

Soit  $X$  une variable aléatoire dont la loi est déterminée par la fonction densité définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 \right]$$

1. A l'aide d'un changement de variable, calculer  $\mathbb{E}(X)$ .

On exprime l'intégrale en posant le changement de variable affine  $u = \frac{x-\mu}{\sigma} \iff x = \sigma u + \mu$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma u + \mu) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \sigma du \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u e^{-\frac{u^2}{2}} du + \mu \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ &= 0 + \mu \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ &= 0 + \mu \times 1 \\ &= \mu \end{aligned}$$

2. Calculer la variance de  $X$ .

On utilise le même changement de variable :

$$\mathbb{E}((X - \mu)^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 \right] dx$$

devient, après changement de variables ci-dessus :

$$E((X - \mu)^2) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \exp \left[ -\frac{u^2}{2} \right] du.$$

En intégrant par parties, on trouve directement que

$$E((X - \mu)^2) = \sigma^2.$$

3. Soit  $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ . Déterminer la loi de  $Z$ .

En effectuant toujours le même changement de variables  $u = \frac{x-\mu}{\sigma}$ , on a pour tout réel  $t$  :

$$P(Y \leq t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 \right] dx = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{u^2}{2} \right] du.$$

La densité de la variable aléatoire  $Y$  est donc la fonction

$$f_Y(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{u^2}{2} \right],$$

qui correspond à celle de la loi normale centrée réduite  $\mathcal{N}(0, 1)$ .