

On considère le système linéaire :

$$\begin{cases} 5x + y + z = 7 \\ x + 5y - z = 5 \\ x - y + 4z = 4 \end{cases} \quad (S)$$

dont la solution est $(1, 1, 1)$.

1. Montrer que l'on peut utiliser la méthode de Jacobi pour résoudre ce système et justifier que dans ce cas, la méthode converge.

Résoudre ce système revient à résoudre l'équation $Ax = b$ où $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$. Cette matrice A est à diagonale strictement dominante car $5 > 1+1$ et $4 > 1+1$. Par théorème, on en déduit que la méthode de Jacobi converge vers la solution.

2. Calculer la première itération de la méthode de Jacobi en partant de $X_0 = (0, 0, 0)$ puis la 50ème itération à l'aide d'un programme Python.

Pour appliquer la méthode de Jacobi, on décompose A sous la forme $A = M - N$ où $M = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Pour tout entier n , on définit $X_{n+1} = F(X_n)$ où

$F(X) = M^{-1}NX + M^{-1}b$ et $M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$. On décide d'initialiser l'itération avec

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On calcule :

$$X_1 = M^{-1}NX_0 + M^{-1}b = M^{-1}b = \begin{pmatrix} 1.4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X_2 = M^{-1}NX_1 + M^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.92 \\ 0.9 \end{pmatrix}$$

$$X_3 = M^{-1}NX_2 + M^{-1}b = \begin{pmatrix} 1.036 \\ 0.98 \\ 0.98 \end{pmatrix}$$

3. Montrer que la méthode de Gauss-Seidel converge pour ce problème.

Pour utiliser la méthode de Gauss-Seidel, il faut s'assurer que la matrice A est symétrique définie positive. Elle est visiblement symétrique réelle donc diagonalisable. Il reste donc à vérifier que ses valeurs propres sont toutes strictement positives.

On se lance dans le calcul du polynôme caractéristique :

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 5-X & 1 & 1 \\ 1 & 5-X & -1 \\ 1 & -1 & 4-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6-X & 1 & 1 \\ 6-X & 5-X & -1 \\ 0 & -1 & 4-X \end{vmatrix} = (6-X)(X^2 - 8X + 14)$$

Une valeur propre évidente est donc $\lambda_1 = 6$. En analysant le polynôme du second degré $(X^2 - 8X + 14)$, on déduit que $\lambda_2\lambda_3 = 14$ donc λ_2 et λ_3 sont de même signe. De plus, $\lambda_2 + \lambda_3 = 8$ donc on est assuré que $\lambda_2 > 0$ et $\lambda_3 > 0$.

4. Calculer les cinquante premières itérations de la méthode de Gauss-Seidel en partant de $X_0 = (0, 0, 0)$.

On calcule :

$$X_1 = M^{-1}NX_0 + M^{-1}b = M^{-1}b = \begin{pmatrix} 1.4 \\ 0.72 \\ 0.83 \end{pmatrix}$$

$$X_2 = M^{-1}NX_1 + M^{-1}b = \begin{pmatrix} 1.09 \\ 0.948 \\ 0.9645 \end{pmatrix}$$

$$X_3 = M^{-1}NX_2 + M^{-1}b = \begin{pmatrix} 1.0175 \\ 0.9894 \\ 0.992975 \end{pmatrix}$$