S3Kp ▷ **Exercice** - *Échantillons de pièces usinées*

Chaque pièce fabriquée par une certaine machine pèse en moyenne 0.50 g avec un écart type de 0.02 g.

Soient les variables aléatoires X_i représentant le poids d'une pièce. Ces variables sont indépendantes et de même loi, d'espérance $\mathbb{E}(X_i) = 0.5$ et d'écart-type $\sigma(X_i) = 0.02$.

1. Soit $\overline{X}$ la variable aléatoire égale au poids moyen d'une pièce dans un échantillon de n pièces où n est un entier naturel non nul quelconque. En fonction de n, que peut-on dire de la loi de $\overline{X}$?

   Comme $\bar{X}$ est le poids moyen des pièces sur un échantillon de n pièces, on a $\bar{X} = \dfrac{1}{n} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

   Par le théorème central-limite, pour n grand, la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ suit approximativement une loi Normale de paramètres $\mu = n \times 0.5$ et $\sigma = \sqrt{n} \times 0.02$. Par conséquent, la variable $\overline{X}$ suit approximativement la loi $\mathcal{N}\left(0.50, \sigma = \dfrac{0.02}{\sqrt{n}}\right)$.

   Si n est petit ($n < 30$ par convention), on ne connaît pas la loi de $\overline{X}$.

2. On considère deux échantillons de 1000 pièces chacun. Déterminer la probabilité que la différence de poids entre deux lots de 1000 pièces soit supérieure à 2 grammes.

   Soit Y_1 et Y_2 deux variables aléatoires indépendantes et de même loi que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$, où $n = 1000$.

   Comme n est grand, Y_1 et Y_2 suivent approximativement la loi $\mathcal{N}\left(500, \sigma = 0.02\sqrt{1000}\right)$. Donc $Y_1 - Y_2$ suit encore une loi Normale de paramètres $\mu = \mathbb{E}(Y_1) - \mathbb{E}(Y_2) = 0$ et de variance $\sigma^2 = \sigma^2(Y_1 - Y_2) = 2\sigma^2(Y_1) = 0.8$, ce que l'on peut résumer par

   $$Y_1 - Y_2 \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma = \sqrt{0.8}\right).$$

   On cherche à déterminer la probabilité suivante :

   $$\begin{aligned}
   \mathbb{P}(|Y_1 - Y_2| > 2) &= \mathbb{P}\left(\left|\frac{Y_1 - Y_2}{\sqrt{8}}\right|\right) \\
   &\simeq \mathbb{P}(|Z| > 2.24), \quad \text{où } Z \sim \mathcal{N}(0,1) \\
   &\simeq 1 - \mathbb{P}(|Z| \leqslant 2.24) \\
   &\simeq 1 - (2\mathbb{P}(Z \leqslant 2.24) - 1) \\
   &\simeq 2 - 2 \times 0.9875 \quad \text{par lecture de la table de loi} \\
   &\simeq 0.025.
   \end{aligned}$$

   La probabilité que le poids de deux lots de 1000 pièces chacun diffèrent entre eux de plus de 2 grammes est d'environ 2.5%.