

## Exercice - Construction de la loi du $\chi^2$

On appelle loi Gamma  $\Gamma(\alpha, \lambda)$  où  $\alpha > 0, \lambda > 0$  la loi dont la densité est définie par

$$f(t) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\lambda t} \mathbf{1}_{[0;+\infty[}(t)$$

où

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite. On pose  $Y = X^2$ .

- En étudiant sa fonction de répartition, montrer que  $Y$  suit une loi  $\Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

Soit  $F_Y$  la fonction de répartition de  $Y$ . Puisque  $Y$  ne prend que des valeurs positives,  $F_Y(t) = 0$  pour tout  $t < 0$ . Soit  $t \geq 0$  : alors

$$\begin{aligned} P(Y < t) &= P(|X_1| < \sqrt{t}) \\ &= 2P(0 < X_1 < \sqrt{t}) \text{ par symétrie de la variable } X_1 \\ &= 2 \int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ &= 2 \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \\ &= \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \end{aligned}$$

La variable  $Y$  admet donc pour densité  $f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x^2}{2}}$  pour tout  $x > 0$  : en remarquant que  $f_Y(x) = \frac{1}{\Gamma(1/2)2^{1/2}} x^{1/2-1} e^{-x/2}$ , on voit qu'il s'agit d'une loi  $\Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

- Soit un entier  $n \geq 1$  et soit  $U_n$  une variable aléatoire suivant une loi  $\Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$ . Déterminer la fonction génératrice de  $U_1$  puis celle de  $U_n$  pour  $n \geq 1$ .

On calcule directement :

$$\begin{aligned} m_Y(t) &= \mathbb{E}(e^{tY}) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{xt} \frac{1}{\Gamma(1/2)2^{1/2}} x^{1/2-1} e^{-x/2} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(1/2)2^{1/2}} x^{1/2-1} e^{-\frac{x}{2}(1-2t)} dx \text{ (l'intégrale converge ssi } 1-2t > 0) \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(1/2)2^{1/2}} y^{1/2-1} e^{-\frac{y}{2}} (1-2t)^{-1/2} dy \\ &= (1-2t)^{-1/2} \end{aligned}$$

- Soient  $(Z_1, \dots, Z_n)$  des variables i.i.d selon une loi normale centrée réduite. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire

$$\sum_{i=1}^n Z_i^2$$

Par somme de variables indépendantes, la fonction génératrice de  $\chi^2$  est  $m_{\chi^2}(t) = (1-2t)^{-n/2}$ . En refaisant le même calcul que précédemment, on reconnaît la fonction génératrice d'une variable admettant pour densité  $\frac{1}{\Gamma(n/2)2^{n/2}} x^{n/2-1} e^{-x/2}$ , donc une variable suivant une loi  $\Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$ .