

Soit une suite de variables indépendantes $(U_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ suivant chacune une loi uniforme $\mathcal{U}([0; 1])$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $M_n = \max(U_1, \dots, U_n)$.

1. Démontrer que $M_n \xrightarrow{\mathcal{P}} 1$.

Soit $M_n = \max(U_1, \dots, U_n)$. Pour tout i , $U_i \leq 1$ donc $M_n \leq 1$. Soit $\varepsilon > 0$. On cherche la limite de

$$P(|M_n - 1| < \varepsilon) = P(1 - M_n < \varepsilon) = P(M_n > 1 - \varepsilon)$$

Or la fonction de répartition de M_n est définie pour tout réel t par

$$\begin{aligned} F_n(t) &= P(\Pi_n \leq t) = P\left(\bigcap_{i=1}^n (U_i \leq t)\right) \\ &= \prod_{i=1}^n P(U_i \leq t) \text{ par indépendance} \\ &= P(U_1 \leq t)^n \text{ car les variables sont identiquement distribuées} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t^n & \text{si } t \in [0; 1] \\ 1 & \text{si } t > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} P(M_n > 1 - \varepsilon) &= 1 - P(M_n \leq 1 - \varepsilon) \\ &= 1 - (1 - \varepsilon)^n \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration de la convergence en probabilité de la suite (M_n) vers 1.

2. En déduire que $M_n \xrightarrow{\text{p.s.}} 1$ et $M_n \xrightarrow{\text{en loi}} 1$.

On remarque que pour tout $\omega \in \Omega$, la suite $(M_n(\omega))$ est une suite réelle croissante. Cette suite est également majorée par 1 puisque chaque variable U_i est majorée par 1. La suite $(M_n(\omega))$ est donc une suite convergente, notons $L(\omega)$ sa limite. Il existe donc une variable aléatoire L telle que la suite (M_n) converge vers L presque sûrement.

Or on sait que la convergence presque sûre implique la convergence en probabilité. Et d'après la question précédente, la suite (M_n) converge en probabilité vers la variable aléatoire constante 1.

Par unicité de la limite, on déduit que pour tout $\omega \in \Omega$, $L(\omega) = 1$.

On a donc montré que $M_n \xrightarrow{\text{p.s.}} 1$, ce qui implique directement par théorème du cours que $M_n \xrightarrow{\text{en loi}} 1$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = n(1 - M_n)$. Démontrer que la suite (Y_n) converge en loi vers une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

On cherche à étudier la convergence de la fonction de répartition F_{Y_n} de Y_n . Soit $t \in \mathbb{R}$. On constate que

$$Y_n \leq t \iff M_n \geq 1 - \frac{t}{n}$$

Si $t \leq 0$ alors $P(Y_n \leq t) = P(M_n \geq 1 - \frac{t}{n}) = 0$ car $M_n \leq 1$.

Si $t \in [0; n]$ alors $P(Y_n \leq t) = 1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$ d'après la question précédente.

Si $t > n$ alors $P(Y_n \leq t) = 1$ car $M_n \geq 0$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}$.

Donc :

$$\begin{aligned} - \text{ si } t < 0, F_{Y_n}(t) &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0; \\ - \text{ si } t \geq 0, F_{Y_n}(t) &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - e^{-t}. \end{aligned}$$

On en déduit que la suite de fonctions (F_{Y_n}) converge simplement vers la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre 1.

Cela prouve la convergence en loi de la suite (Y_n) vers une loi exponentielle de paramètre 1.