Ex **Jeu de boules**

On tire 4 boules avec remise dans une urne contenant des boules numérotées de 1 à 5. On dit que $i \in 1, 2, 3, 4, 5$ est une valeur gagnante si la boule numéro i est tirée au moins une fois.

1. Pour $i = 1, ..., 5$, soit X_i la variable aléatoire qui est égale à 1 si le numéro i est une valeur gagnante, et 0 sinon. Trouver $\mathrm{P}(X_i = 0)$. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X_i pour $i = 1, ..., 5$.

✓

On a $\quad X_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ valeur gagnante} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad$ donc

$$\mathrm{P}(X_i = 0) = \mathrm{P}(\text{"La boule numérotée } i \text{ n'a jamais été tirée"}) = \left(\frac{4}{5}\right)^4.$$

Comme X_i ne peut prendre que deux valeurs : 0 ou 1, on en déduit :

$$\mathrm{P}(X_i = 1) = 1 - \mathrm{P}(X_i = 0) = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^4 = \frac{369}{625},$$

ce qui revient à dire que $X_i \sim \mathcal{B}\left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^4\right)$. Ainsi, on a

$$\mathbb{E}(X_i) = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^4 = \frac{369}{625},$$
$$\mathbb{V}(X_i) = \left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^4\right) \times \left(\frac{4}{5}\right)^4 = \frac{94\ 464}{390\ 625}.$$

2. Calculer $\mathrm{P}((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0))$. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

✓

$$\mathrm{P}((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0)) = \mathrm{P}(\text{"Les boules numérotées 1 et 2 n'ont jamais été tirées"}) = \left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{81}{625}$$

or $\mathrm{P}(X_1 = 0)\mathrm{P}(X_2 = 0) = \left(\frac{4}{5}\right)^4 \times \left(\frac{4}{5}\right)^4$ donc $\mathrm{P}((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0)) \neq \mathrm{P}(X_1 = 0)\mathrm{P}(X_2 = 0)$. On en conclut que les variables X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

3. Déterminer la loi jointe de (X_1, X_2).

✓

$X \backslash Y$	0	1	P_{X_2} (loi de X_2)
0	$\frac{81}{625}$	$\frac{175}{625}$	$\frac{256}{625}$
1	$\frac{175}{625}$	$\frac{194}{625}$	$\frac{369}{625}$
P_{X_1} (loi de X_1)	$\frac{256}{625}$	$\frac{369}{625}$	1

4. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de valeurs gagnantes. Exprimer X en fonction de X_1,...,X_5. Déterminer l'espérance de X.

✓

On a $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$. Comme les variables aléatoires X_i sont de même loi, on obtient

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{5} \mathbb{E}(X_i) = 5\mathbb{E}(X_1) = 5 \times \frac{369}{625} = \frac{369}{125} \simeq 2.95.$$

En moyenne, on aura quasiment 3 valeurs gagnantes par jeu.