

Soit  $n \geq 3$ ,  $\varepsilon > 0$  et  $A_\varepsilon$  la matrice pentadiagonale définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & & \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \\ \varepsilon^2 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ & & & \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ & & & \varepsilon^2 & \varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$

on s'intéresse au système  $Ax = b$  où  $x, b \in \mathbb{R}^n$ .

1. Ecrire une fonction Python qui génère la matrice  $A_\varepsilon$  pour tout  $n$  et  $\varepsilon$  :  
`def epsmatrice(n,epsilon) : ... return ...`
2. Donner un intervalle de valeurs de  $\varepsilon$  pour lesquelles  $A_\varepsilon$  est à diagonale strictement dominante.

La matrice  $A_\varepsilon$  est à diagonale strictement dominante si et seulement si  $1 > 2\varepsilon + 2\varepsilon^2 \iff \varepsilon \in \left[0; \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right]$ .

3. Que permet de calculer la fonction suivante où `matrice` est une matrice carrée de taille  $n$  quelconque ?  
`def rs(matrice) : return max(abs(eigvals(matrice)))`

On reconnaît le calcul du rayon spectral de la matrice.

4. Ecrire une fonction Python qui génère la matrice  $b_\varepsilon = A_\varepsilon \bar{x}$  où  $\bar{x} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ .  
`def epsb(n,epsilon) : ... return b`
5. La méthode de Jacobi est-elle convergente pour  $n = 10$  et  $\varepsilon = 0.2$ ? Si oui, résoudre le système  $A_\varepsilon x = b_\varepsilon$  par cette méthode et donner le nombre d'itérations nécessaire pour une erreur de  $10^{-8}$  et un vecteur initial  $x_0 = 0$ .

La matrice est à diagonale strictement dominante pour cette valeur de  $\varepsilon$ . La résolution demande 64 itérations.

6. Soit  $B$  la matrice d'itération associée à la méthode de Jacobi pour la matrice  $A_\varepsilon$ . Pour  $n = 20$  fixé, représenter graphiquement le rayon spectral de  $B$  en fonction de  $\varepsilon \in [0; 1]$ .
7. Faire de même pour la méthode de Gauss-Seidel.