

On considère un carré ABCD et son centre de gravité O. On note  $\mathcal{E} = \{A, B, C, D, O\}$ . Une puce se déplace aléatoirement en sautant d'un point de  $\mathcal{E}$  à un autre. La seule contrainte est que si un saut relie deux sommets du carré, ceux-ci doivent être adjacents.

A chaque saut, tous les déplacements possibles sont équiprobables. La puce ne reste pas deux fois de suite au même endroit.

Au départ (c'est-à-dire avant son premier saut) elle se trouve au point A. .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , et tout  $K \in \mathcal{E}$ , on note  $K_n$  l'événement « la puce se trouve au point  $K$  après son  $n$ -ième saut. On notera  $p_n = P(O_n)$  (de sorte que  $p_0 = 0$ ).

1. Calculer  $P(K_2)$  pour tout  $K \in \mathcal{E}$ .
2. Démontrer que pour tout  $n \geq 1$ ,  $p_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - p_n)$  et en déduire une expression de  $p_n$  en fonction de  $n$ .
3. En utilisant les symétries du problème, calculer  $P_{B_2}(O_3)$ .
4. Sachant que la puce est en  $O$  après 3 sauts, quelle est la probabilité qu'elle soit passée par  $B$  ?