Ex

Décomposition en éléments simples

1. Vérifier que le polynôme $B(X) = X^2 - X + 1$ est irréductible sur $\mathbb{R}[X]$. Effectuer la division euclidienne du polynôme $A(X) = X^3 + 2X - 1$ par le polynôme $B(X)$, et en déduire les coefficients a, b, c et d de la décomposition en éléments simples de :

$$F(X) = \frac{A(X)}{(B(X))^2} = \frac{X^3 + 2X - 1}{\left(X^2 - X + 1\right)^2} = \frac{a \cdot X + b}{\left(X^2 - X + 1\right)^2} + \frac{cX + d}{X^2 - X + 1}$$

✓

$$A(X) = X^3 + 2X - 1 = \underbrace{\left(X^2 - X + 1\right)}_{B(X)} \cdot (X + 1) + 2X - 2$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} F(X) = \frac{A(X)}{(B(X))^2} &= \frac{X^3 + 2X - 1}{\left(X^2 - X + 1\right)^2} \\ &= \frac{\left(X^2 - X + 1\right) \cdot (X + 1) + 2X - 2}{\left(X^2 - X + 1\right)^2} \\ &= \frac{2X - 2}{\left(X^2 - X + 1\right)^2} + \frac{X + 1}{X^2 - X + 1} \end{aligned}$$

2. En s'inspirant de la question précédent, décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}(X)$:

$$F(X) = \frac{-3X^2 + X - 3}{\left(X^2 + 1\right)^8}$$

✓

$F(X)$ n'a pas de partie entière. Effectuons une division euclidienne de $-3X^2 + X - 3$ par $X^2 + 1$:

$$-3X^2 + X - 3 = (-3) \cdot \left(X^2 + 1\right) + X$$

en divisant par $\left(X^2 + 1\right)^8$:

$$F(X) = \frac{-3X^2 + X - 3}{\left(X^2 + 1\right)^8} = \frac{-3}{\left(X^2 + 1\right)^7} + \frac{X}{\left(X^2 + 1\right)^8}$$