cpBJ ▷ **Exercice** - *Complexes et matrices*

L'ensemble des nombres complexes est défini par $\mathbb{C} = \{a + ib/a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$ avec $i^2 = -1$. L'addition est définie par : $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$ et la multiplication est donnée par : $(a + ib) \times (c + id) = (a.c - b.d) + i(ad + bc)$. A chaque nombre complexe $a + ib$, on associe la matrice $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

1. On note par J la matrice associée au nombre i. Montrer que $J^2 = -I_2$, où I est la matrice identité.

$$J = M(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2 = -M(1,0) = M(-1,0)$$

2. Si les matrices $M(a, b)$ et $M'(a', b')$ sont associées respectivement aux nombres $z = (a + ib)$ et $z' = (a' + ib')$, montrer que $M(a, b) \cdot M'(a', b')$ correspond au produit des nombres complexes : $z.z'$.

$$M(a,b) \cdot M'(a',b') = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot a' - b \cdot b' & ab' + ba' \\ -ab' - ba' & a \cdot a' - b \cdot b' \end{pmatrix}$$

$z.z' = (a + ib) \times (a' + ib') = (a \cdot a' - b \cdot b') + i(ab' + ba')$ a pour matrice associée :

$$M(a \cdot a' - b \cdot b', ab' + ba') = \begin{pmatrix} a \cdot a' - b \cdot b' & ab' + ba' \\ -ab' - ba' & a \cdot a' - b \cdot b' \end{pmatrix} = M(a,b) \cdot M'(a',b')$$

3. Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ non nulle, évaluer la matrice inverse A^{-1}. Identifier le nombre complexe correspondant.

$$M(a,b) \cdot M'(a',b') = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot a' - b \cdot b' & ab' + ba' \\ -ab' - ba' & a \cdot a' - b \cdot b' \end{pmatrix} = I_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot a' - b \cdot b' = 1 \\ ab' + ba' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot a' - b \cdot b' = 1 \\ ba' + ab' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} a\ell_1 + b\ell_2 \\ b\ell_1 - a\ell_2 \end{matrix} \begin{cases} (a^2 + b^2)a' = a \\ (-a^2 - b^2)b' = b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a' = \frac{a}{a^2+b^2} \\ b' = -\frac{b}{a^2+b^2} \end{cases}$$

L'inverse de $M(a,b) = A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, associé au nombre complexe $z = a + i.b$ est définie à condition que $a^2 + b^2 \neq 0$ autrement dit si $A \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Cette inverse est :

$$A^{-1} = M'(a',b') = \begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & -\frac{b}{a^2+b^2} \\ \frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix} = M\left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right)$$

C'est la matrice associée à $z^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2}(a - ib)$.