b1T2 ⊵ **Exercice** - *Etude d'une matrice tridiagonale*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice tridiagonale d'ordre $n > 2$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On admet que l'ensemble des valeurs propres de A est

$$sp(A) = \left\{ \lambda_k = 4\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right) \ , \ k \in \{1, ..., n\} \right\}$$

On souhaite résoudre un système linéaire $AX = b$ à l'aide d'une méthode itérative et on note X sa solution.

1. Exprimer la suite des itérés de la méthode de Jacobi sous la forme $X^{(k+1)} = BX^{(k)} + C$ en exprimant la matrice B en fonction de la matrice identité I_n et de la matrice A. La matrice A est-elle à diagonale strictement dominante ?
2. On définit l'erreur $e^{(k)} = X^{(k)} - X$ à la k-ème itération. Exprimer $e^{(k)}$ en fonction de $e^{(k-1)}$ et en déduire que $\|e^{(k)}\| \leqslant |||B|||^k \|e^{(0)}\|$ où $\|.\|$ est une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$ et $|||.|||$ la norme induite sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Calculer $|||B|||_\infty$. Qu'en conclure ?
4. Vérifier que le rayon spectral de B est $\rho(B) = \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$.
5. En déduire que la méthode de Jacobi converge pour la matrice A quelque soit l'initialisation.