Ex - Ac8Y

Soit X une variablea aléatoire suivant une loi normale quelconque $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ avec $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$.

1. On pose $Y = e^X$. Calculer l'espérance et la variance de Y.

✓

On a $Y = e^X = e^{\mu+\sigma Z} = e^{\mu} e^{\sigma Z}$. D'après le théorème de transfert,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{\sigma Z}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\sigma z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2-2\sigma z+\sigma^2-\sigma^2}{2}}\, dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(z-\sigma)^2}{2}} e^{\frac{\sigma^2}{2}}\, dz \\
&= e^{\frac{\sigma^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(z-\sigma)^2}{2}}\, dz \\
&= e^{\frac{\sigma^2}{2}}
\end{aligned}$$

Donc par linéarité, $\mathbb{E}(Y) = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$.
De même, on s'intéresse à $\mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{E}(e^{2X}) = \mathbb{E}(e^{2\mu+2\sigma Z}) = e^{2\mu}\mathbb{E}(e^{2\sigma Z})$. D'après le calcul précédent, $\mathbb{E}(e^{2\sigma Z}) = e^{2\sigma^2}$. Donc $\mathbb{E}(Y^2) = e^{2\mu+2\sigma^2}$ et par théorème de Koenig-Huygens,

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(Y) &= \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 \\
&= e^{2\mu+2\sigma^2} - e^{2\mu+\sigma^2} \\
&= e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)
\end{aligned}$$

2. On suppose que $m = 0$ et $\sigma = 1$. Déterminer une fonction densité de la variable Y.

✓

On a $Y = e^X = e^{\sigma Z} = e^Z$. Donc Y est une variable aléatoire positive. Si $t > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Y \leqslant t) &= \mathrm{P}(e^Z \leqslant t) \\
&= \mathrm{P}(Z \leqslant \ln(t)) \\
&= F_Z(\ln(t))
\end{aligned}$$

Donc la fonction de répartition de Y est $F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ F_Z(\ln(t)) & \text{si } t > 0 \end{cases}$. Par dérivation, on obtient la densité de Y :

$$f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln(x))^2}{2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$