

On considère un échantillon  $(X_i)$  de taille  $n = 5$  dans une population suivant une loi normale de paramètres  $\mu$  et  $\sigma^2$ . On pose

$$T_1 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 X_i \quad T_2 = \frac{1}{5}(X_1 + X_2) + \frac{1}{4}(X_3 + X_4 + X_5) \quad T_3 = \frac{1}{10}(2X_1 + 3X_2) + \frac{1}{8}(X_3 + 2X_4 + X_5)$$

$$U = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^5 (X_i - \mu)^2 \quad V = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^5 (X_i - T_1)^2$$

- Quelle est la loi suivie par la variable  $X_1 - X_2$ ? Justifier.

D'après le cours,  $X_1 - X_2$  suit une loi normale d'espérance  $\mathbb{E}(X_1 - X_2) = \mu - \mu = 0$ . Par indépendance,  $V(X_1 - X_2) = V(X_1) + (-1)^2 V(X_2) = 2\sigma^2$ .

- On cherche à estimer  $\mu$  à l'aide des estimateurs  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$ . Étudier leur biais et comparer leurs efficacités.

Par linéarité de l'espérance, on calcule  $\mathbb{E}(T_1) = \frac{5\mu}{5} = \mu$ ,  $\mathbb{E}(T_2) = \frac{2\mu}{5} + \frac{3\mu}{4}$ ,  $\mathbb{E}(T_3) = \mu$ . Par conséquent,  $B(T_1) = B(T_3) = 0$  et  $B(T_2) = \mathbb{E}(T_2) - \mu = \frac{3\mu}{20}$ .

Pour comparer l'efficacité des deux estimateurs sans biais, on calcule leur EQM (ce qui revient à calculer leur variance.) Par indépendance des variables, on a :

$V(T_1) = \frac{\sigma^2}{5} < V(T_3) = \frac{147\sigma^2}{800}$ . Le plus efficace est donc l'estimateur  $T_1$  qui est la moyenne empirique.

- Quelle est la loi suivie par la variable  $U$ ? la variable  $V$ ? justifier.

$U = \sum_{i=1}^5 \left( \frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2$ ; or les  $X_i$  sont des variables aléatoires indépendantes et  $\frac{X_i - \mu}{\sigma}$  suit une loi  $\mathcal{N}(0, 1)$  donc par définition,  $U$  suit une loi de  $\chi^2(5)$ .

De plus,  $T_1 = \bar{X}$  est l'estimateur de moyenne empirique donc d'après le théorème de Fisher,  $V$  suit une loi de  $\chi^2(5 - 1) = \chi^2(4)$ .

- Déterminer  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $\mathbb{P}(U > x) = 0,05$ .

On lit dans la table de loi  $\mathbb{P}(U < x) = 0,95$  pour  $x = 11,07$ .

- En utilisant  $T_1$  et  $U$ , construire une variable  $Y$  qui suive une loi de Student dont on précisera le paramètre.

On pose  $Z = \frac{T_1 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{5}}}$  variable distribuée selon une loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Soit alors  $Y = \frac{Z}{\sqrt{\frac{U}{5}}}$ : par définition,

$Y$  suit une loi  $St(5)$ . Après simplification, on peut réécrire  $Y = \frac{T_1 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{5}} \sqrt{\frac{U}{5}}}$ .