



$f(x, y) = 0 \iff y = -x$ , la courbe de niveau 0 est donc la droite d'équation  $y = -x$ .

3. Quelle est la forme des courbes de niveau  $k \neq 0$  ?



Soit  $k \neq 0$  :  $f(x, y) = k \iff x + y = k(x^2 + y^2) \iff x^2 + y^2 - \frac{1}{k}x - \frac{1}{k}y = 0$ , la courbe de niveau  $k$  est donc un cercle.

4. Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x)$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, -x)$ .



$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \begin{cases} +\infty & \text{si } x > 0 \\ -\infty & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

$$\text{De même, } \lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{2x^2} = \begin{cases} +\infty & \text{si } x > 0 \\ -\infty & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

$$\text{Enfin, } \lim_{x \rightarrow 0} f(x, -x) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0.$$

5. Peut-on prolonger la fonction  $f$  en  $(0, 0)$  afin qu'elle soit continue en  $(0, 0)$  ? Justifier.



Pour pouvoir prolonger la fonction  $f$  en  $(0, 0)$  afin qu'elle soit continue en  $(0, 0)$ , il faudrait que  $f$  admette une limite quand  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ . D'après la question précédente, ce n'est pas le cas.