

On considère un échantillon (X_i) de taille $n = 4$ dans une population suivant une loi normale de paramètres μ et σ^2 .

On pose

$$T_1 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 X_i \quad T_2 = \frac{1}{5}(2X_1 + X_2) + \frac{1}{10}(3X_3 + X_4)$$

$$U = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^4 (X_i - \mu)^2 \quad V = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^4 (X_i - T_1)^2$$

1. On cherche à estimer μ à l'aide des estimateurs T_1 et T_2 . Étudier leur biais et comparer leurs efficacités.
2. Quelle est la loi suivie par la variable T_1 ? la variable T_2 ? la variable U ? la variable V ? justifier.
3. Déterminer $x \in \mathbb{R}$ tel que $P(U > x) = 0,05$.
4. A l'aide du tableur, calculer $P(V > 5)$ avec une précision de 10^{-8} .
5. Quelle est la loi de la variable aléatoire $\frac{4(T_1 - \mu)}{\sigma\sqrt{U}}$?