Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires admettant une densité f définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = \frac{3}{8}(x^2 + y^2)\mathbf{1}_{[-1;1]^2}(x, y)$$

1. Déterminer les lois marginales du couple (X, Y). Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

✓

La densité de X se calcule de la manière suivante : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x, y)dy \\ &= \frac{3}{8}\mathbf{1}_{[-1;1]}(x) \int_{-1}^{1} (x^2 + y^2)dy \\ &= \frac{3}{8}\mathbf{1}_{[-1;1]}(x) \left[x^2 y + \frac{1}{3}y^3\right]_{y=-1}^{y=1} \\ &= \frac{1}{4}(3x^2 + 1)\mathbf{1}_{[-1;1]}(x). \end{aligned}$$

On a ainsi déterminé la loi de X.
Pour Y, on obtient la même loi car les rôles de x et de y sont symétriques.
Enfin, les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes car il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$.

2. Calculer $\mathbb{E}(XY)$ et $\mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(Y)$.

✓

On applique le théorème de transfert au couple (X, Y) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(XY) &= \int_{\mathbb{R}^2} xy \times \frac{3}{8}(x^2 + y^2)\mathbf{1}_{[-1;1]^2}(x, y)\, dx\, dy \\ &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{3}{8}(x^3 y + xy^3)\, dx\, dy \\ &= \int_{-1}^{1} \left[\frac{3}{32}x^4 y + \frac{3}{16}x^2 y^3\right]_{x=-1}^{x=1} dy \\ &= 0. \end{aligned}$$

Pour l'espérance de la variable aléatoire X, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\, dx \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{4}(3x^3 + x)\, dx \\ &= \left[\frac{3}{16}x^4 + \frac{1}{8}x^2 y^2\right]_{-1}^{1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

De la même manière, on obtient $\mathbb{E}(Y) = 0$.
Ainsi, $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ bien que X et Y ne soient pas indépendantes.