Ex - Contrôle qualité

Désirant juger le travail d'un ouvrier ajusteur, un chef d'atelier prélève un échantillon de 50 pièces métalliques dans sa production. On note X l'épaisseur de ses pièces. L'objectif est d'avoir $\mathbb{E}(X) = 5\ mm$. Les résultats des mesures sur cet échantillon sont portés dans le tableau suivant :

n_i	5	15	20	10
x_i en mm	4.8	4.9	5.0	5.1

1. Cette vérification permet-elle de conclure que le résultat est conforme aux exigences, au seuil de confiance de 99% ?

✓

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{50}\sum_{i=1}^{4} n_i x_i \\ &= \frac{1}{50}(5\times 4.8 + 15\times 4.9 + 20\times 5.0 + 10\times 5.1) \\ &= 4.98\end{aligned}$$

donc une estimation sans biais de l'épaisseur moyenne des pièces est $\bar{x} = 4.98\ mm$.
De plus, la variance observée dans cet échantillon est :

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{1}{50}\sum_{i=1}^{4} n_i (x_i - \bar{x})^2 \\ &= \frac{1}{50}(5\times(4.8-4.98)^2 + 15\times(4.9-4.98)^2 + 20\times(5.0-4.98)^2 + 10\times(5.1-4.98)^2) \\ &= 0.081\end{aligned}$$

donc une estimation sans biais de la variance de l'épaisseur des pièces est $s^2 = \frac{50}{49}\sigma^2 = 0.083$.
On réalise le test d'hypothèse suivant :

$$\begin{aligned}H_0 &: \mathbb{E}(X) = 5 \\ H_1 &: \mathbb{E}(X) \neq 5\end{aligned}$$

avec un risque de première espèce de 1%.
La variable de décision est $Z = \frac{\bar{X}-5}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$.
On fait un test bilatéral, donc on rejette H_0 si $|Z| > z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.58$ par lecture de la table de la loi normale. Or la valeur observée est $Z_{obs} = \frac{4.98-5}{\frac{\sqrt{0.083}}{\sqrt{50}}} = -2{,}33$. Donc on ne rejette pas H_0.
On peut donc conclure que le résultat est conforme aux exigences, au seuil de confiance de 99%.

2. Quel risque de première espèce devrait-on prendre pour que la prise de décision soit différente ?

✓

Pour que la prise de décision soit différente, il faudrait que la valeur critique soit 2.33, ce qui correspond, par lecture de table, à un risque de première espèce de 1.98%.