Uijb ⊵ **Exercice** - *Recherche de zéro*

On s'intéresse à l'équation :

$$x = -\ln(x) \tag{1}$$

d'inconnue $x \in]0;+\infty[$.

1. Montrer que cette équation admet une unique solution $\ell \in \left[\frac{1}{10};1\right]$.

> On pose $h(x) = x + \ln(x)$: h est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$, de plus $h(1/10) = 0.1 - \ln(10) < 0$ et $h(1) = 1 > 0$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\ell \in \left[\frac{1}{10};1\right]$ tel que $h(\ell) = 0$.

2. On considère la méthode numérique définie ci après (où `log` permet de calculer le logarithme népérien) : x0 = 0.5 maxiter = 1000 for i in range(maxiter) : x = - log(x) print(x) Expliquer pourquoi cette méthode n'est pas convergente.

> Cette méthode est définie par la suite définie par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}$,
>
> $$x_{k+1} = \varphi_1(x_k)$$
>
> où $\varphi_1 \colon x \mapsto -\ln(x)$ et $x_0 = 0.5$. Si cette méthode converge, alors elle converge vers l'unique point fixe ℓ de φ_1. Or $\ell \in \left[\frac{1}{10};1\right]$ donc $-\frac{1}{\ell} \in [-10;-1]$. Il est même clair que $\ell \neq 1$ donc
>
> $$\phi_1'(\ell) = -\frac{1}{\ell} \in [-10;-1[$$
>
> ce qui implique en particulier que $|\varphi_1(\ell)| > 1$. On en conclut que ℓ est un point fixe répulsif de φ_1, par conséquent la méthode ne converge pas localement, elle ne converge donc pas.

3. Soit la fonction $\varphi \colon x \mapsto e^{-x}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Vérifier que ℓ est un point fixe de la fonction φ puis que $\varphi\left(\left[\frac{1}{10};1\right]\right) \subset \left[\frac{1}{10};1\right]$.

> Il est clair que $\varphi(\ell) = e^{-\ell} = \ell$. De plus, La fonction φ est continue et strictement décroissante sur $]0;+\infty[$, de plus $\varphi(1/10) = e^{-1/10} < 1$ et $\varphi(1) = e^{-1} > 1/10$ donc par théorème des valeurs intermédiaires, $\varphi\left(\left[\frac{1}{10};1\right]\right) \subset \left[\frac{1}{10};1\right]$.

4. On considère une autre méthode numérique définie ci dessous : x0 = 0.5 maxiter = 1000 for i in range(maxiter) : x = exp(- x) print(x) Démontrer que cette méthode converge vers la solution ℓ de l'équation et donner l'ordre de convergence.

> On a $|\varphi'| = \varphi$ donc d'après ce qui précède, pour tout $x \in \left[\frac{1}{10};1\right]$, $|\varphi'(x)| \leqslant |\varphi'(1)| < 1$ donc d'après le théorème de convergence globale du point fixe, la méthode converge au moins d'ordre 1 avec $x_0 = 0.5 \in \left[\frac{1}{10};1\right]$.
>
> La convergence n'est pas d'ordre 2 car $\varphi'(\ell) \neq 0$.

5. On souhaite approcher la solution ℓ par la suite (x_k) avec une précision donnée $\varepsilon > 0$, et donc arrêter les itérations lorsque cette précision est atteinte. En se basant sur l'inégalité des accroissements finis, majorer le nombre d'itérations à réaliser.

6. Soit la fonction $h \colon x \mapsto x - e^{-x}$. En complétant le programme ci-dessous, expliciter une méthode de Newton permettant de calculer ℓ. x0 = 0.5 maxiter = 1000 for i in range(maxiter) : x = ... print(x)

> Pour appliquer la méthode de Newton à l'équation, on pose $h(x) = x - e^{-x}$ et ainsi ℓ est l'unique solution à l'équation $h(x) = 0$. Comme $h'(x) = 1 + e^{-x} \neq 0$ sur $]0,+\infty[$, la méthode de Newton pour l'équation $h(x) = 0$ s'écrit
>
> $$\begin{cases} x_0 \in \left[\frac{1}{10},1\right] \text{ donné} \\ x_{n+1} = x_n - \frac{h(x_n)}{h'(x_n)}, \quad \forall n \geqslant 0, \end{cases}$$
>
> ou encore
>
> $$\begin{cases} x_0 \in \left[\frac{1}{10},1\right] \text{ donné,} \\ x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - e^{-x_n}}{1+e^{-x_n}}, \quad \forall n \geqslant 0. \end{cases}$$
>
> Il faut donc écrire dans le programme `x = x - (x - exp(-x)) / (1 + exp( -x))`