

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires suivant une loi uniforme sur le disque unité D centré en $(0, 0)$.

1. Déterminer le réel α tel que $f: (x, y) \mapsto \alpha \mathbf{1}_D(x, y)$ soit une densité caractérisant la loi du couple (X, Y) .



Le disque D a pour aire π donc (X, Y) admet pour densité $f(x, y) = \frac{1}{\pi} \mathbf{1}_D(x, y)$

2. Déterminer la loi de X .



D'après le cours, X admet pour densité f_X définie par $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy = \frac{1}{\pi} \int_{\{y^2 < 1-x^2\}} dy$.

Or $y^2 < 1 - x^2 \iff \begin{cases} -\sqrt{1-x^2} < y < \sqrt{1-x^2} \\ -1 < x < 1 \end{cases}$ donc

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi} \mathbf{1}_{]-1;1[}(x) \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} dy = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2} \mathbf{1}_{]-1;1[}(x)$$