4CI9 $\trianglerighteq$ **Exercice** - *Fonctions homogènes*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $f : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On dit que f est homogène de degré α si pour tout $(x, y, t) \in (\mathbb{R}^*)^3$:

$$f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$$

1. Donner un exemple de fonction de deux variables homogène de degré 2 et vérifier que ses dérivées partielles sont homogènes de degré 1.
2. Soit $f : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $t \in \mathbb{R}^*$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$, on pose $g_t(x, y) = f(tx, ty)$. En calculant les dérivées partielles de g de deux manières différentes, montrer que si f est homogène de degré α alors $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont homogènes de degré $\alpha - 1$.
3. Démontrer que si f est homogène de degré α alors f vérifie la relation d'Euler :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \qquad x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha f(x, y)$$

4. Démontrer que si f est de classe $\mathcal{C}^2$ et homogène de degré α alors

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \qquad x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \alpha(\alpha - 1)f(x, y)$$