

1. Exprimer sous forme d'une série entière la solution de l'équation différentielle (E) :

$$x^2 y''(x) + x(x+1)y'(x) - y(x) = 0 \quad y'(0) = 1.$$

Soit y une solution développable en série entière, de rayon de convergence R : on note $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et on a

$$\forall x \in]-R; R[, \quad y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{et} \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} y \text{ solution de (E)} &\Leftrightarrow \forall x \in]-R; R[, \quad -a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} [(n-1)(n+1)a_n - (n-1)a_{n-1}]x^n = 0 \\ &\Leftrightarrow a_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2, \quad a_n = \frac{-1}{n+1} a_{n-1} \end{aligned}$$

La condition initiale donne : $y'(0) = a_1 = 1$. On en conclut que $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et pour tout $n \geq 2$, $a_n = 2 \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$ et donc

$$y(x) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} x^n,$$

définie sur l'intervalle \mathbb{R} .

2. Déterminer l'intervalle de convergence I de la série entière solution de l'équation différentielle ci-dessus.

Fait ci-dessus : $D = \mathbb{R}$.

3. Déterminer la fonction somme de cette série entière.

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad xy(x) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} x^{n+1} = 2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = 2 \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} - (1-x) \right]$$

d'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \begin{cases} \frac{2}{x}(e^{-x} - 1 + x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$