

Exercice - Lancers de dé

On lance 720 fois un dé équilibré.

Soit X le nombre de fois où le nombre 6 est apparu sur les 720 lancers. La variable aléatoire X suit donc la loi $\mathcal{B}(720, \frac{1}{6})$. En particulier, $\mathbb{E}(X) = 720 \times \frac{1}{6} = 120$ et $\mathbb{V}(X) = 720 \times \frac{1}{6} \times (1 - \frac{1}{6}) = 100$.

1. (a) En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev, que peut-on dire de la probabilité que le nombre 6 soit apparu entre 100 et 140 fois ?

En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev, on a

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq 20) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{20^2} = \frac{100}{20^2} = \frac{1}{4}.$$

On en conclut

$$\mathbb{P}(100 \leq X \leq 140) = \mathbb{P}(|X - 120| \leq 20) = 1 - \mathbb{P}(|X - 120| > 20) \geq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

- (b) Que peut-on dire de cette même probabilité en utilisant une approximation par la loi Normale ?

On approxime la loi de X par la loi $\mathcal{N}(120, \sigma^2 = 10^2)$. Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(100 \leq X \leq 140) &= \mathbb{P}\left(-2 \leq \frac{X - 120}{10} \leq 2\right) \\ &\simeq \mathbb{P}(-2 \leq Z \leq 2), \quad \text{où } Z \sim \mathcal{N}(0, 1) \\ &\simeq 2\mathbb{P}(Z \leq 2) - 1 \\ &\simeq 2 * 0.9772 - 1, \quad \text{par lecture de la table de loi } \mathcal{N}(0, 1) \\ &\simeq 0.9544.\end{aligned}$$

2. Déterminer le plus petit entier n tel que $\mathbb{P}(|X - 120| \leq n) \geq 0.9$, où X est la variable aléatoire égale au nombre d'apparition du 6 sur 720 lancers, que l'on puisse obtenir :

- (a) par l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev,
(b) par le théorème central-limite.

- (a) Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev, on a

$$\mathbb{P}(|X - 120| \geq n) \leq \frac{100}{n^2}.$$

Si on impose $\frac{100}{n^2} < 0.1$, alors on a bien l'inégalité recherchée, à savoir $\mathbb{P}(|X - 120| \leq n) \geq 0.9$. Or

$$\frac{100}{n^2} < 0.1 \Leftrightarrow n > \sqrt{1000} \simeq 31.62.$$

La valeur minimale de n obtenue est donc $n = 32$.

- (b) $\mathbb{P}(|X - 120| \leq n) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{X - 120}{10}\right| \leq \frac{n}{10}\right) \simeq \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{n}{10}\right) - 1$, où $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Ainsi la condition $\mathbb{P}(|X - 120| \leq n) \geq 0.9$ devient $\mathbb{P}\left(Z \leq \frac{n}{10}\right) \leq 0.95$, c'est-à-dire $\frac{n}{10} \geq 1.64$. La valeur minimale de n obtenue est donc $n = 17$.

3. Commenter les résultats.

Le théorème central-limite est plus efficace que l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev.