Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ deux paramètres réels. On s'intéresse à la série $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ avec

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$$

qui s'appelle une série de Bertrand. Sa convergence dépend des valeurs prises par α et β.

1. Supposons que $\alpha > 1$ (β est quelconque). On pose $\gamma = \frac{1+\alpha}{2}$.
   (a) Vérifier que $\gamma < \alpha$. Que peut-on dire de la série $\sum \frac{1}{n^\gamma}$?

   ✓ On observe que $\alpha > 1$ d'où $2\alpha = \alpha + \alpha > 1 + \alpha = 2\gamma$ d'où $\alpha > \gamma$. De plus, $\alpha > 1$ d'où $1 + \alpha > 2$ d'où $\frac{1+\alpha}{2} = \gamma > 1$.

   (b) Vérifier que $\lim_{n\to+\infty} n^\gamma u_n = 0$.

   ✓ Si $\beta \geqslant 0$ alors on peut majorer $n^\gamma u_n = \frac{1}{n^{\alpha-\gamma}(\ln(n))^\beta} \leqslant \frac{1}{n^{\alpha-\gamma}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ d'où le résultat. Enfin, si $\beta < 0$ alors par croissances comparées, $\frac{(\ln(n))^{-\beta}}{n^{\alpha-\gamma}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

   (c) Conclure sur la convergence de $\sum_{n\geqslant 1} u_n$.

   ✓ Donc par définition, $u_n = o\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$ or $\sum \frac{1}{n^\gamma}$ est une série convergente donc par comparaison de séries à termes positifs, $\sum u_n$ est également une série convergente.

2. Supposons que $\alpha < 1$: calculer $\lim_{n\to+\infty} nu_n$ et conclure sur la convergence de $\sum_{n\geqslant 1} u_n$.

   ✓ Si $\alpha < 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} nu_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n^\alpha(\ln(n))^\beta} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{1-\alpha}}{(\ln(n))^\beta} = +\infty$ donc à partir d'un certain rang, $nu_n \geqslant 1$ donc $u_n \geqslant \frac{1}{n}$ donc par comparaison à une série de Riemann divergente ($\alpha = 1 > 0$), la série $\sum u_n$ diverge.

3. Supposons que $\alpha = 1$ et $\beta \leqslant 0$.
   (a) Montrer qu'il existe un rang N à partir duquel pour tout $n \geqslant N$ alors $\frac{1}{(\ln(n))^\beta} \geqslant 1$.

   ✓ Si $\beta \leqslant 0$ alors $(\ln(n))^{-\beta} \geqslant 1$ pour tout $n \geqslant 3$ donc à partir du rang $N = 3$, $\frac{1}{(\ln(n))^\beta} \geqslant 1$.

   (b) Conclure sur la convergence de $\sum_{n\geqslant 1} u_n$.

   ✓ On en déduit que $u_n = \frac{1}{n(\ln(n))^\beta} \geqslant \frac{1}{n}$ pour tout $n \geqslant N = 3$ donc par comparaison à une série de Riemann divergente ($\alpha = 1 > 0$), la série $\sum u_n$ diverge.

4. ** Supposons que $\alpha = 1$ et $\beta > 0$. Pour tout $x > 1$, On pose $f(x) = \frac{1}{x\ln(x)^\beta}$ de sorte que $u_n = f(n)$ pour tout $n \geqslant 2$.
   (a) Vérifier que f est positive et décroissante sur $]1 + \infty[$.

   ✓ On a $f(x) = \frac{1}{x\ln(x)^\beta}$ et $\ln(x) > 0$ pour tout $x > 1$ donc $(\ln(x))^{\beta-1} > 0$ pour tout $x > 1$ donc f est positive sur $]1, +\infty[$.
   De plus, $f'(x) = \frac{-\ln(x)^\beta - \beta x \ln(x)^{\beta-1}}{x^2\ln(x)^{2\beta}} = \frac{-\ln(x)^{\beta-1}(\ln(x)+\beta x)}{x^2\ln(x)^{2\beta}}$ et $\ln(x) + \beta x > 0$ pour tout $x > 1$ donc $f'(x) < 0$ pour tout $x > 1$ donc f est décroissante sur $]1, +\infty[$.

   (b) On considère l'intégrale
   $$I = \int_2^{+\infty} f(t)dt$$
   En effectuant le changement de variable $u = \ln(t)$, montrer que I est une intégrale convergente si et seulement si $\beta > 1$.

   ✓ On pose $u = \ln(t)$ de sorte que $du = \frac{dt}{t}$ et $t = e^u$ donc
   $$I = \int_2^{+\infty} f(t)dt = \int_{\ln(2)}^{+\infty} \frac{1}{e^u\ln(e^u)^\beta} e^u du = \int_{\ln(2)}^{+\infty} \frac{1}{e^u u^\beta} e^u du = \int_{\ln(2)}^{+\infty} \frac{1}{u^\beta} du$$
   Or $\beta > 1$ donc $\beta - 1 > 0$ donc par théorème de comparaison à une intégrale de Riemann convergente ($\alpha = \beta - 1 > 0$), l'intégrale I est convergente.
   Réciproquement, si $\beta \leqslant 1$ alors $\beta - 1 \leqslant 0$ donc par théorème de comparaison à une intégrale de Riemann divergente ($\alpha = \beta - 1 \leqslant 0$), l'intégrale I est divergente.

   (c) Conclure sur la convergence de $\sum_{n\geqslant 1} u_n$.

   ✓ Par théorème de comparaison série intégrale, la série $\sum u_n$ converge si et seulement si l'intégrale I converge donc par la question précédente, la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $\beta > 1$.