

Soit X une variable aléatoire dont la loi est déterminée par la fonction densité définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 \right]$$

1. A l'aide d'un changement de variable, calculer $\mathbb{E}(X)$.

On exprime l'intégrale en posant le changement de variable affine $u = \frac{x-\mu}{\sigma} \iff x = \sigma u + \mu$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma u + \mu) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \sigma du \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u e^{-\frac{u^2}{2}} du + \mu \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ &= 0 + \mu \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ &= 0 + \mu \times 1 \\ &= \mu \end{aligned}$$

2. Calculer la variance de X .

On utilise le même changement de variable :

$$\mathbb{E}((X - \mu)^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] dx$$

devient, après changement de variables ci-dessus :

$$E((X - \mu)^2) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \exp \left[-\frac{u^2}{2} \right] du.$$

En intégrant par parties, on trouve directement que

$$E((X - \mu)^2) = \sigma^2.$$

3. Soit $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$. Déterminer la loi de Z .

En effectuant toujours le même changement de variables $u = \frac{x-\mu}{\sigma}$, on a pour tout réel t :

$$P(Y \leq t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] dx = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{u^2}{2} \right] du.$$

La densité de la variable aléatoire Y est donc la fonction

$$f_Y(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{u^2}{2} \right],$$

qui correspond à celle de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.