tPCs ⊵ **Exercice** - *Etude d'une méthode itérative*

Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ une matrice réelle symétrique définie positive et $b \in \mathbb{R}^N$. On note $\rho(A)$ le rayon spectral de la matrice A. Pour résoudre le système

$$Ax = b$$

on considère la suite définie par $x_0 \in \mathbb{R}^N$ et $\sigma \in \mathbb{R}$:

$$x_{n+1} = x_n - \sigma(Ax_n - b)$$

1. Montrer que la méthode converge vers la solution x du système si et seulement si :

$$0 < \sigma < \frac{2}{\rho(A)}$$

> On vérifie dans un premier temps que si la méthode converge vers un vecteur $y \in \mathbb{R}^n$, alors y vérifie $y = y - \sigma(Ay - b) \iff Ay = b$ à condition que $\sigma \neq 0$.
>
> Pour que la méthode converge, le cours dit qu'il est nécessaire et suffisant que la matrice d'itération B vérifie $\rho(B) < 1$. Ici, $B = I - \sigma A$, le spectre de B est $sp(B) = \{1 - \sigma\lambda \mid \lambda \in sp(A)\}$.

2. Comment choisir σ pour que optimiser la vitesse de convergence de cette méthode ? Exprimer le résultat en fonction de $\rho(A)$ et $\rho(A^{-1})$.

> On cherche σ tel que $\rho(B)$ soit minimal. Or $\rho(B) = \max_i |1 - \sigma\lambda_i|$. On sait que les valeurs propres de A sont strictement positives, on peut les ranger dans l'ordre croissant $0 < \lambda_1 \leqslant ... \leqslant \lambda_n$, ce qui permet d'affirmer que $\rho(B) = \max\{1 - \sigma\lambda_1; \sigma\lambda_n - 1\}$. Étant donné que cette fonction est décroissante jusqu'au point σ tel que $1 - \sigma\lambda_1 = \sigma\lambda_n - 1$, puis croissante au delà, la solution est $\sigma = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n}$. Or $\lambda_1 = \frac{1}{\rho(A^{-1})}$ et $\lambda_n = \rho(A)$ d'où
>
> $$\sigma = \frac{2}{\frac{1}{\rho(A^{-1})} + \rho(A)}$$