On définit trois variables aléatoires indépendantes (X_1, X_2, X_3) suivant chacune une loi normale d'espérance $\mu = 10$ et de variance $\sigma^2 = 4$.
On pose

$$\overline{X} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} X_i \qquad T = \frac{2}{7}X_1 + \frac{3}{7}X_2 + \frac{2}{7}X_3$$

$$U = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{3}(X_i - 10)^2 \qquad V = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{3}(X_i - \overline{X})^2$$

1. Déterminer, en justifiant par un calcul, la loi de la variable aléatoire T.

✓ Par linéarité, on calcule $\mathbb{E}(T) = \frac{2+3+2}{7} \times 10 = 10$. Par indépendance et propriété de la variance, $\sigma^2(\overline{T}) = \frac{4+9+4}{49} \times 4 = \frac{68}{49}$. Par somme de lois normales, $\overline{X}$ suit une loi normale $\mathcal{N}(10, \sigma^2 = \frac{68}{49})$.

2. Vérifier que $\overline{X}$ et T sont deux estimateurs sans biais de μ. Lequel de ces deux estimateurs de μ est le plus efficace ?

✓ Pour étudier le biais d'un estimateur, on doit calculer leur espérance. Par linéarité, $\mathbb{E}(\overline{X}) = \mu$ donc le biais de $\overline{X}$ est $B(\overline{X}) = \mathbb{E}(\overline{X} - \mu) = 0$. De même, $B(T) = 0$.
Pour comparer l'efficacité de ces deux estimateurs, on peut comparer leurs variances respectives : par indépendance et propriété de la variance, $\sigma^2(\overline{X}) = \frac{3\times 4}{9} = \frac{4}{3} < \frac{68}{49} = \sigma^2(T)$.
Par conséquent, $\overline{X}$ est plus efficace que T pour estimer μ.

3. Déterminer, en justifiant, la loi de la variable aléatoire U et la loi de la variable V.

✓ $U = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{3}(X_i - 10)^2 = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{X_i - 10}{2}\right)^2$. Or les variables aléatoires X_i sont indépendantes et $\frac{X_i - 10}{2}$ suit une loi normale centrée réduite donc par définition U suit une loi $\chi^2(3)$.
Par théorème du cours (Théorème de Fisher), V suit une loi $\chi^2(2)$.

4. A l'aide des tables de valeurs, déterminer un réel t tel que $\mathrm{P}(V > t) = 0.95$.

✓ Par lecture de la table d'une loi $\chi^2(2)$, on a $\mathrm{P}(V \leqslant 0.1026) = 0.05$ donc on peut prendre $t = 0{,}1026$.

5. On pose

$$Y = \frac{\overline{X} - 10}{\sqrt{\frac{2V}{3}}}$$

Parmi les formules suivantes, laquelle permet de déterminer le réel t tel que $\mathrm{P}(Y > t) = 0.025$?
— `=LOI.NORMALE.STANDARD.INVERSE(0.95)`
— `=LOI.KHIDEUX.INVERSE(0,975;2)`
— `=1-LOI.KHIDEUX.INVERSE(0,025;3)`
— `=LOI.STUDENT.INVERSE.N(0,975;2)`
— `=1-LOI.STUDENT.INVERSE.N(0,025;3)`

✓ on a

$$Y = \frac{\overline{X} - 10}{\sqrt{\frac{2V}{3}}} = \frac{\overline{X} - 10}{\sqrt{\frac{4}{3}\frac{V}{2}}} = \frac{\frac{\overline{X}-10}{\sqrt{\frac{4}{3}}}}{\sqrt{\frac{V}{2}}}$$

et on reconnaît une loi de Student $St(2)$. On cherche t tel que $\mathrm{P}(Y > t) = 0.025 \iff \mathrm{P}(Y \leqslant t) = 0.975$ d'où la formule : =LOI.STUDENT.INVERSE.N(0,975 ;2)