## Ex - Analyse de covariance et moments d'une loi normale

eFy7

On considère deux variables aléatoires réelles $X$ et $U$ indépendantes, $X$ suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et $U$ suivant la loi discrète uniforme sur $\{-1,1\}$.
On pose $Y = UX$ et on admet que $Y$ est une variable aléatoire absolument continue.

1. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}(Y \leqslant x) = \mathbb{P}(U=1)\mathbb{P}(X \leqslant x) + \mathbb{P}(U=-1)\mathbb{P}(X > -x)$$

   et en déduire que $Y$ suit la même loi que $X$.

2. Calculer l'espérance de $U$, puis montrer que $\mathbb{E}(XY) = 0$. En déduire que $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.

3. Rappeler la valeur de $\mathbb{E}(X^2)$ et en déduire que :

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

4. En déduire, s'il existe, le moment d'ordre 4 de $X$.