

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$ . Démontrer l'existence des moments d'ordre  $n$  de  $X$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  puis les calculer.

On sait par comparaison que la fonction  $x \mapsto xe^{-\lambda x}$  est intégrable au voisinage de  $+\infty$  donc on peut calculer par théorème de transfert pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^n) &= \lambda \int_0^{+\infty} x^n e^{-\lambda x} dx \\ &= \lambda \left[ \frac{x^n e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{\lambda} n \int_0^{+\infty} x^{n-1} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{n}{\lambda} \mathbb{E}(X^{n-1})\end{aligned}$$

De plus, on a immédiatement que  $\mathbb{E}(X^0) = 1$  donc par récurrence, on obtient :

$$\mathbb{E}(X^n) = \frac{n!}{\lambda^n}$$