Ex

Soient a et b des nombres réels. Déterminer tous les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de la forme

$$P(X) = 3X^5 - 10X^3 + aX + b$$

ayant une racine d'ordre de multiplicité égal à 3 . Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes obtenus.

✓

x_0 est racine d'ordre de multiplicité 3 ssi $P(x_0) = P'(x_0) = P''(x_0) = 0$ et $P^{(3)}(x_0) \neq 0$.

$$\begin{aligned}
P(x_0) &= 3 \cdot x_0^5 - 10 \cdot x_0^3 + a \cdot x_0 + b \\
P'(x_0) &= 15 \cdot x_0^4 - 30 \cdot x_0^2 + a = 0 \\
P''(x_0) &= 60 \cdot x_0^3 - 60x_0 = 60 \cdot x_0 \left(x_0^2 - 1\right) = 0 \\
P^{(3)}(x_0) &= 180 \cdot x_0^2 - 60 = 60\left(3 \cdot x_0^2 - 1\right)
\end{aligned}$$

$(3) \Leftrightarrow x_0 \cdot \left(x_0^2 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$ ou $x_0 = 1$ ou $x_0 = -1$.
1^{er} cas : $x_0 = 0$

$$P^{(3)}(x_0) \neq 0$$

$$(2) \Rightarrow a = 0$$

$$(1) \Rightarrow b = 0$$

$$P(X) = 3 \cdot X^5 - 10 \cdot X^3 = X^3 \cdot \left(3X^2 - 10\right) = 3 \cdot X^3 \cdot \left(X - \sqrt{\frac{10}{3}}\right)\left(X + \sqrt{\frac{10}{3}}\right)$$

$2^{\text{ème}}$ cas : $x_0 = 1$

$$P^{(3)}(x_0) \neq 0$$

$$(2) \Rightarrow 15 - 30 + a = 0 \Rightarrow a = 15$$

$$(1) \Rightarrow 3 - 10 + 15 + b = 0 \Rightarrow b = -8$$

$$P(X) = 3 \cdot X^5 - 10 \cdot X^3 + 15 \cdot X - 8 = (X-1)^3 \cdot \left(3X^2 + 9X + 8\right)$$

$3^{\text{ème}}$ cas : $x_0 = -1$

$$P^{(3)}(x_0) \neq 0$$

$$(2) \Rightarrow 15 - 30 + a = 0 \Rightarrow a = 15$$

$$(1) \Rightarrow -3 + 10 - 15 + b = 0 \Rightarrow b = 8$$

$$P(X) = 3 \cdot X^5 - 10 \cdot X^3 + 15 \cdot X + 8 = (X+1)^3 \cdot \left(3X^2 - 9X + 8\right)$$