yp7e ⊵ **Exercice** - *Calcul de sommes*

Sachant que $e = \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n!}$, déterminer la valeur des sommes suivantes :

1. $\sum_{n \geqslant 0} \frac{n+1}{n!}$

On décompose la somme en deux sommes :

$$\begin{aligned} \sum_{n \geqslant 0} \frac{n+1}{n!} &= \sum_{n \geqslant 0} \frac{n}{n!} + \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n!} \\ &= \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n!} \\ &= \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n!} + \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n!} \\ &= 2e \end{aligned}$$

2. $\sum_{n \geqslant 0} \frac{n^2-2}{n!}$

On décompose la somme en deux sommes :

$$\begin{aligned} \sum_{n \geqslant 0} \frac{n^2-2}{n!} &= \sum_{n \geqslant 0} \frac{n^2}{n!} - 2 \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n!} \\ &= \sum_{n \geqslant 1} \frac{n}{(n-1)!} - 2 \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n!} \\ &= \sum_{n \geqslant 1} \frac{n-1+1}{(n-1)!} - 2 \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n!} \\ &= \sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{(n-1)!} - 2 \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n!} \\ &= \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n!} + \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n!} - 2 \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n!} \\ &= 0 \end{aligned}$$

3. $\sum_{n \geqslant 0} \frac{n^3}{n!}$

On simplifie :

$$\begin{aligned} \sum_{n \geqslant 0} \frac{n^3}{n!} &= \sum_{n \geqslant 0} \frac{n^2}{(n-1)!} \\ &= \sum_{n \geqslant 1} \frac{n(n-1)+n-1+1}{(n-1)!} \\ &= \sum_{n \geqslant 1} \frac{n(n-1)}{(n-1)!} + \sum_{n \geqslant 1} \frac{n-1}{(n-1)!} + \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{(n-1)!} \\ &= \sum_{n \geqslant 2} \frac{n}{(n-2)!} + \sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{(n-1)!} \\ &= \sum_{n \geqslant 2} \frac{n-2+2}{(n-2)!} + \sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{(n-1)!} \\ &= \sum_{n \geqslant 3} \frac{1}{(n-3)!} + \sum_{n \geqslant 2} \frac{2}{(n-2)!} + \sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{(n-1)!} \\ &= \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n!} + 2 \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n!} + \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n!} + \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n!} \\ &= 5e \end{aligned}$$