Ex **Etude d'une série entière**

Déterminer le rayon de convergence de la série :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+4n-1}{n!(n+2)} x^n$$

puis déterminer sa somme dans l'intervalle ouvert de convergence.

✓

La règle de d'Alembert montre que le rayon de convergence est égal à $+\infty$.
Pour n entier naturel donné, $\frac{n^2+4n-1}{n!(n+2)} = \frac{n^3+5n^2+3n-1}{(n+2)!}$ puis

$$\begin{aligned} n^3+5n^2+3n-1 &= (n+2)(n+1)n+2n^2+n-1 = (n+2)(n+1)n+2(n+2)(n+1)-5n-5 \\ &= (n+2)(n+1)n+2(n+2)(n+1)-5(n+2)+5 \end{aligned}$$

Donc, pour tout réel x,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+2)(n+1)n}{(n+2)!} x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+2)(n+1)}{(n+2)!} x^n - 5\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+2}{(n+2)!} x^n + 5\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)!} x^n.$$

Ensuite $f(0) = -\frac{1}{2}$ et pour $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n - 5\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!} x^n + 5\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)!} x^n \\ &= xe^x + 2e^x - 5\frac{e^x-1}{x} + 5\frac{e^x-1-x}{x^2} = \frac{e^x(x^3+2x^2-5x+5)-5x}{x^2}. \end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad , \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+4n-1}{n!(n+2)} x^n = \begin{cases} \frac{e^x(x^3+2x^2-5x+5)-5x}{x^2} \text{ si } x \in \mathbb{R}^* \\ -\frac{1}{2} \text{ si } x = 0 \end{cases}$$