

▷ Exercice - Deux calculs d'intégrale

Proposer au moins deux méthodes de Monte Carlo permettant de fournir une valeur approchée de l'intégrale :

$$I = \int_0^1 \cos(x^3) e^{-x} dx$$

On voit que $I = \int \cos(x^3) e^{-x} \chi_{[0;1]}(x) dx = \mathbb{E}(\cos(U^3) e^{-U})$ où U suit une loi $\mathcal{U}([0; 1])$. Donc si U_1, U_2, \dots est une suite de VA iid selon la loi $\mathcal{U}([0; 1])$, alors la loi des grands nombres donne la convergence presque sûre :

$$\frac{\cos(U_1^3) e^{-U_1} + \dots + \cos(U_n^3) e^{-U_n}}{n} \longrightarrow I$$

Il suffit donc de programmer l'algorithme suivant :

- N=1000
- S = 0
- Pour i variant de 1 à N :
 - U = réalisation d'une loi $\mathcal{U}([0; 1])$
 - $S = S + \cos(U^3) \times \exp(-U)$
- Afficher S/N

On voit aussi que $I = \int \cos(x^3) \chi_{[0;1]}(x) \chi_{[0;+\infty[}(x) e^{-x} dx = \mathbb{E}(\cos(V^3) \chi_{[0;1]}(V))$ où V suit une loi $\mathcal{E}(1)$.