aoB6 ▷ **Exercice** - *Convergence de séries entières*

Calculer le rayon R de convergence et déterminer le domaine D de convergence (sauf pour la question 8) des séries entières réelles suivantes.

1. $S_1(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 t^n$

$R = 1$: Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en posant $u_n = n^2 t^n$ avec $t \in \mathbb{R}^*$,

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 |t| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |t|,$$

donc par le critère de d'Alembert, si $|t| < 1$, la série $\sum n^2 t^n$ converge et si $|t| > 1$, cette série diverge. D'où le rayon de convergence de S_1 qui vaut 1.

$D =]-1;1[$ car pour $t = 1$, $n^2 t^n = n^2$ et $\sum n^2$ est une série divergente grossièrement. Pour $t = -1$, la série $\sum (-1)^n n^2$ diverge grossièrement.

2. $S_2(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n!} t^n$

$R = +\infty$: Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en posant $u_n = \frac{(-2)^n}{n!} t^n$ avec $t \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{2}{n+1}|t| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc par le critère de d'Alembert, la série $\sum \frac{(-2)^n}{n!} t^n$ converge pour tout $t \in \mathbb{R}$. D'où le rayon de convergence de S_2 qui vaut $+\infty$.

3. $S_3(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) t^n$

$R = 1$: Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en posant $u_n = \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) t^n$ avec $t \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{\sin\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) t^{n+1}}{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) t^n}\right| = \left|\frac{\sin\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)}{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}\right| |t| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |t|,$$

donc par le critère de d'Alembert, si $|t| < 1$, la série $\sum \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) t^n$ converge et si $|t| > 1$, cette série diverge. D'où le rayon de convergence de S_3 qui vaut 1. Si $t = 1$ ou $t = -1$, $|u_n(t)| \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$, donc la série $\sum |u_n(t)|$ converge. Donc $D = [-1, 1]$.

4. $S_4(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n} t^n$

$R = 1$: Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en posant $u_n = \frac{\ln n}{n} t^n$ avec $t \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right| |t| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |t|,$$

donc par le critère de d'Alembert, si $|t| < 1$, la série $\sum \frac{\ln n}{n} t^n$ converge et si $|t| > 1$, cette série diverge. D'où le rayon de convergence de S_4 qui vaut 1.
Pour $t = -1$, la série $\sum (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ converge par théorème des séries alternées. Pour $t = 1$, la série $\sum \frac{\ln n}{n}$ diverge par comparaison à la série harmonique. Donc $D = [-1, 1[$.

5. $S_5(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n} t^n$

$R = +\infty$: Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en posant $u_n = \frac{1}{n^n} t^n$ avec $t \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \times \frac{1}{n+1}\right| |t| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc par le critère de d'Alembert, la série $\sum \frac{1}{n^n} t^n$ converge pour tout $t \in \mathbb{R}$. D'où le rayon de convergence de S_5 qui vaut $+\infty$.

6. $S_6(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^n}{\ln n} t^n$

$R = 0$: Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en posant $u_n = \frac{n^n}{\ln n} t^n$ avec $t \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \times \frac{\ln n}{\ln(n+1)}\right| |t| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

donc par le critère de d'Alembert, la série $\sum \frac{n^n}{\ln n} t^n$ diverge pour tout $t \in \mathbb{R}^*$. D'où le rayon de convergence de S_6 qui vaut 0.

7. $S_7(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n t^{2n}$

$R = \frac{1}{\sqrt{2}}$: Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en posant $u_n = 2^n t^{2n}$ avec $t \in \mathbb{R}^*$, on a une série géométrique de raison $2t^2$ donc : la série $\sum 2^n t^{2n}$ converge et si $2|t|^2 \geqslant 1$, cette série diverge. D'où le rayon de convergence de S_7 qui vaut $\frac{1}{\sqrt{2}}$. et $D =]-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}[$.

8. $S_8(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1+i)^n}{n2^n} t^{3n}$

$R = 2^{\frac{1}{6}}$: Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en posant $u_n = \frac{(1+i)^n}{n2^n} t^{3n}$ avec $t \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{(1+i)^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}} \times \frac{n2^n}{(1+i)^n}\right| |t|^3 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{|t|^3}{\sqrt{2}},$$

donc par le critère de d'Alembert, si $\frac{|t|^3}{2} < 1$, la série $\sum \frac{(1+i)^n}{n2^n} t^{3n}$ converge et si $\frac{|t|^3}{2} > 1$, cette série diverge. D'où le rayon de convergence de S_8 qui vaut $2^{\frac{1}{6}}$.