

Dans les calculs, on pourra utiliser une intégration par parties :

$$\int_a^b u(x)v'(x) \, dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) \, dx$$

ou bien se souvenir que

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} \, dx = n! = 1 \times 2 \times \dots \times n.$$

Après enquête, on estime que le temps de passage à une caisse, exprimé en unités de temps, est une variable aléatoire T dont une densité de probabilité est donnée par la fonction f_T définie par :

$$f_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ te^{-t} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

1. (a) Soit X une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\lambda = 1$. Donner une densité f_X de X , son espérance et sa variance.



$$X \sim \mathcal{E}(1), \quad f_X(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad \mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad \text{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

- (b) Vérifier que f_T est bien une densité de probabilité. Déterminer $\mathbb{E}(T)$ et $\text{V}(T)$.



f_T est une fonction positive sur \mathbb{R} et

$$\int_{\mathbb{R}} f_T(x) \, dx = \int_0^{+\infty} xe^{-x} \, dx = [-xe^{-x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} \, dx = [-e^{-x}]_0^{+\infty} = 1.$$

Donc f_T est bien une densité de probabilité.

L'espérance de T peut se calculer soit par intégrations par parties, soit en utilisant le rappel :

$$\mathbb{E}(T) = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} \, dx = [-x^2 e^{-x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2xe^{-x} \, dx = 2 \int_0^{+\infty} xe^{-x} \, dx = 2.$$

De même pour la variance de T : $\text{V}(T) = \mathbb{E}(T^2) - \mathbb{E}(T)^2$. Or

$$\mathbb{E}(T^2) = \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x} \, dx = 6$$

donc $\text{V}(T) = 6 - 2^2 = 2$.

2. (a) Démontrer que la fonction de répartition de T , notée F_T , est définie par :

$$F_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - (1+x)e^{-x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$



Par définition, $F_T(x) = \int_{-\infty}^x f_T(t) \, dt$ donc si $x < 0$, $F_T(x) = 0$ et si $x \geq 0$,

$$F_T(x) = \int_0^x te^{-t} \, dt = [-te^{-t}]_0^x + \int_0^x e^{-t} \, dt = -xe^{-x} + 0 + [-e^{-t}]_0^x = -xe^{-x} - e^x + e^0 = 1 - (1+x)e^{-x},$$

ce qui correspond à la formule donnée dans l'énoncé.

- (b) Montrer que la probabilité que le temps de passage en caisse soit inférieur à deux unités de temps sachant qu'il est supérieur à une unité, est égale à $\frac{2e-3}{2e}$.



$$\begin{aligned} P(T \leq 2 | T \geq 1) &= \frac{P(\{T \leq 2\} \cap \{T \geq 1\})}{P(T \geq 1)} = \frac{P(1 \leq T \leq 2)}{1 - P(T \leq 1)} = \frac{F_T(2) - F_T(1)}{1 - F_T(1)} \\ &= \frac{1 - 3e^{-2} - 1 + 2e^{-1}}{1 - 1 + 2e^{-1}} = \frac{2e^{-1} - 3e^{-2}}{2e^{-1}} = \frac{2e - 3}{2e} \end{aligned}$$

3. Un jour donné, trois clients A , B et C se présentent simultanément devant deux caisses libres. Par courtoisie, C décide de laisser passer A et B et de prendre la place du premier d'entre eux qui aura terminé. On suppose que les variables aléatoires T_A et T_B correspondant aux temps de passage en caisse de A et de B sont indépendantes.

- (a) Soit M la variable aléatoire égale au temps d'attente du client C . Exprimer l'événement $\{M > x\}$ en fonction des événements $\{T_A > x\}$ et $\{T_B > x\}$.



$$\{M > x\} = \{T_A > x\} \cap \{T_B > x\}$$

- (b) En déduire une expression de la fonction de répartition F_M de M , en fonction de F_{T_A} et F_{T_B} .



Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F_M(t) &= P(M \leq t) \\ &= 1 - P(M > t) \\ &= 1 - P(\{T_A > t\} \cap \{T_B > t\}) \\ &= 1 - P(T_A > t)P(T_B > t) \quad \text{par indépendance de } T_A \text{ et de } T_B \\ &= 1 - (1 - P(T_A \leq t))(1 - P(T_B \leq t)) \\ &= 1 - (1 - F_{T_A}(t))(1 - F_{T_B}(t)) \end{aligned}$$

- (c) Déterminer explicitement une densité de M .



Comme T_A et T_B suivent la même loi que T , on $F_{T_A} = F_{T_B} = F_T$. On obtient donc :

$$F_M(x) = 1 - (1 - F_T(x))^2 = \begin{cases} 1 - (1+x)^2 e^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Afin d'obtenir la densité de la variable aléatoire M , on dérive sa fonction de répartition en tous les points de continuité de sa densité :

$$f_M(t) = \begin{cases} -2(1+x)e^{-2x} + 2(1+x)^2 e^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2x(1+x)e^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$