Ex - Modélisation et rencontre de généraux

Le général Contant doit échanger des documents top secrets avec le général Janty. Pour cela, ils ont rendez-vous au bar Le Torkel. On suppose que l'heure d'arrivée de chaque individu au point de rendez-vous est uniformément distribué entre 20h et 21h. En revanche, chacun a promis de ne pas attendre l'autre plus de 10 minutes sur place.

1. Décrire la probabilité que ces deux personnes puissent effectuer leur transaction sous forme d'une intégrale double.
2. Quelle est la probabilité que ces deux personnes puissent effectuer leur transaction ?

✓

Soit X l'heure d'arrivée du général Contant et Y l'heure d'arrivée du général Janty. L'énoncé suggère que X et Y sont des variables aléatoires indépendantes et nous dit qu'elles suivent toutes les deux une loi uniforme sur $[20;21]$. La probabilité cherchée est $\mathbb{P}(|X-Y| \leqslant \frac{1}{6})$.
Comme X et Y sont indépendantes, on a

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = \mathbf{1}_{[20;21]^2}(x,y).$$

Donc

$$p = \int\int_D dx\,\mathrm{d}y,$$

où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 20 \leqslant x \leqslant 21,\ 20 \leqslant y \leqslant 21,\ \frac{-1}{6} \leqslant x-y \leqslant \frac{1}{6}\}$.

On peut évaluer géométriquement cette aire mais nous allons faire le calcul de l'intégrale double. On commence par remplacer l'intervalle $[20;21]$ par l'intervalle $[0;1]$ en effectuant une translation. Ainsi, l'écriture est simplifiée.

$$\begin{aligned}
p &= \int_0^{\frac{1}{6}} \int_0^{\frac{1}{6}+y} dx\,\mathrm{d}y + \int_{\frac{1}{6}}^{\frac{5}{6}} \int_{y-\frac{1}{6}}^{y+\frac{1}{6}} dx\,\mathrm{d}y + \int_{\frac{5}{6}}^{1} \int_{y-\frac{1}{6}}^{1} dx\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{\frac{1}{6}} (\frac{1}{6}+y)\,\mathrm{d}y + \int_{\frac{1}{6}}^{\frac{5}{6}} \frac{1}{3}\,\mathrm{d}y + \int_{\frac{5}{6}}^{1} (\frac{7}{6}-y)\,\mathrm{d}y \\
&= \left[\frac{1}{6}y + \frac{1}{2}y^2\right]_0^{\frac{1}{6}} + \left[\frac{1}{3}y\right]_{\frac{1}{6}}^{\frac{5}{6}} + \left[\frac{7}{6}y - \frac{1}{2}y^2\right]_{\frac{5}{6}}^{1} \\
&= \frac{11}{36}.
\end{aligned}$$

La probabilité que les deux généraux puissent effectuer leur transaction est donc de l'ordre de 0.31.