uVBn **Ex 1** - *Loi uniforme, max, min, stratégie*

Etant donnés trois nombres réels dans l'intervalle $[0;1]$, on définit deux stratégies :

Stratégie A : choisir le plus grand des trois nombres ;

Stratégie B : choisir la somme des deux nombres les plus petits.

Deux personnes jouent au jeu comportant les étapes suivantes :
- choisir entre la stratégie A et la stratégie B ;
- à l'aide d'un générateur pseudo aléatoire, tirer au hasard et de manière indépendante trois nombres réels entre 0 et 1 ;
- le gagnant est celui qui obtient la plus grande valeur, compte tenu de la stratégie choisie.

On note X_1, X_2, X_3 les nombres obtenus lors des tirages au sort. On note Y_A la variable égale à la valeur obtenue par la stratégie A et Y_B la variable égale à la valeur obtenue par la stratégie B.

1. Quelle la loi de probabilité suivie par chaque variable aléatoire X_i, $i \in \{1,2,3\}$?

   X_1, X_2 et X_3 suivent une loi uniforme sur $[0;1]$.

2. Exprimer Y_A en fonction des X_i.

   $Y_A = \max(X_1, X_2, X_3)$

3. Exprimer Y_B en fonction de Y_A et des X_i.

   $Y_B = X_1 + X_2 + X_3 - Y_A$

4. Déterminer la fonction de répartition de Y_A. En déduire que Y_A est une variable aléatoire absolument continue dont on déterminera la densité.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

   $$F_{Y_A}(t) = (Y_A \leqslant t) = (\max(X_1, X_2, X_3 \leqslant t) = (\{X_1 \leqslant t\} \cap \{X_2 \leqslant t\} \cap \{X_3 \leqslant t\}).$$

   Comme les X_i sont i.i.d., on obtient :

   $$F_{Y_A}(t) = (X_1 \leqslant t)(X_2 \leqslant t)(X_3 \leqslant t) = (F_{X_1}(t))^3.$$

   Donc $F_{Y_1}(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ t^3 \text{ si } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 1 \text{ si } t > 1 \end{cases}$. La Y_A est donc absolument continue et sa densité vaut $f_{Y_A}(t) = F'_{Y_A}(t) = 3t^2 \mathbf{1}_{[0;1]}(t)$.

5. Y a-t-il une meilleure stratégie ?

   Comparons l'espérance des Y_A et Y_B :

   $$\mathbb{E}(Y_A) = \int_0^1 x \times 3x^2 \, dx = \left[\frac{3}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{3}{4},$$
   $$\mathbb{E}(Y_B) == \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) + \mathbb{E}(X_3) - \mathbb{E}(Y_A) = \frac{1}{2} \times 3 - \frac{3}{4} = \frac{3}{4}.$$

   Les deux stratégies sont donc équivalentes.

   Pour comparer les deux stratégies plus finement, il faut calculer $(Y_B \geqslant Y_A)$.
   Comme $\{Y_B \geqslant Y_A\} = \{X_1 + X_2 + X_3 - 2Y_A \geqslant 0\}$, on a

   $$\begin{aligned}(Y_B \geqslant Y_A) &= \int_{[0;1]^3} \nVdash_{\{x_1+x_2+x_3-2\max(x_1,x_2,x_3)\geqslant 0\}} \mathrm{d}x_1 \, dx_2 \, dx_3 \\ &= \int_{D_1} \mathrm{d}x_1 \, dx_2 \, dx_3 + \int_{D_2} \mathrm{d}x_1 \, dx_2 \, dx_3 + \int_{D_3} \mathrm{d}x_1 \, dx_2 \, dx_3\end{aligned}$$

   avec

   $$D_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in [0;1]^3 | x_2 \leqslant x_1, x_3 \leqslant x_1, x_2 + x_3 \geqslant x_1\}$$
   $$D_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in [0;1]^3 | x_1 \leqslant x_2, x_3 \leqslant x_2, x_1 + x_3 \geqslant x_2\}$$
   $$D_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in [0;1]^3 | x_1 \leqslant x_3, x_2 \leqslant x_3, x_1 + x_2 \geqslant x_3\}$$

   Par permutations des indices, il est immédiat que les trois intégrales sont égales or

   $$\int_{D_1} dx_1 \, dx_2 \, dx_3 = \int_0^1 \int_0^{x_1} \int_{x_1-x_2}^{x_1} dx_3 \, dx_2 \, dx_1 = \int_0^1 \int_0^{x_1} x_2 \, dx_2 \, dx_1 = \int_0^1 \frac{x_1^2}{2} \mathrm{d}x_1 = \frac{1}{6}.$$

   Ainsi $\mathbb{P}(Y_B \geqslant Y_A) = 3\int_{D_1} dx = \frac{1}{2}$. On retrouve que les deux stratégies sont équivalentes, au sens où si le joueur A adopte la stratégie 1 et le joueur B adopte la stratégie 2, alors A et B ont la même probabilité $\frac{1}{2}$ de gagner.