

On pose

$$f(x, y) = x(x+1)^2 - y^2$$

- Déterminer les points stationnaires de la fonction  $f$  et préciser la nature de chacun d'eux.



On a  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y$  et  $\frac{\partial f}{\partial x} = (x+1)(3x+1)$

On a  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \iff y = 0$

et  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \iff x \in \{-1; -1/3\}$ .

Donc les points stationnaires de  $f$  sont les points  $(-1, 0)$  et  $(-1/3, 0)$ .

Pour étudier la nature de ces points stationnaires, on utilise les conditions d'ordre 2 en donnant la matrice hessienne :

$$\text{Hess}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x+4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

d'où  $\text{Hess}_f(-1, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$  et  $\text{Hess}_f(-1/3, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ .

On a  $(-2) \times (-2) > 0$  et  $-2 < 0$  donc la fonction  $f$  présente un maximum local en  $(-1, 0)$ .

De même,  $2 \times (-2) < 0$  donc la fonction  $f$  présente un point selle en  $(-1/3, 0)$ .

- Tracer la courbe constituée des points tels que  $f(x, y) = 0$  et  $x \geq 0$  en faisant apparaître des éléments qualitatifs (tangente, inflexion de la courbe).



On cherche l'ensemble des points  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tels que  $f(x, y) = 0 \iff y^2 = x(x+1)^2$ .

Si on se restreint aux  $x \geq 0$ ,  $f(x, y) = 0 \iff y = \sqrt{x}(x+1)$ .

Pour étudier la courbe d'équation  $y = \sqrt{x}(x+1)$  pour  $x \geq 0$  dans le plan, on pose  $g(x) = \sqrt{x}(x+1)$  : c'est une fonction continue sur  $[0; +\infty[$  et dérivable sur  $]0; +\infty[$ .

Pour tout  $x > 0$ , on a :

$$g'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{2}(\sqrt{x})^{-1} > 0$$

et

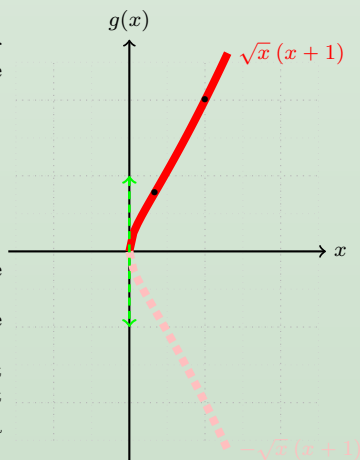
$$g''(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$$

De l'expression de  $g(x)$ , on déduit que la courbe passe par les points  $(0, 0)$ ,  $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\sqrt{3})$ ,  $(1, 2)$ , et  $(2, 3\sqrt{2})$ ;

De l'expression de  $g'(x)$ , on déduit que la courbe a une tangente verticale à l'origine.

De la résolution de  $g''(x) = 0$ , on déduit que le point  $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\sqrt{3})$  est un point d'inflexion, la pente en ce point vaut  $g'(\frac{1}{3}) = \sqrt{3}$ , et c'est la pente minimale de la courbe.

La courbe constituée des points tels que  $f(x, y) = 0$  et  $x \geq 0$  s'obtient par réflexion de la courbe  $y = \sqrt{x}(x+1)$  pour  $x \geq 0$  par rapport à l'axe des  $x$ .



- Montrer que le point  $(-1, 0)$  est un point isolé de la partie  $\mathcal{C} = \{(x, y); f(x, y) = 0\}$

du plan, c'est-à-dire, le point  $(-1, 0)$  appartient à cette partie et il existe un nombre réel  $\varepsilon > 0$  tel que  $D_\varepsilon \cap \mathcal{C} = \{(-1, 0)\}$  où  $D_\varepsilon$  est le disque ouvert centré en  $(-1, 0)$  et de rayon  $\varepsilon$ .



Dans la boule ouverte  $\{(x, y, z); (x+1)^2 + y^2 + z^2 < 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$ , on est notamment dans le demi-espace  $\{x < 0\}$ . Or si  $x < 0$  et  $f(x, y) = 0$  alors nécessairement  $y^2 = x(x+1)^2 \geq 0$  ce qui ne laisse d'autre choix que d'avoir  $(x+1)^2 = 0$ .

Par conséquent, le graphe  $z = f(x, y)$  de la fonction  $f$  ne rencontre le plan des  $x$  et  $y$  qu'au point  $(-1, 0)$ . Par conséquent, l'intersection  $D \cap \mathcal{C}$  du disque

$$D = \{(x, y); (x+1)^2 + y^2 < 1\}$$

avec  $\mathcal{C}$  ne consiste qu'au point  $(-1, 0)$ .