Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?

✓

Tout d'abord, on remarque que f est bien définie sur $\mathbb{R}^2$. Elle est continue (et même C^∞ sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ en tant que fraction rationnelle. Pour étudier la continuité en $(0,0)$, on passe en polaires :

$$\begin{aligned} f(r\cos\theta, r\sin\theta) - f(0,0) &= \frac{(r\cos\theta)^2(r\sin\theta)^3}{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2} \\ &= r\cos^2\theta\sin^3\theta \end{aligned}$$

Il suit

$$\begin{aligned} |f(r\cos\theta, r\sin\theta) - f(0,0)| &\leqslant r \\ &\xrightarrow[r\to 0+]{} 0 \text{ indépendamment de } \theta \end{aligned}$$

Ainsi f est continue en $(0,0)$, et finalement $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}^2}$

2. Calculer $\overrightarrow{\text{grad}}\ f(x,y)$ pour $(x,y) \neq (0,0)$.

✓

pour $(x,y) \neq (0,0)$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}}\ f(x,y) &= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{x^2y^3}{x^2+y^2}\right] \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{x^2y^3}{x^2+y^2}\right] \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dfrac{(2xy^3)(x^2+y^2)-(x^2y^3)(2x)}{(x^2+y^2)^2} \\ \dfrac{(3x^2y^2)(x^2+y^2)-(x^2y^3)(2y)}{(x^2+y^2)^2} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\begin{bmatrix} 2xy^5 \\ x^4y^2+x^2y^4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3. La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

✓

Nous avons

— existence des dérivées partielles

$$\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0 \xrightarrow[h\to 0]{} 0 \qquad \text{donc } \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \text{ existe et vaut } 0$$

$$\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0 \xrightarrow[h\to 0]{} 0 \qquad \text{donc } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \text{ existe et vaut } 0$$

— continuité des dérivées partielles

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \frac{2xy^5}{(x^2+y^2)^2} \\ &\text{(passage en polaires)} \\ &= 2r^2\cos\theta\sin^5\theta \end{aligned}$$

Donc

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right| \leqslant 2r^2 \xrightarrow[r\to 0+]{} 0 \text{ indépendamment de } \theta$$

De manière analogue,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \frac{x^4y^2+x^2y^4}{(x^2+y^2)^2} \\ &\text{(passage en polaires)} \\ &= r^2\cos^2\theta\sin^2\theta \end{aligned}$$

Donc

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right| \leqslant r^2 \xrightarrow[r\to 0+]{} 0 \text{ indépendamment de } \theta$$

On conclut que f est C^1 en $(0,0)$. Par ailleurs, f est C^1 sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Au final $\boxed{f \text{ est } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^2}$

4. La fonction f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?

✓

$\boxed{f \text{ est différentiable sur } \mathbb{R}^2}$ car elle est C^1. C'est l'application du théorème 2.9 du poly.