lqVs ⊳ **Exercice** - *Résolution de système linéaire*

On considère le système linéaire :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 5x+y+z &=& 7\\ x+5y-z &=& 5\\ x-y+4z &=& 4 \end{array}\right. \tag{S}$$

dont la solution est $(1,1,1)$.

1. Montrer que l'on peut utiliser la méthode de Jacobi pour résoudre ce système et justifier que dans ce cas, la méthode converge.

Résoudre ce système revient à résoudre l'équation $Ax=b$ où $A=\begin{pmatrix}5&1&1\\1&5&-1\\1&-1&4\end{pmatrix}$ et $b=\begin{pmatrix}7\\5\\4\end{pmatrix}$.
Cette matrice A est à diagonale strictement dominante car $5>1+1$ et $4>1+1$. Par théorème, on en déduit que la méthode de Jacobi converge vers la solution.

2. Calculer la première itération de la méthode de Jacobi en partant de $X_0=(0,0,0)$ puis la 50ème itération à l'aide d'un programme Python.

Pour appliquer la méthode de Jacobi, on décompose A sous la forme $A=M-N$ où $M=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&4\end{pmatrix}$ et $N=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\-1&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}$. Pour tout entier n, on définit $X_{n+1}=F(X_n)$ où $F(X)=M^{-1}NX+M^{-1}b$ et $M^{-1}=\begin{pmatrix}\frac15&0&0\\0&\frac15&0\\0&0&\frac14\end{pmatrix}$. On décide d'initialiser l'itération avec $X_0=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.
On calcule :

$$X_1=M^{-1}NX_0+M^{-1}b=M^{-1}b=\begin{pmatrix}1.4\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$X_2=M^{-1}NX_1+M^{-1}b=\begin{pmatrix}1\\0.92\\0.9\end{pmatrix}$$

$$X_3=M^{-1}NX_2+M^{-1}b=\begin{pmatrix}1.036\\0.98\\0.98\end{pmatrix}$$

3. Montrer que la matrice A est symétrique définie positive et en déduire la convergence de la méthode de Gauss-Seidel pour ce problème.

Pour utiliser la méthode de Gauss-Seidel, on peut s'assurer que la matrice A est symétrique définie positive. Elle est visiblement symétrique réelle donc diagonalisable. Il reste donc à vérifier que ses valeurs propres sont toutes strictement positives.
On se lance dans le calcul du polynôme caractéristique :

$$P_A(X)=\begin{vmatrix}5-X&1&1\\1&5-X&-1\\1&-1&4-X\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6-X&1&1\\6-X&5-X&-1\\0&-1&4-X\end{vmatrix}=(6-X)(X^2-8X+14)$$

Une valeur propre évidente est donc $\lambda_1=6$. En analysant le polynôme du second degré $(X^2-8X+14)$, on déduit que $\lambda_2\lambda_3=14$ donc λ_2 et λ_3 sont de même signe. De plus, $\lambda_2+\lambda_3=8$ donc on est assuré que $\lambda_2>0$ et $\lambda_3>0$.

4. Calculer les cinquante premières itérations de la méthode de Gauss-Seidel en partant de $X_0=(0,0,0)$.

On calcule :

$$X_1=M^{-1}NX_0+M^{-1}b=M^{-1}b=\begin{pmatrix}1.4\\0.72\\0.83\end{pmatrix}$$

$$X_2=M^{-1}NX_1+M^{-1}b=\begin{pmatrix}1.09\\0.948\\0.9645\end{pmatrix}$$

$$X_3=M^{-1}NX_2+M^{-1}b=\begin{pmatrix}1.0175\\0.9894\\0.992975\end{pmatrix}$$