

## Exercice - Composition de fonctions

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions d'une variable, de classe  $C^2(\mathbb{R})$ . On définit une fonction  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  par :

$$\varphi(x, y) = xf(x + y) + yg(x + y)$$

1. Calculer  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$  et  $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$  en fonction de  $x, y, f', g'$ .
2. Calculer les dérivées partielles secondes  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}x$  en fonction de  $x, y, f', g', f'', g''$ .
3. Observer que  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}$ . Quel théorème du cours permet de prévoir ce résultat ?
4. En déduire la valeur de  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$