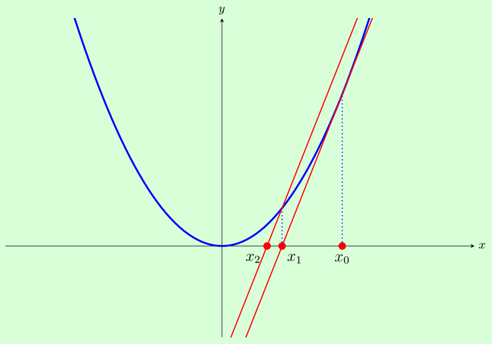
rvC6 ⊳ **Exercice** - *Calcul de racine carrée*

La méthode de la corde pour résoudre une équation du type $f(x) = 0$ consiste à construire la suite (x_k) définie par

$$\forall k \in \mathbb{N} : \quad x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)}$$

1. (a) Sur un graphique, construire les premières itérations de cette méthode en prenant $f(x) = x^2$ et $x_0 = 1$.

Le principe de construction du point x_{k+1} est le suivant : on prend l'intersection de l'axe des abscisses avec la droite passant par le point $(x_k, f(x_k))$ de pente $f'(x_0) = 2x_0 = 2$.



(b) De quelle méthode générale la méthode de la corde est-elle un cas particulier ? Justifier.

La méthode de la corde est un cas particulier de la méthode de point fixe : on a $x_{k+1} = g(x_k)$, où g est la fonction définie par $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x_0)}$.

(c) En déduire l'ordre minimal de convergence de la méthode de la corde, quand celle-ci converge.

Quand une méthode de point fixe converge, elle est au minimum d'ordre 1.

On souhaite trouver une méthode efficace pour trouver une approximation de la racine carrée d'un nombre positif A donné. Considérons tout d'abord l'algorithme suivant : étant donné une valeur x_0, on calcule

$$x_{k+1} = x_k + \frac{A - x_k^2}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

2. (a) Montrer que si la suite (x_n) converge, alors sa limite est soit $\sqrt{A}$, soit $-\sqrt{A}$.

Si la suite converge vers une limite l, alors l vérifie $l = l + \frac{A-l^2}{2}$, c'est-à-dire $l = \sqrt{A}$ ou $l = -\sqrt{A}$.

(b) On considère le cas où $A \in]0; 4[$. Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que, si $|x_0 - \sqrt{A}| \leqslant \epsilon$, alors la suite (x_n) converge vers $\sqrt{A}$.

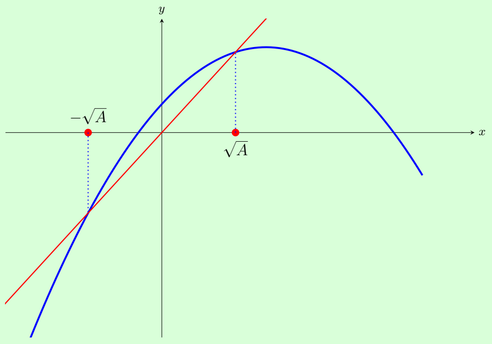
La méthode peut s'écrire sous la forme d'une méthode de point fixe où la fonction g est définie particulier

$$g(x) = x + \frac{A - x^2}{2}.$$

Si $A \in]0; 4[$, comme $g'(x) = 1 - x$, on a $|g'(\sqrt{A})| = |1 - \sqrt{A}| < 1$. Ceci implique que $\sqrt{A}$ est un point fixe attractif de g. Par conséquent, il existe un voisinage de $\sqrt{A}$ tel que si x_0 est pris dans ce voisinage, la suite (x_n) converge vers $\sqrt{A}$.

(c) Vérifier graphiquement que si x_0 est proche de $-\sqrt{A}$ mais différent de $-\sqrt{A}$, alors la suite (x_n) ne converge pas vers $-\sqrt{A}$.

En prenant $A = \frac{1}{2}$ par exemple, la fonction g correspondante est $g(x) = \frac{-1}{2}x^2 + \frac{1}{4} + x$ et on vérifie que :
— pour $x_0 < -\sqrt{A}$, la suite (x_n) diverge,
— pour $-\sqrt{A} < x_0 \leqslant \sqrt{A}$, la suite (x_n) converge vers $\sqrt{A}$.



Il est intéressant de noter que pour $x_0 = 2 + \sqrt{A}$, la suite (x_n) converge en une itération vers $-\sqrt{A}$.

(d) Vérifier que si $x_0 = 1$, alors l'algorithme proposé coïncide avec la méthode de la corde pour résoudre $x^2 - A = 0$.

Soit $f(x) = x^2 - A$. Alors $f'(x) = 2x_0 = 2$ pour $x_0 = 1$ et on a bien

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)} = x_k + \frac{A - x_k^2}{2}.$$

(e) Quel est l'ordre de convergence de la méthode de la corde dans ce cas-là ?

On a $g'(x) = 1 - x$ donc $g'(\sqrt{A}) = 1 - \sqrt{A} \neq 0$ si $A \neq 1$. On en conclut que la méthode de la corde a une convergence linéaire pour $A \neq 1$.

(f) Proposer un algorithme plus efficace pour calculer la racine carrée d'un nombre positif A.

En choisissant la méthode de Newton pour résoudre $f(x) = 0$ avec $f(x) = x^2 - A$, on a

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^2 - A}{2x_k}, \quad \text{pour } k = 0, 1, 2, \ldots$$

Cette méthode est plus efficace que la méthode de la corde car la méthode de Newton converge à l'ordre 2 pour tout $x_0 > 0$ (on montre d'abord que $|g'(x)| < 1 \Leftrightarrow x > \sqrt{\frac{A}{3}}$, puis que $]\sqrt{\frac{A}{3}}; +\infty[$ est stable par g, ce qui prouve la convergence globale pour tout $x_0 > \sqrt{\frac{A}{3}}$. Enfin, en considérant le cas $x_0 < \sqrt{\frac{A}{3}}$, on montre que $x_1 \in]\sqrt{\frac{A}{3}}; +\infty[$ et on se retrouve dans le cas précédent à partir de x_1).