Ex



Soit $f$ une fonction réelle définie par

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Montrer que $f$ est une densité de probabilité. On définit $X$ une variable aléatoire admettant $f$ comme densité.

✓

Il suffit de vérifier que $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ puis de calculer :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \int_0^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \\ &= \left[-e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^{+\infty} \\ &= 1 \end{aligned}$$

2. Déterminer la fonction de répartition $F$ de la variable aléatoire $Y = X^2$ en fonction de celle de $X$. En déduire la densité de la variable $Y$.

✓

Soit $t \in \mathbb{R}$ et $F_{X^2}$ la fonction de répartition de la variable aléatoire $X^2$ : alors

$$\begin{aligned} F_{X^2}(t) &= \mathrm{P}(X^2 \leqslant t) \\ &= \begin{cases} \mathrm{P}\left(-\sqrt{t} \leqslant X \leqslant \sqrt{t}\right) & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} f(x)dx & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \int_0^{\sqrt{t}} xe^{-\frac{x^2}{2}}\,dx & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \left[-e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^{\sqrt{t}} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \\ &= \left(1 - e^{-\frac{t}{2}}\right)\mathbf{1}_{[0;+\infty[}(t) \end{aligned}$$

La fonction $F_{X^2}$ est dérivable presque partout (sauf en 0). Sa dérivée coïncide donc presque partout avec une fonction densité $g$ de la variable $X^2$. On peut donc poser

$$g(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}\mathbf{1}_{[0;+\infty[}(x)$$

et on conclut que $X^2$ suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{2}$.