1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières réelles suivantes :

   (a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{3n^2-1}{2^{2n+1}\sqrt{n+1}}x^n$

   ✓

   On pose $u_n(x) = \frac{3n^2-1}{2^{2n+1}\sqrt{n+1}}x^n$ et on utilise le théorème de d'Alembert :

$$\begin{aligned}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} &= \frac{(3(n+1)^2-1)\times 2^{2n+1}\sqrt{n+1}}{\left(2^{2(n+1)+1}\sqrt{n+1+1}\right)(3n^2-1)}\frac{|x^{n+1}|}{|x^n|}\\ &= \frac{1}{2^2}\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\frac{3n^2+6n+3-1}{3n^2-1}|x|\\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{4}|x|\end{aligned}$$

   Or $\frac{1}{4}|x|<1 \iff |x|<4$ donc le rayon de convergence est $R=4$.

   (b) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} 9^n\left(\frac{n-1}{n}\right)^n x^{2n}$

   ✓

   On pose $u_n(x) = 9^n\left(\frac{n-1}{n}\right)^n x^{2n}$ et on utilise le théorème de Cauchy :

$$\begin{aligned}(|u_n(x)|)^{\frac{1}{n}} &= \left(9^n\left(\frac{n-1}{n}\right)^n |x|^{2n}\right)^{\frac{1}{n}}\\ &= 9\left(\frac{n-1}{n}\right)|x|^2\\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} 9|x|^2\end{aligned}$$

   Or $9|x|^2<1 \iff |x|^2<\frac{1}{9} \iff |x|<\frac{1}{3}$ donc le rayon de convergence est $R=\frac{1}{3}$.

2. Que peut-on dire de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{3n^2-1}{2^{2n+1}\sqrt{n+1}}\left(-\frac{9}{8}\right)^n$? Justifier votre réponse.

   ✓

   On reconnaît la série entière de la question 1.(a) évaluée en $x=-\frac{9}{8}$. Or $-\frac{9}{8}\in]-4;4[$ donc la série est absolument convergente.

3. Que peut-on dire de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} 9^n\left(\frac{n-1}{n}\right)^n\left(\frac{2}{3}\right)^{2n}$? Justifier votre réponse.

   ✓

   On reconnaît la série entière de la question 1.(b) évaluée en $x=\frac{2}{3}$. Or $\frac{2}{3}\notin]-\frac{1}{3};\frac{1}{3}[$ donc la série est grossièrement divergente.