vRme ⊳ **Exercice** - *Séries de Bertrand*

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ deux paramètres réels. On s'intéresse à la série $\sum_{n \geqslant 2} u_n$ avec

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha \left(\ln(n)\right)^\beta}$$

qui s'appelle une série de Bertrand. Sa convergence dépend des valeurs prises par α et β.

1. Supposons que $\alpha > 1$ (β est quelconque). On pose $\gamma = \frac{1+\alpha}{2}$.
   (a) Vérifier que $\gamma < \alpha$. Que peut-on dire de la série $\sum \frac{1}{n^\gamma}$?

   > On observe que $\alpha > 1$ d'où $2\alpha = \alpha + \alpha > 1 + \alpha = 2\gamma$ d'où $\alpha > \gamma$. De plus, $\alpha > 1$ d'où $1 + \alpha > 2$ d'où $\frac{1+\alpha}{2} = \gamma > 1$.

   (b) Vérifier que $\lim_{n \to +\infty} n^\gamma u_n = 0$.

   > Si $\beta \geqslant 0$ alors on peut majorer $n^\gamma u_n = \frac{1}{n^{\alpha-\gamma}(\ln(n))^\beta} \leqslant \frac{1}{n^{\alpha-\gamma}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ d'où le résultat.
   > Enfin, si $\beta < 0$ alors par croissances comparées, $\frac{(\ln(n))^{-\beta}}{n^{\alpha-\gamma}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

   (c) Conclure sur la convergence de $\sum_{n \geqslant 1} u_n$.

   > Donc par définition, $u_n = o\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$ or $\sum \frac{1}{n^\gamma}$ est une série convergente donc par comparaison de séries à termes positifs, $\sum u_n$ est également une série convergente.

2. Supposons que $\alpha < 1$: calculer $\lim_{n \to +\infty} n u_n$ et conclure sur la convergence de $\sum_{n \geqslant 1} u_n$.
3. Supposons que $\alpha = 1$ et $\beta \leqslant 0$.
   (a) Montrer qu'il existe un rang N à partir duquel pour tout $n \geqslant N$ alors $\frac{1}{(\ln(n))^\beta} \geqslant 1$.
   (b) Conclure sur la convergence de $\sum_{n \geqslant 1} u_n$.
4. ** Supposons que $\alpha = 1$ et $\beta > 0$. Pour tout $x > 1$, On pose $f(x) = \frac{1}{x \ln(x)^\beta}$ de sorte que $u_n = f(n)$ pour tout $n \geqslant 2$.
   (a) Vérifier que f est positive et décroissante sur $]1 + \infty[$.
   (b) On considère l'intégrale

   $$I = \int_2^{+\infty} f(t) dt$$

   En effectuant le changement de variable $u = \ln(t)$, montrer que I est une intégrale convergente si et seulement si $\beta > 1$.

   (c) Conclure sur la convergence de $\sum_{n \geqslant 1} u_n$.