Ex

Fonction de répartition, démonstration de cours

Soit F_X une fonction de répartition admettant un point de discontinuité en $x_0 \in \mathbb{R}$. Démontrer que le saut $p_0 = F_X(x_0) - F_X(x_0^-)$ est égal à $\mathrm{P}(X = x_0)$.

✓

La limite à gauche se traduit par $F_X(x_0^-) = \lim\limits_{h_n \to 0, h_n > 0} F_X(x_0 - h_n) = \lim\limits_{h_n \to 0, h_n > 0} \mathrm{P}(X \leqslant x_0 - h_n)$ donc $p_0 = \lim_{h_n \to 0, h_n > 0} \mathrm{P}(X \in]x_0 - h_n ; x_0])$.
Or la suite d'événements (B_n) définie par $B_n = \{X \in]x_0 - h_n ; x_0]\}$ est décroissante donc d'après le théorème de continuité décroissante, $\mathrm{P}(B_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathrm{P}(\bigcap B_n) = \mathrm{P}(\{x_0\})$.