g9JP ▷ **Exercice** - *Etude d'un schéma à un pas*

Soit l'équation différentielle sur $[0, T]$:

$$(E) \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(0) = a, \end{cases}$$

où

$$f(t, y) = \cos(t^2 + y), \quad a = 0, \quad T = 1.$$

Pour approcher la solution de (E), on propose le schéma numérique suivant : $h = T/N$, $t_n = nh$, $y_0 = a$ et

$$(S) \colon y_{n+1} = y_n + \frac{h}{3}\left(f(t_n, y_n) + 2f\left(t_n + \frac{3h}{4}, y_n + \frac{3h}{4}f(t_n, y_n)\right)\right)$$

1. Montrer que f est globablement lipschitzienne par rapport à la variable y.

> On a $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(t, y)\right| = |\cos(t^2 + y)| \leqslant 1$ pour tout $(t, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}$ donc par théorème des accroisements finis, f est 1-lipschitzienne par rapport y.

2. En déduire que le schéma numérique proposé est zéro-stable.

> On pose $F(t, y, h) = \frac{1}{3}\left(f(t, y) + 2f\left(t + \frac{3h}{4}, y + \frac{3h}{4}f(t, y)\right)\right)$. On a
>
> $$\begin{aligned} |F(t, y, h) - F(t, u, h)| &\leqslant \frac{1}{3}|\left(f(t, y, h) - f(t, u, h)\right)| \\ &\quad + \frac{2}{3}\left|f\left(t + \frac{3h}{4}, y + \frac{3h}{4}f(t, y)\right) - f\left(t + \frac{3h}{4}, u + \frac{3h}{4}f(t, u)\right)\right| \\ &\leqslant \frac{1}{3}|y - u| + \frac{2}{3}\left|y + \frac{3h}{4}f(t, y) - u + \frac{3h}{4}f(t, u)\right| \\ &\leqslant \frac{1}{3}|y - u| + \frac{2}{3}|y - u| + \frac{6h}{12}|y - u| \end{aligned}$$
>
> Puisque h est borné (par exemple par 1), on en déduit que la fonction F définissant le schéma numérique est globalement lipschizienne par rapport à la deuxième variable.
>
> Par propriété du cours, le schéma numérique est donc zéro-stable.

3. Montrer que le schéma numérique est consistant d'ordre au moins 2.

> On vérifie qu'il est consistant d'ordre 1 en appliquant le résultat du cours : on écrit le schéma sous la forme standard $y_{n+1} = y_n + hF(t_n, y_n, h)$ et on vérifie que $F(t, y, 0) = f(t, y)$.
>
> Pour voir qu'il est au moins d'ordre 2, on applique le critère de consistance en calculant $\frac{1}{2}f^{[1]}(t, y)$.

4. Le schéma est-il convergent ?

> Le schéma est consistant et stable, donc convergent.