CLjr ⊵ **Exercice** - *Multiplicité d'une racine et factorisation d'un polynôme*

Déterminer l'ordre de multiplicité de la racine x_0 du polynôme P, et en déduire la factorisation du polynôme, dans les cas suivants :

1. $P(X) = X^4 - X^3 - 3X^2 + 5X - 2 \quad x_0 = 1.$

$$P(X) = X^4 - X^3 - 3X^2 + 5X - 2.$$

On a :

$$\begin{aligned} P(1) &= 1 - 1 - 3 + 5 - 2 = 0 \\ P'(X) &= 4X^3 - 3X^2 - 6X + 5 \\ P'(1) &= 4 - 3 - 6 + 5 = 0 \\ P''(X) &= 12X^2 - 6X - 6 \\ P''(1) &= 12 - 6 - 6 = 0 \\ P^{(3)}(X) &= 24X - 6 \\ P^{(3)}(1) &\neq 0 \end{aligned}$$

Ainsi $x_0 = 1$ est racine d'ordre 3 de P et :

$$\begin{gathered} P(X) = (X-1)^3 \cdot (X-a) = \left(X^3 - 3X^2 + 3X - 1\right) \cdot (X-a) = X^4 \ldots + a \\ = X^4 - X^3 - 3X^2 + 5X - 2 \\ \Rightarrow a = -2 \\ P(X) = (X-1)^3 \cdot (X+2) \end{gathered}$$

2. $P(X) = X^3 - iX^2 + X - i \quad x_0 = i.$

$$P(X) = X^3 - i.X^2 + X - i.$$

On a :

$$\begin{aligned} P(i) &= i^3 - i.i^2 + i - i = 0 \\ P'(X) &= 3X^2 - 2iX + 1 \\ P'(i) &= 3 \cdot i^2 - 2.i.i + 1 = 0 \\ P''(X) &= 6X - 2i \\ P''(i) &= 6i - 2i \neq 0 \end{aligned}$$

Ainsi $x_0 = 1$ est racine double de P et :

$$\begin{aligned} P(X) =& (X-i)^2 \cdot (X-a) = \left(X^2 - 2iX - 1\right) \cdot (X-a) = X^3 \ldots + a \\ =& X^3 - iX^2 + X - i \\ & \Rightarrow a = -i \end{aligned}$$

d'où

$$P(X) = (X-i)^2 (X+i)$$