

On cherche, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le reste de la division euclidienne du polynôme $P(X) = X^n$ par $X^3 + X^2 + X + 1$.

- Déterminer une racine évidente de $X^3 + X^2 + X + 1$, et factoriser le polynôme. Quelles sont ses racines dans \mathbb{C} ?

Soit $T(X) = X^3 + X^2 + X + 1$ On remarque que $T(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1 = -1 + 1 - 1 + 1 = 0$. Ainsi : -1 est racine de T ou encore $(X + 1)$ divise $T(X)$:

$$\begin{aligned} T(X) &= X^3 + X^2 + X + 1 = X(X^2 + 1) + X^2 + 1 = (X + 1)(X^2 + 1) \\ &= (X + 1)(X + i)(X - i) \end{aligned}$$

Les racines de $T(X)$ dans \mathbb{C} sont : $-1, i$ et $-i$.

- Justifier l'existence d'un polynôme $Q_n(X)$ et de trois réels a_n, b_n et c_n tels que :

$$X^n = (X^3 + X^2 + X + 1) \cdot Q_n(X) + a_n X^2 + b_n X + c_n$$

On ne demande pas de déterminer $Q_n(X)$.

Par la division euclidienne de $P(X)$ par $T(X)$, il existe deux polynômes $Q_n(X)$ et $R_n(X)$ tels que :

$$P(X) = T(X) \cdot Q_n(X) + R_n(X)$$

Avec $d^\circ(R_n) < d^\circ(T) = 3$. Ainsi il existe trois réels a_n, b_n et c_n tels que :

$$R_n(X) = a_n X^2 + b_n X + c_n.$$

- Exprimer $P(-1), P(i)$ et $P(-i)$ en fonction de a_n, b_n et c_n , et en déduire l'expression du reste de la division euclidienne de $P(X)$ par $X^3 + X^2 + X + 1$. On distinguera deux cas : $n = 2p$ (cas n pair) et $n = 2p + 1$ (cas n impair).

$$P(X) = X^n = \underbrace{(X^3 + X^2 + X + 1) \cdot Q_n(X)}_{=T(X)} + a_n X^2 + b_n X + c_n$$

On a : - $P(-1) = (-1)^n = \underbrace{T(-1)}_{=0} \cdot Q_n(-1) + a_n(-1)^2 + b_n(-1) + c_n$, donne :

$$\begin{aligned} n = 2p : \quad & (-1)^{2p} = 1 = a_n - b_n + c_n \\ n = 2p + 1 : \quad & (-1)^{2p+1} = -1 = a_n - b_n + c_n \end{aligned}$$

- $P(i) = (i)^n = T(i) \cdot Q_n(i) + a_n(i)^2 + b_n(i) + c_n$, donne :

$$= 0$$

$$\begin{aligned} n = 2p : \quad & (i)^{2p} = (-1)^p = -a_n + ib_n + c_n \\ n = 2p + 1 : \quad & (i)^{2p+1} = (-1)^p \cdot i = -a_n + ib_n + c_n \end{aligned}$$

- $P(-i) = (-i)^n = T(-i) \cdot Q_n(-i) + a_n(-i)^2 + b_n(-i) + c_n$, donne :

$$\begin{aligned} &= 0 \quad (-i)^{2p} = (-1)^p = -a_n - ib_n + c_n \\ n = 2p : \quad & (-i)^{2p+1} = -(-1)^p i = -a_n - ib_n + c_n \end{aligned}$$

Ainsi : - Pour $n = 2p$:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} a_n - b_n + c_n = 1 \\ -a_n + ib_n + c_n = (-1)^p \\ -a_n - ib_n + c_n = (-1)^p \end{array} \right. \quad \ell_1 & \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \ell_2 + \ell_1 \\ \ell_3 + \ell_1 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} a_n - b_n + c_n = 1 \\ (-1 + i)b_n + 2c_n = 1 + (-1)^p \\ (-1 - i)b_n + 2c_n = 1 + (-1)^p \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 - \ell_2 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} a_n - b_n + c_n = 1 \\ (-1 + i)b_n + 2c_n = 1 + (-1)^p \\ 2ib_n = 0 \end{array} \right. & \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} a_n = \frac{1}{2}(1 - (-1)^p) \\ c_n = \frac{1}{2}(1 + (-1)^p) \\ b_n = 0 \end{array} \right. \\ X^n = (X^3 + X^2 + X + 1) \cdot Q_n(X) + \frac{1}{2}(1 - (-1)^p)X^2 + \frac{1}{2}(1 - (-1)^p) & \end{aligned}$$

- Pour $n = 2p + 1$:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} a_n - b_n + c_n = -1 \\ -a_n + ib_n + c_n = (-1)^p \cdot i \\ -a_n - ib_n + c_n = -(-1)^p i \end{array} \right. \quad \ell_1 & \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \ell_2 + \ell_1 \\ \ell_3 + \ell_1 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} a_n - b_n + c_n = -1 \\ (-1 + i)b_n + 2c_n = -1 + (-1)^p \cdot i \\ (-1 - i)b_n + 2c_n = -1 - (-1)^p i \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \ell_2 \\ \ell_3 - \ell_2 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} a_n - b_n + c_n = -1 \\ (-1 + i)b_n + 2c_n = -1 + (-1)^p \cdot i \\ 2ib_n = 2(-1)^p i \end{array} \right. & \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 - \ell_2 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} a_n = \frac{1}{2}(-1 + (-1)^p) \\ c_n = \frac{1}{2}(-1 + (-1)^p) \\ b_n = (-1)^p \end{array} \right. \\ X^n = (X^3 + X^2 + X + 1) \cdot Q_n(X) + \frac{1}{2}(-1 + (-1)^p)X^2 + (-1)^p X + \frac{1}{2}(-1 + (-1)^p) & \end{aligned}$$