zxCh ⊵ **Exercice** - *Composition de fonctions*

Soient f et g deux fonctions d'une variable, de classe $C^2(\mathbb{R})$. On définit une fonction $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x,y) = xf(x+y) + yg(x+y)$$

1. Calculer $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}$ en fonction de x, y, f', g'.

> Par composition, φ est dérivable en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et par dérivation d'un produit et application de la règle des chaînes on a :
>
> $$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) &= f(x+y) + x \times 1 \times f'(x+y) + y \times 1 \times g'(x+y) \\ &= f(x+y) + xf'(x+y) + yg'(x+y) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) &= xf'(x+y) + g(x+y) + yg'(x+y) \end{aligned}$$

2. Calculer les dérivées partielles secondes $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}x$ en fonction de x, y, f', g', f'', g''.

> On redérive les expressions ci-dessus :
>
> $$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(f(x+y) + xf'(x+y) + yg'(x+y)\right) \\ &= 1 \times f'(x+y) + (1 \times f'(x+y) + x \times 1 \times f''(x+y)) + y \times 1 \times g''(x+y) \\ &= 2f'(x+y) + xf''(x+y) + yg''(x+y) \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(x,y) &= xf''(x+y) + 2g'(x+y) + yg''(x+y) \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(xf'(x+y) + g(x+y) + yg'(x+y)\right) \\ &= f'(x+y) + xf''(x+y) + g'(x+y) + yg''(x+y) \end{aligned}$$

3. Observer que $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y} = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y\, \partial x}$. Quel théorème du cours permet de prévoir ce résultat ?

> Puisque f est de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de tout point (x,y) le théorème de Schwarz s'applique (Th 2.10 du cours) et permet de conclure qu'en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y\, \partial x}(x,y)$.

4. En déduire la valeur de

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$$

> Il suffit de remplacer par les expressions trouvées ci-dessus, simplifier et on trouve $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,y) - 2\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y}(x,y) + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(x,y) = 0$