Ex

Étudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n = \frac{n}{n^3+1}$

   ✓ Alors $u_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$ donc par comparaison à une série de Riemann convergente ($\alpha = 2 > 1$), la série $\sum u_n$ converge.

2. $u_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$

   ✓ Alors $u_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}$ donc par comparaison à une série de Riemann convergente ($\alpha = 3/2 > 1$), la série $\sum u_n$ converge.

3. $u_n = n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

   ✓ Alors $u_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_n \underset{+\infty}{\sim} n \times \frac{1}{n} = 1$ donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

4. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

   ✓ Alors $u_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n}$ donc par comparaison à une série de Riemann divergente ($\alpha = 1 < 1$), la série $\sum u_n$ diverge.

5. $u_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$

   ✓ Alors $u_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} = \frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{1}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{1}{n\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n \times 2\sqrt{n}} = \frac{1}{2n^{3/2}}$ donc par comparaison à une série de Riemann convergente ($\alpha = 3/2 > 1$), la série $\sum u_n$ converge.

6. $u_n = \frac{(-1)^n+n}{n^2+1}$ Alors $u_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_n = \frac{(-1)^n+n}{n^2+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ donc par comparaison à une série de Riemann divergente ($\alpha = 1 < 1$), la série $\sum u_n$ diverge.

7. $u_n = \frac{1}{n!}$

   ✓ Alors $u_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_n \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ donc par comparaison à une série géométrique convergente ($q = \frac{1}{2} < 1$), la série $\sum u_n$ converge.

8. $u_n = \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$

   ✓ Alors $u_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_n = \ln\left(\frac{n^2+n+2-1}{n^2+n-1}\right) = \ln\left(1 + \frac{2}{n^2+n-1}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n^2+n-1}$ donc par comparaison à une série de Riemann convergente ($\alpha = 2 > 1$), la série $\sum u_n$ converge.

Indications : Pour la question 5.*, utiliser la quantité conjuguée, i.e. multiplier le numérateur et le dénominateur par* $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$. *Pour la question* 7.*, utiliser l'inégalité* $n! \geqslant 2^{n-1}$. *Pour la question* 8.*, utiliser un équivalent de* $\ln(1+x)$ *en* 0.