hLkm ▷ **Exercice** - *Etude d'un schéma numérique*

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^2$: $[0;T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}$ et l'équation différentielle :

$$(E)\begin{cases} y'(t) = f(t,y(t)) \\ y(0) = a \end{cases}$$

pour laquelle on admet l'existence et l'unicité d'une solution y de classe $\mathcal{C}^1$.

1. Montrer que y est de classe $\mathcal{C}^3$.
2. Montrer que pour tout $t, h\in\mathbb{R}^+$,

$$y(t+h) = y(t) + hf(t,y(t)) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t,y(t)) + f(t,y(t))\frac{\partial f}{\partial y}(t,y(t))\right) + O(h^3)$$

3. Pour approcher la solution de (E), on propose le schéma numérique suivant : $h = T/N$, $t_n = nh$, $y_0 = a$ et

$$(S)\colon y_{n+1} = y_n + hf(t_n,y_n) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t_n,y_n) + f(t_n,y_n)\frac{\partial f}{\partial y}(t_n,y_n)\right)$$

   (a) Expliquer cette méthode, puis vérifier qu'elle est consistante. Quel est son ordre de consistance ?

   (b) On suppose que l'équation est autonome, c'est-à-dire que f ne dépend pas de t, et qu'il existe des constantes $L>0$ et $M>0$ telles que f et f' sont L-lipschitziennes, pour tout $y\in\mathbb{R}$, $|f(y)|\leqslant M$ et $|f'(y)|\leqslant M$.
   Démontrer que la méthode est stable et convergente.

   (c) Soit N un entier supérieur ou égal à 2. En exploitant le travail ci-dessus, inventer un schéma d'ordre N.

4. On pose $f(t,x) = -tx$. Écrire un algorithme pour le schéma (S) calculant un terme y_n.
5. Calculer les 20 premières valeurs de ce schéma et comparer avec le résultat exact et ceux obtenus avec la méthode d'Euler et la méthode d'Euler améliorée.