Ex **Matrices inversibles**

Déterminer a tel que la matrice $M_a = \begin{pmatrix} a+1 & -1 & -a \\ 1 & a & -1 \\ -1 & 0 & 2a+1 \end{pmatrix}$ soit inversible. Déterminer alors son inverse.

✓

$$\det M_a = \begin{vmatrix} a+1 & -1 & -a \\ 1 & a & -1 \\ -1 & 0 & 2a+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1+c_2+c_3 & -1 & -c_1 \\ a & a & -1 \\ 2a & 0 & 2a+1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{\text{mis en}\\ \text{facteur}\\ \text{de } c_2}}{=} \begin{vmatrix} 0 & -1 & -a \\ 1 & a & -1 \\ 2 & 0 & 2a+1 \end{vmatrix}$$

$$= a.\begin{vmatrix} 0 & -1 & -a \\ 1 & a & -1 \\ 0 & -2a & 2a+3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \ell_1 \\ \ell_3 - 2\ell_2 \end{matrix}$$

$$= a \cdot [-1 \times [(-1) \times (2a+3) - (-2a) \times (-a)]]$$

$$= a \cdot \underbrace{(2a^2 + 2a + 3)}_{\text{discriminant } \Delta > 0}$$

M_a inversible ssi $a \neq 0$. Calcul des cofacteurs :

$M_{11} = \begin{vmatrix} a & -1 \\ 0 & 2a+1 \end{vmatrix} = 2a^2 + a \quad M_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2a+1 \end{vmatrix} = -2a \quad M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & a \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = a$

$M_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & -a \\ 0 & 2a+1 \end{vmatrix} = 2a+1 \quad M_{22} = \begin{vmatrix} a+1 & -a \\ -1 & 2a+1 \end{vmatrix} = 2a^2 + 2a + 1 \quad M_{23} = -\begin{vmatrix} a+1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$

$M_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -a \\ a & -1 \end{vmatrix} = a^2 + 1 \quad M_{32} = -\begin{vmatrix} a+1 & -a \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \quad M_{33} = \begin{vmatrix} a+1 & -1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 + a + 1$

on en déduit :

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} 2a^2+a & -2a & a \\ 2a+1 & 2a^2+2a+1 & 1 \\ a^2+1 & 1 & a^2+a+1 \end{pmatrix}$$

$${}^t\tilde{M} = \begin{pmatrix} 2a^2+a & 2a+1 & a^2+1 \\ -2a & 2a^2+2a+1 & 1 \\ a & 1 & a^2+a+1 \end{pmatrix}$$

–

Pour $a \neq 0$:

$$M_a^{-1} = \frac{1}{a \cdot (2a^2+2a+3)} \begin{pmatrix} 2a^2+a & 2a+1 & a^2+1 \\ -2a & 2a^2+2a+1 & 1 \\ a & 1 & a^2+a+1 \end{pmatrix}$$