

**Exercice** - *Fonction de répartition, démonstration de cours*

Soit  $F_X$  une fonction de répartition admettant un point de discontinuité en  $x_0 \in \mathbb{R}$ .  
Démontrer que le saut  $p_0 = F_X(x_0) - F_X(x_0^-)$  est égal à  $P(X = x_0)$ .

La limite à gauche se traduit par  $F_X(x_0^-) = \lim_{h_n \rightarrow 0, h_n > 0} F_X(x_0 - h_n) = \lim_{h_n \rightarrow 0, h_n > 0} P(X \leq x_0 - h_n)$

donc  $p_0 = \lim_{h_n \rightarrow 0, h_n > 0} P(X \in ]x_0 - h_n; x_0])$ .

Or la suite d'événements  $(B_n)$  définie par  $B_n = \{X \in ]x_0 - h_n; x_0]\}$  est décroissante donc d'après le théorème de continuité décroissante,  $P(B_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P(\bigcap B_n) = P(\{x_0\})$ .