AxDZ ⊵ **Exercice** - *Loi normale et loi de Laplace*

Définition : la fonction caractéristique d'une variable aléatoire U est la fonction définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par :

$$\Phi_U : t \longmapsto \mathbb{E}\left(e^{\mathbf{i}tU}\right)$$

Soit $\lambda > 0$ et soit une variable aléatoire X dont la loi est définie par la densité :

$$f_X : x \mapsto \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$$

On dit alors que X suit une loi de Laplace $\mathcal{L}(\lambda)$.

1. Montrer que $|X|$ suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
2. Montrer que la fonction caractéristique de X est $\Phi_X : t \mapsto \frac{\lambda^2}{\lambda^2+t^2}$.

Soient Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 quatre variables aléatoires indépendantes suivant une même loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On rappelle que si Z suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$ alors sa fonction caractéristique est $\Phi_Z : t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$.

3. Montrer que la fonction caractéristique de la variable aléatoire $Z_1 \times Z_2$ peut s'écrire sous cette forme :
$$\Phi_{Z_1 Z_2} : t \longmapsto \int_{\mathbb{R}} \Phi_Z(tu) \mathrm{e}^{-u^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{d}u.$$
4. En déduire que :
$$\Phi_{Z_1 Z_2} : t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$
5. En déduire la loi de la variable aléatoire $Z_1 Z_2 + Z_3 Z_4$ puis la loi de $|Z_1 Z_2 + Z_3 Z_4|$.