qyPc ▷ **Exercice** - *Simulation de loi : Rademacher, Laplace, Géométrique*

La fonction random disponible dans les logiciels de calcul permet de générer des nombres aléatoires sur l'intervalle $[0;1]$, distribués selon une loi uniforme $\mathcal{U}([0;1])$. A partir de cette fonction, il est facile de simuler des variables aléatoires suivant d'autres lois. On donne ou on rappelle la définition de quelques lois usuelles :

Définition : Soit $p \in]0;1[$: une variable X suit une loi de Rademacher $\mathcal{R}(p)$ si :
- $\mathrm{P}(X = 1) = p$
- $\mathrm{P}(X = -1) = 1 - p$

Définition : Soit $\lambda > 0$: une variable X suit une loi de Laplace $\mathcal{L}(\lambda)$ si elle admet pour densité :

$$f_X(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$$

Définition : Soit $p \in]0;1[$: une variable X suit une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ si pour tout entier $k \geqslant 1$:

$$\mathrm{P}(Z = k) = p(1-p)^{k-1}$$

Notations : pour tout événement A, on note $\mathbf{1}_A$ la fonction indicatrice de A ; pour tout x réel, on note $[x]$ la partie entière de x.

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes : X suit une loi Rademacher $\mathcal{R}(1/2)$ et Y suit une loi uniforme sur $[0;1]$.

1. Soit $\lambda > 0$. On pose $U = \frac{1}{\lambda} X \ln(Y)$.

Soit $\lambda > 0$ et $U = \frac{1}{\lambda} X \ln(Y)$

(a) Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer $\mathrm{P}(\ln(Y) \leqslant a, X = 1)$ et $\mathrm{P}(\ln(Y) \geqslant a, X = -1)$

Soit $a \in \mathbb{R}$. Par indépendance de X et Y, on a $\mathrm{P}(\ln(Y) \leqslant a, X = 1) = \mathrm{P}(\ln(Y) \leqslant a) \times \mathrm{P}(X = 1) = \mathrm{P}(Y \leqslant e^a) \times \frac{1}{2}$. Or $\mathrm{P}(Y \leqslant t) = 1$ si $t > 1$ et $\mathrm{P}(Y \leqslant t) = t$ si $0 < t < 1$ étant donnée la loi suivie par Y. Par conséquent, on a $\mathrm{P}(\ln(Y) \leqslant a, X = 1) = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ si } a > 0 \\ \frac{1}{2} e^a \text{ sinon} \end{cases}$.

De même, $\mathrm{P}(\ln(Y) \geqslant a, X = -1) = \begin{cases} 0 \text{ si } a > 0 \\ \frac{1}{2}(1 - e^a) \text{ sinon} \end{cases}$

(b) Déterminer la fonction de répartition de la variable U.

Soit F_U la fonction de répartition de la variable U. Par définition, pour tout réel t,

$$F_U(t) = \mathrm{P}(\frac{1}{\lambda} X \ln(Y) \leqslant t) = \mathrm{P}(X \ln(Y) \leqslant \lambda t)$$

Par application du théorème des probabilités totales au système d'événements $\{(X = 1), (X = -1)\}$,

$$F_U(t) = \mathrm{P}(X = 1, Y \leqslant e^{\lambda t}) + \mathrm{P}(X = -1, Y \geqslant e^{-\lambda t})$$

D'après le calcul précédent, on obtient

$$F_U(t) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2} e^{-\lambda t} \text{ si } t > 0 \\ \frac{1}{2} e^{\lambda t} \text{ sinon} \end{cases}$$

(c) En déduire que U suit une loi de Laplace $\mathcal{L}(\lambda)$.

On dérive la fonction de répartition pour obtenir la densité : $F_U'(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \lambda e^{-\lambda t} \text{ si } t > 0 \\ \frac{1}{2} \lambda e^{\lambda t} \text{ sinon} \end{cases} = \frac{1}{2} \lambda e^{-\lambda|t|}$. On reconnaît la fonction densité d'une loi de Laplace de paramètre λ.

2. Soit $p \in]0;1[$. On définit les variables $Z = \frac{\ln(Y)}{\ln(1-p)}$ et $V = 1 + [Z]$.

Soit $p \in]0;1[$. On définit les variables $Z = \frac{\ln(Y)}{\ln(1-p)}$ et $V = 1 + [Z]$

(a) Déterminer la loi de Z.

On tente de déterminer la loi de Z en calculant sa fonction de répartition. Par définition (attention aux signes, $\ln(1-p) < 0$),

$$F_Z(t) = \mathrm{P}(\ln(Y) \geqslant t \ln(1-p)) = \mathrm{P}(Y \geqslant (1-p)^t) = 1 - F_Y((1-p)^t)$$

En dérivant, on obtient une densité de Z :

$$f_Z(t) = \begin{cases} -\ln(1-p) \times (1-p)^t \text{ si } t > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

(b) Démontrer que V suit une loi géométrique.

La variable V est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Par conséquent, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on calcule

$$\mathrm{P}(V = k) = \mathrm{P}(k - 1 \leqslant Z < k) = \int_{k-1}^{k} f_Z(z) dz = (1-p)^{k-1} - (1-p)^k = p(1-p)^{k-1}$$

On reconnaît bien la loi géométrique de paramètre p.