Ex

Loi de Poisson et estimation par maximum de vraisemblance

On considère un échantillon $X_1, ..., X_n$ suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. On cherche un estimateur de λ par la méthode du maximum de vraisemblance. On note $(x_1, ..., x_n)$ une réalisation de cet échantillon.

1. Exprimer la fonction de vraisemblance $L(x_1, ..., x_n, \lambda)$ en fonction de l'échantillon et du paramètre λ à estimer.

✓

$L(x_1, \cdots, x_n, \lambda) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i)$ or $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda)$ donc

$$L(x_1, \cdots, x_n, \lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda}$$

2. Trouver pour quelle valeur de λ la fonction de vraisemblance atteint son maximum.

✓

On a

$$\begin{aligned}\ln L(x_1, \cdots, x_n, \lambda) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\ln(\lambda^{x_i}) - \lambda - \ln(x_i!)\right) \\ &= (\ln \lambda) \sum_{i=1}^{n} x_i - n\lambda - \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i!)\end{aligned}$$

donc en dérivant par rapport à λ,

$$\frac{\partial L(x_1, \cdots, x_n, \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} x_i - n.$$

Or

$$\frac{\partial L(x_1, \cdots, x_n, \lambda)}{\partial \lambda} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

3. Conclure.

✓

L'estimateur par maximum de vraisemblance de λ est $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ et une estimation de λ est $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$.