

Soit X une variable aléatoire réelle de densité f_θ définie par

$$f_\theta(x) = (1 - \theta)1_{[-\frac{1}{2}; 0]}(x) + (1 + \theta)1_{]0; \frac{1}{2}]}(x)$$

où θ est un paramètre réel tel que $|\theta| \neq 1$.

1. A quelles conditions sur θ la fonction f_θ est bien une densité de probabilité ?

La fonction f_θ est une densité de probabilité si elle est intégrable, positive sur \mathbb{R} et d'intégrale égale à 1.

- La positivité impose $-1 \leq \theta \leq 1$.
- $\int_{\mathbb{R}} f_\theta(x) dx = \int_{-1/2}^0 (1 - \theta) dx + \int_0^{1/2} (1 + \theta) dx = \frac{1}{2}(1 - \theta) + \frac{1}{2}(1 + \theta) = 1$ donc ne fournit pas de condition spécifique sur θ .

En synthèse, f_θ est une densité si et seulement si $|\theta| \leq 1$.

2. Calculer l'espérance de X .

C'est une simple application de la définition

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \int_{\mathbb{R}} x f_\theta(x) dx \\ &= \int_{-1/2}^0 x(1 - \theta) dx + \int_0^{1/2} x(1 + \theta) dx \\ &= \left[(1 - \theta) \frac{x^2}{2} \right]_{-1/2}^0 + \left[(1 + \theta) \frac{x^2}{2} \right]_0^{1/2} \\ &= \frac{\theta}{4} \end{aligned}$$

3. Soient n variables aléatoires X_1, \dots, X_n indépendantes et identiquement distribuées selon la loi de X . On définit les variables aléatoires :

$$U_n = \sum_{i=1}^n 1_{]-\infty; 0]}(X_i) \quad V_n = \sum_{i=1}^n 1_{]0; +\infty[}(X_i)$$

- (a) Vérifier que si $1 \leq i \leq n$ alors la variable aléatoire $1_{]0; +\infty[}(X_i)$ suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre.

La variable aléatoire

$$p = P(1_{]0; +\infty[}(X_i) = 1) = P(X_i \in]0; +\infty[) = \int_0^{+\infty} f_\theta(x) dx = \int_0^{1/2} (1 + \theta) dx = \frac{1 + \theta}{2}$$

d'où $1_{]0; +\infty[}(X_i) \sim \mathcal{B}\left(\frac{1 + \theta}{2}\right)$.

- (b) En déduire que V_n suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

Les variables aléatoires $(X_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ étant indépendantes, il en est de même des variables aléatoires $(1_{]0; +\infty[}(X_i))_{i \in \{1, \dots, n\}}$, qui sont telles que $1_{]0; +\infty[}(X_i) \sim \mathcal{B}\left(\frac{1 + \theta}{2}\right)$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$.

Donc V_n est une somme de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1 + \theta}{2}$. On en conclut que $V_n \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{1 + \theta}{2}\right)$.

- (c) Vérifier que la variable aléatoire $U_n + V_n$ est constante.

$$U_n + V_n = \sum_{i=1}^n (1_{]-\infty; 0]}(X_i) + 1_{]0; +\infty[}(X_i)) = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\mathbb{R}}(X_i) = \sum_{i=1}^n 1 = n$$

- (d) Calculer l'espérance de la variable aléatoire $\frac{V_n - U_n}{n}$.

$$\mathbb{E}\left(\frac{V_n - U_n}{n}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{V_n - (n - V_n)}{n}\right) = \frac{2}{n}\mathbb{E}(V_n) - 1 = \frac{2}{n} \times n \times \frac{1 + \theta}{2} - 1 = \theta$$

- (e) Vérifier que $\mathbb{E}(U_n V_n) = (n^2 - n)\frac{1 - \theta^2}{4}$ et en déduire $\text{cov}(U_n, V_n)$.

$$\mathbb{E}(U_n V_n) = \mathbb{E}((n - V_n)V_n) = n\mathbb{E}(V_n) - \mathbb{E}(V_n^2)$$

or $V_n \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{1 + \theta}{2}\right)$ donc

— $\mathbb{E}(V_n) = n \times \frac{1 + \theta}{2}$

— $V(V_n) = n \times \frac{1 + \theta}{2} \times \left(1 - \frac{1 + \theta}{2}\right) = \frac{n}{4}(1 - \theta^2)$, or $V(V_n) = \mathbb{E}(V_n^2) - \mathbb{E}(V_n)^2$ donc

$$\mathbb{E}(V_n^2) = \frac{n}{4}(1 - \theta^2) + \frac{n^2}{4}(1 + \theta)^2$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(U_n V_n) &= \frac{n^2}{2}(1 + \theta) - \left(\frac{n}{4}(1 - \theta^2) + \frac{n^2}{4}(1 + \theta)^2\right) \\ &= \frac{n^2}{4}(1 + \theta)(2 - (1 + \theta)) - \frac{n}{4}(1 - \theta^2) \\ &= \frac{n^2}{4}(1 - \theta^2) - \frac{n}{4}(1 - \theta^2) \\ &= (n^2 - n)\frac{1 - \theta^2}{4} \end{aligned}$$

On en déduit la covariance :

$$\begin{aligned} \text{cov}(U_n, V_n) &= \mathbb{E}(U_n V_n) - \mathbb{E}(U_n)\mathbb{E}(V_n) \\ &= \frac{n^2 - n}{4}(1 - \theta^2) - \mathbb{E}(n - V_n)\mathbb{E}(V_n) \\ &= \frac{n^2 - n}{4}(1 - \theta^2) - \left(n - \frac{n}{2}(1 + \theta)\right) \frac{n}{2}(1 + \theta) \\ &= \frac{n^2 - n}{4}(1 - \theta^2) - \frac{n^2}{4}(1 - \theta^2) \\ &= \frac{-n}{4}(1 - \theta^2) \end{aligned}$$

- (f) Montrer que la variance de $\frac{V_n - U_n}{n}$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

$$\begin{aligned} V\left(\frac{V_n - U_n}{n}\right) &= \frac{1}{n^2} (V(U_n) + V(V_n) - 2\text{cov}(U_n, V_n)) \\ &= \frac{1}{n^2} (2V(V_n) - 2\text{cov}(U_n, V_n)) \quad \text{car} \quad V(U_n) = V(n - V_n) = V(V_n) \\ &= \frac{1}{n^2} \left(\frac{n}{2}(1 - \theta^2) + \frac{n}{2}(1 - \theta^2)\right) \\ &= \frac{1 - \theta^2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$