Ex

Deux calculs d'intégrale

Proposer au moins deux méthodes de Monte Carlo permettant de fournir une valeur approchée de l'intégrale :

$$I = \int_0^1 \cos(x^3) e^{-x} dx$$

✓

On voit que $I = \int \cos(x^3) e^{-x} \chi_{[0;1]}(x) dx = \mathbb{E}\left(\cos(U^3) e^{-U}\right)$ où U suit une loi $\mathcal{U}([0;1])$. Donc si $U_1, U_2 \ldots$ est une suite de VA iid selon la loi $\mathcal{U}([0;1])$, alors la loi des grands nombres donne la convergence presque sûre :

$$\frac{\cos(U_1^3)e^{-U_1} + \ldots + \cos(U_n^3)e^{-U_n}}{n} \longrightarrow I$$

Il suffit donc de programmer l'algorithme suivant :

- N=1000
- S = 0
- Pour i variant de 1 à N :
  U = réalisation d'une loi $\mathcal{U}([0;1])$
  $S = S + \cos(U^3) \times \exp(-U)$
- Afficher S/N

On voit aussi que $I = \int \cos(x^3) \chi_{[0;1]}(x) \chi_{[0;+\infty[}(x) e^{-x} dx = \mathbb{E}\left(\cos(V^3) \chi_{[0;1]}(V)\right)$ où V suit une loi $\mathcal{E}(1)$.