nxfH ⊵ **Exercice** - *Convergence d'une suite de variables aléatoires*

Soit X une variable aléatoire de densité f_θ définie par :

$$f_\theta(x) = \theta x^{\theta-1} 1_{]0;1[}(x)$$

où $\theta > 0$. Soit une suite (X_n) de variables aléatoires indépendantes suivant chacune la même loi que X. On pose

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad\qquad U_n = \frac{\overline{X}_n}{1-\overline{X}_n}$$

1. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$.
2. Montrer que la suite $(\overline{X}_n)$ converge en probabilité vers un réel $g(\theta)$ que l'on précisera.
3. En déduire que la suite (U_n) converge en probabilité vers le réel θ.
4. On pose

   $$T_n = \frac{1}{1+U_n}\sqrt{\frac{U_n}{U_n+2}}$$

   La suite (T_n) converge-t-elle en probabilité ? Si oui, déterminer sa limite.
5. Vérifier que la suite (V_n) définie par

   $$V_n = \sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \frac{\theta}{\theta+1}\right)$$

   converge en loi vers une loi normale dont on précisera les paramètres.
6. Déterminer une suite de réels (a_n) et un un réel $m(\theta)$ tels que la suite de variables aléatoires (Z_n) définie par

   $$Z_n = a_n \frac{\overline{X}_n - m(\theta)}{T_n}$$

   converge en loi vers une limite à préciser.