

On considère un échantillon X_1, \dots, X_n suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. On cherche un estimateur de μ et de σ par la méthode du maximum de vraisemblance. On note (x_1, \dots, x_n) une réalisation de cet échantillon. On rappelle que la densité d'une loi normale est

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

1. Exprimer la fonction de vraisemblance $L(x_1, \dots, x_n, \mu, \sigma)$, puis son logarithme.



$$\begin{aligned} L(x_1, \dots, x_n, \mu, \sigma) &= \prod_{i=1}^n f(x_i) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} \\ \ln L(x_1, \dots, x_n, \mu, \sigma) &= \sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} \right) = -n \ln(\sigma\sqrt{2\pi}) - \sum_{i=1}^n \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2} \end{aligned}$$

2. Dériver $\ln L(x_1, \dots, x_n, \mu, \sigma)$ par rapport à μ .



$$\frac{\partial \ln L(x_1, \dots, x_n, \mu, \sigma)}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i - \mu}{\sigma^2}$$

3. En déduire un estimateur de μ .



$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(x_1, \dots, x_n, \mu, \sigma)}{\partial \mu} = 0 &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \frac{x_i - \mu}{\sigma^2} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i - n\mu = 0 \Leftrightarrow \mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \\ \text{donc } \hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i &\text{ est un estimateur de } \mu. \end{aligned}$$

4. Déterminer un estimateur de σ avec une démarche analogue.



$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(x_1, \dots, x_n, \mu, \sigma)}{\partial \sigma} &= \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu)^2}{\sigma^3} - \frac{n}{\sigma} \\ \frac{\partial \ln L(x_1, \dots, x_n, \mu, \sigma)}{\partial \sigma} = 0 &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu)^2}{\sigma^3} - \frac{n}{\sigma} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = n\sigma^2 \\ \Leftrightarrow \sigma^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \end{aligned}$$

donc $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}$ est un estimateur de σ .