Z6wd ▷ **Exercice** - *Méthode des moindres carrés*

On considère des points $M_1, \ldots, M_n$ de $\mathbb{R}^2$, et on note (x_i, y_i) les coordonnées de chaque point M_i.

1. On cherche les points (x, y) de $\mathbb{R}^2$ approchant au mieux le nuage de points formé par les points M_i au sens des moindres carrés, c'est-à-dire qu'on cherche à minimiser la fonction

$$f : (x, y) \mapsto \sum_{i=1}^{N} (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2$$

On admet que f admet au moins un minimum global sur $\mathbb{R}^2$. Déterminer en quels points f admet ce minimum.

On cherche les points stationnaires : on trouve un point stationnaire $(x, y) = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i, \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i\right)$ et on reconnait le point moyen du nuage de points. On vérifie aisément qu'il s'agit d'un minimum local et qu'il est unique, c'est donc le minimum global.

2. On cherche maintenant une relation affine entre les abscisses et les ordonnées de ces points. On cherche des constantes m et q pour que la droite d'équation $y = mx + q$ s'ajuste le mieux possible aux points observés.

Pour cela, on introduit $d_i = y_i - (mx_i + q)$ l'écart vertical du point M_i par rapport à la droite.

La méthode des moindres carrés consiste à choisir m et q de telle sorte que la somme des écarts au carré soit minimale.

Exprimer m et q en fonction des coordonnées des points.

Pour cela, on doit minimiser la fonction $\mathscr{E} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$définie par

$$\mathscr{E}(m, q) = \sum_{i=0}^{n} d_i^2 = \sum_{i=0}^{n} (y_i - mx_i - q)^2$$

Pour minimiser $\mathscr{E}$ on cherche d'abord les points stationnaires, i.e. les points (m, q) qui vérifient $\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial m} = \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial q} = 0$. Puisque

$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial m}(m, q) = -2\left(\sum_{i=0}^{n} (y_i - (mx_i + q))\, x_i\right), \quad \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial q}(m, q) = -2\left(\sum_{i=0}^{n} (y_i - (mx_i + q))\right),$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial m}(m, q) = 0 \\ \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial q}(m, q) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sum_{i=0}^{n} (y_i - mx_i - q)\, x_i = 0 \\ \sum_{i=0}^{n} (y_i - mx_i - q) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)m + (\sum_{i=0}^{n} x_i)q = \sum_{i=0}^{n} y_i x_i \\ (\sum_{i=1}^{n} x_i)m + (n+1)q = \sum_{i=0}^{n} y_i \end{cases} \iff \begin{cases} m = \frac{(\sum_{i=0}^{n} x_i)(\sum_{i=0}^{n} y_i) - (n+1)(\sum_{i=0}^{n} x_i y_i)}{(\sum_{i=0}^{n} x_i)^2 - (n+1)(\sum_{i=0}^{n} x_i^2)}, \\ q = \frac{(\sum_{i=0}^{n} x_i)(\sum_{i=0}^{n} x_i y_i) - (\sum_{i=0}^{n} y_i)(\sum_{i=0}^{n} x_i^2)}{(\sum_{i=0}^{n} x_i)^2 - (n+1)(\sum_{i=0}^{n} x_i^2)}. \end{cases}$$

On a trouvé un seul point stationnaire. On établi sa nature en étudiant la matrice Hessienne :

$$H_{\mathscr{E}}(m, q) = 2\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=0}^{n} x_i \\ \sum_{i=0}^{n} x_i & (n+1) \end{pmatrix}$$

et $\det(H_{\mathscr{E}}(m, q)) = 4\left((n+1)\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)^2\right) > 0$ avec $\partial_{mm}\mathscr{E}(m, q) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0$ donc il s'agit bien d'un minimum. La droite d'équation $y = mx + q$ ainsi calculée s'appelle droite de régression de y par rapport à x.