Ex - Loi d'une combinaison de variables R3ps

Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On définit la variable aléatoire $U = \frac{X}{X+Y}$.

1. Sans calcul, déterminer les probabilités $\mathrm{P}(U \geqslant 0)$ et $\mathrm{P}(U \geqslant 1)$.

✓ Les variables X et Y suivent une loi exponentielle donc sont positives presque sûrement. La variable U est donc positive presque sûrement et $\mathrm{P}(U \geqslant 0) = 1$. De plus, puisque $X \geqslant 0$ et $Y \geqslant 0$ presque sûrement, on peut déduire que $X \leqslant X + Y$ donc $U \geqslant 1$ presque sûrement, d'où $\mathrm{P}(U \geqslant 1) = 0$.

2. Déterminer, en justifiant, une fonction densité du couple de variables aléatoires (X, Y).

✓ Par indépendance des variables X et Y, une densité du couple (X, Y) est le produit des densités des variables X et Y : on pose

$$f(x, y) = \lambda^2 e^{-\lambda x - \lambda y} 1_{\mathbb{R}_+^2}(x, y)$$

3. Soit $t \in]0; 1[$. Montrer que

$$\mathrm{P}(U \leqslant t) = \int_0^{+\infty} \left(\int_{\frac{1-t}{t}x}^{+\infty} \lambda^2 e^{-\lambda x - \lambda y} dy \right) dx$$

✓ Soit $t \in]0; 1[$. On constate que $U \leqslant t \iff X \leqslant t(X + Y) \iff X\frac{1-t}{t} \leqslant Y$. On intègre $f(x, y)$ sur le domaine $D_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \geqslant \frac{1-t}{t}x\}$ en appliquant le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(U \leqslant t) &= \iint_{D_t} f(x, y) dx dy \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\int_{\frac{1-t}{t}x}^{+\infty} \lambda^2 e^{-\lambda x - \lambda y} dy \right) dx
\end{aligned}$$

4. Déduire des questions précédentes la fonction de répartition de la variable aléatoire U.

✓ Soit $t \in]0; 1[$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(U \leqslant t) &= \int_0^{+\infty} \left(\int_{\frac{1-t}{t}x}^{+\infty} \lambda^2 e^{-\lambda x - \lambda y} dy \right) dx \\
&= \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} \times e^{-\lambda \frac{1-t}{t} x} dx \\
&= \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda \frac{x}{t}} dx \\
&= \int_0^{+\infty} t \frac{\lambda}{t} e^{-\lambda \frac{x}{t}} dx \\
&= t
\end{aligned}$$

Si $t \geqslant 1$ alors d'après la question 1, $\mathrm{P}(U \geqslant t) = 1$ et si $t \leqslant 0$ alors $\mathrm{P}(U \geqslant t) = 0$.

5. En déduire la loi de la variable aléatoire U.

✓ On reconnaît la fonction de répartition d'une loi uniforme sur $[0; 1]$. On peut aussi dériver la fonction de répartition presque partout pour reconnaître sa densité.