

On considère l'intégrale

$$I = \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

1. Démontrer qu'il existe une fonction $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $I = \mathbb{E}(\varphi(Z_1))$ où Z_1 est une variable aléatoire normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

Il suffit de poser $\varphi = 1_{[0;4]}$ de telle sorte qu'en appliquant le théorème de transfert à Z_1 admettant pour densité $f_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, on obtienne

$$\mathbb{E}(1_{[0;4]}(Z_1)) = \int_{\mathbb{R}} 1_{[0;4]}(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = I$$

2. On définit une suite de variables $(Z_n)_{n \geq 1}$ indépendantes et identiquement distribuées selon une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.
 - (a) Déterminer une fonction $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que la suite $(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(Z_i))_{n \geq 1}$ converge presque sûrement vers I .

Il suffit de poser $g = \varphi = 1_{[0;4]}$ pour que les variables $(g(Z_i))$ soient i.i.d et admettent une espérance I . Ainsi, d'après la Loi Forte des Grands Nombres, on a

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{[0;4]}(Z_i) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} I$$

- (b) Construire un intervalle de confiance I_{conf} tel que $\mathbb{P}(I \in I_{conf}) \approx 0,95$.

On note $\sigma^2 = \mathbb{V}(g(Z_1))$. D'après le Théorème Central Limite,

$$\frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{[0;4]}(Z_i) - I}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

Si n est grand, on peut considérer que la variable $Z'_n = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{[0;4]}(Z_i) - I}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ suit approximativement une loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Par conséquent, d'après la table de loi,

$$\mathbb{P}(-1,96 \leq Z'_n \leq 1,96) \approx 0,95 \iff \mathbb{P}\left(Z'_n - 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq I \leq Z'_n + 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \approx 0,95$$

On en déduit un intervalle de confiance $I_{conf} = \left[Z'_n - 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; Z'_n + 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$ qui est en réalité un intervalle de confiance asymptotique. Il resterait à expliciter $\sigma = \sqrt{\mathbb{V}(g(Z_1))}$.

3. On définit une suite de variables (U_n) indépendantes et identiquement distribuées selon une loi uniforme $\mathcal{U}([0; 4])$.
 - (a) A l'aide de cette suite, définir une suite de variables aléatoires (Y_n) qui converge presque sûrement vers I .

D'après la loi forte des grands nombres,

$$\frac{4}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{U_i^2}{2}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} \mathbb{E}\left(\frac{4}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{U_1^2}{2}}\right) = \int_{\mathbb{R}} \frac{4}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{4} 1_{[0;4]}(x) dx = I$$

- (b) En déduire une méthode de Monte Carlo permettant d'obtenir une valeur approchée de I en complétant l'algorithme suivant : **n=1000; S=0**
for i in range(n):
u = ...
S= S + ...
print(...)

```
u = 4*rand()
S= S + 1/sqrt(2*pi)*exp(-u**2/2)
print(4*S/n)
```

- (c) Construire un intervalle de confiance I_{conf} tel que $\mathbb{P}(I \in I_{conf}) \approx 0,95$.

On procède de même en posant $h: x \mapsto \frac{4}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

On note $\sigma'^2 = \mathbb{V}(h(Z_1))$. D'après le Théorème Central Limite,

$$\frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{4}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{U_i^2}{2}} - I}{\frac{\sigma'}{\sqrt{n}}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

Si n est grand, on peut considérer que la variable $Z''_n = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{4}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{U_i^2}{2}} - I}{\frac{\sigma'}{\sqrt{n}}}$ suit approximativement une loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On en déduit un intervalle de confiance $I_{conf} = \left[Z''_n - 1,96 \frac{\sigma'}{\sqrt{n}}; Z''_n + 1,96 \frac{\sigma'}{\sqrt{n}} \right]$

4. Afin d'obtenir une approximation de I , au vu des intervalles de confiance obtenus pour chaque méthode, mieux vaut-il utiliser une méthode de Monte Carlo basée sur la suite (Z_n) ou la suite (U_n) ?

Il reste à comparer σ et σ' ...