Ex

Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0;1]$. On rappelle que X admet pour densité :

$$f(x) = \mathbf{1}_{[0;1]}(x)$$

A l'aide d'une fonction de répartition, déterminer la loi de la variable aléatoire $2X$.

✓

Soit $t \in \mathbb{R}$ et F_{2X} la fonction de répartition de la variable aléatoire $2X$: alors

$$\begin{aligned} F_{2X}(t) &= \mathrm{P}(2X \leqslant t) \\ &= \mathrm{P}\left(X \leqslant \frac{t}{2}\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\frac{t}{2}} 1_{[0;1]}(x)dx \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ \frac{t}{2} & \text{si } 0 < t \leqslant 2 \\ 1 & \text{si } t \geqslant 2 \end{cases} \end{aligned}$$

La fonction F_{2X} est dérivable presque partout (sauf en 0 et en 2). Sa dérivée coïncide donc presque partout avec une fonction densité g de la variable $2X$. On peut donc poser

$$g(x) = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[0;2]}(x)$$

et on conclut que $2X$ suit une loi uniforme sur $[0;2]$.