Une machine est composée de trois alternateurs indépendants. La durée de vie de T de chaque alternateur suit une loi exponentielle de paramètre λ. La machine fonctionne si et seulement si au moins deux des alternateurs fonctionnent. On appelle X la variable aléatoire mesurant le temps de fonctionnement de la machine.

1. Déterminer la loi de X et calculer son espérance.

✓

Soient T_1, T_2 et T_3 les durées de vie des alternateurs. Soit $t > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X \geqslant t) &= \mathrm{P}(T_1 \geqslant t, T_2 \geqslant t, T_3 \geqslant t) + \mathrm{P}(T_1 < t, T_2 \geqslant t, T_3 \geqslant t) \\
&+ \mathrm{P}(T_1 \geqslant t, T_2 < t, T_3 \geqslant t) + \mathrm{P}(T_1 \geqslant t, T_2 \geqslant t, T_3 < t) \\
&= \mathrm{P}(T_1 \geqslant t)\mathrm{P}(T_2 \geqslant t)\mathrm{P}(T_3 \geqslant t) + \mathrm{P}(T_1 < t)\mathrm{P}(T_2 \geqslant t)\mathrm{P}(T_3 \geqslant t) \\
&+ \mathrm{P}(T_1 \geqslant t)\mathrm{P}(T_2 < t)\mathrm{P}(T_3 \geqslant t) + \mathrm{P}(T_1 \geqslant t)\mathrm{P}(T_2 \geqslant t)\mathrm{P}(T_3 < t) \\
&= e^{-3\lambda t} + 3e^{-2\lambda t}(1 - e^{-\lambda t}) \\
&= 3e^{-2\lambda t} - 2e^{-3\lambda t}
\end{aligned}$$

Donc la fonction de répartition de X est :

$$\begin{aligned}
F_X(t) &= \mathrm{P}(X \leqslant t) \\
&= 1 - \mathrm{P}(X \geqslant t) \\
&= 1 - 3e^{-2\lambda t} + 2e^{-3\lambda t}
\end{aligned}$$

Cete fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et sa dérivée est :

$$f_X(t) = 6\lambda e^{-2\lambda t} - 6\lambda e^{-3\lambda t}$$

On conclut que X admet pour densité de probabilité $f_X(x) = 6(e^{-2\lambda x} - e^{-3\lambda x})1_{\mathbb{R}_+}(x)$.
On peut alors calculer son espérance :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \\
&= \int_0^{+\infty} 6x(e^{-2\lambda x} - e^{-3\lambda x}) dx \\
&= 3 \times \frac{1}{2\lambda} - 2 \times \frac{1}{3\lambda} \\
&= \frac{5}{6\lambda}
\end{aligned}$$

2. Soient les réels $t > 0$, $h > 0$. Sachant que la machine a déjà fonctionné pendant un temps t, quelle est la probabilité qu'elle fonctionne encore pendant un temps h ? Déterminer la limite de cette probabilité, à h fixé, lorsque $t \to +\infty$.

✓

On exprime la probabilité conditionnelle :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X \geqslant t + h | X \geqslant t) &= \frac{\mathrm{P}(X \geqslant t + h, X \geqslant t)}{\mathrm{P}(X \geqslant t)} \\
&= \frac{\mathrm{P}(X \geqslant t + h)}{\mathrm{P}(X \geqslant t)} \\
&= \frac{3e^{-2\lambda(t+h)} - 2e^{-3\lambda(t+h)}}{3e^{-2\lambda t} - 2e^{-3\lambda t}} \\
&= \frac{3e^{-2\lambda h} - 2e^{-\lambda t}e^{-3\lambda h}}{3 - 2e^{-\lambda t}} \\
&\xrightarrow[t \to +\infty]{} e^{-2\lambda h}
\end{aligned}$$