

À l'aide des développements en séries entières des fonctions usuelles, calculer les développements en séries entières en 0 des fonctions réelles suivantes :

$$f(x) = \frac{1}{2+3x}, \quad g(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad h(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

et déterminer le rayon de convergence de ces développements.



On écrit les développements sur l'intervalle $] -R; R[$ où R est le rayon de convergence :

$$\begin{aligned} & \forall x \in \left] -\frac{2}{3}; \frac{2}{3} \right[, \quad f(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - (-\frac{3}{2}x)} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{3}{2}x \right)^n \\ & \forall x \in] -1; 1[, \quad g(x) = \ln(1 + x) - \ln(1 - x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \\ & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{2n-1} x^{2n-1} \\ & \forall x \in] -1; 1[, \quad h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \cdots \times \left(\frac{1}{2} + n - 1 \right) \right) x^{2n} \end{aligned}$$