

qNxE

Exercice - Simulation de loi : Rademacher, Laplace, Géométrique

On donne ou on rappelle la définition de quelques lois usuelles :

Définition : Soit $p \in]0; 1[$: une variable X suit une loi de Rademacher $\mathcal{R}(p)$ si :

- $P(X = 1) = p$
- $P(X = -1) = 1 - p$

Définition : Soit $\lambda > 0$: une variable X suit une loi de Laplace $\mathcal{L}(\lambda)$ si elle admet pour densité :
$$f_X(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$$
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que X suit une loi Rademacher $\mathcal{R}(1/2)$ et Y suit une loi uniforme sur $[0; 1]$. Soit $\lambda > 0$. On pose $U = \frac{1}{\lambda} X \ln(Y)$.Soit $\lambda > 0$ et $U = \frac{1}{\lambda} X \ln(Y)$ 1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer $P(\ln(Y) \leq a, X = 1)$ et $P(\ln(Y) \geq a, X = -1)$

Soit $a \in \mathbb{R}$. Par indépendance de X et Y , on a $P(\ln(Y) \leq a, X = 1) = P(\ln(Y) \leq a) \times P(X = 1) = P(Y \leq e^a) \times \frac{1}{2}$. Or $P(Y \leq t) = 1$ si $t > 1$ et $P(Y \leq t) = t$ si $0 < t < 1$ étant donnée la loi suivie par Y . Par conséquent, on a $P(\ln(Y) \leq a, X = 1) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } a > 0 \\ \frac{1}{2}e^a & \text{sinon} \end{cases}$.

De même, $P(\ln(Y) \geq a, X = -1) = \begin{cases} 0 & \text{si } a > 0 \\ \frac{1}{2}(1 - e^a) & \text{sinon} \end{cases}$

2. Déterminer la fonction de répartition de la variable U .Soit F_U la fonction de répartition de la variable U . Par définition, pour tout réel t ,
$$F_U(t) = P\left(\frac{1}{\lambda}X \ln(Y) \leq t\right) = P(X \ln(Y) \leq \lambda t)$$
Par application du théorème des probabilités totales au système d'événements $\{(X = 1), (X = -1)\}$,
$$F_U(t) = P(X = 1, Y \leq e^{\lambda t}) + P(X = -1, Y \geq e^{-\lambda t})$$

D'après le calcul précédent, on obtient

$$F_U(t) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}e^{-\lambda t} & \text{si } t > 0 \\ \frac{1}{2}e^{\lambda t} & \text{sinon} \end{cases}$$
3. En déduire que U suit une loi de Laplace $\mathcal{L}(\lambda)$.

On dérive la fonction de répartition pour obtenir la densité : $F'_U(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t > 0 \\ \frac{1}{2}\lambda e^{\lambda t} & \text{sinon} \end{cases} = \frac{1}{2}\lambda e^{-|\lambda t|}$. On reconnaît la fonction densité d'une loi de Laplace de paramètre λ .

4. A partir de la fonction `rand()` qui permet de simuler une loi uniforme sur $[0; 1]$ et en utilisant les résultats des questions précédentes, écrire un programme qui permet de simuler une loi de Laplace