

Exercice - Lois statistiques et étude d'estimateurs

On considère un échantillon (X_i) de taille $n = 5$ dans une population suivant une loi normale de paramètres μ et σ^2 . On pose

$$T_1 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 X_i \quad T_2 = \frac{1}{5}(X_1 + X_2) + \frac{1}{4}(X_3 + X_4 + X_5) \quad T_3 = \frac{1}{10}(2X_1 + 3X_2) + \frac{1}{8}(X_3 + 2X_4 + X_5)$$

$$U = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^5 (X_i - \mu)^2 \quad V = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^5 (X_i - T_1)^2$$

1. Quelle est la loi suivie par la variable $X_1 - X_2$? Justifier.
2. On cherche à estimer μ à l'aide des estimateurs T_1 , T_2 , T_3 . Étudier leur biais et comparer l'efficacité des estimateurs sans biais.
3. Quelle est la loi suivie par la variable U ? la variable V ? justifier.
4. Déterminer $x \in \mathbb{R}$ tel que $P(U > x) = 0,05$.
5. En utilisant T_1 et U , construire une variable Y qui suive une loi de Student dont on précisera le paramètre.