Ex

Extremum d'un polynôme

Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f\colon (x,y) \mapsto x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$$

1. La fonction f admet-elle des points critiques sur $\mathbb{R}^2$?

✓

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. On étudie d'abord l'éventualité d'un extremum local en cherchant les points critiques :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \iff 2x + y + 2 = x + 2y + 3 = 0 \iff (x,y) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$$

2. Vérifier que $-\frac{7}{3}$ constitue un minimum local et global de f sur $\mathbb{R}^2$.

✓

Or $f(x,y) = (x+y/2+1)^2 + \frac{3}{4}(y+4/3)^2 - \frac{7}{3} \geqslant -\frac{7}{3} = f\left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ donc $-\frac{7}{3}$ est un minimum local et global de f.

3. La fonction f admet-elle un maximum global sur $\mathbb{R}^2$?

✓

On constate facilement que f n'admet pas de maximum global car $f(x,0) \xrightarrow{x\to+\infty} +\infty$.