KSes **Exercice** - *Loi normale et Monte Carlo*

On considère l'intégrale

$$I = \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

1. Démontrer qu'il existe une fonction $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $I = \mathbb{E}(\varphi(Z_1))$ où Z_1 est une variable aléatoire normale $\mathcal{N}(0,1)$.
2. On définit une suite de variables $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ indépendantes et identiquement distribuées selon une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.
   (a) Déterminer une fonction $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(Z_i)\right)_{n\geqslant 1}$ converge presque sûrement vers I.
   (b) Construire un intervalle de confiance I_{conf} tel que $\mathbb{P}(I \in I_{conf}) \approx 0{,}95$.
3. On définit une suite de variables (U_n) indépendantes et identiquement distribuées selon une loi uniforme $\mathcal{U}([0;4])$.
   (a) A l'aide de cette suite, définir une suite de variables aléatoires (Y_n) qui converge presque sûrement vers I.
   (b) En déduire une méthode de Monte Carlo permettant d'obtenir une valeur approchée de I en complétant l'algorithme suivant : `n=1000;S=0`

```
for i in range(n):
u = ...
S= S + ...
print(...)
```

   (c) Construire un intervalle de confiance I_{conf} tel que $\mathbb{P}(I \in I_{conf}) \approx 0{,}95$.
4. Afin d'obtenir une approximation de I, au vu des intervalles de confiance obtenus pour chaque méthode, mieux vaut-il utiliser une méthode de Monte Carlo basée sur la suite (Z_n) ou la suite (U_n) ?