

On s'intéresse à l'équation :

$$x = -\ln(x) \quad (1)$$

d'inconnue  $x \in ]0; +\infty[$ .

1. Montrer que cette équation admet une unique solution  $\ell \in [\frac{1}{10}; 1]$ .



On pose  $h(x) = x + \ln(x)$  :  $h$  est continue et strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ , de plus  $h(1/10) = 0.1 - \ln(10) < 0$  et  $h(1) = 1 > 0$  donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique  $\ell \in [\frac{1}{10}; 1]$  tel que  $h(\ell) = 0$ .

2. On considère la méthode numérique définie ci après (où `log` permet de calculer le logarithme népérien) : `x0 = 0.5 maxiter = 1000 for i in range(maxiter) : x = - log(x) print(x)` Expliquer pourquoi cette méthode n'est pas convergente.



Cette méthode est définie par la suite définie par récurrence :  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,

$$x_{k+1} = \varphi_1(x_k)$$

où  $\varphi_1 : x \mapsto -\ln(x)$  et  $x_0 = 0.5$ . Si cette méthode converge, alors elle converge vers l'unique point fixe  $\ell$  de  $\varphi_1$ . Or  $\ell \in [\frac{1}{10}; 1]$  donc  $-\frac{1}{\ell} \in [-10; -1]$ . Il est même clair que  $\ell \neq 1$  donc

$$\phi'_1(\ell) = -\frac{1}{\ell} \in [-10; -1]$$

ce qui implique en particulier que  $|\varphi_1(\ell)| > 1$ . On en conclut que  $\ell$  est un point fixe répulsif de  $\varphi_1$ , par conséquent la méthode ne converge pas localement, elle ne converge donc pas.

3. Soit la fonction  $\varphi : x \mapsto e^{-x}$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Vérifier que  $\ell$  est un point fixe de la fonction  $\varphi$  puis que  $\varphi([\frac{1}{10}; 1]) \subset [\frac{1}{10}; 1]$ .



Il est clair que  $\varphi(\ell) = e^{-\ell} = \ell$ . De plus, La fonction  $\varphi$  est continue et strictement décroissante sur  $]0; +\infty[$ , de plus  $\varphi(1/10) = e^{-1/10} < 1$  et  $\varphi(1) = e^{-1} > 1/10$  donc par théorème des valeurs intermédiaires,  $\varphi([\frac{1}{10}; 1]) \subset [\frac{1}{10}; 1]$ .

4. On considère une autre méthode numérique définie ci dessous : `x0 = 0.5 maxiter = 1000 for i in range(maxiter) : x = exp(- x) print(x)` Démontrer que cette méthode converge vers la solution  $\ell$  de l'équation et donner l'ordre de convergence.



On a  $|\varphi'| = \varphi$  donc d'après ce qui précède, pour tout  $x \in [\frac{1}{10}; 1]$ ,  $|\varphi'(x)| \leq |\varphi'(1)| < 1$  donc d'après le théorème de convergence globale du point fixe, la méthode converge au moins d'ordre 1 avec  $x_0 = 0.5 \in [\frac{1}{10}; 1]$ .

La convergence n'est pas d'ordre 2 car  $\varphi'(\ell) \neq 0$ .

5. On souhaite approcher la solution  $\ell$  par la suite  $(x_k)$  avec une précision donnée  $\varepsilon > 0$ , et donc arrêter les itérations lorsque cette précision est atteinte. En se basant sur l'inégalité des accroissements finis, majorer le nombre d'itérations à réaliser.
6. Soit la fonction  $h : x \mapsto x - e^{-x}$ . En complétant le programme ci-dessous, expliciter une méthode de Newton permettant de calculer  $\ell$ . `x0 = 0.5 maxiter = 1000 for i in range(maxiter) : x = ... print(x)`



Pour appliquer la méthode de Newton à l'équation, on pose  $h(x) = x - e^{-x}$  et ainsi  $\ell$  est l'unique solution à l'équation  $h(x) = 0$ . Comme  $h'(x) = 1 + e^{-x} \neq 0$  sur  $]0, +\infty[$ , la méthode de Newton pour l'équation  $h(x) = 0$  s'écrit

$$\begin{cases} x_0 \in [\frac{1}{10}, 1] \text{ donné} \\ x_{n+1} = x_n - \frac{h(x_n)}{h'(x_n)}, \quad \forall n \geq 0, \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} x_0 \in [\frac{1}{10}, 1] \text{ donné,} \\ x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - e^{-x_n}}{1 + e^{-x_n}}, \quad \forall n \geq 0. \end{cases}$$

Il faut donc écrire dans le programme `x = x - (x - exp(-x)) / (1 + exp(-x))`