

**Exercice** - *Convergence vers une loi exponentielle*

Soit une suite de variables indépendantes  $(U_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  suivant chacune une loi uniforme  $\mathcal{U}([0; 1])$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $M_n = \max(U_1, \dots, U_n)$ .

1. Démontrer que  $M_n \xrightarrow{\mathcal{P}} 1$ .
2. En déduire que  $M_n \xrightarrow{\text{p.s.}} 1$  et  $M_n \xrightarrow{\text{en loi}} 1$ .
3. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $Y_n = n(1 - M_n)$ . Démontrer que la suite  $(Y_n)$  converge en loi vers une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.