

1. Donner un développement en série entière de la fonction  $u \mapsto \ln(1 - u)$ , en précisant le rayon de convergence ;



$$\text{Quelque soit } u \in ]-1; 1[, \ln(1 - u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1}{n} u^n = -u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} + \dots$$

2. En déduire un développement en série entière de la fonction  $x \mapsto \ln(1 + x + x^2)$  (on précisera son rayon de convergence et on pourra utiliser que  $(1 - x^3) = (1 - x)(1 + x + x^2)$ ).



On a donc  $\ln(1 - x^3) = \ln(1 - x) + \ln(1 + x + x^2)$ .

$$\text{Or } \ln(1 - x) = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{1}{n} x^n \text{ et } \ln(1 - x^3) = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{1}{n} x^{3n} \text{ donc}$$

$$\begin{aligned} \ln(1 + x + x^2) &= \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{1}{n} x^{3n} - \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{1}{n} x^n \\ &= -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^{3n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n \end{aligned}$$

avec  $a_n = -\frac{3}{n} + \frac{1}{n} = \frac{-2}{n}$  s'il existe  $p$  tel que  $n = 3p$ ,  $a_n = \frac{1}{n}$  sinon.