Ex - Application du théorème central limite

Soit $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi de moyenne $\mu = 30$ et de variance $\sigma^2 = 16$. Soit $S = \sum_{i=1}^{100} X_i$. Quelle est la distribution de la variable aléatoire S selon le théorème central limite ?

✓

Les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ sont indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi de moyenne $\mu = 30$ et de variance $\sigma^2 = 16$. La loi de chaque variable X_i n'est pas connue mais on sait que la moyenne et la variance sont finies. D'après le théorème central limite, la variable aléatoire $Z = \frac{S-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$ suit approximativement une loi normale centrée réduite avec $n = 100$ considéré comme grand.

Autrement dit, la variable aléatoire S suit approximativement une loi normale avec une moyenne donnée par $n\mu = 100 \times 30 = 3000$ et une variance donnée par $n\sigma^2 = 100 \times 16 = 1600$.

Calculez la probabilité que la somme S soit inférieure à 2900.

✓

Pour trouver cette probabilité, on centre et on réduit la variable aléatoire :

$$Z = \frac{S - \mu_S}{\sigma_S} = \frac{S - 3000}{\sqrt{1600}}.$$

Donc, nous cherchons

$$\mathrm{P}\left(Z < \frac{2900 - 3000}{\sqrt{1600}}\right) = \mathrm{P}\left(Z < -2.5\right).$$

En utilisant la table de loi (ou un calculateur approprié), nous trouvons que la probabilité recherchée est d'environ 0.0062.