Ex - Choix d'estimateur

buE8

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. On rappelle que dans ce cas, quelque soit l'entier $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.
On observe la réalisation d'un échantillon de taille 6 de cette loi : $1, 5, 2, 2, 3, 1$.

1. À l'aide de la méthode du maximum de vraisemblance, donner une estimation de λ.
2. Généraliser le procédé pour obtenir un estimateur de λ et déterminer son biais.

✓

1. Soit $(x_1, ..., x_n)$ une réalisation quelconque de l'échantillon $(X_1, ... X_n)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\lambda) &= \mathrm{P}(X_1 = x_1, X_2 = 2, ..., X_n = x_n)\\ &= \mathrm{P}(X_1 = x_1)\mathrm{P}(X_2 = 2), ..., \mathrm{P}(X_n = x_n) \text{ par indépendance des va}\\ &= e^{-\lambda}\frac{\lambda^{x_1}}{x_1!} \times e^{-\lambda}\frac{\lambda^{x_2}}{x_2!} \times, ..., \times e^{-\lambda}\frac{\lambda^{x_n}}{x_n!}\\ &= e^{-n\lambda}\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{x_1! ... x_n!}\end{aligned}$$

2. On cherche la valeur de λ qui maximise la fonction de vraisemblance via la log vraisemblance :

$$\ln \mathcal{L}(\lambda) = -n\lambda + \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\ln(\lambda) - \ln(x_1! ... x_n!)$$

que l'on dérive afin de voir pour quelle valeur de $p \in]0; 1[$ cette expression est maximale :

$$\begin{aligned}\ln \mathcal{L}(p) = 0 &\iff -n + \left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \times \frac{1}{\lambda} = 0\\ &\iff \lambda = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\end{aligned}$$

En remplaçant par les valeurs de la réalisation de l'échantillon, on trouve comme estimation de λ la valeur $\frac{14}{6}$.
On trouve en général l'estimateur de moyenne empirique, il est sans biais car $\mathbb{E}(X) = \lambda$ pour une loi de Poisson de paramètre λ.