Ex **Multiplicité d'une racine**

Déterminer l'ordre de multiplicité de la racine 1 du polynôme

$$P(X) = X^5 - 5X^4 + 14X^3 - 22X^2 + 17X - 5$$

En déduire la factorisation de $P(X)$.

✓

Méthode 1 : Par divisions successives.
Le reste de la quatrième division euclidienne n'est pas nul, donc 1 est racine de multiplicité 3 . En reprenant les calculs de division euclidienne, il vient :

$$\begin{aligned} X^5 - X^4 - X^3 - X^2 + 4X - 2 &= (X-1)\left(X^4 - 4X^3 + 10X^2 - 12X + 5\right) \\ &= (X-1)(X-1)\left(X^3 - 3X^2 + 7X - 5\right) \\ &= (X-1)(X-1)(X-1)\left(X^2 - 2X + 5\right) \\ &= (X-1)^3\left(X^2 - 2X + 5\right) \end{aligned}$$

✓

Méthode 2 : par les dérivées successives.

$$\begin{array}{rlrl} P(X) & = X^5 - 5X^4 + 14X^3 - 22X^2 + 17X - 5 & P(1) & = 0 \\ P'(X) & = 5X^4 - 20X^3 + 42X^2 - 44X + 17 & P'(1) & = 0 \\ P''(X) & = 20X^3 - 60X^2 + 84X - 44 & P''(1) & = 0 \\ P^{(3)}(X) & = 60X^2 - 120X + 84 & P^{(3)}(1) & = 4 \neq 0 \end{array}$$

Donc 1 est racine de multiplicité 3 de $P(X)$. Autrement dit, $P(X)$ est divisible par $(X-1)^3$ On effectue la division euclidienne de $P(X)$ par $(X-1)^3 = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$, il vient :

$$\begin{array}{r|r} X^5 - 5X^4 + 14X^3 - 22X^2 + 17X - 5 & X^3 - 3X^2 + 3X - 1 \\ -\left(X^5 - 3X^4 + 3X^3 - X^2\right) & X^2 - 2X + 5 \\ \hline -2X^4 + 11X^3 - 21X^2 + 17X - 5 & \\ -\left(-2X^4 + 6X^3 - 6X^2 + 2X\right) & \\ \hline 5X^3 - 15X^2 + 15X - 5 & \\ -\left(5X^3 - 15X^2 + 15X - 5\right) & \\ \hline X^5 - X^4 - X^3 - X^2 + 4X - 2 = \left(X^3 - 3X^2 + 3X - 1\right)\left(X^2 - 2X + 5\right) & \\ = (X-1)^3\left(X^2 - 2X + 5\right) & \end{array}$$

Il reste à factoriser $X^2 - 2X + 5$, polynôme du second degré dont le discriminant est : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 5 = -16 < 0$. La factorisation en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$:

$$P(X) = (X-1)^3\left(X^2 - 2X + 5\right)$$

Les racines complexes conjuguées de $X^2 - 2X + 5$ sont $z = \frac{2 \pm (4i)}{2} = 1 \pm 2i$. La factorisation en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{C}[X]$:

$$P(X) = (X-1)^3(X - 1 - 2i)(X - 1 + 2i)$$