La fonction random disponible dans les logiciels de calcul permet de générer des nombres aléatoires sur l'intervalle $[0;1]$, distribués selon une loi uniforme $\mathcal{U}([0;1])$. A partir de cette fonction, il est facile de simuler des variables aléatoires suivant d'autres lois. On donne ou on rappelle la définition de quelques lois usuelles :

Définition : Soit $p \in]0;1[$: une variable X suit une loi de Rademacher $\mathcal{R}(p)$ si :
- $\mathrm{P}(X=1)=p$
- $\mathrm{P}(X=-1)=1-p$

Définition : Soit $\lambda>0$: une variable X suit une loi de Laplace $\mathcal{L}(\lambda)$ si elle admet pour densité :

$$f_X(x)=\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}$$

Définition : Soit $p \in]0;1[$: une variable X suit une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ si pour tout entier $k \geqslant 1$:

$$\mathrm{P}(Z=k)=p(1-p)^{k-1}$$

Notations : pour tout événement A, on note $\mathbf{1}_A$ la fonction indicatrice de A ; pour tout x réel, on note $[x]$ la partie entière de x.

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes : X suit une loi Rademacher $\mathcal{R}(1/2)$ et Y suit une loi uniforme sur $[0;1]$.

1. Soit $\lambda>0$. On pose $U=\frac{1}{\lambda}X\ln(Y)$.

✓ Soit $\lambda>0$ et $U=\frac{1}{\lambda}X\ln(Y)$

(a) Soit $a\in\mathbb{R}$. Calculer $\mathrm{P}(\ln(Y)\leqslant a, X=1)$ et $\mathrm{P}(\ln(Y)\geqslant a, X=-1)$

✓ Soit $a\in\mathbb{R}$. Par indépendance de X et Y, on a $\mathrm{P}(\ln(Y)\leqslant a, X=1)=\mathrm{P}(\ln(Y)\leqslant a)\times \mathrm{P}(X=1)=\mathrm{P}(Y\leqslant e^a)\times\frac{1}{2}$. Or $\mathrm{P}(Y\leqslant t)=1$ si $t>1$ et $\mathrm{P}(Y\leqslant t)=t$ si $0<t<1$ étant donnée la loi suivie par Y. Par conséquent, on a $\mathrm{P}(\ln(Y)\leqslant a, X=1)=\begin{cases}\frac{1}{2} \text{ si } a>0\\ \frac{1}{2}e^a \text{ sinon}\end{cases}$.

De même, $\mathrm{P}(\ln(Y)\geqslant a, X=-1)=\begin{cases}0 \text{ si } a>0\\ \frac{1}{2}(1-e^a) \text{ sinon}\end{cases}$

(b) Déterminer la fonction de répartition de la variable U.

✓ Soit F_U la fonction de répartition de la variable U. Par définition, pour tout réel t,

$$F_U(t)=\mathrm{P}(\frac{1}{\lambda}X\ \ln(Y)\leqslant t)=\mathrm{P}(X\ \ln(Y)\leqslant \lambda t)$$

Par application du théorème des probabilités totales au système d'événements $\{(X=1),(X=-1)\}$,

$$F_U(t)=\mathrm{P}(X=1, Y\leqslant e^{\lambda t})+\mathrm{P}(X=-1, Y\geqslant e^{-\lambda t})$$

D'après le calcul précédent, on obtient

$$F_U(t)=\begin{cases}1-\frac{1}{2}e^{-\lambda t} \text{ si } t>0\\ \frac{1}{2}e^{\lambda t} \text{ sinon}\end{cases}$$

(c) En déduire que U suit une loi de Laplace $\mathcal{L}(\lambda)$.

✓ On dérive la fonction de répartition pour obtenir la densité : $F_U'(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda t} \text{ si } t>0\\ \frac{1}{2}\lambda e^{\lambda t} \text{ sinon}\end{cases}=\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|t|}$. On reconnaît la fonction densité d'une loi de Laplace de paramètre λ.

2. Soit $p\in]0;1[$. On définit les variables $Z=\frac{\ln(Y)}{\ln(1-p)}$ et $V=1+[Z]$.

✓ Soit $p\in]0;1[$. On définit les variables $Z=\frac{\ln(Y)}{\ln(1-p)}$ et $V=1+[Z]$

(a) Déterminer la loi de Z.

✓ On tente de déterminer la loi de Z en calculant sa fonction de répartition. Par définition (attention aux signes, $\ln(1-p)<0$),

$$F_Z(t)=\mathrm{P}(\ln(Y)\geqslant t\ln(1-p))=\mathrm{P}(Y\geqslant(1-p)^t)=1-F_Y((1-p)^t)$$

En dérivant, on obtient une densité de Z :

$$f_Z(t)=\begin{cases}-\ln(1-p)\times(1-p)^t \text{ si } t>0\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$$

(b) Démontrer que V suit une loi géométrique.

✓ La variable V est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Par conséquent, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, on calcule

$$\mathrm{P}(V=k)=\mathrm{P}(k-1\leqslant Z<k)=\int_{k-1}^{k}f_Z(z)dz=(1-p)^{k-1}-(1-p)^k=p(1-p)^{k-1}$$

On reconnaît bien la loi géométrique de paramètre p.