J50Z ▷ **Exercice** - *Evolution d'une concentration chimique*

L'évolution de la concentration de certaines réactions chimiques au cours du temps peut être décrite par l'équation différentielle :

$$y'(t) = -\frac{1}{1+t^2}y(t)$$

1. Sachant qu'à l'instant $t = 0$, la concentration vaut $y(0) = 5$, déterminer la concentration en $t = 2$ à l'aide de la méthode d'Euler implicite avec un pas $h = 0.5$.

   Le schéma implicite s'écrit

   $$y_{n+1} = y_n + hF(t_{n+1}, y_{n+1})$$

   où $F(t, y) = -\frac{1}{1+t^2}y$.
   Après réécriture sous forme explicite, on obtient

   $$y_{n+1} = \frac{y_n}{1 + \frac{h}{1+t_{n+1}^2}}$$

   Avec $h = 0.5$, on a $t_n = \frac{n}{2}$.
   Après calculs, on trouve $y_4 = \frac{520}{231} \approx 2.25$ soit $y(2) \approx 2.25$.

2. Faire de même pour un pas de $h = 10^{-3}$ et commenter la différence.
3. Résoudre analytiquement l'équation différentielle, puis proposer sur un même graphique la solution approchée de la méthode d'Euler implicite et la solution exacte pour différentes valeurs de h.

   Lien vers le notebook