Ex

En examinant la limite du terme général, montrer que les séries suivantes divergent :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(1+(-1)^n\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$;

✓

On pose $u_n = \left(1+(-1)^n\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$: alors $u_{2n} = 1+\cos\left(\frac{1}{n^2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $\lim u_n \neq 0$ donc la série est divergente.

2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{1+n^{-1}}$;

✓

On pose $u_n = \frac{(-1)^n}{1+n^{-1}}$: alors $u_{2n} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $\lim u_n \neq 0$ donc la série est divergente.

3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^n-1\right)$.

✓

Contrairement aux apparences, le terme général ne tend pas vers vers 0. En effet :
$\frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1-\frac{1}{n+1}$ donc $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}$.
Or $\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n+1}$ donc $n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -1$.
Par composition de limites, on en déduit que $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-1} = \frac{1}{e} \neq 0$. Donc la série est divergente.