

**Exercice - Variance, covariance, indépendance dans un couple**

Soit  $a \in \mathbb{R}$  et  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires admettant une densité  $f$  définie par

$$f(x, y) = a(x + y)\mathbf{1}_{[0;1]}(x)\mathbf{1}_{[0;1]}(y)$$

- Déterminer  $a$ .

On calcule  $\int_0^1 \int_0^1 (x + y) dx dy = \int_0^1 x dx \int_0^1 dy + \int_0^1 dx \int_0^1 y dy = \frac{1}{2} \times 1 + 1 \times \frac{1}{2} = 1$  donc il faut  $a = 1$ .

- Déterminer les lois marginales du couple  $(X, Y)$ .

On détermine les densités marginales  $f_X$  et  $f_Y$  à partir de la densité  $f$  du couple de variables :  $f_X(x) = \int f(x, y) dy = \mathbf{1}_{[0;1]}(x) \left[ xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \mathbf{1}_{[0;1]}(x) \left( x + \frac{1}{2} \right)$ . De même,  $f_Y(y) = \mathbf{1}_{[0;1]}(y) \left( y + \frac{1}{2} \right)$

- Calculer  $\mathbb{E}(X)$ ,  $\sigma^2(X)$ ,  $\mathbb{E}(Y)$ ,  $\sigma^2(Y)$ ,  $cov(X, Y)$ .

On utilise les densités marginales :  $\mathbb{E}(X) = \int x f_X(x) dx = \int_0^1 \left( x^2 + \frac{x}{2} \right) dx = \frac{7}{12}$ . De même,  $\mathbb{E}(Y) = \frac{7}{12}$ .

Par théorème de transfert,  $\mathbb{E}(X^2) = \int x^2 f_X(x) dx = \int_0^1 x^3 + \frac{x^2}{2} dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$ . De même,  $\mathbb{E}(Y^2) = \frac{5}{12}$ .

On peut ainsi calculer la variance  $\sigma^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{11}{144}$  et  $\sigma^2(Y) = \sigma^2(X)$ .

Pour le calcul de la covariance, on calcule  $\mathbb{E}(XY)$  en appliquant le théorème de transfert sur la loi du couple  $(X, Y)$  :  $\mathbb{E}(XY) = \int_0^1 \int_0^1 xy(x + y) dx dy = \int_0^1 x^2 dx \int_0^1 y dy + \int_0^1 x dx \int_0^1 y^2 dy = \frac{1}{3}$ . Il vient  $cov(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \frac{-1}{144}$ .

- Les variables  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?

Les variables  $X$  et  $Y$  sont donc corrélées, elles ne sont donc pas indépendantes. Cela se vérifie également en comparant le produit des densités marginales avec la densité du couple  $(X, Y)$ .