

On considère trois variables aléatoires indépendantes X_1, X_2, X_3 suivant chacune une loi de probabilité de même moyenne μ et de variance σ^2 . On pose

$$M_1 = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3} \text{ et } M_2 = \frac{X_1 + 2X_2 + 3X_3}{6}$$

1. Démontrer que ce sont deux estimateurs sans biais de la moyenne μ .



$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_1) &= \mathbb{E}\left(\frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}\right) \\ &= \frac{1}{3}\mathbb{E}(X_1 + X_2 + X_3) \\ &= \frac{1}{3}(\mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) + \mathbb{E}(X_3)) \\ &= \frac{1}{3}(3\mu) \\ &= \mu\end{aligned}$$

Donc $B(M_1) = \mathbb{E}(M_1) - \mu = \mathbb{E}(M_1) - \mu = \mu - \mu = 0$.

Donc M_1 est un estimateur sans biais de la moyenne μ .

De même, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_2) &= \mathbb{E}\left(\frac{X_1 + 2X_2 + 3X_3}{6}\right) \\ &= \frac{1}{6}\mathbb{E}(X_1 + 2X_2 + 3X_3) \\ &= \frac{1}{6}(\mu + 2\mu + 3\mu) \\ &= \frac{6\mu}{6} \\ &= \mu\end{aligned}$$

Donc $B(M_2) = \mathbb{E}(M_2) - \mu = \mathbb{E}(M_2) - \mu = \mu - \mu = 0$.

Donc M_2 est un estimateur sans biais de la moyenne μ .

2. Lequel de ces deux estimateurs est le plus efficace ?



$$\begin{aligned}\text{V}(M_1) &= \text{V}\left(\frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}\right) \\ &= \frac{1}{9}\text{V}(X_1 + X_2 + X_3) \\ &= \frac{1}{9}(\text{V}(X_1) + \text{V}(X_2) + \text{V}(X_3)) \\ &= \frac{1}{9}(3\sigma^2) \\ &= \frac{\sigma^2}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{V}(M_2) &= \text{V}\left(\frac{X_1 + 2X_2 + 3X_3}{6}\right) \\ &= \frac{1}{36}\text{V}(X_1 + 2X_2 + 3X_3) \\ &= \frac{1}{36}(\text{V}(X_1) + 4\text{V}(X_2) + 9\text{V}(X_3)) \\ &= \frac{1}{36}(3\sigma^2 + 4\sigma^2 + 9\sigma^2) \\ &= \frac{16\sigma^2}{36} \\ &= \frac{4\sigma^2}{9}\end{aligned}$$

Donc $\text{V}(M_1) = \frac{\sigma^2}{3}$ et $\text{V}(M_2) = \frac{4\sigma^2}{9}$.

Donc $\text{V}(M_1) < \text{V}(M_2)$.

Donc M_1 est plus efficace que M_2 .