

Soit  $n$  un entier naturel non-nul et soit  $a$  un réel. On considère la fonction  $f_n$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f_n(x) = \frac{an}{\pi(1+n^2x^2)}.$$

1. Déterminer  $a$  pour que  $f_n$  soit une densité de variable aléatoire.

La fonction  $f_n$  étant continue et positive, elle est une densité de variable aléatoire si et seulement si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx = 1$$

Or, effectuant le changement de variables  $u = nx$ , on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{an}{\pi(1+n^2x^2)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{\pi(1+u^2)} du = \frac{a}{\pi} [\arctan(u)]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{a}{\pi} \times \pi = a$$

$f_n$  est donc une densité de variable aléatoire si et seulement si  $a = 1$ .

2. Soit  $(X_n)$  une suite de variables aléatoires telle que chaque  $X_n$  admet pour densité  $f_n$ . Étudier l'existence de moments pour  $X_n$ .

On a  $xf_n(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{\pi nx}$  dont l'intégrale est divergente au voisinage de  $+\infty$ , et qui est une fonction positive. Ainsi, la variable aléatoire  $X_n$  n'admet pas d'espérance, ni aucun autre moment.

3. Étudier la convergence en loi de la suite  $(X_n)$ .

Soit  $F_n$  la fonction de répartition de  $X_n$ , définie par

$$F_n(x) = \int_{-\infty}^x f_n(t) dt = \frac{1}{\pi} \left( \arctan(nx) + \frac{\pi}{2} \right).$$

Si  $x < 0$ ,  $\arctan(nx) \rightarrow -\pi/2$ , et donc  $F_n(x) \rightarrow 0$ . Si  $x > 0$ ,  $\arctan(nx) \rightarrow \pi/2$  et donc  $F_n(x) \rightarrow 1$ . Soit maintenant  $X$  une variable aléatoire identiquement nulle. Sa fonction de répartition  $F_X$  vérifie  $F_X(x) = 0$  si  $x < 0$  et  $F_X(x) = 1$  si  $x \geq 0$ . Autrement dit, en tout point de continuité de  $F_X$ , la suite  $(F_n(x))$  converge vers  $F_X(x)$ . C'est exactement la définition de la convergence en loi de la suite  $(X_n)$  vers  $X$ .

4. Étudier la convergence en probabilité de la suite  $(X_n)$ .

On va prouver que  $(X_n)$  converge en probabilité vers 0. Pour cela, on revient à la définition et on fixe  $\varepsilon > 0$ . On doit prouver que  $\lim_n P(|X_n| \geq \varepsilon) = 0$ . Utilisons la densité pour calculer cette probabilité. Puisque la densité est une fonction paire, il faut en réalité démontrer que

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)} dx \rightarrow 0$$

Faisant le changement de variables  $u = nx$ , on a

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)} dx = \int_{n\varepsilon}^{+\infty} \frac{du}{\pi(1+u^2)}$$

Ceci tend bien vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  car c'est le reste d'une intégrale impropre convergente.