

On considère  $n$  lampes,  $n \in \mathbb{N}^*$ . La durée de vie (en années) d'une lampe est une variable aléatoire absolument continue dont la densité  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f: t \mapsto \frac{1}{16}te^{-\frac{t}{4}}1_{[0;+\infty[}(t)$$

On suppose que les lampes évoluent de manière indépendante.

Pour tout entier  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on note  $X_i$  la variable aléatoire égale à la durée de vie de la  $i$ -ème lampe.

1. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire  $X_1$ .
2. Un appareil de type  $A$  comporte 6 lampes, toutes nécessaires à son fonctionnement. On note  $T = \min_{i \in \{1, \dots, 6\}} (X_i)$ .
  - (a) Que modélise la variable aléatoire  $T$  ?
  - (b) Déterminer la loi de  $T$ .
  - (c) Calculer la probabilité que l'appareil de type  $A$  fonctionne de manière continue pendant au moins 4 ans à partir de sa mise en marche, sans changer de lampe.
3. Un appareil de type  $B$  fonctionne avec une lampe seulement. On dispose cette fois d'une lampe de remplacement. Lorsque l'appareil fonctionne et que la lampe tombe en panne, celle-ci est immédiatement remplacée par la lampe de remplacement. Soit  $U$  la variable aléatoire donnant la durée de fonctionnement d'un appareil de type  $B$  avec une lampe de remplacement.
  - (a) Exprimer  $U$  en fonction de  $X_1$  et  $X_2$ .
  - (b) Déterminer la loi de  $U$ .
4. On dispose de 4 appareils de type  $B$ , sans aucune lampe de remplacement. On met en marche ces 4 appareils simultanément. On note  $V$  le temps durant lequel au moins un des 4 appareils fonctionne.
  - (a) Exprimer  $V$  en fonction de  $X_1, X_2, X_3, X_4$ .
  - (b) En déduire la loi de  $V$ .