

Un joueur effectue une suite de parties de pile ou face indépendantes, avec probabilité p d'obtenir pile à chaque partie. Soit n un entier. Le joueur peut choisir entre deux jeux :

le Jeu 1 : le joueur effectue $2n - 1$ parties. Il est déclaré vainqueur s'il obtient au moins n fois pile ;

le Jeu 2 : le joueur effectue $2n$ parties. S'il obtient au moins $n + 1$ fois pile, il est déclaré vainqueur. S'il obtient n fois pile exactement, on tire au sort et il est déclaré vainqueur avec probabilité $\frac{1}{2}$.

On note X le nombre de piles obtenus lorsque le joueur choisit le Jeu 1, et Y le nombre de piles obtenus lorsqu'il choisit le Jeu 2. On note p_1 la probabilité de gagner au Jeu 1 et p_2 la probabilité de gagner au Jeu 2.

L'objectif est de savoir s'il vaut mieux jouer au Jeu 1 ou au Jeu 2.

1. Écrire $Y = X + U$ où U est une variable aléatoire indépendante de X dont la loi reste à préciser.

Soit U la variable aléatoire de Bernoulli égale à 1 si on a choisi le jeu 2 et que le $2n$ -ième lancer donne "pile". Comme les lancers sont indépendants, la variable aléatoire U est indépendante de X et on a bien $Y = X + U$, avec $U \sim \mathcal{B}(p)$.

2. Démontrer que $P(Y > n) = P(X > n) + pP(X = n)$.

Comme $Y = X + U$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y > n) &= \mathbb{P}(Y > n, X > n) + \mathbb{P}(Y > n, X = n) + \mathbb{P}(Y > n, X < n) \text{ d'après le th. des proba. tot.} \\ &= \mathbb{P}(X > n) + \mathbb{P}(X = n, U = 1) + 0 \\ &= \mathbb{P}(X > n) + \mathbb{P}(X = n) \mathbb{P}(U = 1) \text{ par indépendance de } X \text{ et } U \\ &= \mathbb{P}(X > n) + p \mathbb{P}(X = n). \end{aligned}$$

3. Vérifier que $p_1 - p_2 = (1 - p)P(X = n) - \frac{1}{2}P(Y = n)$

On a :

$$\begin{aligned} p_1 - p_2 &= \mathbb{P}(X \geq n) - \left[\mathbb{P}(Y > n) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(Y = n) \right] \\ &= \mathbb{P}(X = n) + \mathbb{P}(X > n) - \mathbb{P}(X > n) - p \mathbb{P}(X = n) - \frac{1}{2} \mathbb{P}(Y = n) \\ &= (1 - p) \mathbb{P}(X = n) - \frac{1}{2} \mathbb{P}(Y = n). \end{aligned}$$

4. Conclure.

Étudions le signe de $p_1 - p_2$. Comme $X \sim \mathcal{B}(2n - 1, p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(2n, p)$, on a

$$\begin{aligned} p_1 - p_2 &= (1 - p) \binom{2n - 1}{n} p^n (1 - p)^{2n - 1 - n} - \frac{1}{2} \binom{n}{2n} p^n (1 - p)^{2n - n} \\ &= \frac{(2n - 1)!}{n! \times (n - 1)!} p^n (1 - p)^n - \frac{1}{2} \times \frac{(2n)!}{n! \times n!} p^n (1 - p)^n \\ &= \frac{(2n)!}{(n!)^2} \left(\frac{n}{2n} - \frac{1}{2} \right) p^n (1 - p)^n \\ &= 0 \end{aligned}$$

On en conclut qu'aucun des deux jeux n'est préférable à l'autre.