

## ▷ Exercice - Différents types de convergence

Soit  $n$  un entier naturel non-nul et soit  $a$  un réel. On considère la fonction  $f_n$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f_n(x) = \frac{an}{\pi(1 + n^2x^2)}.$$

1. Déterminer  $a$  pour que  $f_n$  soit une densité de variable aléatoire.
2. Soit  $(X_n)$  une suite de variables aléatoires telle que chaque  $X_n$  admet pour densité  $f_n$ .  
Étudier l'existence de moments pour  $X_n$ .
3. Étudier la convergence en loi de la suite  $(X_n)$ .
4. Étudier la convergence en probabilité de la suite  $(X_n)$ .