

Soit  $a \in \mathbb{R}$  et soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$$

On admet que le polynôme caractéristique de  $A$  est  $\chi_A(X) = -(X - 1 + a)^2(X - 1 - 2a)$ .

1. En déduire des conditions sur  $a \in \mathbb{R}$  telles que la matrice  $A$  soit symétrique définie positive. On se restreindra à ce cas par la suite.

La matrice  $A$  est définie positive si ses valeurs propres  $1 - a > 0$  et  $1 + 2a > 0$ , autrement dit si  $-\frac{1}{2} < a < 1$ .

2. Déterminer le rayon spectral de la matrice  $I_3 - A$  où  $I_3$  est la matrice identité.

D'après ce qui précède, la matrice  $I_3 - A$  a deux valeurs propres :  $-a$  et  $2a$ . Son rayon spectral est donc  $2|a|$ .

3. En déduire des conditions nécessaires et suffisantes sur  $a \in \mathbb{R}$  pour que la méthode de Jacobi converge vers une solution du système  $Ax = b$ .

Pour que la méthode de Jacobi converge, il faut et il suffit que  $\rho(D - A) < 1$  où  $D = I_3$  est la diagonale de  $A$ . La méthode converge si et seulement si  $\rho(D - A) = 2|a| < 1$ . On en déduit que la condition nécessaire et suffisante de convergence de la méthode est que  $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$ .

4. Déterminer des conditions suffisantes sur  $a \in \mathbb{R}$  pour que la méthode de Gauss-Seidel converge vers une solution du système  $Ax = b$ .

Pour que la méthode de Gauss converge, il suffit que la matrice soit symétrique définie positive.