qGet $\trianglerighteq$ **Exercice** - *Etude de point fixe*

On s'intéresse au calcul de $\ell \in [0;\pi]$ tel que $\ell = \ell - \frac{1}{4}\cos(\ell)$.
On considère la méthode de point fixe suivante : $x_0 \in [0;\pi]$ et $x_{k+1} = \phi(x_k)$ pour tout $k \geqslant 0$, où ϕ est la fonction définie sur l'intervalle $[0;\pi]$ par $\phi(x) = 1 - \frac{1}{4}\cos(x)$.

1. Montrer que la méthode converge pour tout $x_0 \in [0;\pi]$.
2. (a) Montrer qu'il existe une constante $C \in]0;1[$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|x_k - \ell| \leqslant C^k |x_0 - \ell|$ et donner une valeur de C.
   (b) En déduire le nombre d'itérations nécessaires pour approcher ℓ à 10^{-3} près.
3. (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|x_k - \ell| \leqslant \frac{4}{3}|x_{k+1} - x_k|$.
   (b) En déduire la valeur ε du contrôle de l'incrément (en tant que critère d'arrêt) pour approcher ℓ à 10^{-3} près.