btWx ⊵ **Exercice** - *Consistance d'un θ-schéma*

Pour une fonction f continue par morceaux sur $[a;b]$, on pose $\theta \in [0;1]$ on considère l'approximation :

$$\int_a^b f(s)ds \approx (b-a)(\theta f(a) + (1-\theta)f(b))$$

1. A partir de ce choix d'approximation, construire un schéma de résolution d'une EDO $y'(t) = f(t,y)$.

   On a $y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f\left(s, y(s)\right) ds$ d'où le schéma défini par :

   $$y_{n+1} = y_n + h\left(\theta f(t_n, y(t_n)) + (1-\theta)f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))\right)$$

2. Reconnaître des schémas usuels pour les valeurs $\theta \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$.

   — Si $\theta = 0$: méthode d'Euler implicite (rectangle à droite) ;
   — Si $\theta = 1$: méthode d'Euler explicite (rectangle à gauche) ;
   — Si $\theta = 1/2$: méthode de Carnk Nikolson.

3. Montrer que le schéma est consistant d'ordre 1 si $\theta \neq \frac{1}{2}$.

   On calcule l'erreur de consistance :

   $$\begin{aligned} h\, e_n(h) &= \underbrace{y(t_{n+1}) - y(t_n)}_{\text{développement de Taylor}} - h\theta \underbrace{f(t_n, y(t_n))}_{y'(t_n)} - h(1-\theta) \underbrace{f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))}_{y'(t_{n+1})} \\ &= hy'(t_n) + \frac{h^2}{2}y''(t_n) + \frac{h^3}{6}y'''(c_n) - h\theta y'(t_n) - h(1-\theta)\left(y'(t_n) + hy''(t_n) + \frac{h^2}{2}y'''(c_n')\right) \\ &= hy'(t_n)(1-\theta-(1-\theta)) + h^2\left(\frac{y''(t_n)}{2} - (1-\theta)y''(t_n)\right) + h^3 \underbrace{(...)}_{\text{borné}} \end{aligned}$$

   Donc

   $$|e_n(h)| \leqslant h\left|\frac{y''(t_n)}{2} - (1-\theta)y''(t_n)\right| + h^2 M$$

   ce qui permet de conclure que l'ordre de consistance est 1 si $\theta \neq \frac{1}{2}$, l'ordre de consistance est 2 si $\theta = \frac{1}{2}$.