Ex - Saturation d'un standard téléphonique

KowJ

Une entreprise compte 300 employés. Chaque employé utilise son téléphone de manière aléatoire, en moyenne 6 minutes par heure. Cela implique qu'à un instant donné, la probabilité qu'il soit au téléphone est de $\frac{6}{60} = 0{,}1$. On suppose que l'utilisation du téléphone par un employé est indépendante de celle des autres employés.

1. Il est 10h00. Soit X le nombre d'employés qui téléphonent à cet instant. Déterminer la loi de X.

✓

On a $X \sim \mathcal{B}(300, 0{,}1)$.

2. Justifier que la loi de X peut être approchée par une loi normale $\mathcal{N}(30; \sqrt{27})$.

✓

On a $np = 300 \times 0{,}1 = 30$ et $np(1-p) = 300 \times 0{,}1 \times 0{,}9 = 27$. Le paramètre n est considéré comme grand (> 30) donc les conditions d'application du théorème de Moivre-Laplace sont vérifiées. On peut donc approcher la loi de $\frac{X-30}{\sqrt{27}}$ par une loi normale centrée réduite, ce qui revient à approcher X par une loi normale $\mathcal{N}(30; \sqrt{27})$.

3. Estimer le nombre ℓ de lignes que l'entreprise doit installer pour que la probabilité que toutes les lignes soient occupées soit au plus égale à 2,5%.

✓

On cherche ℓ tel que $\mathrm{P}(X \geqslant \ell) \leqslant 0{,}025$. On a :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(X \geqslant \ell\right) &= \mathrm{P}\left(\frac{X-30}{\sqrt{27}} \geqslant \frac{\ell-30}{\sqrt{27}}\right) \\ &= 1 - \mathrm{P}\left(\frac{X-30}{\sqrt{27}} \leqslant \frac{\ell-30}{\sqrt{27}}\right)\end{aligned}$$

On cherche donc ℓ tel que $\mathrm{P}\left(\frac{X-30}{\sqrt{27}} \leqslant \frac{\ell-30}{\sqrt{27}}\right) \geqslant 0{,}975$. Par lecture inverse de table, on en déduit que $\frac{\ell-30}{\sqrt{27}} \geqslant 1{,}96$ donc $\ell \geqslant 30 + 1{,}96 \times \sqrt{27} \approx 38{,}8$. On en déduit que $\ell = 39$.