1. Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ ?

Il s'agit d'une série à termes de signe non constant. On commence donc par étudier la convergence absolue. Soit $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$. On a $|u_n| = \frac{1}{n}$ qui est le terme général d'une série de Riemann divergente. On en conclut que la série $\sum u_n$ ne converge pas absolument.
Étudions maintenant la convergence de la série : il s'agit d'une série alternée. On applique donc le critère spécial des séries alternées : la suite $(\frac{1}{n})_{n\geqslant 1}$ étant positive, décroissante et ayant pour limite 0 en l'infini, on en conclut que la série $\sum u_n$ converge.
Finalement, la série $\sum u_n$ est convergente mais non absolument convergente (elle est dite semi-convergente).

2. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$.

Il s'agit d'une série de Riemann convergente. Comme cette série est à termes positifs, elle est absolument convergente.

3. Que peut-on en déduire sur la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$ ?

Les séries $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ étant convergentes, la somme de ces deux séries est une série convergente. Par conséquent, la série $\sum(\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2})$ est convergente.

4. Converge-t-elle absolument ?

On s'intéresse à la convergence de la série $\sum |\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2}|$. On a :

$$\left|\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n}.$$

Or $\sum \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente. Donc par le théorème d'équivalence, la série $\sum |\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2}|$ n'est pas convergente. On en déduit que la série $\sum \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2}$ n'est pas absolument convergente.