P088 ⊳ **Exercice** - *Limite et continuité d'une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$*

Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$(x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 - 2x^2 y + 3y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Montrer que la restriction de f à toute droite passant par l'origine est continue en $(0,0)$. Autrement dit, montrer que les trois limites suivantes existent et sont égales à 0 :
   (a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0)$,
   (b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x,ax)$, pour $a \in \mathbb{R}^*$,
   (c) $\lim\limits_{y\to 0} f(0,y)$

On a effectivement $f(x,0) = 0 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, $f(x,ax) = \frac{ax}{x^2-2ax+3a^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et $f(0,y) = 0 \xrightarrow[y\to 0]{} 0$.

2. Calculer la limite en $(0,0)$ de la restriction de f à la courbe d'équation $y = x^2$.

On évalue f sur la courbe d'équation $y = x^2$: quelque soit x, $f(x,x^2) = \frac{x^4}{x^4(1-2+3)} = \frac{1}{2} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}$.

3. La fonction f est-elle continue en $(0,0)$? Justifier.

D'après ce qui précède, f n'est pas continue en $(0,0)$ puisqu'on observe des limites différentes en $(0,0)$ selon le chemin suivi.