

On considère n lampes, $n \in \mathbb{N}^*$. La durée de vie (en années) d'une lampe est une variable aléatoire absolument continue dont la densité f est définie sur \mathbb{R} par

$$f: t \mapsto \frac{1}{16}te^{-\frac{t}{4}}1_{[0;+\infty[}(t)$$

On suppose que les lampes évoluent de manière indépendante.

Pour tout entier $i \in \{1, \dots, n\}$, on note X_i la variable aléatoire égale à la durée de vie de la i -ème lampe.

1. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X_1 .
2. Un appareil de type A comporte 6 lampes, toutes nécessaires à son fonctionnement. On note $T = \min_{i \in \{1, \dots, 6\}} (X_i)$.
 - (a) Que modélise la variable aléatoire T ?
 - (b) Déterminer la loi de T .
 - (c) Calculer la probabilité que l'appareil de type A fonctionne de manière continue pendant au moins 4 ans à partir de sa mise en marche, sans changer de lampe.
3. Un appareil de type B fonctionne avec une lampe seulement. On dispose cette fois d'une lampe de remplacement. Lorsque l'appareil fonctionne et que la lampe tombe en panne, celle-ci est immédiatement remplacée par la lampe de remplacement. Soit U la variable aléatoire donnant la durée de fonctionnement d'un appareil de type B avec une lampe de remplacement.
 - (a) Exprimer U en fonction de X_1 et X_2 .
 - (b) Déterminer la loi de U .
4. On dispose de 4 appareils de type B , sans aucune lampe de remplacement. On met en marche ces 4 appareils simultanément. On note V le temps durant lequel au moins un des 4 appareils fonctionne.
 - (a) Exprimer V en fonction de X_1, X_2, X_3, X_4 .
 - (b) En déduire la loi de V .