ItUH ⊵ **Exercice** - *Loi normale, question de cours*

Soit Z une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.
Justifier que $\mathrm{P}(Z>0)=\frac{1}{2}$ et que pour tout réel $a\in\mathbb{R}$, $\mathrm{P}(Z<-a)=\mathrm{P}(Z>a)$.

On sait que $\mathrm{P}(Z>0)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}dx$ par parité de la fonction intégrée.
Or $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}dx$ d'où le premier résultat.
De même, on a par changement de variable $u=-x$ et parité :

$$\mathrm{P}(Z<-a)=\int_{-\infty}^{-a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}dx=-\int_{+\infty}^{a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}du=\int_{a}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}du=\mathrm{P}(Z>a)$$