cpBJ $\trianglerighteq$ **Exercice** - *Complexes et matrices*

L'ensemble des nombres complexes est défini par $\mathbb{C} = \{a + ib/a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$ avec $i^2 = -1$. L'addition est définie par : $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$ et la multiplication est donnée par : $(a + ib) \times (c + id) = (a.c - b.d) + i(ad + bc)$. A chaque nombre complexe $a + ib$, on associe la matrice $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

1. On note par J la matrice associée au nombre i. Montrer que $J^2 = -I_2$, où I est la matrice identité.
2. Si les matrices $M(a, b)$ et $M'(a', b')$ sont associées respectivement aux nombres $z = (a + ib)$ et $z' = (a' + ib')$, montrer que $M(a, b) \cdot M'(a', b')$ correspond au produit des nombres complexes : $z.z'$.
3. Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ non nulle, évaluer la matrice inverse A^{-1}. Identifier le nombre complexe correspondant.