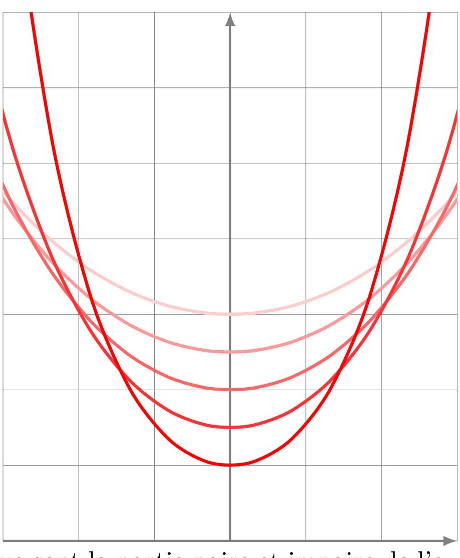


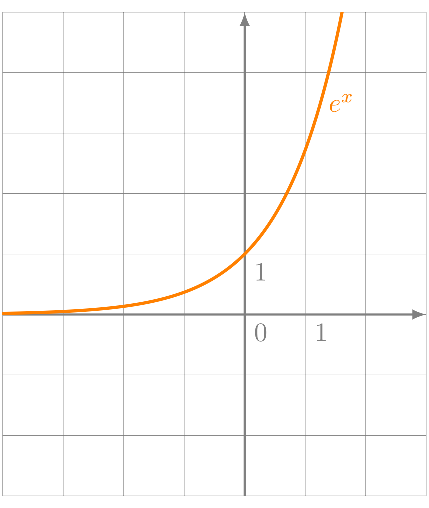
La chaînette est le nom que porte la courbe obtenue en tenant une corde (ou un collier, un fil,...) par deux extrémités. Voici l'équation cartésienne d'une chaînette :

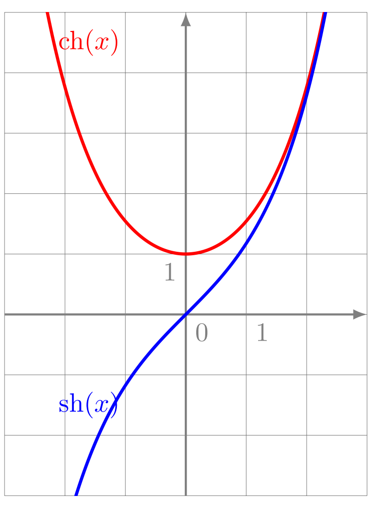
$$y = a\,\mathrm{ch}\left(\frac{x}{a}\right)$$

Le paramètre $a > 0$ dépend de la chaînette : on peut écarter plus ou moins les mains. Ou, ce qui revient au même, si l'on garde les mains fixes, on peut prendre des cordes de différentes longueurs.

Le cosinus hyperbolique et le sinus hyperbolique sont la partie paire et impaire de l'exponentielle :

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$





1. Démontrer les propriété suivante :
   (a) $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   ✓ $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = \frac{1}{4}\left[(e^x+e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2\right] = \frac{1}{4}\left[(e^{2x}+2+e^{-2x}) - (e^{2x}-2+e^{-2x})\right] = 1.$

   (b) $\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x)$ et $\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x)$.

   ✓ $\frac{d}{dx}(\mathrm{ch}\,x) = \frac{d}{dx}\frac{e^x+e^{-x}}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \mathrm{sh}\,x.$

2. Les fonctions trigonométriques cos et sin sont dites « circulaires ». On rappelle les formules d'Euler :

$$\cos(x) = \frac{e^{\mathrm{i}x} + e^{-\mathrm{i}x}}{2}, \qquad \sin(x) = \frac{e^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}.$$

   L'analogie avec la définition de $\mathrm{ch}(x)$ et $\mathrm{sh}(x)$ justifie les termes « cosinus » et « sinus ». Reste à justifier le terme « hyperbolique » :
   On considère les courbes paramétrées $C_1 : \begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}$ et $C_2 : \begin{cases} x(t) = \mathrm{ch}(t) \\ y(t) = \mathrm{sh}(t) \end{cases}$
   Tracer des représentations graphiques de chacune de ces courbes paramétrées et commenter les calculs de $x(t)^2 + y(t)^2$ et $x(t)^2 - y(t)^2$.

