

Étudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

$$1. \quad u_n = \frac{n}{n^3+1}$$

Alors $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$ donc par comparaison à une série de Riemann convergente ($\alpha = 2 > 1$), la série $\sum u_n$ converge.

$$2. \quad u_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$$

Alors $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}$ donc par comparaison à une série de Riemann convergente ($\alpha = 3/2 > 1$), la série $\sum u_n$ converge.

$$3. \quad u_n = n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

Alors $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_n \underset{+\infty}{\sim} n \times \frac{1}{n} = 1$ donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

$$4. \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Alors $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n}$ donc par comparaison à une série de Riemann divergente ($\alpha = 1 < 1$), la série $\sum u_n$ diverge.

$$5. \quad u_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$$

Alors $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} = \frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{1}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{1}{n\sqrt{n}(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n \times 2\sqrt{n}} = \frac{1}{2n^{3/2}}$ donc par comparaison à une série de Riemann convergente ($\alpha = 3/2 > 1$), la série $\sum u_n$ converge.

$$6. \quad u_n = \frac{(-1)^n+n}{n^2+1} \quad \text{Alors } u_n \geq 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^* \text{ et } u_n = \frac{(-1)^n+n}{n^2+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \text{ donc par comparaison à une série de Riemann divergente } (\alpha = 1 < 1), \text{ la série } \sum u_n \text{ diverge.}$$

$$7. \quad u_n = \frac{1}{n!}$$

Alors $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ donc par comparaison à une série géométrique convergente ($q = \frac{1}{2} < 1$), la série $\sum u_n$ converge.

$$8. \quad u_n = \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$$

Alors $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_n = \ln\left(\frac{n^2+n+2-1}{n^2+n-1}\right) = \ln\left(1 + \frac{2}{n^2+n-1}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n^2+n-1}$ donc par comparaison à une série de Riemann convergente ($\alpha = 2 > 1$), la série $\sum u_n$ converge.

Indications : Pour la question 5., utiliser la quantité conjuguée, i.e. multiplier le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$. Pour la question 7., utiliser l'inégalité $n! \geq 2^{n-1}$. Pour la question 8., utiliser un équivalent de $\ln(1+x)$ en 0.