WmCw ⊳ **Exercice** - *Calcul de dérivées partielles*

Pour chacune des fonctions suivantes : préciser l'ensemble de définition, puis calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$.

1. $f(x,y) = x^2 - 6xy - 6y^2 + 2x + 24y$

La fonction f est polynomiale en x et y, elle définie sur $\mathbb{R}^2$. Les dérivées partielles existent également pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2x - 6y + 2\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= -6x - 12y + 24\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= 2\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= -12\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -6
\end{aligned}$$

2. $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - \frac{x^3}{y}$

La fonction f est définie sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\}$. Les dérivées partielles existent également pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ telles que $y \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2x - \frac{3x^2}{y}\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 4y + \frac{x^3}{y^2}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= 2 - \frac{6x}{y}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= 4 - 2\frac{x^3}{y^3}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{3x^2}{y^2}
\end{aligned}$$

3. $f(x,y) = \exp(2x^2 + xy + 7x + y^2)$

La fonction f est une composée d'une exponentielle avec une fonction polynomiale en x et y, elle définie sur $\mathbb{R}^2$. Les dérivées partielles existent également pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= (4x + y + 7)\exp(2x^2 + xy + 7x + y^2)\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= (x + 2y)\exp(2x^2 + xy + 7x + y^2)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= (4 + (4x + y + 7)^2)\exp(2x^2 + xy + 7x + y^2)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= (2 + (x + 2y)^2)\exp(2x^2 + xy + 7x + y^2)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = (1 + (x + 2y)(4x + y + 7))\exp(2x^2 + xy + 7x + y^2)
\end{aligned}$$

4. $f(x,y) = \sin(xy)$

La fonction f est une composée d'un cosinus avec une fonction polynomiale en x et y, elle définie sur $\mathbb{R}^2$. Les dérivées partielles existent également pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et on observe que les rôles sont symétriques en x et y :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= y\cos(xy)\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= x\cos(xy)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= -y^2\sin(xy)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= -x^2\sin(xy)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \cos(xy) - xy\sin(xy)
\end{aligned}$$

5. $f(x,y) = \ln(x + y)$

La fonction f est une composée d'un ln avec une fonction polynomiale en x et y, elle est définie sur le demi plan $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y > 0\}$. Les dérivées partielles existent également pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ telles que $x + y > 0$ et on observe que les rôles sont symétriques en x et y :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{1}{x+y}\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{1}{x+y}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= -\frac{1}{(x+y)^2}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= -\frac{1}{(x+y)^2}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -\frac{1}{(x+y)^2}
\end{aligned}$$