XtkF ▷ **Exercice** - *Etude d'extrema*

Soit $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 16\}$. Pour tout $(x,y) \in K$, on pose

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + x^2 - 3$$

graphe de la fonction f

1. Justifier l'existence d'un minimum et d'un maximum de f sur K.

K est fermé borné, la fonction f est continue sur K donc d'après le théorème des valeurs extrêmes, f atteint son maximum et son minimum sur K.

2. En quels points sont-ils atteints ?

On cherche d'abord les points stationnaires dans l'intérieur de K : la fonction f n'est pas dérivable en $(0,0)$, on calcule les dérivées partielles en $(x,y) \in \overset{\circ}{K} \backslash \{(0,0)\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 < 16\}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2x = 0 \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{|x|} + 2x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Il n'y a aucune solution à ce système d'équations (si $x > 0$ alors $1 + 2x > 0$ et si $x < 0$ alors $-1 + 2x = 0$). Donc f n'admet pas de points stationnaires sur $\overset{\circ}{K} \backslash \{(0,0)\}$.
La fonction f n'a donc d'autre choix que d'atteindre ses bornes en $(0,0)$ ou bien sur la frontière du domaine K.
Or $f(0,0) = -3$ et pour tout $(x,y) \in K$, $\sqrt{x^2+y^2} + x^2 \geqslant 0$ donc $f(x,y) \geqslant -3 = f(0,0)$. On en déduit que $\boxed{f \text{ atteint son minimum en } (0,0) \text{ et ce minimum vaut } -3}$.
D'autre part, la frontière de K est le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 16$, sur lequel $f(x,y) = 1 + x^2$. On en déduit que le maximum est atteint si $x \in \{-4, 4\}$, ce qui impose $y = 0$. Le $\boxed{\text{maximum est donc atteint aux points } (-4,0) \text{ et } (4,0)}$, la valeur de ce maximum est 17.