99Xf **Exercice** - *Double jeu et probabilités discrètes*

Un joueur effectue une suite de parties de pile ou face indépendantes, avec probabilité p d'obtenir pile à chaque partie. Soit n un entier. Le joueur peut choisir entre deux jeux :

le Jeu 1 : le joueur effectue $2n-1$ parties. Il est déclaré vainqueur s'il obtient au moins n fois pile ;

le Jeu 2 : le joueur effectue $2n$ parties. S'il obtient au moins $n+1$ fois pile, il est déclaré vainqueur. S'il obtient n fois pile exactement, on tire au sort et il est déclaré vainqueur avec probabilité $\frac{1}{2}$.

On note X le nombre de piles obtenus lorsque le joueur choisit le Jeu 1, et Y le nombre de piles obtenus lorsqu'il choisit le Jeu 2. On note p_1 la probabilité de gagner au Jeu 1 et p_2 la probabilité de gagner au Jeu 2.
L'objectif est de savoir s'il vaut mieux jouer au Jeu 1 ou au Jeu 2.

1. Écrire $Y = X + U$ où U est une variable aléatoire indépendante de X dont la loi reste à préciser.

> Soit U la variable aléatoire de Bernoulli égale à 1 si on a choisi le jeu 2 et que le $2n$-ième lancer donne "pile". Comme les lancers sont indépendants, la variable aléatoire U est indépendante de X et on a bien $Y = X + U$, avec $U \sim \mathcal{B}(p)$.

2. Démontrer que $\mathrm{P}(Y > n) = \mathrm{P}(X > n) + p\mathrm{P}(X = n)$.

> Comme $Y = X + U$, on a
>
> $$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y>n) &= \mathbb{P}(Y>n, X>n) + \mathbb{P}(Y>n, X=n) + \mathbb{P}(Y>n, X<n) \text{ d'après le th. des proba. to}\\ &= \mathbb{P}(X>n) + \mathbb{P}(X=n, U=1) + 0\\ &= \mathbb{P}(X>n) + \mathbb{P}(X=n)\ \mathbb{P}(U=1) \text{ par indépendance de } X \text{ et } U\\ &= \mathbb{P}(X>n) + p\ \mathbb{P}(X=n).\end{aligned}$$

3. Vérifier que $p_1 - p_2 = (1-p)\mathrm{P}(X = n) - \frac{1}{2}\mathrm{P}(Y = n)$

> On a :
>
> $$\begin{aligned}p_1 - p_2 &= \mathbb{P}(X \geqslant n) - \left[\mathbb{P}(Y>n) + \frac{1}{2}\ \mathbb{P}(Y=n)\right]\\ &= \mathbb{P}(X=n) + \mathbb{P}(X>n) - \mathbb{P}(X>n) - p\ \mathbb{P}(X=n) - \frac{1}{2}\ \mathbb{P}(Y=n)\\ &= (1-p)\ \mathbb{P}(X=n) - \frac{1}{2}\ \mathbb{P}(Y=n).\end{aligned}$$

4. Conclure.

> Étudions le signe de $p_1 - p_2$. Comme $X \sim \mathcal{B}(2n-1, p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(2n, p)$, on a
>
> $$\begin{aligned}p_1 - p_2 &= (1-p)\binom{2n-1}{n}p^n(1-p)^{2n-1-n} - \frac{1}{2}\binom{n}{2n}p^n(1-p)^{2n-n}\\ &= \frac{(2n-1)!}{n! \times (n-1)!}p^n(1-p)^n - \frac{1}{2} \times \frac{(2n)!}{n! \times n!}p^n(1-p)^n\\ &= \frac{(2n)!}{(n!)^2}\left(\frac{n}{2n} - \frac{1}{2}\right)p^n(1-p)^n\\ &= 0\end{aligned}$$
>
> On en conclut qu'aucun des deux jeux n'est préférable à l'autre.