   ✓ Si on dessine une courbe paramétrée par $(x(t) = \cos t, y(t) = \sin t)$ alors $x(t)^2 + y(t)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$. Donc il s'agit d'un cercle (d'où le terme «circulaire»). Par contre si on dessine une courbe paramétrée par $(x(t) = \mathrm{ch}\,t, y(t) = \mathrm{sh}\,t)$. Alors $x(t)^2 - y(t)^2 = \mathrm{ch}^2 t - \mathrm{sh}^2 t = 1$. C'est l'équation d'une branche d'hyperbole !

3. Étant donné un arc paramétré $\mathcal{C} : \begin{array}{ccc}]a;b[& \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (x(t), y(t)) \end{array}$, sa longueur dans une base orthonormale est donnée par la quantité

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

   On considère une chaînette dont le point le plus bas est $(0, a)$ et dont les extrémités ont pour coordonnées $(\pm x_0, y_0)$. On s'intéresse à la longueur ℓ de la courbe entre le point le plus bas et une des extrémités.
   (a) En utilisant l'équation cartésienne, écrire sous forme de courbe paramétrée la chaînette décrite ci-dessus.

   ✓ On rappelle l'équation de la chaînette : $y(x) = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$. On en déduit une écriture paramétrique en posant $x(t) = t$ et $y(t) = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x(t)}{a}$ pour tout $t \in [-x_0; x_0]$.

   (b) Montrer que la demi longueur de la chaînette ℓ vaut $\ell = a\,\mathrm{sh}\left(\frac{x_0}{a}\right)$.

   ✓ Par définition, la demi longueur vaut

$$\ell = \int_0^{x_0} \sqrt{1 + y'(x)^2} dx.$$

   Ainsi :

$$\begin{array}{lll} \ell & = & \int_0^{x_0} \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2\left(\frac{x}{a}\right)} dx \quad \text{car } \mathrm{ch}'\,\frac{x}{a} = \frac{1}{a}\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{a} \\ & = & \int_0^{x_0} \sqrt{\mathrm{ch}^2\left(\frac{x}{a}\right)} dx \quad \text{car } 1 + \mathrm{sh}^2 u = \mathrm{ch}^2 u \\ & = & \int_0^{x_0} \mathrm{ch}\,\frac{x}{a} dx = \left[a\,\mathrm{sh}\left(\frac{x}{a}\right)\right]_0^{x_0} \\ & = & a\,\mathrm{sh}\left(\frac{x_0}{a}\right). \end{array}$$

4. On peut démontrer les propriétés suivantes des fonctions hyperboliques :
   (a) La fonction $x \mapsto \mathrm{ch}\,x$ est une bijection de $[0, +\infty[$ dans $[1, +\infty[$. Sa bijection réciproque est notée $\mathrm{Argch}\,x$. Donc :

$$\mathrm{ch}\left(\mathrm{Argch}(x)\right) = x \quad \forall x \in [1, +\infty[\qquad\qquad \mathrm{Argch}\left(\mathrm{ch}(x)\right) = x \quad \forall x \in [0, +\infty[$$

   ✓ Étudions la restriction de la fonction $\mathrm{ch} : [0, +\infty[\to [1, +\infty[$.
   — Comme $\mathrm{ch}'\,x = \mathrm{sh}\,x \geqslant 0$, pour $x \geqslant 0$, alors la restriction de la fonction ch est croissante. Elle est même strictement croissante (la dérivée ne s'annule qu'en 0).
   — Comme $\mathrm{ch}\,0 = 1$, que $\mathrm{ch}\,x \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$, alors par continuité et la stricte croissance, la restriction $\mathrm{ch} : [0, +\infty[\to [1, +\infty[$ est une bijection.

