Ex **Matrices inversibles**

Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Dans l'affirmative, déterminer la matrice inverse.

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & -5 & 0 \end{pmatrix};\quad D=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

✓

$\det A=\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=(-2)\times 3-5\times 1=-11\neq 0$, donc A inversible. Pour $M=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ avec a.d-b.c $\neq 0$, $M^{-1}=\frac{1}{a\cdot d-b.c}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$.

$$A^{-1}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det B=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}=\begin{matrix} \ell_1 \\ \ell_3 \end{matrix}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}=1\times\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1\neq 0$, donc B inversible. Calcul des cofacteurs :

$$B_{11}=(+1)\times\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=0 \qquad B_{12}=(-1)\times\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=2 \qquad B_{13}=(+1)\times\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-1$$

$$B_{21}=(-1)\times\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-1 \qquad B_{22}=(+1)\times\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=2 \qquad B_{23}=(-1)\times\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-1$$

$$B_{31}=(+1)\times\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=2 \qquad B_{32}=(-1)\times\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=-7 \qquad B_{33}=(+1)\times\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=4$$

On en déduit la comatrice :

$$\tilde{B}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Et la matrice inverse :

$$B^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 7 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

inversible. Calcul des cofacteurs :

$$C_{11}=(+1)\times\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 0 \end{vmatrix}=5 \qquad C_{12}=(-1)\times\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}=-2 \qquad C_{13}=(+1)\times\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -5 \end{vmatrix}=4$$

$$C_{21}=(-1)\times\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 0 \end{vmatrix}=-10 \qquad C_{22}=(+1)\times\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}=4 \qquad C_{23}=(-1)\times\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -5 \end{vmatrix}=-5$$

$$C_{31}=(+1)\times\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-4 \qquad C_{32}=(-1)\times\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1 \qquad C_{33}=(+1)\times\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=-2$$

On en déduit la comatrice :

$$\tilde{C}=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -10 & 4 & -5 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Et la matrice inverse :

$$C^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -10 & -4 \\ -2 & 4 & 1 \\ 4 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$