Ex - Etude d'une loi de probabilité xQe9

Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi uniforme sur $[0;1]$. Soit $\lambda > 0$ et soit la variable aléatoire $Y = \frac{-1}{\lambda}\ln(1-X)$. On note F_X, respectivement F_Y, la fonction de répartition de la variable X, respectivement Y.

1. Exprimer $F_Y(t)$ en fonction de F_X.

✓

Soit $t \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= \mathrm{P}(Y \leqslant t) \\ &= \mathrm{P}(\frac{-1}{\lambda}\ln(1-X) \leqslant t) \\ &= \mathrm{P}(\ln(1-X) \geqslant -\lambda t) \\ &= \mathrm{P}(1 - X \geqslant e^{-\lambda t}) \\ &= \mathrm{P}(X \leqslant 1 - e^{-\lambda t}) \\ &= F_X(1-e^{-\lambda t}). \end{aligned}$$

2. En déduire la loi suivie par $Y = \frac{-1}{\lambda}\ln(1-X)$?

✓

Or $X \sim \mathcal{U}([0;1])$ donc $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0;1[\\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$.

De plus, si $t \geqslant 0$, $1 - e^{-\lambda t} \in [0;1[$ et si $t \leqslant 0$, $1 - e^{-\lambda t} < 0$.

Par conséquent,

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

ce qui nous permet de reconnaître la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre λ donc $Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

3. Dans un langage de programmation, on simule une loi uniforme sur $[0;1]$ avec la commande `rand()`. Quelle commande peut-on écrire pour simuler une loi exponentielle de paramètre λ ?

✓

Il suffit d'écrire `-1/lambda*log(1-rand())` et même `-1/lambda*log(rand())` car $1 - X$ suit une loi uniforme sur $[0;1]$.