

Chaque pièce fabriquée par une certaine machine pèse en moyenne 0.50 g avec un écart type de 0.02 g.

Soient les variables aléatoires  $X_i$  représentant le poids d'une pièce. Ces variables sont indépendantes et de même loi, d'espérance  $\mathbb{E}(X_i) = 0.5$  et d'écart-type  $\sigma(X_i) = 0.02$ .

1. Soit  $\bar{X}$  la variable aléatoire égale au poids moyen d'une pièce dans un échantillon de  $n$  pièces. Que peut-on dire de la loi de  $\bar{X}$  ?

Comme  $\bar{X}$  est le poids moyen des pièces sur un échantillon de  $n$  pièces, on a  $\bar{X} = \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^n X_i$ .

Par le théorème central-limite, pour  $n$  grand, la variable aléatoire  $\sum_{i=1}^n X_i$  suit approximativement une loi Normale de paramètres  $\mu = n \times 0.5$  et  $\sigma = \sqrt{n} \times 0.02$ . Par conséquent, la variable  $\bar{X}$  suit approximativement la loi  $\mathcal{N}\left(0.50, \sigma = \frac{0.02}{\sqrt{n}}\right)$ .

2. On considère deux échantillons de 1000 pièces chacun. Déterminer la probabilité que le poids de deux lots de 1000 pièces chacun diffèrent entre eux de plus de 2 grammes.

Soit  $Y_1$  et  $Y_2$  deux variables aléatoires indépendantes et de même loi que  $\sum_{i=1}^n X_i$ , où  $n = 1000$ .

Comme  $n$  est grand,  $Y_1$  et  $Y_2$  suivent approximativement la loi  $\mathcal{N}\left(500, \sigma = 0.02\sqrt{1000}\right)$ . Donc  $Y_1 - Y_2$  suit encore une loi Normale de paramètres  $\mu = \mathbb{E}(Y_1) - \mathbb{E}(Y_2) = 0$  et de variance  $\sigma^2 = \sigma^2(Y_1 - Y_2) = 2\sigma^2(Y_1) = 0.8$ , ce que l'on peut résumer par

$$Y_1 - Y_2 \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma = \sqrt{0.8}\right).$$

On cherche à déterminer la probabilité suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|Y_1 - Y_2| > 2) &= \mathbb{P}\left(\left|\frac{Y_1 - Y_2}{\sqrt{0.8}}\right| > \frac{2}{\sqrt{0.8}}\right) \\ &\simeq \mathbb{P}(|Z| > 2.24), \quad \text{où } Z \sim \mathcal{N}(0, 1) \\ &\simeq 1 - \mathbb{P}(|Z| \leq 2.24) \\ &\simeq 1 - (2\mathbb{P}(Z \leq 2.24) - 1) \\ &\simeq 2 - 2 \times 0.9875 \quad \text{par lecture de la table de loi} \\ &\simeq 0.025. \end{aligned}$$

La probabilité que le poids de deux lots de 1000 pièces chacun diffèrent entre eux de plus de 2 grammes est d'environ 2.5%.