Fg10 ▷ **Exercice** - *Calcul de dérivées partielles au bord du domaine de définition*

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto \sqrt{x + 5y}$.

1. Donner le domaine de définition de f.

> La fonction f est définie sur le demi plan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 5y \geqslant 0\}$

2. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ pour les points (x, y) où c'est possible.

> La fonction racine étant dérivable sur $]0; +\infty[$, on peut calculer avec les règles usuelles les dérivées partielles de f sur le demi plan ouvert $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 5y > 0\}$:
>
> $$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{x + 5y}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{5}{2\sqrt{x + 5y}}$$

3. Étudier l'existence des dérivées partielles en $(x, y) = (0, 0)$.

> Il faut ici revenir à la définition en étudiant le taux d'accroissement des fonctions partielles en 0.
> Pour étudier l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$, on pose pour tout $x > 0$: $\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x \to 0]{} +\infty$. On conclut que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$n'existe pas.
> De même, on pose pour tout $y > 0$: $\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \frac{\sqrt{5y}}{y} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{y}} \xrightarrow[y \to 0]{} +\infty$. On conclut que $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ n'existe pas.

4. Même question en $(x, y) = (5, -1)$.

> C'est exactement le même problème qu'en $(0, 0)$ translaté en $(5, -1)$:
> on pose $x = 5 + h$ et on étudie le taux d'accroissement quand x tend vers 5, soit $h \to 0$: $\frac{f(5+h,-1)-f(5,-1)}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}} \xrightarrow[h \to 0]{} +\infty$
> on pose $y = -1 + h$ et on étudie le taux d'accroissement quand y tend vers -1, soit $h \to 0$: $\frac{f(5,-1+h)-f(5,-1)}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}} \xrightarrow[h \to 0]{} +\infty$
> On conclut que les dérivées partielles n'existent pas en $(0, 0)$.