

Exercice - Chi-deux et Student

Soient 9 variables aléatoires normales centrées réduites notées $(U_i)_{1 \leq i \leq 9}$. On suppose que les variables $(U_i)_{1 \leq i \leq 9}$ sont indépendantes.

- Quelle est la loi suivie par $X = \sum_{i=1}^9 U_i^2$? Déterminer le réel x tel que $P(X > x) = 0.05$.

Les variables $(U_i)_{1 \leq i \leq 9}$ sont indépendantes et suivent chacune une loi $\mathcal{N}(0, 1)$ donc $\sum_{i=1}^9 U_i^2$ suit une loi $\chi^2(9)$.

- Soit Y une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne 10 et d'écart-type 3, indépendante de X . Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire $Z = \frac{Y-10}{\sqrt{X}}$? Déterminer le réel z tel que $P(Z > z) = 0.05$.

On réécrit $Z = \frac{Y-10}{\sqrt{X}} = \frac{\frac{Y-10}{3}}{\sqrt{\frac{X}{9}}}$; or $\frac{Y-10}{3}$ suit une loi normale centrée réduite donc par définition, Z suit une loi $St(9)$.