On admet que $e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$.

1. Calculer la somme : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!}$

✓ On décompose la somme en deux sommes :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \\
&= 2e
\end{aligned}$$

2. Calculer la somme : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-2}{n!}$

✓ On décompose la somme en deux sommes :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2-2}{n!} &= \sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2}{n!} - 2\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!} \\
&= \sum_{n\geqslant 1} \frac{n}{(n-1)!} - 2\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!} \\
&= \sum_{n\geqslant 1} \frac{n-1+1}{(n-1)!} - 2\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!} \\
&= \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(n-1)!} - 2\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!} \\
&= \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!} + \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!} - 2\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!} \\
&= 0
\end{aligned}$$

3. Calculer la somme : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3}{n!}$

✓ On simplifie :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^3}{n!} &= \sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2}{(n-1)!} \\
&= \sum_{n\geqslant 1} \frac{n(n-1)+n-1+1}{(n-1)!} \\
&= \sum_{n\geqslant 1} \frac{n(n-1)}{(n-1)!} + \sum_{n\geqslant 1} \frac{n-1}{(n-1)!} + \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(n-1)!} \\
&= \sum_{n\geqslant 2} \frac{n}{(n-2)!} + \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(n-1)!} \\
&= \sum_{n\geqslant 2} \frac{n-2+2}{(n-2)!} + \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(n-1)!} \\
&= \sum_{n\geqslant 3} \frac{1}{(n-3)!} + \sum_{n\geqslant 2} \frac{2}{(n-2)!} + \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(n-1)!} \\
&= \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!} + 2\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!} + \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!} + \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!} \\
&= 5e
\end{aligned}$$