svRW ⊵ **Exercice** - *Trace de matrices*

On rappelle que si $A=(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$, alors la trace de A est : $\operatorname{Tr} A=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ (autrement dit $\operatorname{Tr} A$ est la somme des termes de la diagonale de A).

Soient $A=\begin{pmatrix} 3 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$.

1. Calculer $\operatorname{Tr} A$ et $\det A$. Vérifier que $A^2-(\operatorname{Tr} A)\cdot A+(\det A)I_2=0$, où I_2 est la matrice identité 2×2.
2. En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1}.

On a $\operatorname{Tr} A=3+3=6$ et $\det A=3\times 3-2\times 2=5$. Par ailleurs :

$$A^2-(\operatorname{Tr} A)\cdot A+(\det A)I_2=A^2-6\cdot A+5I_2=\begin{pmatrix} 13 & 12\\ 12 & 13\end{pmatrix}-6\begin{pmatrix} 3 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Comme $\det A=5\neq 0$, on sait que A est inversible, donc A^{-1} existe. On multiplie l'égalité ci-dessus à gauche par A^{-1}, on obtient :

$$A^{-1}\cdot\left(A^2-(\operatorname{Tr} A)\cdot A+(\det A)I_2\right)=A-(\operatorname{Tr} A)\cdot I_2+(\det A)A^{-1}=0$$

Finalement, ceci donne que $A^{-1}=\frac{1}{\det A}(\operatorname{Tr}(A)\cdot I_2-A)=\frac{1}{5}(6I-A)=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2\\ -2 & 3\end{pmatrix}$.