

Déterminer a tel que la matrice $M_a = \begin{pmatrix} a+1 & -1 & -a \\ 1 & a & -1 \\ -1 & 0 & 2a+1 \end{pmatrix}$ soit inversible. Déterminer alors son inverse.

$$\begin{aligned} \det M_a &= \begin{vmatrix} a+1 & -1 & -a \\ 1 & a & -1 \\ -1 & 0 & 2a+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 + c_2 + c_3 & -1 & -c_1 \\ a & a & -1 \\ 2a & 0 & 2a+1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & -1 & -a \\ 1 & a & -1 \\ 2 & 0 & 2a+1 \end{vmatrix} \\ &= a \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & -a \\ 1 & a & -1 \\ 0 & -2a & 2a+3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \ell_1 \\ \ell_3 - 2\ell_2 \end{matrix} \\ &= a \cdot [-1 \times [(-1) \times (2a+3) - (-2a) \times (-a)]] \\ &= a \cdot \underbrace{(2a^2 + 2a + 3)}_{\text{discriminant } \Delta > 0} \end{aligned}$$

M_a inversible ssi $a \neq 0$. Calcul des cofacteurs :

$$\begin{aligned} M_{11} &= \begin{vmatrix} a & -1 \\ 0 & 2a+1 \end{vmatrix} = 2a^2 + a & M_{12} &= - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2a+1 \end{vmatrix} = -2a & M_{13} &= \begin{vmatrix} 1 & a \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = a \\ M_{21} &= - \begin{vmatrix} -1 & -a \\ 0 & 2a+1 \end{vmatrix} = 2a+1 & M_{22} &= \begin{vmatrix} a+1 & -a \\ -1 & 2a+1 \end{vmatrix} = 2a^2 + 2a + 1 & M_{23} &= - \begin{vmatrix} a+1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = \\ M_{31} &= \begin{vmatrix} -1 & -a \\ a & -1 \end{vmatrix} = a^2 + 1 & M_{32} &= - \begin{vmatrix} a+1 & -a \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 & M_{33} &= \begin{vmatrix} a+1 & -1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 + a + 1 \end{aligned}$$

on en déduit :

$$\begin{aligned} \tilde{M} &= \begin{pmatrix} 2a^2 + a & -2a & a \\ 2a+1 & 2a^2 + 2a + 1 & 1 \\ a^2 + 1 & 1 & a^2 + a + 1 \end{pmatrix} \\ {}^t\tilde{M} &= \begin{pmatrix} 2a^2 + a & 2a+1 & a^2 + 1 \\ -2a & 2a^2 + 2a + 1 & 1 \\ a & 1 & a^2 + a + 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pour $a \neq 0$:

$$M_a^{-1} = \frac{1}{a \cdot (2a^2 + 2a + 3)} \begin{pmatrix} 2a^2 + a & 2a+1 & a^2 + 1 \\ -2a & 2a^2 + 2a + 1 & 1 \\ a & 1 & a^2 + a + 1 \end{pmatrix}$$