

On pose

$$f(x, y) = x(x+1)^2 - y^2$$

1. Déterminer les points stationnaires de la fonction f et préciser la nature de chacun d'eux.



On a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y$ et $\frac{\partial f}{\partial x} = (x+1)(3x+1)$

On a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \iff y = 0$

et $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \iff x \in \{-1; -1/3\}$.

Donc les points stationnaires de f sont les points $(-1, 0)$ et $(-1/3, 0)$.

Pour étudier la nature de ces points stationnaires, on utilise les conditions d'ordre 2 en donnant la matrice hessienne :

$$\text{Hess}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x + 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

d'où $\text{Hess}_f(-1, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $\text{Hess}_f(-1/3, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

On a $(-2) \times (-2) > 0$ et $-2 < 0$ donc la fonction f présente un maximum local en $(-1, 0)$.

De même, $2 \times (-2) < 0$ donc la fonction f présente un point selle en $(-1/3, 0)$.

2. Tracer la courbe constituée des points tels que $f(x, y) = 0$ et $x \geq 0$ en faisant apparaître des éléments qualitatifs (tangente, inflexion de la courbe).



On cherche l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x, y) = 0 \iff y^2 = x(x+1)^2$.

Si on se restreint aux $x \geq 0$, $f(x, y) = 0 \iff y = \sqrt{x}(x+1)$.

Pour étudier la courbe d'équation $y = \sqrt{x}(x+1)$ pour $x \geq 0$ dans le plan, on pose $g(x) = \sqrt{x}(x+1)$: c'est une fonction continue sur $[0; +\infty[$ et dérivable sur $]0; +\infty[$.

Pour tout $x > 0$, on a :

$$g'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{2}(\sqrt{x})^{-1} > 0$$

et

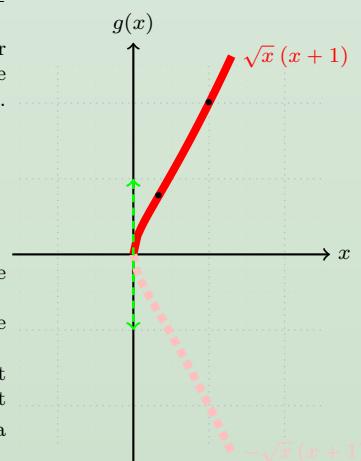
$$g''(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$$

De l'expression de $g(x)$, on déduit que la courbe passe par les points $(0, 0)$, $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\sqrt{3})$, $(1, 2)$, et $(2, 3\sqrt{2})$;

De l'expression de $g'(x)$, on déduit que la courbe a une tangente verticale à l'origine.

De la résolution de $g''(x) = 0$, on déduit que le point $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\sqrt{3})$ est un point d'inflexion, la pente en ce point vaut $g'(\frac{1}{3}) = \sqrt{3}$, et c'est la pente minimale de la courbe.

La courbe constituée des points tels que $f(x, y) = 0$ et $x \geq 0$ s'obtient par réflexion de la courbe $y = \sqrt{x}(x+1)$ pour $x \geq 0$ par rapport à l'axe des x .



3. Montrer que le point $(-1, 0)$ est un point isolé de la partie $\mathcal{C} = \{(x, y); f(x, y) = 0\}$



du plan, c'est-à-dire, le point $(-1, 0)$ appartient à cette partie et il existe un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que $D_\varepsilon \cap \mathcal{C} = \{(-1, 0)\}$ où D_ε est le disque ouvert centré en $(-1, 0)$ et de rayon ε .

Dans la boule ouverte $\{(x, y, z); (x+1)^2 + y^2 + z^2 < 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$, on est notamment dans le demi espace $\{x < 0\}$. Or si $x < 0$ et $f(x, y) = 0$ alors nécessairement $y^2 = x(x+1)^2 \geq 0$ ce qui ne laisse d'autre choix que d'avoir $(x+1)^2 = 0$.

Par conséquent, le graphe $z = f(x, y)$ de la fonction f ne rencontre le plan des x et y qu'au point $(-1, 0)$. Par conséquent, l'intersection $D \cap \mathcal{C}$ du disque

$$D = \{(x, y); (x+1)^2 + y^2 < 1\}$$

avec \mathcal{C} ne consiste qu'au point $(-1, 0)$.