eTDu ⊵ **Exercice** - *Calcul approché de $\frac{\pi}{4}$.*

On construit différentes méthodes de Monte Carlo afin de donner une valeur approchée de $\frac{\pi}{4}$. Afin de les comparer, on donnera la variance de l'estimation sous la forme $\frac{C}{n}$ où n est la taille de l'échantillon. On souhaite avoir la variance la plus faible possible.

Partie 1 : Technique du Hit or Miss.

On considère le carré $[0;1]^2$ et on note D le quart de disque centré en 0 et de rayon 1 :

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \,,\ x^2 + y^2 \leqslant 1\}$$

L'aire de D vaut $\frac{\pi}{4}$.
Soit (X_i, Y_i) une suite de couples variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées selon une loi uniforme sur $[0;1]^2$. Pour tout entier $i \geqslant 1$, on pose

$$Z_i = \mathbf{1}_{(X_i, Y_i) \in D}$$

Ainsi, les variables $(Z_i)_{i \geqslant 1}$ sont indépendantes.

1. Déterminer la loi de Z_1 et en déduire que $\mathbb{E}(Z_1) = \frac{\pi}{4}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :
$$T_n^{(1)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Z_i$$
Justifier que $T_n^{(1)}$ est un estimateur sans biais de $\frac{\pi}{4}$.
3. Justifier que la suite de variables aléatoires $\left(T_n^{(1)}\right)_{n \geqslant 1}$ converge presque sûrement vers $\frac{\pi}{4}$ lorsque n tend vers l'infini.
4. Montrer qu'il existe $C^{(1)} \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{V}\left(T_n^{(1)}\right) = \frac{C^{(1)}}{n}$ et donner une valeur numérique approchée de $C^{(1)}$ à 10^{-4}.

Partie 2 : Technique de la moyenne empirique.

On définit une fonction $g \colon [0;1] \to [0;+\infty[$ par :

$$g(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

Soit (U_i) une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées selon une loi uniforme sur $[0;1]$.

1. Justifier que $\mathbb{E}(g(U_1)) = \frac{\pi}{4}$.
2. En déduire une suite de variables aléatoires convergeant presque sûrement vers $\frac{\pi}{4}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :
$$T_n^{(2)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} g(U_i)$$
Montrer qu'il existe $C^{(2)} \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{V}\left(T_n^{(2)}\right) = \frac{C^{(2)}}{n}$ et donner une valeur numérique approchée de $C^{(2)}$ à 10^{-4}.
4. Comparer les deux techniques d'approximation présentées ici.