

## Exercice -

On considère un échantillon  $(X_i)$  de taille  $n = 4$  dans une population suivant une loi normale de paramètres  $\mu$  et  $\sigma^2$ .

On pose

$$T_1 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 X_i \quad T_2 = \frac{1}{5}(2X_1 + X_2) + \frac{1}{10}(3X_3 + X_4)$$

$$U = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^4 (X_i - \mu)^2 \quad V = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^4 (X_i - T_1)^2$$

1. On cherche à estimer  $\mu$  à l'aide des estimateurs  $T_1$  et  $T_2$ . Étudier leur biais et comparer leurs efficacités.
2. Quelle est la loi suivie par la variable  $T_1$ ? la variable  $T_2$ ? la variable  $U$ ? la variable  $V$ ? justifier.
3. Déterminer  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $P(U > x) = 0,05$ .
4. A l'aide du tableur, calculer  $P(V > 5)$  avec une précision de  $10^{-8}$ .
5. Quelle est la loi de la variable aléatoire  $\frac{4(T_1 - \mu)}{\sigma\sqrt{U}}$ ?