

1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières réelles suivantes :

(a) $\sum_{n \geq 0} \frac{3n^2 - 1}{2^{2n+1} \sqrt{n+1}} x^n$



On pose $u_n(x) = \frac{3n^2 - 1}{2^{2n+1} \sqrt{n+1}} x^n$ et on utilise le théorème de d'Alembert :

$$\begin{aligned} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} &= \frac{(3(n+1)^2 - 1) \times 2^{2n+1} \sqrt{n+1}}{(2^{2(n+1)+1} \sqrt{n+1+1}) (3n^2 - 1)} \frac{|x^{n+1}|}{|x^n|} \\ &= \frac{1}{2^2} \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} \frac{3n^2 + 6n + 3 - 1}{3n^2 - 1} |x| \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} |x| \end{aligned}$$

Or $\frac{1}{4} |x| < 1 \iff |x| < 4$ donc le rayon de convergence est $R = 4$.

(b) $\sum_{n \geq 1} 9^n \left(\frac{n-1}{n} \right)^n x^n$



On pose $u_n(x) = 9^n \left(\frac{n-1}{n} \right)^n x^{2n}$ et on utilise le théorème de Cauchy :

$$\begin{aligned} (|u_n(x)|)^{\frac{1}{n}} &= \left(9^n \left(\frac{n-1}{n} \right)^n |x|^{2n} \right)^{\frac{1}{n}} \\ &= 9 \left(\frac{n-1}{n} \right) |x| \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 9|x| \end{aligned}$$

Or $9|x| < 1 \iff |x| < \frac{1}{9}$ donc le rayon de convergence est $R = \frac{1}{9}$.

2. Que peut-on dire de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{3n^2 - 1}{2^{2n+1} \sqrt{n+1}} \left(-\frac{9}{8} \right)^n$? Justifier.



On reconnaît la série entière de la question 1.(a) évaluée en $x = -\frac{9}{8}$. Or $-\frac{9}{8} \in]-4; 4[$ donc la série est absolument convergente.

3. Que peut-on dire de la série $\sum_{n \geq 1} 9^n \left(\frac{2n-2}{3n} \right)^n$? Justifier.



On reconnaît la série entière de la question 1.(b) évaluée en $x = \frac{2}{3}$. Or $\frac{2}{3} \notin]-\frac{1}{9}; \frac{1}{9}[$ donc la série est grossièrement divergente.