

Étudier la convergence des séries $\sum_{n \geq n_0} u_n$ suivantes et préciser la somme de la série quand celle-ci est convergente.

1. $u_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$, $n_0 = 0$

C'est une série géométrique de raison $q = \frac{3}{2} > 0$ donc une série divergente.

2. $u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$, $n_0 = 2$

On écrit la somme partielle :

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) &= \sum_{k=2}^n \ln(k+1) + \ln(k-1) - 2\ln(k) \\ &= \sum_{k=2}^n \ln(k+1) - \ln(k) - (\ln(k) - \ln(k-1)) \\ &= \ln(n+1) - \ln(n) - \ln 2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\ln 2 \end{aligned}$$

La série $\sum u_n$ est convergente et sa somme vaut $-\ln(2)$.

3. $u_n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n$, $n_0 = 0$

C'est une série géométrique de raison $q = \frac{1+i}{2}$ et $|q| = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ donc une série convergente. Sa somme vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{1}{1-q} = \frac{2}{1-i}$.

4. $u_n = \frac{1}{3^n}$, $n_0 = 0$

C'est une série géométrique de raison $q = \frac{1}{3} < 1$ donc c'est une série convergente. Sa somme vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{1}{1-q} = \frac{3}{2}$.

5. $u_n = \frac{2n-1}{n(n^2-4)}$, $n_0 = 3$

On trouve dans un premier temps que $u_n = \frac{1}{4n} - \frac{5}{8(n+2)} + \frac{3}{8(n-2)}$. On écrit la somme partielle pour $n \geq 3$ (les termes de la série ne sont pas bien définis pour $n \leq 2$) :

$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^n u_k &= \sum_{k=3}^n \frac{1}{4k} - \frac{5}{8(k+2)} + \frac{3}{8(k-2)} \\ &= \sum_{k=3}^n \frac{1}{4k} - \sum_{k=5}^{n+2} \frac{5}{8k} + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{3}{8k} \\ &= \frac{1}{12} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4(n-1)} + \frac{1}{4n} - \sum_{k=n-1}^{n+2} \frac{5}{8k} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \frac{3}{24} + \frac{3}{32} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{89}{96} \end{aligned}$$

Indications : Pour 2., on pourra remarquer que $\ln(1 - \frac{1}{n^2}) = \ln(n-1) + \ln(n+1) - 2\ln(n)$. Pour 5., on pourra décomposer la fraction en éléments simples, i.e. chercher a , b et c des réels tels que $\frac{2n-1}{n(n^2-4)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n-2} + \frac{c}{n+2}$.