

Dans les calculs, on pourra utiliser une intégration par parties :

$$\int_a^b u(x)v'(x) \, dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) \, dx$$

ou bien se souvenir que

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} \, dx = n! = 1 \times 2 \times \dots \times n.$$

Après enquête, on estime que le temps de passage à une caisse, exprimé en unités de temps, est une variable aléatoire  $T$  dont une densité de probabilité est donnée par la fonction  $f_T$  définie par :

$$f_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ te^{-t} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

1. (a) Soit  $X$  une variable aléatoire exponentielle de paramètre  $\lambda = 1$ . Donner une densité  $f_X$  de  $X$ , son espérance et sa variance.



$$X \sim \mathcal{E}(1), \quad f_X(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad \mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad \text{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

- (b) Vérifier que  $f_T$  est bien une densité de probabilité. Déterminer  $\mathbb{E}(T)$  et  $\text{V}(T)$ .



$f_T$  est une fonction positive sur  $\mathbb{R}$  et

$$\int_{\mathbb{R}} f_T(x) \, dx = \int_0^{+\infty} xe^{-x} \, dx = [-xe^{-x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} \, dx = [-e^{-x}]_0^{+\infty} = 1.$$

Donc  $f_T$  est bien une densité de probabilité.

L'espérance de  $T$  peut se calculer soit par intégrations par parties, soit en utilisant le rappel :

$$\mathbb{E}(T) = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} \, dx = [-x^2 e^{-x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2xe^{-x} \, dx = 2 \int_0^{+\infty} xe^{-x} \, dx = 2.$$

De même pour la variance de  $T$  :  $\text{V}(T) = \mathbb{E}(T^2) - \mathbb{E}(T)^2$ . Or

$$\mathbb{E}(T^2) = \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x} \, dx = 6$$

donc  $\text{V}(T) = 6 - 2^2 = 2$ .

2. (a) Démontrer que la fonction de répartition de  $T$ , notée  $F_T$ , est définie par :

$$F_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - (1+x)e^{-x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$



Par définition,  $F_T(x) = \int_{-\infty}^x f_T(t) \, dt$  donc si  $x < 0$ ,  $F_T(x) = 0$  et si  $x \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} F_T(x) &= \int_0^x te^{-t} \, dt = [-te^{-t}]_0^x + \int_0^x e^{-t} \, dt = -xe^{-x} + 0 + [-e^{-t}]_0^x = -xe^{-x} - e^{-x} + e^0 \\ &= 1 - (1+x)e^{-x}, \end{aligned}$$

ce qui correspond à la formule donnée dans l'énoncé.

- (b) Montrer que la probabilité que le temps de passage en caisse soit inférieur à deux unités de temps sachant qu'il est supérieur à une unité, est égale à  $\frac{2e-3}{2e}$ .



$$\begin{aligned} \text{P}(T \leq 2 | T \geq 1) &= \frac{\text{P}(\{T \leq 2\} \cap \{T \geq 1\})}{\text{P}(T \geq 1)} = \frac{\text{P}(1 \leq T \leq 2)}{1 - \text{P}(T \leq 1)} = \frac{F_T(2) - F_T(1)}{1 - F_T(1)} \\ &= \frac{1 - 3e^{-2} - 1 + 2e^{-1}}{1 - 1 + 2e^{-1}} = \frac{2e^{-1} - 3e^{-2}}{2e^{-1}} = \frac{2e - 3}{2e} \end{aligned}$$

3. Un jour donné, trois clients  $A$ ,  $B$  et  $C$  se présentent simultanément devant deux caisses libres. Par courtoisie,  $C$  décide de laisser passer  $A$  et  $B$  et de prendre la place du premier d'entre eux qui aura terminé. On suppose que les variable aléatoires  $T_A$  et  $T_B$  correspondant aux temps de passage en caisse de  $A$  et de  $B$  sont indépendantes.

- (a) Soit  $M$  la variable aléatoire égale au temps d'attente du client  $C$ . Exprimer l'événement  $\{M > x\}$  en fonction des événements  $\{T_A > x\}$  et  $\{T_B > x\}$ .



$$\{M > x\} = \{T_A > x\} \cap \{T_B > x\}$$

- (b) En déduire une expression de la fonction de répartition  $F_M$  de  $M$ , en fonction de  $F_{T_A}$  et  $F_{T_B}$ .



Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} F_M(t) &= \text{P}(M \leq t) \\ &= 1 - \text{P}(M > t) \\ &= 1 - \text{P}(\{T_A > t\} \cap \{T_B > t\}) \\ &= 1 - \text{P}(T_A > t)\text{P}(T_B > t) \quad \text{par indépendance de } T_A \text{ et de } T_B \\ &= 1 - (1 - \text{P}(T_A \leq t))(1 - \text{P}(T_B \leq t)) \\ &= 1 - (1 - F_{T_A}(t))(1 - F_{T_B}(t)) \end{aligned}$$

- (c) Déterminer explicitement une densité de  $M$ .



Comme  $T_A$  et  $T_B$  suivent la même loi que  $T$ , on  $F_{T_A} = F_{T_B} = F_T$ . On obtient donc :

$$F_M(x) = 1 - (1 - F_T(x))^2 = \begin{cases} 1 - (1+x)^2 e^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Afin d'obtenir la densité de la variable aléatoire  $M$ , on dérive sa fonction de répartition en tous les points de continuité de sa densité :

$$\begin{aligned} f_M(t) &= \begin{cases} -2(1+x)e^{-2x} + 2(1+x)^2 e^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2x(1+x)e^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$