

Soit la fonction f de deux variables x et y définie par

$$f(x, y) = 4 - \sqrt{1 + x^2 + y^2}$$

Partie A

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .

Pour tous réels x et y , $1 + x^2 + y^2 \geq 0$ donc la fonction f est bien définie sur \mathbb{R}^2 .

2. Exprimer les équations des lignes de niveau k de cette fonction.

Soit k réel : la ligne de niveau k est l'ensemble des points (x, y) tels que $f(x, y) = k$, c'est-à-dire

$$\sqrt{1+x^2+y^2} = 4-k$$

Or $1 + x^2 + y^2 \geq 1$ quels que soient x et y réels donc $\sqrt{1 + x^2 + y^2} \geq 1$ et ainsi l'ensemble des points (x, y) tels que $f(x, y) = k$ est non vide si $4 - k \geq 1$ soit $k \leq 3$: dans ce cas, la ligne de niveau est un cercle centré en 0 de rayon $\sqrt{(4 - k)^2 - 1}$.

Partie B

1. Calculer les dérivées partielles de la fonction f .

On calcule les dérivées partielles :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 0 - \frac{0+2x+0}{2\sqrt{1+x^2+y^2}} \\ &= \frac{-x}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 0 - \frac{0+0+2y}{2\sqrt{1+x^2+y^2}} \\ &= \frac{-y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\end{aligned}$$

2. Exprimer la matrice hessienne de f .

On calcule les dérivées partielles secondes :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{-\sqrt{1+x^2+y^2} - \frac{-x \times 2x}{2\sqrt{1+x^2+y^2}}}{\left(\sqrt{1+x^2+y^2}\right)^2} \\ &= \frac{-\sqrt{1+x^2+y^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}}}{1+x^2+y^2} \\ &= \frac{\frac{-(1+x^2+y^2)+x^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}}}{1+x^2+y^2} \\ &= \frac{-(1+x^2+y^2)+x^2}{(1+x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}} \\ &= \frac{-1-y^2}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= -(1+y^2)(1+x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

De même, x et y jouant des rôles symétriques,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{-1 - x^2}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= -(1 + x^2)(1 + x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

Enfin, on calcule $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$ en réécrivant $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{-x}{\sqrt{1+x^2+y^2}} = -x(1+x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}$ puis en dérivant cette expression par rapport à y :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= -x \times (2y) \times \frac{-1}{2}(1 + x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}-1} \\ &= xy(1 + x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

On peut enfin écrire la matrice hessienne :

$$\begin{aligned} Hess_f(x, y) &= \begin{pmatrix} -(1+y^2)(1+x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} & xy(1+x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} \\ xy(1+x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} & -(1+x^2)(1+x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} \end{pmatrix} \\ &= (1+x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} -(1+y^2) & xy \\ xy & -(1+x^2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. Déterminer les points critiques de la fonction f .

Pour déterminer les points critiques (stationnaires) de la fonction f , on résout le système d'équations :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-x}{\sqrt{1+x^2+y^2}} = 0 \\ \frac{-y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Il existe donc un unique point stationnaire : c'est le point $(0,0)$.

4. Vérifier que la fonction f admet un maximum local au point $(0, 0)$ et donner la valeur de ce maximum. Peut-on dire que ce maximum est global?

On étudie la nature de ce point stationnaire en évaluant $Hess_f(0,0) = 1 \times \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Le déterminant de cette matrice est $(-1) \times (-1) = 1 > 0$ donc la matrice admet bien un extremum local. Du fait que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = -1 < 0$, on en déduit qu'il s'agit bien d'un maximum local dont la valeur est $f(0,0) = 4 - \sqrt{1} = 3$.

Il s'agit bien d'un maximum global car pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\sqrt{1+x^2+y^2} \geq 1$ ce qui implique que $f(x, y) \leq 3$.