

On considère un échantillon  $(X_i)$  de taille  $n = 5$  dans une population suivant une loi normale de paramètres  $\mu$  et  $\sigma^2$ . On pose

$$T_1 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 X_i \quad T_2 = \frac{1}{5}(X_1 + X_2) + \frac{1}{4}(X_3 + X_4 + X_5) \quad T_3 = \frac{1}{10}(2X_1 + 3X_2) + \frac{1}{8}(X_3 + 2X_4 + X_5)$$

$$U = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^5 (X_i - \mu)^2 \quad V = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^5 (X_i - T_1)^2$$

1. Quelle est la loi suivie par la variable  $X_1 - X_2$  ? Justifier.
2. On cherche à estimer  $\mu$  à l'aide des estimateurs  $T_1, T_2, T_3$ . Étudier leur biais et comparer l'efficacité des estimateurs sans biais.
3. Quelle est la loi suivie par la variable  $U$  ? la variable  $V$  ? justifier.
4. Déterminer  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $P(U > x) = 0,05$ .
5. En utilisant  $T_1$  et  $U$ , construire une variable  $Y$  qui suive une loi de Student dont on précisera le paramètre.