KfgI ⊳ **Exercice** - *Comparaison de méthodes de point fixe*

Pour approcher les racines réelles de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x - e^{-(1+x)}$, on utilise quatre méthodes de point fixe : x_0 donné, $x_{n+1} = \phi_i(x_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, où

$$\phi_1(x) = e^{-(1+x)}, \quad \phi_2(x) = x^2 e^{1+x}, \quad \phi_3(x) = -1 - \ln(x), \quad \phi_4(x) = \frac{1+x}{1+e^{1+x}}.$$

1. Montrer qu'il existe une unique racine réelle ℓ de f. Montrer que $\ell \in]\frac{1}{5};\frac{1}{2}[$.

La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = 1 + e^{-(1+x)} > 0$. La fonction f est donc strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$. Or $f(\frac{1}{5}) < 0$ et $f(\frac{1}{2}) > 0$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, f admet une unique racine réelle ℓ sur $\mathbb{R}$ et $l \in]\frac{1}{5};\frac{1}{2}[$.

2. Montrer que les quatre méthodes de point fixe sont consistantes avec la recherche du zéro de f, *i.e.* montrer que pour tout $x \in]\frac{1}{5};\frac{1}{2}[$, on a : $\phi_i(x) = x \Leftrightarrow f(x) = 0 \quad$ pour $i = 1,2,3,4$.

Pour ϕ_1, pas de problème.
Pour ϕ_2, on a $\phi_2(x) = x \Leftrightarrow x = 0$ ou $f(x) = 0$. Comme on se place dans l'intervalle $]\frac{1}{5};\frac{1}{2}[$, on obtient l'équivalence recherchée.
Pour ϕ_3 et ϕ_4, pas de problème.

3. Étudier la convergence locale des quatre méthodes de point fixe. Si elles convergent, donner l'ordre de convergence. Attention, on ne demande pas d'étudier la convergence globale sur $]\frac{1}{5};\frac{1}{2}[$ mais de vérifier s'il existe un voisinage de ℓ tel que pour tout x_0 dans ce voisinage, la méthode converge.

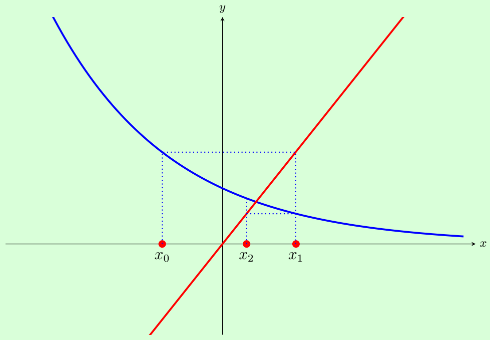
Les fonctions ϕ_i sont dérivables sur l'intervalle $]\frac{1}{5};\frac{1}{2}[$, de dérivées :

$$\phi_1'(x) = -e^{-(1+x)}, \quad \phi_2'(x) = 2xe^{1+x} + x^2e^{1+x}, \quad \phi_3'(x) = -\frac{1}{x}, \quad \phi_4'(x) = \frac{1 - xe^{1+x}}{(1+e^{1+x})^2}.$$

Par ailleurs, ℓ étant solution de l'équation $f(x) = 0$, on a l'égalité $\ell = e^{-(1+\ell)}$. On en déduit que :
- $\phi_1'(\ell) = -e^{-(1+\ell)} = \ell$ donc $|\phi_1'(\ell)| < 1$ (car $\ell \in]\frac{1}{5};\frac{1}{2}[$). Le point ℓ est attractif pour la fonction ϕ_1 : la suite converge à l'ordre 1 pour x_0 suffisamment proche de ℓ.
- $\phi_2'(\ell) = 2 + \ell$ donc $|\phi_2'(\ell)| > 1$, ce qui implique que le point ℓ est répulsif pour ϕ_2 et la suite ne converge pas.
- $|\phi_3'(\ell)| = |\frac{-1}{\ell}| > 1$ donc la suite ne converge pas.
- $\phi_4'(\ell) = \frac{1-e^{-(1+\ell)}e^{1+\ell}}{(1+e^{1+\ell})^2} = 0$. Le point ℓ est attractif pour ϕ_4. La suite est donc convergente pour x_0 dans un voisinage suffisamment proche de ℓ. De plus, l'ordre de convergence est au moins 2.

4. Pour la première méthode, établir analytiquement pour quelles valeurs de x_0 la suite converge.

Pour construire la fonction ϕ_1, il suffit d'effectuer une translation d'une unité vers la gauche de la fonction $x \mapsto e^{-x}$.



L'étude graphique suggère que la suite converge quel que soit $x_0 \in \mathbb{R}$ (convergence «en escargot»). Pour le prouver, on utilise le théorème de convergence globale de la méthode de point fixe.
- On commence par vérifier si $|\phi_1'(x)| < 1, \ \forall x \in \mathbb{R}$:

$$|\phi_1'(x)| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < e^{-(1+x)} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad x > -1.$$

  En revanche, $|\phi_1'(0)| = e^{-1}$ donc on peut poser $K = e^{-1} < 1$; or ϕ_1' est décroissante sur $\mathbb{R}$ donc :

$$\forall x \in [0;+\infty[\,, \ |\phi_1'(x)| \leqslant K$$

- Commençons par regarder si le théorème de convergence globale s'applique sur l'intervalle $[0;+\infty[$. Pour cela, il faut vérifier que $\phi_1([0;+\infty[) \subset [0;+\infty[$. Or pour tout $x \in [0;+\infty[$, $\phi_1(x) = e^{-(1+x)} \in [0;1[$ donc $\phi_1([0;+\infty[) = [0;1[\subset [0;+\infty[$. On a donc vérifié la seconde hypothèse du théorème, ce qui permet de conclure que la méthode de point fixe converge au moins pour tout $x_0 \in [0;+\infty[$.
- Reste à étudier le cas où $x_0 < 0$. Si on s'intéresse au premier terme x_1, on s'aperçoit que $x_1 = \phi_1(x_0) = e^{-(1+x_0)} \in [0;+\infty[$ et on se retrouve dans le cas précédent : le théorème s'applique à partir de x_1.

En conclusion, la méthode de point fixe associée à ϕ_1 converge quel que soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

5. À l'aide d'un programme, donner une valeur approchée de ℓ et comparer graphiquement les vitesses de convergence pour la méthode utilisant ϕ_1 et la méthode utilisant ϕ_4.