   Par définition, la bijection réciproque de cette restriction est $\mathrm{Argch}\,x : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$ et vérifie :

$$\begin{array}{ll} \mathrm{Argch}\big(\mathrm{ch}\,x\big) = x & \text{pour tout } x \in [0, +\infty[\\ \mathrm{ch}\big(\mathrm{Argch}\,x\big) = x & \text{pour tout } x \in [1, +\infty[. \end{array}$$

   (b) La fonction $x \mapsto \mathrm{sh}\,x$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Sa bijection réciproque est notée $\mathrm{Argsh}\,x$. Donc :

$$\mathrm{sh}\left(\mathrm{Argsh}(x)\right) = x \qquad\qquad \mathrm{Argsh}\left(\mathrm{sh}(x)\right) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

   (c) Les fonctions $x \mapsto \mathrm{Argch}(x)$ et $x \mapsto \mathrm{Argsh}(x)$ sont dérivables et

$$\mathrm{Argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \qquad\qquad \mathrm{Argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

   ✓ Comme la fonction $x \mapsto \mathrm{ch}'\,x$ ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$ alors la fonction Argch est dérivable sur $]1, +\infty[$. On calcule la dérivée par dérivation de l'égalité $\mathrm{ch}(\mathrm{Argch}\,x) = x$:

$$\mathrm{Argch}'\,x \cdot \mathrm{sh}(\mathrm{Argch}\,x) = 1$$

   puis on utilise l'identité $\mathrm{ch}^2 u - \mathrm{sh}^2 u = 1$ avec $u = \mathrm{Argch}\,x$:

$$\mathrm{Argch}'\,x = \frac{1}{\mathrm{sh}(\mathrm{Argch}\,x)} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}^2(\mathrm{Argch}\,x) - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

   (d) Pour tout $x \geqslant 1$: $\mathrm{Argch}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$.

   ✓ Notons $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$.

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} = \mathrm{Argch}'\,x.$$

   Comme de plus $f(1) = \ln(1) = 0$ et $\mathrm{Argch}(1) = 0$ (car $\mathrm{ch}(0) = 1$), on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{Argch}(x)$.

   (e) Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\mathrm{Argsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$.

   ✓ Notons $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$.

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = \mathrm{Argsh}'\,x.$$

   Comme de plus $f(0) = \ln(1) = 0$ et $\mathrm{Argsh}\,0 = 0$ (car $\mathrm{sh}\,0 = 0$), on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{Argsh}\,x$.

   En utilisant les propriétés des fonctions hyperboliques et l'équation cartésienne d'une chaînette, démontrer qu'une équation paramétrique de la chaînette est :

$$\forall t > 0 : \begin{cases} x(t) & = & a \ln t \\ y(t) & = & \frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right) \end{cases}$$

✓ Nous connaissons l'équation cartésienne $y = a\,\mathrm{ch}\left(\frac{x}{a}\right)$, qui est équivalente à $\mathrm{Argch}\left(\frac{y}{a}\right) = \frac{x}{a}$.
Utilisons la forme logarithmique de la fonction Argch : $\mathrm{Argch}\,u = \ln\left(u + \sqrt{u^2 - 1}\right)$ (pour $u \geqslant 1$).
Nous obtenons :

$$\ln\left(\frac{y}{a} + \sqrt{\left(\frac{y}{a}\right)^2 - 1}\right) = \frac{x}{a}.$$

Nous cherchons maintenant une paramétrisation $(x(t), y(t))$ de la chaînette, posons $x(t) = a\ln(t)$ (ce qui est toujours possible car ln est une bijection de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$). Alors l'équation précédente conduit (après simplification des ln) à :

$$\frac{y(t)}{a} + \sqrt{\left(\frac{y(t)}{a}\right)^2 - 1} = t,$$

ou encore

$$\sqrt{\left(\frac{y(t)}{a}\right)^2 - 1} = t - \frac{y(t)}{a}$$

ce qui implique en élevant au carré :

$$\left(\frac{y(t)}{a}\right)^2 - 1 = t^2 + \left(\frac{y(t)}{a}\right)^2 - 2t\frac{y(t)}{a}$$

d'où $\frac{y(t)}{a} = \frac{t^2+1}{2t}$, et donc $y(t) = \frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)$.