Ex

1. Soit $M_a = \begin{pmatrix} 2a+1 & -a & a+1 \\ a-2 & a-1 & a-2 \\ 2a-1 & a-1 & 2a-1 \end{pmatrix}$, calculer $\det(M_a)$ sous forme factorisée en fonction de $a \in \mathbb{R}$.

✓

On a :

$$\begin{aligned}
\Delta_a = \det(M_a) &= \begin{vmatrix} 2a+1 & -a & a+1 \\ a-2 & a-1 & a-2 \\ 2a-1 & a-1 & 2a-1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a & -a & a+1 \\ 0 & a-1 & a-2 \\ 0 & a-1 & 2a-1 \end{vmatrix} \\
&= a \begin{vmatrix} a-1 & a-2 \\ a-1 & 2a-1 \end{vmatrix} \\
&= a \begin{vmatrix} a-1 & a-2 \\ 0 & a+1 \end{vmatrix} \\
&= a(a-1)(a+1)
\end{aligned}$$

2. Déterminer les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ pour lesquelles le système $M_a \cdot X = \begin{pmatrix} a-1 \\ a \\ a \end{pmatrix}$ admet une unique solution puis la déterminer par les formules de CRAMER.

✓

Le système $M_a \cdot X = \begin{pmatrix} a-1 \\ a \\ a \end{pmatrix}$ admet une unique solution ssi $det(M_a) \neq 0 \iff a \in \mathbb{R} \backslash \{-1, 0, 1\}$. Dans ce cas, par les formules de CRAMER :

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} 2a+1 & -a & a+1 \\ a-2 & a-1 & a-2 \\ 2a-1 & a-1 & 2a-1 \end{vmatrix} = a(a-1)(a+1)$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} a-1 & -a & a+1 \\ a & a-1 & a-2 \\ a & a-1 & 2a-1 \end{vmatrix} = \begin{matrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 - \ell_2 \end{matrix} \begin{vmatrix} a-1 & -a & a+1 \\ a & a-1 & a-2 \\ 0 & 0 & a+1 \end{vmatrix} = (a+1)\left[(a-1)^2 + a^2\right]$$

$$= (a+1)\left(2a^2 - 2a + 1\right)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2a+1 & a-1 & a+1 \\ a-2 & a & a-2 \\ 2a-1 & a & 2a-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 - c_2 & c_2 & c_3 \\ a & a-1 & a+1 \\ 0 & a & a-2 \\ 0 & a & 2a-1 \end{vmatrix} = a^2[(2a-1) - (a-2)]$$

$$= a^2(a+1)$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2a+1 & -a & a-1 \\ a-2 & a-1 & a \\ 2a-1 & a-1 & a \end{vmatrix} = \begin{matrix} \ell_1 \\ \ell_3 - \ell_2 \end{matrix} \begin{vmatrix} 2a+1 & -a & a-1 \\ a-2 & a-1 & a \\ a+1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(a+1)\left[(a-1)^2 + a^2\right]$$

$$= -(a+1)\left(2a^2 - 2a + 1\right)$$

$$S_a = \left\{ \left(\frac{2a^2 - 2a + 1}{a(a-1)}, \frac{a}{(a-1)}, -\frac{2a^2 - 2a + 1}{a(a-1)} \right) \right\}$$