Soient X et Y deux variables aléatoires réelles et soient y et a deux paramètres réels tels que la loi du couple (X,Y) soit donnée par le tableau joint :

$X\backslash Y$	-1	y
-2	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{18}$
-1	$\frac{1}{9}$	0
1	0	a
2	$\frac{1}{18}$	$\frac{2}{6}$

1. Quelle est la valeur du paramètre a ?

✓

On a nécessairement :

$$\frac{1}{6}+\frac{2}{18}+\frac{1}{9}+a+\frac{1}{18}+\frac{2}{6}=1$$

donc $a=\frac{2}{9}$.

2. Déterminer les lois marginales de X et de Y. Ces variables sont-elles indépendantes ?

✓

$X\backslash Y$	-1	y	P_X (loi de X)
-2	$\frac{3}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{5}{18}$
-1	$\frac{2}{18}$	0	$\frac{2}{18}$
1	0	$\frac{4}{18}$	$\frac{4}{18}$
2	$\frac{1}{18}$	$\frac{6}{18}$	$\frac{7}{18}$
P_Y (loi de Y)	$\frac{6}{18}$	$\frac{12}{18}$	1

Il n'y a pas indépendance des variables X et Y car $\mathrm{P}(X=1,Y=-1)=0$ et $\mathrm{P}(X=1)\mathrm{P}(Y=-1)=\frac{6}{18}\times\frac{4}{18}\neq 0$.

3. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$.

✓

L'espérance de X est la suivante :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X)&=(-2)\mathrm{P}(X=-2)+(-1)\mathrm{P}(X=-1)+1\mathrm{P}(X=1)+2\mathrm{P}(X=2)\\&=(-2)\times\frac{5}{18}+(-1)\frac{2}{18}+\frac{4}{18}+2\times\frac{7}{18}\\&=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

L'espérance de Y est

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y)&=(-1)\mathrm{P}(Y=-1)+y\mathrm{P}(Y=-y)\\&=(-1)\times\frac{6}{18}+y\times\frac{12}{18}\\&=\frac{-1}{3}+\frac{2}{3}y.\end{aligned}$$

4. Déterminer y de sorte que $\mathbb{E}(X.Y)=0$.

✓

Il faut déterminer la loi de XY. Les valeurs possibles prises par XY sont données dans le tableau suivant :

$X\backslash Y$	-1	y
-2	$XY=2$	$XY=-2y$
-1	$XY=1$	$XY=-y$
1	$XY=-1$	$XY=y$
2	$XY=-2$	$XY=2y$

On en déduit la loi de XY :

k	-2	-1	1	2	$-2y$	$-y$	y	$2y$
$\mathrm{P}(XY=k)$	$\frac{1}{18}$	0	$\frac{2}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{2}{18}$	0	$\frac{4}{18}$	$\frac{6}{18}$

soit de manière plus synthétique :

k	-2	1	2	$-2y$	y	$2y$
$\mathrm{P}(XY=k)$	$\frac{1}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{6}{18}$

L'espérance de XY est donc la suivante :

$$\mathbb{E}(XY)=\frac{1}{18}\times(-2+2+6-4y+4y+12y)=\frac{1}{18}\times(6+12y).$$

On a ainsi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(XY)=0\quad&\Leftrightarrow\quad\frac{1}{18}\times(6+12y)=0\\&\Leftrightarrow\quad y=\frac{-1}{2}.\end{aligned}$$

5. On pose désormais $y=1$ et on considère les variables aléatoires $U=Y$ et $V=\frac{X}{Y}$. Déterminer le tableau de la loi de probabilité du couple (U,V). Que peut-on dire des variables aléatoires U et V ?

✓

On s'intéresse d'abord aux valeurs que le couple $(U=Y,V=\frac{X}{Y})$ peut prendre :

$X\backslash Y$	-1	1
-2	$(U,V)=(-1,2)$ $\frac{3}{18}$	$(U,V)=(1,-2)$ $\frac{2}{18}$
-1	$(U,V)=(-1,1)$ $\frac{2}{18}$	$(U,V)=(1,-1)$ 0
1	$(U,V)=(-1,-1)$ 0	$(U,V)=(1,1)$ $\frac{4}{18}$
2	$(U,V)=(-1,-2)$ $\frac{1}{18}$	$(U,V)=(1,2)$ $\frac{6}{18}$

On obtient ainsi la loi du couple (U,V) :

$X\backslash Y$	-2	1	2	P_U (loi de U)
-1	$\frac{1}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{6}{18}$
1	$\frac{2}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{6}{18}$	$\frac{12}{18}$
P_V (loi de V)	$\frac{3}{18}$	$\frac{6}{18}$	$\frac{9}{18}$	1

On peut vérifier que :

$$\forall i\in\{-1,1\},\forall j\in\{-2,1,2\},\quad \mathrm{P}(U=i,V=j)=\mathrm{P}(U=i)\times\mathrm{P}(V=j)$$

donc les variables aléatoires U et V sont indépendantes.