Ex

**Probabilité bayésienne**

Un poison vient d'être ingéré par une personne. L'examen des lieux laisse penser que trois poisons $p_1$, $p_2$ et $p_3$ seulement peuvent être incriminés. Le poison $p_1$ a une probabilité $\frac{1}{10}$ d'avoir été ingéré, le poison $p_2$ une probabilité de $\frac{1}{2}$ et le poison $p_3$ une probabilité de $\frac{2}{5}$. De plus, on sait que chaque poison provoque chez la personne qui l'a ingéré un signe clinique $s$ particulier, mais avec des probabilités différentes car ils n'ont pas la même composition. Ainsi, le poison $p_1$ provoque le signe clinique $s$ avec une probabilité de $\frac{4}{5}$. Ce même signe est observable respectivement avec les probabilités $\frac{1}{50}$ pour le poison $p_2$ et $\frac{2}{5}$ pour le poison $p_3$. Quel est le poison qui a la plus grande probabilité d'avoir été absorbé, sachant que le signe clinique $s$ est observé sur le patient ?

✓

Soit $A$ (respectivement $B$ et $C$) l'événement « la personne a ingéré le poison $p_1$ (respectivement $p_2$ et $p_3$) ». Soit $S$ l'événement « la personne présente le signe clinique $s$ ».
On cherche à déterminer quel poison a la probabilité la plus élevée d'avoir été ingéré, sachant que le signe clinique $s$ a été observé. Autrement dit, cela revient à calculer les probabilités suivantes :

— $\mathrm{P}(A|S) = \frac{\mathrm{P}(A\cap S)}{p(S)} = \frac{\mathrm{P}(A)\times\mathrm{P}(S|A)}{\mathrm{P}(S)}$

— $\mathrm{P}(B|S) = \frac{\mathrm{P}(B)\times\mathrm{P}(S|B)}{\mathrm{P}(S)}$

— $\mathrm{P}(C|S) = \frac{\mathrm{P}(C)\times\mathrm{P}(S|C)}{\mathrm{P}(S)}$

or par la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(S) &= \mathrm{P}(S|A)\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(S|B)\mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(S|C)\mathrm{P}(C)\\ &= \frac{4}{5}\times\frac{1}{10} + \frac{1}{50}\times\frac{1}{2} + \frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\\ &= \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Ainsi on a :

$$\mathrm{P}(A|S) = \frac{\frac{1}{10}\times\frac{4}{5}}{\frac{1}{4}} = \frac{8}{25}$$

$$\mathrm{P}(B|S) = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{50}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{25}$$

$$\mathrm{P}(C|S) = \frac{\frac{4}{10}\times\frac{2}{5}}{\frac{1}{4}} = \frac{16}{25}.$$

Le poison $p_3$ est donc le plus probable.
On peut remarquer qu'une partie des calculs n'étaient pas nécessaires ici : comme on a

$$\mathrm{P}(A|S) = \frac{\mathrm{P}(A\cap S)}{\mathrm{P}(S)},\quad \mathrm{P}(B|S) = \frac{\mathrm{P}(B\cap S)}{\mathrm{P}(S)},\quad \text{et } \mathrm{P}(C|S) = \frac{\mathrm{P}(C\cap S)}{\mathrm{P}(S)},$$

il suffit en fait de comparer $\mathrm{P}(A\cap S)$, $\mathrm{P}(B\cap S)$ et $\mathrm{P}(C\cap S)$ pour obtenir la conclusion.