

Calculer les racines carrées de  $1, i, 3 + 4i, 8 - 6i, 7 + 24i$ .

1. Les deux racines carrées de  $z = 1 = e^{i \cdot 0}$  sont  $z_k = e^{i \cdot \frac{0}{2} + i k \pi} \quad k \in \{0; 1\}$ , c'est-à-dire :  $z_0 = e^{i \cdot 0} = 1$  et  $z_1 = e^{i \cdot \pi} = -1$ ;
2. Les deux racines carrées de  $z = i = e^{i \cdot \frac{\pi}{2}}$  sont  $z_k = e^{i \cdot \frac{\pi}{4} + i k \pi} \quad k \in \{0; 1\}$ , c'est-à-dire :  $z_0 = e^{i \cdot \frac{\pi}{4}}$  et  $z_1 = e^{i \cdot \frac{\pi}{4} + i \pi} = e^{i \cdot \frac{5\pi}{4}}$
3. Les deux racines carrées de  $z = 3 + 4i = a + ib$  sont  $z_1 = x + iy$  et  $z_2 = -x - iy$  telles que :  $(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = 3 + 4i$  et  $|x + iy|^2 = |3 + 4i| \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ .  
Résolvons :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 &= 3 \\ 2xy &= 4 > 0 \\ x^2 + y^2 &= 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{3+5}{2} = 4 \\ y^2 = \frac{5-3}{2} = 1 \\ xy > 0 \end{cases}$$

Les deux carrées de  $z = 3 + 4i$  sont donc  $z_1 = 2 + i$  et  $z_1 = -2 - i$ .

4. Les deux racines carrées de  $z = 8 - 6i = a + ib$  sont  $z_1 = x + iy$  et  $z_2 = -x - iy$  telles que :  $(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = 8 - 6i$  et  $|x + iy|^2 = |8 - 6i| \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ .  
Résolvons :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 &= 8 \\ 2xy &= -6 < 0 \\ x^2 + y^2 &= 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{8+10}{2} = 9 \\ y^2 = \frac{10-8}{2} = 1 \\ xy < 0 \end{cases}$$

Les deux carrées de  $z = 8 - 6i$  sont donc  $z_1 = 3 - i$  et  $z_1 = -3 + i$ .

5.  $7 + 24i$  Les deux racines carrées de  $z = 7 + 24i = a + ib$  sont  $z_1 = x + iy$  et  $z_2 = -x - iy$  telles que :  $(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = 7 + 24i$  et :

$$|x + iy|^2 = |7 + 24i| \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \sqrt{7^2 + 24^2} = 25.$$

Résolvons :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 &= 7 \\ 2xy &= 24 > 0 \\ x^2 + y^2 &= 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{7+25}{2} = 16 \\ y^2 = \frac{25-7}{2} = 9 \\ xy > 0 \end{cases}$$

Les deux carrées de  $z = 7 + 24i$  sont donc  $z_1 = 4 + 3i$  et  $z_1 = -4 - 3i$ .