

bOga Ex 1 - Loi d'un couple de variables aléatoires

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires admettant pour densité la fonction f définie par

$$f(x, y) = k \cdot \mathbf{1}_{\mathcal{C}}(x, y)$$

où $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$ et $k \in \mathbb{R}$.

1. Dire lequel de ces trois domaines de \mathbb{R}^2 représentés ci-dessous est le domaine \mathcal{C} .

```
[gray!40] (-1,0) –
(0,1) – (1,0) –
(0,-1) – cycle;
(0,0) circle (1);
circle(1); [->]
(-1.5,0) – (1.5,0)
node[right] x ;[->]
(0,-1.5) – (0,1.5)
node[above] y ; []
(1,0) node[below right] 1; [] (-1,0)
node[below left]
-1; [] (0,1)
node[above left] 1;
[] (0,-1) node[below left]-1; [below left]
at (0,0) 0;
D1
```

```
[gray!40] (-1,0) –
(0,1) – (1,0) –
(0,-1) – cycle;
(-1,0) – (0,1) –
(1,0) – (0,-1) –
cycle; [->] (-1.5,0)
– (1.5,0)
node[right] x ;[->]
(0,-1.5) – (0,1.5)
node[above] y ;in -1
(1,0) node[below right] 1; [] (-1,0)
node[below left]
-1; [] (0,1)
node[above left] 1;
[] (0,-1) node[below left]-1; [below left]
at (0,0) 0;
D2
```

```
[gray!40] (-1,1) –
(1,1) – (1,-1) –
(-1,-1) – cycle;
(-1,1) – (1,1) –
(1,-1) – (-1,-1) –
cycle; [->] (-1.5,0)
– (1.5,0)
node[right] x ;[->]
(0,-1.5) – (0,1.5)
node[above] y ; []
(1,0) node[below right] 1; [] (-1,0)
node[below left]
-1; [] (0,1)
node[above left] 1;
[] (0,-1) node[below left]-1; [below left]
at (0,0) 0;
D3
```

Le domaine \mathcal{C} est représenté en $D2$. C'est un carré d'aire = 2

2. Déterminer la valeur de $k \in \mathbb{R}$ telle que f définit une fonction densité.

On choisit k de telle sorte que $f \geq 0$ et $\iint_{\mathcal{C}} f(x, y) dx dy = 1$. Or $\iint_{\mathcal{C}} f(x, y) dx dy = k \iint_{\mathcal{C}} dx dy = k \times \text{aire}(\mathcal{C}) = 2k$. Donc il faut prendre $k = \frac{1}{2}$.

On peut aussi faire calcul de manière analytique en utilisant la relation de Chasles (on distingue selon le signe de x et on encadre y) et le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{C}} dx dy &= \int_{-1}^0 \left(\int_{-1-x}^{1+x} dy \right) dx + \int_0^1 \left(\int_{-1+x}^{1-x} dy \right) dx \\ &= \int_{-1}^0 (2 + 2x) dx + \int_0^1 (2 - 2x) dx \\ &= 2 \end{aligned}$$

3. Déterminer les lois marginales du couple (X, Y) .

On calcule les densités marginales : pour tout $x \in \mathbb{R}$: Si $x > 1$ ou si $x < -1$: $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy = \int_{\mathbb{R}} 0 = 0$;
Si $x \in [0; 1]$:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1+x}^{1-x} dy \\ &= 1 - x \end{aligned}$$

Si $x \in [-1; 0]$:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1-x}^{1+x} dy \\ &= 1 + x \end{aligned}$$

Avec des fonctions indicatrices, cela se réécrit pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_X(x) = \mathbf{1}_{[-1;0]}(x)(1 + x) + \mathbf{1}_{[0;1]}(x)(1 - x) = \mathbf{1}_{[-1;1]}(x)(1 - |x|)$$

Les rôles étant symétriques en x et en y , on obtient de manière similaire que pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$f_Y(y) = \mathbf{1}_{[-1;0]}(y)(1 + y) + \mathbf{1}_{[0;1]}(y)(1 - y) = \mathbf{1}_{[-1;1]}(y)(1 - |y|)$$

4. Déterminer $\text{cov}(X, Y)$.

On utilise la formule de Huygens : $\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. Ainsi, on calcule :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx \\ &= \int_{-1}^0 x(1 + x) dx + \int_0^1 x(1 - x) dx \\ &= -\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Du fait que X et Y suivent la même loi, on déduit que $\mathbb{E}(Y) = 0$.

Il reste à calculer :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(XY) &= \iint_{\mathbb{R}^2} xy f(x, y) dx dy \\ &= \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{C}} dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^0 \left(\int_{-1-x}^{1+x} xy dy \right) dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_{-1+x}^{1-x} xy dy \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^0 x \left[\frac{y^2}{2} \right]_{-1-x}^{1+x} dx + \frac{1}{2} \int_0^1 x \left[\frac{y^2}{2} \right]_{-1+x}^{1-x} dy dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^0 (x \times 0) dx + \frac{1}{2} \int_0^1 (x \times 0) dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit que $\text{cov}(X, Y) = 0$.

5. Étudier l'indépendance des variables X et Y .

On pourrait penser que les variables sont indépendantes car leur covariance est nulle. Cependant, ce n'est pas une condition suffisante et on observe que $f_X(x)f_Y(y) \neq f(x, y)$. La conclusion est que X et Y ne sont pas indépendantes.