tPpR ⊵ **Exercice** - *Séries divergentes*

En examinant la limite du terme général, montrer que les séries suivantes divergent :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(1+(-1)^n\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$;

   On pose $u_n=\left(1+(-1)^n\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$: alors $u_{2n}=1+\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$ donc $\lim u_n\neq 0$ donc la série est divergente.

2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{1+n^{-1}}$;

   On pose $u_n=\frac{(-1)^n}{1+n^{-1}}$: alors $u_{2n}=\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$ donc $\lim u_n\neq 0$ donc la série est divergente.

3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^n-1\right)$.

   Contrairement aux apparences, le terme général ne tend pas vers vers 0. En effet :
   $\frac{n}{n+1}=\frac{n+1-1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$ donc $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}$.
   Or $\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{1}{n+1}$ donc $n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}-1$.
   Par composition de limites, on en déduit que $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\xrightarrow[n\to+\infty]{}e^{-1}=\frac{1}{e}\neq 0$. Donc la série est divergente.