

Exercice - Lois, fonctions caractéristiques pour un couple

On pose $f(x, y) = k(1 + xy(x^2 - y^2))\mathbf{1}_{[-1;1]^2}(x, y)$.

- Déterminer la valeur de k pour que f soit une densité de probabilité associée à un couple de variables aléatoires (X, Y) .

f est positive sur \mathbb{R} si $k \geq 0$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 k(1 + x^3y - xy^3) dx dy \\ &= \int_{-1}^1 k \left[x + \frac{1}{4}x^4y - \frac{1}{2}x^2y^3 \right]_{x=-1}^1 dy \\ &= \int_{-1}^1 2kdy \\ &= 4k. \end{aligned}$$

Pour $k = \frac{1}{4}$, f est positive sur \mathbb{R} et $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$ donc f est une densité de probabilité.

- Déterminer les densités marginales de X et de Y , ainsi que leurs fonctions caractéristiques. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Les lois marginales de X et de Y sont

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \\ &= \frac{1}{4} \mathbf{1}_{[-1;1]}(x) \int_{-1}^1 (1 + x^3y - xy^3) dy \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{1}_{[-1;1]}(x). \end{aligned}$$

Par symétrie, on obtient $f_Y(y) = \frac{1}{2} \chi_{[-1;1]}(y)$. Donc X et Y sont deux variables aléatoires de loi uniforme sur $[-1; 1]$.

Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \phi_X(t) &= \mathbb{E}(e^{itX}) \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f_X(x) dx \quad (\text{théorème de transfert}) \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{itx} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{it} e^{itx} \right]_{x=-1}^{x=1} \quad \text{si } t \neq 0 \\ &= \frac{1}{2it} (e^{it} - e^{-it}) \quad \text{si } t \neq 0 \\ &= \frac{\sin t}{t} \quad \text{si } t \neq 0. \end{aligned}$$

Pour $t = 0$, $\phi_X(t) = \mathbb{E}(1) = 1 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t}$ donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi_X(t) = \frac{\sin t}{t}$. Comme X et Y sont de même loi, on a également pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi_Y(t) = \frac{\sin t}{t}$.

Les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes car leur densité jointe n'est pas le produit de leurs densités marginales.

- Calculer la fonction caractéristique de $X + Y$.

Soit $t \in \mathbb{R}^*$. On a

$$\begin{aligned} \phi_{X+Y}(t) &= \mathbb{E}(e^{itX} e^{ity}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{itx} e^{ity} f(x, y) dx dy \quad (\text{théorème de transfert}) \\ &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 e^{itx} e^{ity} dx dy + \frac{1}{4} \left(\int_{-1}^1 \int -1^1 x^3 y e^{itx} e^{ity} dx dy - \int_{-1}^1 \int -1^1 x y^3 e^{itx} e^{ity} dx dy \right) \\ &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 e^{itx} dx \int_{-1}^1 e^{ity} dy + 0 \\ &= \left[\frac{1}{2it} (e^{it} - e^{-it}) \right]^2 \\ &= \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 \end{aligned}$$

et par continuité de la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ en 0, on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi_{X+Y}(t) = \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2.$$

Ici, on peut remarquer que nous avons l'égalité $\phi_{X+Y} = \phi_X \phi_Y$ malgré le fait que les variables aléatoires X et Y ne soient pas indépendantes.