4v91 $\trianglerighteq$ **Exercice** - *Convergence d'une suite de variables aléatoires*

Soit la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geqslant 1}$ définie par

$$\begin{cases} P\left(X_n = 0\right) = 1 - \frac{1}{n} \\ P\left(X_n = n\right) = \frac{1}{n} \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers $X = 0$.

   On peut utiliser la fonction caractéristique :

   $$\varphi_{X_n}(t) = \mathrm{E}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{it}X_\mathrm{n}}\right] = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n}e^{itn}$$

   donc

   $$\lim_{n\to+\infty} \varphi_{X_n}(t) = 1 = \mathrm{E}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{it}0}\right]$$

   et par théorème du cours, on a $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{en loi}} 0$

2. En revenant à la définition, montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers $X = 0$.

   Remarque :

   $$\forall m \neq n \text{ et } m \neq 0, \quad P\left(X_n = m\right) = 0$$

   Soit $\varepsilon > 0$

   $$P\left(|X_n| > \varepsilon\right) = P\left(X_n = n\right) = \frac{1}{n}$$

   donc

   $$\lim_{n\to+\infty} P\left(|X_n| > \varepsilon\right) = 0$$