

Une urne contient 2 boules noires et 8 boules blanches.

- Un joueur tire successivement 5 boules en remettant la boule dans l'urne après chaque tirage. S'il tire une boule blanche il gagne 2 points dans le cas contraire il perd trois points. Soit  $X$  le nombre de points obtenus par le joueur en une partie.
  - Dresser le tableau définissant la loi de  $X$ .

On peut dénombrer les cas possibles en regardant le nombre de boules blanches au sein d'un tirage de 5 boules :

0 boule blanche :  $X = 5 \times (-3) = -15$  pts

1 boule blanche :  $X = 2 + 4 \times (-3) = -11$  pts

2 boules blanches :  $X = 2 \times 2 + 3 \times (-3) = -5$  pts

3 boules blanches :  $X = 3 \times 2 + 2 \times (-3) = 0$  pts

4 boules blanches :  $X = 4 \times 2 + 1 \times (-3) = 5$  pts

5 boules blanches :  $X = 5 \times 2 = 10$  pts

A chaque tirage, la probabilité d'avoir une boule noire est 0.2 et la probabilité d'avoir une boule blanche est 0.8 car il y a remise. La probabilité d'avoir un certain tirage contenant  $k$  boules blanches et  $5 - k$  boules noires est donc  $(0.8)^k \times (0.2)^{5-k}$ . Sur un tirage de 5 boules, il y a  $\binom{5}{k}$  combinaisons possibles pour avoir  $k$  boules blanches parmi ces 5 boules. Au final, on a une probabilité d'avoir  $k$  boules blanches :  $\binom{5}{k} \times (0.8)^k \times (0.2)^{5-k}$ .

Pour  $k = 2$  par exemple, on a une probabilité de 0.0512. Le nombre de points  $X$  étant déterminé par le nombre de boules blanches, on en déduit directement la loi de la variable  $X$  :

$k$	-15	-11	-5	0	5	10
$P(X = k)$	0,00032	0,0064	0,0512	0,2048	0,4096	0,32768

- Calculer l'espérance et la variance de  $X$ .

L'espérance de  $X$  se calcule à partir du tableau et on trouve  $\mathbb{E}(X) = 4$  : c'est le nombre de points que l'on peut obtenir en moyenne à ce jeu.

- Le joueur tire 5 boules simultanément, les 10 boules de l'urne étant numérotées de 1 à 10. Soit  $Y$  le plus grand des numéros tirés. Déterminer la loi de probabilité de  $Y$  et calculer son espérance.

La variable  $Y$  est le plus grand des numéros tirés sur les 5 boules. Sur 5 boules tirées, la plus grande valeur est nécessairement supérieure ou égale à 5. Ainsi, les valeurs possibles prises par  $Y$  sont  $\{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ .

Il y a  $\binom{10}{5}$  tirages possibles, ils sont équiprobables.

Pour obtenir  $Y = 5$ , il n'y a qu'un seul tirage possible : 5 boules parmi les 5 plus petits numéros.

Pour obtenir  $Y \leq 6$ , il y a  $\binom{6}{5}$  tirages possibles : 5 boules parmi les 6 plus petits numéros.

On généralise : pour obtenir  $Y \leq k$ , il y a  $\binom{k}{5}$  tirages possibles : 5 boules parmi les  $k$  plus petits numéros (avec  $k$  compris entre 5 et 10). On en déduit la fonction de répartition de  $Y$  :

$$P(Y \leq k) = \frac{\binom{k}{5}}{\binom{10}{5}}$$

puis on obtient  $P(Y = k) = P(Y \leq k) - P(Y \leq k - 1)$ . Numériquement, cela donne :

$k$	5	6	7	8	9	10
$P(Y \leq k)$	0,003968	0,0238095	0,0833333	0,222222	0,5	1
$P(Y = k)$	0,003968	0,019841	0,059524	0,138889	0,277778	0,5