b1T2 ⊳ **Exercice** - *Etude d'une matrice tridiagonale*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice tridiagonale d'ordre $n > 2$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On admet que l'ensemble des valeurs propres de A est

$$sp(A) = \left\{ \lambda_k = 4\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right) \ , \ k \in \{1, ..., n\} \right\}$$

On souhaite résoudre un système linéaire $AX = b$ à l'aide d'une méthode itérative et on note X sa solution.

1. Exprimer la suite des itérés de la méthode de Jacobi sous la forme $X^{(k+1)} = BX^{(k)} + C$ en exprimant la matrice B en fonction de la matrice identité I_n et de la matrice A. La matrice A est-elle à diagonale strictement dominante ?

   Avec les notations du cours, $A = M - N$ avec $M = 2I$ d'où la suite de Jacobi $x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b = (I - \frac{1}{2}A)x^{(k)} + \frac{1}{2}b$. La matrice A n'est pas à diagonale strictement dominante donc la convergence de la méthode de Jacobi n'est pas acquise.

2. On définit l'erreur $e^{(k)} = X^{(k)} - X$ à la k-ème itération. Exprimer $e^{(k)}$ en fonction de $e^{(k-1)}$ et en déduire que $\|e^{(k)}\| \leqslant |||B|||^k \|e^{(0)}\|$ où $\|.\|$ est une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$ et $|||.|||$ la norme induite sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   $$\begin{aligned} e^{(k)} &= X^k - X \\ &= (BX^{k-1} + C) - (BX + C) \\ &= B(X^{(k-1)} - X) \\ &= Be^{(k-1)} \end{aligned}$$

   donc par récurrence $e^{(k)} = B^k e^{(0)}$. En passant à la norme et par inégalité des normes induites, $||e^{(k)}|| \leqslant |||B|||^k ||e^{(0)}||$

3. Calculer $|||B|||_\infty$. Qu'en conclure ?

   On calcule $B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ & & & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ D'après le cours, $|||B|||_\infty = \sup_{1 \leqslant i \leqslant N} \sum_{j=1}^{N} |b_{i,j}| = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$. Donc ce choix de norme ne permet pas de conclure que l'erreur tend vers 0.

4. Vérifier que le rayon spectral de B est $\rho(B) = \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$.

   Les valeurs propres de $B = I - \frac{1}{2}A$ sont les valeurs $\mu_k = 1 - 2\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right) = \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$ donc $\rho(B) = \max\{|\mu_k|\} = \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$.

5. En déduire que la méthode de Jacobi converge pour la matrice A quelque soit l'initialisation.

   On remarque que A est une matrice symétrique donc B est une matrice symétrique. D'après la propriété 1 admise, $||B||_2 = \rho(B) = \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$ donc $0 < ||B||_2 < 1$. Donc d'après la question 2, $||e^{(k)}||_2 \to 0$ quelque soit l'erreur $e^{(0)}$. commise au départ, autrement dit la méthode converge.