Ex **Calcul de déterminants de matrices triangulaires**

Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & -4 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -1 \\ -5 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -54 & 12 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

✓

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 3 - 2 \times 2 = -1$$

Développement par rapport à la première ligne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 0 + 2 \times \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times (2) - 0 + 2 \times (-2) = -2$$

On fait apparaitre des 0 dans la première colonne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \ell_1 \\ \ell_3 - 3\ell_1 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -11 \\ 0 & -1 & -10 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 + \ell_2 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -11 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1) \times 1 = -1$$

On fait apparaitre des 0 dans la première colonne :

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \ell_1 \\ \ell_3 - 2\ell_1 \\ 2 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 4 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 - 6\ell_2 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -20 \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times (-20) = -20$$

On fait apparaitre des 0 dans la deuxième ligne :

$$\begin{array}{cccc} \rfloor_1 & \rfloor_2 & c_3 & \rfloor_4 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cccc} \rfloor_1 + \mathcal{C}_3 & c_2 - 2\mathcal{C}_3 & \rfloor_3 & \rfloor_4 \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & -1 \\ -7 & 5 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -0 + 0 - 1 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 3 & -2 & -1 \\ -7 & 5 & 1 \end{vmatrix} + 0$$

$$\begin{aligned} &= (-1) \times \left[3 \times \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} + (-4) \times \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{vmatrix} \right] \\ &= -[3 \times 3 - 1 \times (-4) + (4) \times 1] \\ &= -9 \end{aligned}$$

Le déterminant est triangulaire. Il est donc égal au produit des termes de la diagonale :

$$\begin{vmatrix} 2 & -54 & 120 & -40 \\ 0 & 3 & -56 & 132 \\ 0 & 0 & -5 & 212 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 3 \times (-5) \times 4 = -120$$