Ex - Fonction de répartition

Soit $\lambda > 0$ et X une variable aléatoire admettant pour densité $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{[0;+\infty[}(x)$.

1. Vérifier que f définit bien une fonction densité, puis déterminer la fonction de répartition F_X de X.

✓

Il suffit de vérifier que $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ puis de calculer :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} \\ &= 1 \end{aligned}$$

On détermine maintenant la fonction de répartition : soit $t \in \mathbb{R}$;

- si $t < 0$, alors $F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx = \int_{-\infty}^{t} 0dx = 0$;
- si $t \geqslant 0$, alors $F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}dx = 0 + \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 - e^{-\lambda t}$.

2. Exprimer $\mathrm{P}(-1 \leqslant X \leqslant 1)$ en fonction de F_X et en déduire une valeur numérique.

✓

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(-1 \leqslant X \leqslant 1) &= F_X(1) - F_X(-1) \\ &= (1 - e^{-\lambda}) - 0 \\ &= 1 - e^{-\lambda} \end{aligned}$$