Ex

Calcul d'erreur

On suppose qu'un ordinateur effectue 10^6 opérations élémentaires pour un calcul donné. On suppose également que les erreurs d'arrondi à chaque opération sont indépendantes et suivent chacune une loi uniforme sur l'intervalle $\left[-5 \cdot 10^{-10}; 5 \cdot 10^{-10}\right]$. Enfin, on suppose que l'erreur finale est la somme des erreurs commises à chaque opération.
Évaluer la probabilité que l'erreur finale soit en valeur absolue inférieure à $\frac{1}{2}10^{-6}$.

✓

Soit X_i la variable aléatoire représentant l'erreur d'arrondi sur la i-ème opération. D'après l'énoncé, les variables X_i sont indépendantes et de même loi $\mathcal{U}([-5.10^{-10}; 5.10^{-10}])$, donc en particulier

$$\mathbb{E}(X_i) = 0 \quad \text{et} \quad \sigma(S) = \frac{10^{-9}}{\sqrt{12}}.$$

Soit $Y = \sum_{i=1}^{10^6} X_i$ l'erreur finale commise. On cherche à déterminer la probabilité suivante :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|Y| < \frac{1}{2}10^{-6}) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{Y - \mathbb{E}(Y)}{\sigma(Y)\sqrt{10^6}}\right| < \frac{1}{2}\,\frac{10^{-6}}{\frac{10^{-9}}{\sqrt{12}}\sqrt{10^6}}\right) \\
&\simeq \mathbb{P}(|Z| < \sqrt{3}) \quad \text{par le théorème central-limite, avec } Z \sim \mathcal{N}(0,1) \\
&\simeq 2\mathbb{P}(Z < 1.73) - 1 \\
&\simeq 2 \times 0.9582 - 1 \quad \text{par lecture de la table de loi } \mathcal{N}(0,1) \\
&\simeq 0.9164
\end{aligned}$$