

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle suivant une loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$ . On définit  $Y = \lfloor X \rfloor$  la partie entière de  $X$ . On pose  $Z = X - \lfloor X \rfloor$ .

1. Déterminer la loi de probabilité de  $Y$ .

On peut remarquer que  $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , comme  $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ ,

$$\mathbb{P}(Y = n) = \mathbb{P}(n \leq X < n+1) = \int_n^{n+1} \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[ -e^{-\lambda x} \right]_n^{n+1} = e^{-\lambda n} (1 - e^{-\lambda}),$$

ce qui détermine entièrement la loi de  $Y$  :  $Y+1$  suit une loi géométrique de paramètre  $(1 - e^{-\lambda})$ .

2. Calculer  $\mathbb{P}(n \leq X < n+t)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $t \in ]0; 1[$ . En déduire la fonction de répartition de  $Z$ .

$$\mathbb{P}(n \leq X \leq n+t) = \int_n^{n+t} \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[ -e^{-\lambda x} \right]_n^{n+t} = e^{-\lambda n} - e^{-\lambda(n+t)}.$$

On a  $\{Z \in [0; t]\} = \cup_{n \in \mathbb{N}} \{n \leq X \leq n+t\}$ , la réunion étant disjointe. Ainsi, pour  $t \in [0; 1[$ ,

$$\mathbb{P}(0 \leq Z \leq t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(n \leq X \leq n+t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} e^{-\lambda n} (1 - e^{-\lambda t}) = \frac{1 - e^{-\lambda t}}{1 - e^{-\lambda}}.$$

Comme  $Z$  est à valeurs dans  $[0; 1[$ , on a  $F_Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{1 - e^{-\lambda t}}{1 - e^{-\lambda}} & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$ .

3. Calculer l'espérance de  $Y$  et de  $Z$ .

Pour la variable aléatoire  $Y$ , on a

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} n \mathbb{P}(Y = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} n (e^{-\lambda n} - e^{-\lambda(n+1)}) = (1 - e^{-\lambda}) \sum_{n=0}^{+\infty} n e^{-\lambda n}.$$

On utilise la formule

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n t^n = t \sum_{n=0}^{+\infty} n t^{n-1} = t \left[ \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \right]' = t \left[ \frac{1}{1-t} \right]' = \frac{t}{(1-t)^2}.$$

Il vient

$$\mathbb{E}(Y) = (1 - e^{-\lambda}) \frac{e^{-\lambda}}{(1 - e^{-\lambda})^2} = \frac{1}{e^{\lambda} - 1}.$$

Ce résultat était prévisible puisque  $Y+1$  suit une loi géométrique  $\mathcal{G}(1 - e^{-\lambda})$ , donc il est acquis que  $\mathbb{E}(Y+1) = \frac{1}{1 - e^{-\lambda}}$ , d'où par linéarité  $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{1 - e^{-\lambda}} - 1 = \frac{e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}}$ .

Pour la variable aléatoire  $Z$ , on procède par linéarité : on sait que  $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$  donc  $\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}} = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{e^{\lambda} - 1}$ .

Par ailleurs, comme  $\lambda < e^{\lambda} - 1$  pour  $\lambda > 0$ , on a  $\frac{1}{\lambda} > \frac{1}{e^{\lambda} - 1}$  et donc  $\mathbb{E}(Z) > 0$ , ce qui est cohérent car  $Z$  est à valeurs dans  $[0; 1]$ .