

Soit  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$(x, y) \mapsto \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$$

1. Donner l'ensemble de définition de  $f$ .



La fonction  $f$  est définie pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tels que  $x^2 y^2 + (x - y)^2 \neq 0$ . Or  $x^2 y^2 + (x - y)^2 = 0 \iff xy = 0$  et  $x = y \iff x = y = 0$  donc  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

2. Pour  $x$  fixé, calculer  $g(x) = \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ .



Soit  $x \in \mathbb{R}$  : si  $x = 0$ ,  $f(0, y) = 0$  et si  $x \neq 0$ ,  $f(x, y) \xrightarrow{y \rightarrow 0} \frac{0}{x^2} = 0$

3. Pour  $y$  fixé, calculer  $h(y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$ .



De même,  $h(y) = 0$ .

4. Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ .



On en déduit que  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$

5. Calculer  $\lim_{y \rightarrow 0} h(y)$ .



De même  $\lim_{y \rightarrow 0} h(y) = 0$

6. La fonction  $f$  admet-elle une limite quand  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  ?



Non car  $f(x, x) = 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$  et  $f(x, 0) = 0 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \neq 1$  : on a deux chemins qui donnent deux limites différentes.