

On s'intéresse au calcul de $\ell \in [0; \pi]$ tel que $\ell = \ell - \frac{1}{4} \cos(\ell)$.

On considère la méthode de point fixe suivante : $x_0 \in [0; \pi]$ et $x_{k+1} = \phi(x_k)$ pour tout $k \geq 0$, où ϕ est la fonction définie sur l'intervalle $[0; \pi]$ par $\phi(x) = 1 - \frac{1}{4} \cos(x)$.

1. Montrer que la méthode converge pour tout $x_0 \in [0; \pi]$.

La dérivée de la fonction g vérifie $\forall x \in [0; \pi]$, $|\phi'(x)| \leq \frac{1}{4} < 1$. De plus, $\phi([0; \pi]) = [\frac{3}{4}; \frac{5}{4}] \subset [0; \pi]$. Par conséquent, la méthode de point fixe converge vers le point fixe ℓ pour tout $x_0 \in [0; \pi]$.

2. (a) Montrer qu'il existe une constante $C \in]0; 1[$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|x_k - \ell| \leq C^k |x_0 - \ell|$ et donner une valeur de C .
(b) En déduire le nombre d'itérations nécessaires pour approcher ℓ à 10^{-3} près.

Par le théorème des accroissements finis, on a l'existence de ζ_k compris entre ℓ et x_k tel que

$$|x_k - \ell| = |\phi(x_{k-1}) - g(\ell)| = |\phi'(\zeta_k)| |x_{k-1} - \ell| \leq \frac{1}{4} |x_{k-1} - \ell|.$$

Par récurrence, on montre ainsi

$$|x_k - \ell| \leq \frac{1}{4^k} |x_0 - \ell|.$$

On a donc $|x_k - \ell| \leq \frac{\pi}{4^k}$. Pour approcher ℓ à 10^{-3} près, il faut

$$\frac{\pi}{4^k} \leq 10^{-3} \quad \Leftrightarrow \quad k \geq \frac{\ln(\pi 10^3)}{\ln(2)} \simeq 5.9,$$

soit 6 itérations.

3. (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|x_k - \ell| \leq \frac{4}{3} |x_{k+1} - x_k|$.
(b) En déduire la valeur ε du contrôle de l'incrément (en tant que critère d'arrêt) pour approcher ℓ à 10^{-3} près.

On a

$$\begin{aligned} |x_k - \ell| - |x_{k+1} - x_k| &\leq |x_k - \ell + x_{k+1} - x_k| = |x_{k+1} - \ell| \\ &\leq C |x_k - \ell| \end{aligned}$$

d'où $|x_k - \ell| - C |x_k - \ell| \leq |x_{k+1} - x_k|$ qui implique

$$|x_k - \ell| \leq \frac{1}{1-C} |x_{k+1} - x_k| \leq \frac{\varepsilon}{1-C}.$$

Il faut choisir ε tel que $\frac{\varepsilon}{1-C} < 10^{-3}$ pour approcher ℓ à 10^{-3} près.