

Lors d'un référendum, un sondage aléatoire simple avec remise pratiqué sur 1000 personnes a donné 55% pour le « Oui » et 45% pour le « Non ».

1. Est-il plus précis de faire un sondage sur 1000 personnes dans une population de 1 million de personnes ou un sondage sur 2000 personnes dans une population de 10 millions de personnes ? Justifier.

La taille de la population n'influence pas le résultat de l'estimation. Mais plus la taille de l'échantillon est importante, plus le sondage est précis. Il vaut donc mieux faire un sondage sur 2000 personnes que sur 1000 personnes.

2. Concernant le référendum cité ci-dessus, déterminer un intervalle contenant le pourcentage de « Oui » avec une probabilité de 0,95.

On cherche à estimer une fréquence à partir d'un échantillon de taille 1000. La fréquence observée dans l'échantillon est $f_{obs} = \frac{55}{100}$. On peut donc utiliser la formule du cours :

$$I_{conf}(F(\omega)) = \left[f_{obs} - u_{\alpha/2} \sqrt{\frac{f_{obs}(1-f_{obs})}{n}} ; f_{obs} + u_{\alpha/2} \sqrt{\frac{f_{obs}(1-f_{obs})}{n}} \right]$$

en remplaçant $u_{\alpha/2}$ par 1,96 pour une confiance de 95%, on obtient numériquement $I_{conf} \approx [0.519; 0.581]$.

En remplaçant $u_{\alpha/2}$ par 2,5758 pour une confiance de 99%, on obtient numériquement $I_{conf} \approx [0.509; 0.591]$.

3. Peut-on considérer, avec une confiance de 95%, que le « Oui » l'emporte ? La réponse est-elle la même avec un niveau de confiance de 99% ? À partir de quel niveau de confiance peut-on commencer à douter que le « Oui » l'emporte ?

La réponse est oui car dans chacun des cas, l'intervalle de confiance se situe au dessus de 50%. Il faudrait dépasser 99,8% de confiance pour pouvoir commencer à mettre en doute que le « Oui » l'emporte.

4. Si, pour un référendum, on sait que « oui » se situe autour de 50%, combien de personnes faudrait-il interroger pour que la proportion de « Oui » soit connue à 1% près (en plus ou en moins), avec un niveau de confiance de 0,95 ?

La longueur de l'intervalle de confiance est de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{n}}$ où n est la taille de l'échantillon. Pour avoir $\frac{1}{\sqrt{n}} < 0,01$, il faut $n > 10\,000$.