KfgI ▷ **Exercice** - *Comparaison de méthodes de point fixe*

Pour approcher les racines réelles de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x - e^{-(1+x)}$, on utilise quatre méthodes de point fixe : x_0 donné, $x_{n+1} = \phi_i(x_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, où

$$\phi_1(x) = e^{-(1+x)}, \quad \phi_2(x) = x^2 e^{1+x}, \quad \phi_3(x) = -1 - \ln(x), \quad \phi_4(x) = \frac{1+x}{1+e^{1+x}}.$$

1. Montrer qu'il existe une unique racine réelle ℓ de f. Montrer que $\ell \in]\frac{1}{5}; \frac{1}{2}[$.
2. Montrer que les quatre méthodes de point fixe sont consistantes avec la recherche du zéro de f, *i.e.* montrer que pour tout $x \in]\frac{1}{5}; \frac{1}{2}[$, on a : $\phi_i(x) = x \Leftrightarrow f(x) = 0 \qquad$ pour $i = 1, 2, 3, 4$.
3. Étudier la convergence locale des quatre méthodes de point fixe. Si elles convergent, donner l'ordre de convergence. Attention, on ne demande pas d'étudier la convergence globale sur $]\frac{1}{5}; \frac{1}{2}[$ mais de vérifier s'il existe un voisinage de ℓ tel que pour tout x_0 dans ce voisinage, la méthode converge.
4. Pour la première méthode, établir analytiquement pour quelles valeurs de x_0 la suite converge.
5. À l'aide d'un programme, donner une valeur approchée de ℓ et comparer graphiquement les vitesses de convergence pour la méthode utilisant ϕ_1 et la méthode utilisant ϕ_4.