Ex

On donne ou on rappelle la définition de quelques lois usuelles :
Définition : Soit $p \in]0;1[$: une variable X suit une loi de Rademacher $\mathcal{R}(p)$ si :
- $\mathrm{P}(X=1)=p$
- $\mathrm{P}(X=-1)=1-p$

Définition : Soit $\lambda > 0$: une variable X suit une loi de Laplace $\mathcal{L}(\lambda)$ si elle admet pour densité :

$$f_X(x) = \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}$$

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que X suit une loi Rademacher $\mathcal{R}(1/2)$ et Y suit une loi uniforme sur $[0;1]$. Soit $\lambda > 0$. On pose $U = \frac{1}{\lambda}X\ln(Y)$.

✓

Soit $\lambda > 0$ et $U = \frac{1}{\lambda}X\ln(Y)$

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer $\mathrm{P}(\ln(Y) \leqslant a, X=1)$ et $\mathrm{P}(\ln(Y) \geqslant a, X=-1)$

✓

Soit $a \in \mathbb{R}$. Par indépendance de X et Y, on a $\mathrm{P}(\ln(Y) \leqslant a, X=1) = \mathrm{P}(\ln(Y) \leqslant a) \times \mathrm{P}(X = 1) = \mathrm{P}(Y \leqslant e^a) \times \frac{1}{2}$. Or $\mathrm{P}(Y \leqslant t) = 1$ si $t > 1$ et $\mathrm{P}(Y \leqslant t) = t$ si $0 < t < 1$ étant donnée la loi suivie par Y. Par conséquent, on a $\mathrm{P}(\ln(Y) \leqslant a, X=1) = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ si } a > 0 \\ \frac{1}{2}e^a \text{ sinon} \end{cases}$.

De même, $\mathrm{P}(\ln(Y) \geqslant a, X=-1) = \begin{cases} 0 \text{ si } a > 0 \\ \frac{1}{2}(1-e^a) \text{ sinon} \end{cases}$

2. Déterminer la fonction de répartition de la variable U.

✓

Soit F_U la fonction de répartition de la variable U. Par définition, pour tout réel t,

$$F_U(t) = \mathrm{P}(\frac{1}{\lambda}X\ \ln(Y) \leqslant t) = \mathrm{P}(X\ \ln(Y) \leqslant \lambda t)$$

Par application du théorème des probabilités totales au système d'événements $\{(X=1),(X=-1)\}$,

$$F_U(t) = \mathrm{P}(X=1, Y \leqslant e^{\lambda t}) + \mathrm{P}(X=-1, Y \geqslant e^{-\lambda t})$$

D'après le calcul précédent, on obtient

$$F_U(t) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}e^{-\lambda t} \text{ si } t > 0 \\ \frac{1}{2}e^{\lambda t} \text{ sinon} \end{cases}$$

3. En déduire que U suit une loi de Laplace $\mathcal{L}(\lambda)$.

✓

On dérive la fonction de répartition pour obtenir la densité : $F'_U(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda t} \text{ si } t > 0 \\ \frac{1}{2}\lambda e^{\lambda t} \text{ sinon} \end{cases} = \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|t|}$. On reconnaît la fonction densité d'une loi de Laplace de paramètre λ.

4. A partir de la fonction `rand()` qui permet de simuler une loi uniforme sur $[0;1]$ et en utilisant les résultats des questions précédentes, écrire un programme qui permet de simuler une loi de Laplace