

Exercice - Densité, loi, indépendance dans un couple

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires admettant une densité f définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = \frac{3}{8}(x^2 + y^2)\mathbf{1}_{[-1;1]^2}(x, y)$$

1. Déterminer les lois marginales du couple (X, Y) . Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

La densité de X se calcule de la manière suivante : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \\ &= \frac{3}{8}\mathbf{1}_{[-1;1]}(x) \int_{-1}^1 (x^2 + y^2) dy \\ &= \frac{3}{8}\mathbf{1}_{[-1;1]}(x) \left[x^2 y + \frac{1}{3}y^3 \right]_{y=-1}^{y=1} \\ &= \frac{1}{4}(3x^2 + 1)\mathbf{1}_{[-1;1]}(x). \end{aligned}$$

On a ainsi déterminé la loi de X .

Pour Y , on obtient la même loi car les rôles de x et de y sont symétriques.

Enfin, les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes car il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$.

2. Calculer $\mathbb{E}(XY)$ et $\mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(Y)$.

On applique le théorème de transfert au couple (X, Y) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(XY) &= \int_{\mathbb{R}^2} xy \times \frac{3}{8}(x^2 + y^2)\mathbf{1}_{[-1;1]^2}(x, y) dx dy \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{3}{8}(x^3 y + x y^3) dx dy \\ &= \int_{-1}^1 \left[\frac{3}{32}x^4 y + \frac{3}{16}x^2 y^3 \right]_{x=-1}^{x=1} dy \\ &= 0. \end{aligned}$$

Pour l'espérance de la variable aléatoire X , on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{4}(3x^3 + x) dx \\ &= \left[\frac{3}{16}x^4 + \frac{1}{8}x^2 y^2 \right]_{-1}^1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

De la même manière, on obtient $\mathbb{E}(Y) = 0$.

Ainsi, $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ bien que X et Y ne soient pas indépendantes.