

Exercice - Loi exponentielle et loi géométrique

Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On définit $Y = [X]$ la partie entière de X . On pose $Z = X - [X]$.

- Déterminer la loi de probabilité de Y .

On peut remarquer que $Y(\Omega) = \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$,

$$\mathbb{P}(Y = n) = \mathbb{P}(n \leq X < n + 1) = \int_n^{n+1} \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[-e^{-\lambda x} \right]_n^{n+1} = e^{-\lambda n} (1 - e^{-\lambda}),$$

ce qui détermine entièrement la loi de Y : $Y+1$ suit une loi géométrique de paramètre $(1 - e^{-\lambda})$.

- Calculer $\mathbb{P}(n \leq X < n + t)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in]0; 1[$. En déduire la fonction de répartition de Z .

$$\mathbb{P}(n \leq X \leq n + t) = \int_n^{n+t} \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[-e^{-\lambda x} \right]_n^{n+t} = e^{-\lambda n} - e^{-\lambda(n+t)}.$$

On a $\{Z \in [0; t[\} = \cup_{n \in \mathbb{N}} \{n \leq X \leq n + t\}$, la réunion étant disjointe. Ainsi, pour $t \in [0; 1[$,

$$\mathbb{P}(0 \leq Z \leq t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(n \leq X \leq n + t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} e^{-\lambda n} (1 - e^{-\lambda t}) = \frac{1 - e^{-\lambda t}}{1 - e^{-\lambda}}.$$

Comme Z est à valeurs dans $[0; 1[$, on a $F_Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{1 - e^{-\lambda t}}{1 - e^{-\lambda}} & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$.

- Calculer l'espérance de Y et de Z .

Pour la variable aléatoire Y , on a

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} n \mathbb{P}(Y = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} n (e^{-\lambda n} - e^{-\lambda(n+1)}) = (1 - e^{-\lambda}) \sum_{n=0}^{+\infty} n e^{-\lambda n}.$$

On utilise la formule

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n t^n = t \sum_{n=0}^{+\infty} n t^{n-1} = t \left[\sum_{n=0}^{+\infty} t^n \right]' = t \left[\frac{1}{1-t} \right]' = \frac{t}{(1-t)^2}.$$

Il vient

$$\mathbb{E}(Y) = (1 - e^{-\lambda}) \frac{e^{-\lambda}}{(1 - e^{-\lambda})^2} = \frac{1}{e^\lambda - 1}.$$

Ce résultat était prévisible puisque $Y+1$ suit une loi géométrique $\mathcal{G}(1 - e^{-\lambda})$, donc il est acquis que $\mathbb{E}(Y+1) = \frac{1}{1 - e^{-\lambda}}$, d'où par linéarité $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{1 - e^{-\lambda}} - 1 = \frac{e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}}$.

Pour la variable aléatoire Z , on procède par linéarité : on sait que $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$ donc $\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}} = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{e^\lambda - 1}$.

Par ailleurs, comme $\lambda < e^\lambda - 1$ pour $\lambda > 0$, on a $\frac{1}{\lambda} > \frac{1}{e^\lambda - 1}$ et donc $\mathbb{E}(Z) > 0$, ce qui est cohérent car Z est à valeurs dans $[0; 1]$.