

Exercice - Calculs de lois

Soient $(X_i)_{1 \leq i \leq 9}$ des variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, suivant chacune une loi normale de moyenne $\mu = 2$ et de variance $\sigma^2 = 9$.

- Déterminer la probabilité de l'événement $\{X_1 \geq 1\}$.

X_1 suit une loi $\mathcal{N}(2, 3^2)$ donc $P(X_1 \geq 1) = P\left(\frac{X_1 - 2}{3} \geq \frac{1-2}{3}\right) = P(U \geq -0.3333)$ où U suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Or par symétrie, $P(U \geq -0.3333) = P(U \leq 0.3333)$ et d'après la table, $P(U \leq 0.3333) = 0.6293$

Donc $P(X_1 \geq 1) = 0.6293$

- Soit Y la variable aléatoire définie par

$$Y = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 X_i$$

Déterminer la loi de Y et calculer $P(Y \geq 1)$.

On sait que $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 \mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{9} \times 9 \times 2 = 2$.

On sait que par indépendance des variables, $\sigma^2(Y) = \frac{1}{9^2} \sum_{i=1}^9 \sigma^2(X_i) = \frac{1}{9^2} \times 9 \times 3^2 = 1$.

Donc Y suit une loi $\mathcal{N}(2, 1)$.

- Soit Z la variable aléatoire définie par

$$Z = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 - X_6 - X_7 - X_8 - X_9$$

Déterminer la loi de Z et calculer $P(Z \geq 1)$.

De même, $\mathbb{E}(Z) = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 - 2 - 2 - 2 - 2 = 2$ et, puisque toutes ces variables sont indépendantes,

$$\sigma^2(Z) = 3^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2 + (-3)^2 + (-3)^2 + (-3)^2 + (-3)^2 = 5 \times 3^2 + 4 \times 3^2 = 81 = 9^2$$

Donc Z suit une loi $\mathcal{N}(2, 9^2)$.

Puis on calcule $P(Z \geq 1) = P(U \geq \frac{1-2}{9}) = P(U \geq -\frac{1}{9}) = P(U \leq \frac{1}{9})$. D'après la table,

$P(Z \geq 1) = 0.5438$.