uSXE ▷ **Exercice** - *Durées des contrôles fiscaux*

On s'intéresse à la méthode de contrôle fiscal d'une entreprise qui consiste à vérifier la comptabilité de l'entreprise.
On considère que le temps de contrôle d'une entreprise est une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$.
On réalise 7 contrôles et on obtient les temps suivants (en jours) :

$$57 \quad 61 \quad 42 \quad 53 \quad 45 \quad 65 \quad 58.$$

1. Donner une estimation de m et de σ^2. On précisera les estimateurs utilisés en indiquant leurs propriétés.

On estime la moyenne m à l'aide de la moyenne empirique $\left(\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$, qui est sans biais et convergente :

$$\bar{x} = \frac{57+61+42+53+45+65+58}{7} = \frac{381}{7} \simeq 54.43$$

On estime la variance σ^2 à l'aide de la variance empirique $\left(S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2\right)$, qui est sans biais et convergent :

$$s^2 = \frac{1}{6}\left((57-54.43)^2 + (61-54.43)^2 + \ldots + (58-54.43)^2\right) \simeq 69.95$$

2. Donner un intervalle de confiance de niveau 90% permettant d'estimer m.

Il s'agit d'un intervalle de confiance d'une moyenne dans le cas où la variance est inconnue et la loi mère de l'échantillon est une loi Normale. On a donc :

$$IC(\bar{X}) = \left[\bar{x} - t \times \frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{x} + t \times \frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

avec $\bar{x} = 54.43, s = \sqrt{69.95} \simeq 8.36, n = 7$ et t est le réel tel que $\mathbb{P}(U \leqslant t) = 1 - \frac{0.10}{2} = 0.95$, où $U \sim St(6)$, c'est-à-dire $t = 1.9432$. On obtient alors

$$IC(\bar{X}) = [48.29; 60.57]$$