aRzj ⊵ **Exercice** - *Recherche d'un estimateur*

Soient θ un réel strictement positif et $X_1, X_2, \dots, X_n$ un échantillon dont la loi mère a pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \frac{1}{\theta^2} x e^{-\frac{x}{\theta}} \mathbf{1}_{]0;+\infty[}(x)$$

.

1. Déterminer un estimateur de θ issu de la méthode du maximum de vraisemblance.

On définit un échantillon $(X_1, ..., X_n)$ de cette loi et on considère une réalisation quelconque $(x_1, ..., x_n)$ de cet échantillon. Le support de la loi étant l'intervalle $]0; +\infty[$, on peut supposer que pour tout i, $x_i > 0$.
On exprime maintenant la log vraisemblance de cet échantillon :

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{L}(x_1, ..., x_n, \theta) &= \ln \prod_{i=1}^{n} f(x_i) \\ &= -2n \ln(\theta) + \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \theta}(x_1, ..., x_n, \theta) = 0 &\iff \theta = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \theta^2}(x_1, ..., x_n, \theta) &= \frac{2n}{\theta^2} - \frac{2}{\theta^3} \sum_{i=1}^{n} x_i \end{aligned}$$

En posant $\theta_0 = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} x_i$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \theta^2}(x_1, ..., x_n, \theta_0) &= \frac{2}{\theta_0} \left(\frac{n}{\theta_0} - \frac{1}{\theta_0} \times (2n) \right) \\ &= \frac{-2n}{\theta_0^2} < 0 \end{aligned}$$

Donc la fonction $\theta \mapsto \ln \mathcal{L}(x_1, ..., x_n, \theta)$ admet bien un maximum en $\theta = \theta_0$ pour tout $x_1, ..., x_n$.
On en déduit un estimateur de θ : $\boxed{\hat{\theta} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} X_i}$.

2. Déterminer le biais de cet estimateur.
(Indication : on admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} \, \mathrm{d}x = n!$.)

On calcule l'espérance de cette loi :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_1) &= \int x f(x) dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\theta^2} e^{-\frac{x}{\theta}} dx \\ &= \theta \int_0^{+\infty} u^2 e^{-u} du \\ &= 2\theta \end{aligned}$$

Donc par linéarité, l'espérance de $\hat{\theta}$ est

$$\mathbb{E}\left(\hat{\theta}\right) = \frac{1}{2n} \times n \times 2\theta = \theta$$

donc le biais de $\hat{\theta}$ est

$$B(\hat{\theta}) = \mathbb{E}(\hat{\theta} - \theta) = 0$$