Ex

Modélisation et rencontre de généraux

Le général Contant doit échanger des documents top secrets avec le général Janty. Pour cela, ils ont rendez-vous au bar Le Torkel. On suppose que l'heure d'arrivée de chaque individu au point de rendez-vous est uniformément distribué entre 20h et 21h. En revanche, chacun a promis de ne pas attendre l'autre plus de 10 minutes sur place.
Quelle est la probabilité que ces deux personnes puissent effectuer leur transaction ?

✓

Soit X l'heure d'arrivée du général Contant et Y l'heure d'arrivée du général Janty. L'énoncé suggère que X et Y sont des variables aléatoires indépendantes et nous dit qu'elles suivent toutes les deux une loi uniforme sur $[20;21]$. La probabilité cherchée est $\mathbb{P}(|X-Y| \leqslant \frac{1}{6})$.
Comme X et Y sont indépendantes, on a

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = \mathbf{1}_{[20;21]^2}(x,y).$$

Donc

$$p = \int\int_D dx\, dy,$$

où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 20 \leqslant x \leqslant 21,\ 20 \leqslant y \leqslant 21,\ \frac{-1}{6} \leqslant x-y \leqslant \frac{1}{6}\}$.

On peut évaluer géométriquement cette aire mais nous allons faire le calcul de l'intégrale double. On commence par remplacer l'intervalle $[20;21]$ par l'intervalle $[0;1]$ en effectuant une translation. Ainsi, l'écriture est simplifiée.

$$\begin{aligned} p &= \int_0^{\frac{1}{6}} \int_0^{\frac{1}{6}+y} dx\, dy + \int_{\frac{1}{6}}^{\frac{5}{6}} \int_{y-\frac{1}{6}}^{y+\frac{1}{6}} dx\, dy + \int_{\frac{5}{6}}^{1} \int_{y-\frac{1}{6}}^{1} dx\, dy \\ &= \int_0^{\frac{1}{6}} (\frac{1}{6}+y)\, dy + \int_{\frac{1}{6}}^{\frac{5}{6}} \frac{1}{3}\, dy + \int_{\frac{5}{6}}^{1} (\frac{7}{6}-y)\, dy \\ &= \left[\frac{1}{6}y + \frac{1}{2}y^2\right]_0^{\frac{1}{6}} + \left[\frac{1}{3}y\right]_{\frac{1}{6}}^{\frac{5}{6}} + \left[\frac{7}{6}y - \frac{1}{2}y^2\right]_{\frac{5}{6}}^{1} \\ &= \frac{11}{36}. \end{aligned}$$

La probabilité que les deux généraux puissent effectuer leur transaction est donc de l'ordre de 0.31.