Ex

Gain au loto

Le loto est un jeu consistant à choisir six numéros différents compris entre 1 et 49. Au dernier tirage, il fallait jouer les numéros : 4, 8, 21, 23, 42 et 49. Le gain était de 700 000 euros avec les six bons numéros, de 1 100 euros avec cinq bons numéros, de 20 euros avec quatre bons numéros et de 1 euro avec trois bons numéros.
Pour un jeu simple, calculer l'espérance de gain.

✓

Soit X le nombre de bons numéros trouvés par le joueur. Alors X suit une loi hypergéométrique de paramètres : $\mathcal{H}(6, \frac{1}{46}, 49)$. Une loi hypergéométrique de paramètres (N, p, n) est une loi de probabilité sur $\{0, 1, \ldots, N\}$ dont la loi de probabilité e est donnée par :

$$\forall k \in \{0, 1, \ldots, N\}, \mathrm{P}(X = k) = \frac{\binom{n}{k}\binom{N-n}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Elle permet de modéliser le tirage sans remise de n boules parmi N boules dont n sont marquées. Ici, $N = 49$, $n = 6$ et $p = \frac{1}{46}$.
Soit Y le gain du joueur. Alors on a

k	0	0	0	1	20	1100	700 000
$\mathrm{P}(Y = k)$	$\mathrm{P}(X = 0)$	$\mathrm{P}(X = 1)$	$\mathrm{P}(X = 2)$	$\mathrm{P}(X = 3)$	$\mathrm{P}(X = 4)$	$\mathrm{P}(X = 5)$	$\mathrm{P}(X = 6)$

On a donc

$$\mathbb{E}(Y) = \mathrm{P}(X = 3) + 20 \times \mathrm{P}(X = 4) + 1\ 100 \times \mathrm{P}(X = 5) + 700000 \times \mathrm{P}(X = 6).$$

Or

$$\mathrm{P}(X = 3) = \frac{\binom{6}{3}\binom{43}{3}}{\binom{49}{6}} = \frac{246\ 820}{13\ 983\ 816}$$

$$\mathrm{P}(X = 4) = \frac{\binom{6}{4}\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} = \frac{13\ 545}{13\ 983\ 816}$$

$$\mathrm{P}(X = 5) = \frac{\binom{6}{5}\binom{6}{1}}{\binom{49}{6}} = \frac{258}{13\ 983\ 816}$$

$$\mathrm{P}(X = 6) = \frac{\binom{6}{6}\binom{43}{0}}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{13\ 983\ 816}$$

donc

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{13\ 983\ 816}(246\ 820 + 20 \times 13\ 545 + 1\ 100 \times 258 + 700\ 000) = \frac{1\ 501520}{13\ 983\ 816} \simeq 0.1074$$

L'espérance du gain du joueur (sans compter sa mise de départ) est d'environ 0.11 euros.