

Exercice - Différents types de convergence

Soit n un entier naturel non-nul et soit a un réel. On considère la fonction f_n définie sur \mathbb{R} par

$$f_n(x) = \frac{an}{\pi(1 + n^2x^2)}.$$

1. Déterminer a pour que f_n soit une densité de variable aléatoire.
2. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires telle que chaque X_n admet pour densité f_n .
Étudier l'existence de moments pour X_n .
3. Étudier la convergence en loi de la suite (X_n) .
4. Étudier la convergence en probabilité de la suite (X_n) .