

**Exercice** - *Fonction caractéristique et loi de Poisson*

1. Soit  $X$  une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ . Calculer sa fonction caractéristique.

Soit  $t \in \mathbb{R}$ .

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \sum_{k \geq 0} e^{itk} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k \geq 0} e^{itk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k \geq 0} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} = e^{\lambda(e^{it} - 1)}$$

2. Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètres respectifs  $\lambda$  et  $\mu$ . En utilisant la fonction caractéristique, montrer que la variable  $X + Y$  suit une loi de Poisson de paramètre à déterminer.

Comme les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, on a pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t)\phi_Y(t) = e^{(\lambda+\mu)(e^{it}-1)},$$

ce qui correspond à la fonction caractéristique d'une loi de Poisson de paramètre  $\lambda + \mu$ . Donc  $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$ .