

Deux joueurs A et B sont en concurrence au lancer de poids. Un observateur attentif a relevé qu'à l'entraînement, le joueur A a effectué 97.7% de ses lancers au delà de 19 mètres, et 84% en deçà de 22 mètres. Il a aussi noté que de son côté, le joueur B a effectué 74.5% de ses lancers au delà de 19 mètres et 90.8% en deçà de 22 mètres.

- Déterminer les paramètres des variables aléatoires normales X et Y respectivement égales au lancer du joueur A et au lancer du joueur B .



Joueur A :

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma), \quad P(X \geq 19) = 0.977, \quad P(X \leq 22) = 0.84$$

En posant $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$, on a $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et :

$$\begin{cases} P\left(Z \geq \frac{19 - \mu}{\sigma}\right) = 0.977 \\ P\left(Z \leq \frac{22 - \mu}{\sigma}\right) = 0.84 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P\left(Z \leq -\frac{19 - \mu}{\sigma}\right) = 0.977 \\ P\left(Z \leq \frac{22 - \mu}{\sigma}\right) = 0.84 \end{cases}$$

et par lecture de la table de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, on obtient :

$$\begin{cases} -\frac{19 - \mu}{\sigma} = 2 \\ \frac{22 - \mu}{\sigma} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -19 + \mu = 2\sigma \\ 22 - \mu = \sigma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 21 \\ \sigma = 1 \end{cases} \Leftrightarrow X \sim \mathcal{N}(21, \sigma = 1)$$

Joueur B :

$$Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma), \quad P(Y \geq 19) = 0.745, \quad P(Y \leq 22) = 0.908$$

En posant $Z = \frac{Y - \mu}{\sigma}$, on a $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et :

$$\begin{cases} P\left(Z \geq \frac{19 - \mu}{\sigma}\right) = 0.745 \\ P\left(Z \leq \frac{22 - \mu}{\sigma}\right) = 0.908 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P\left(Z \leq -\frac{19 - \mu}{\sigma}\right) = 0.745 \\ P\left(Z \leq \frac{22 - \mu}{\sigma}\right) = 0.908 \end{cases}$$

et par lecture de la table de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, on obtient :

$$\begin{cases} -\frac{19 - \mu}{\sigma} = 0.66 \\ \frac{22 - \mu}{\sigma} = 1.33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -19 + \mu = 0.66\sigma \\ 22 - \mu = 1.33\sigma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 20 \\ \sigma = 1.5 \end{cases} \Leftrightarrow Y \sim \mathcal{N}(20, \sigma = 1.5)$$

- Quels sont les paramètres de la variable aléatoire normale $Z = X - Y$?



Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes et de loi Normale, donc leur différence est encore une loi Normale de paramètres :

$$Z \sim \mathcal{N}(21 - 20, \sigma^2 = 1^2 + 1.5^2) \quad \text{c'est-à-dire} \quad Z \sim \mathcal{N}(21 - 20, \sigma^2 = 3.25).$$

- Exprimer en utilisant la variable aléatoire Z l'événement "Le joueur A gagne le concours." et en déterminer la probabilité.



Le joueur A gagne le concours signifie que le lancer X du joueur A est supérieur au lancer Y du joueur B , ce qui revient à avoir $Z \geq 0$.

$$P(Z \geq 0) = P\left(\frac{Z - 1}{\sqrt{3.25}} \geq \frac{-1}{\sqrt{3.25}} \simeq 0.55\right) = 0.7088$$

Il y a donc 70.88% de chance que A gagne le concours.