

En 2008, le célèbre opérateur FSR proposait un forfait téléphonique de 1 heure mensuelle. Pour étudier la consommation des clients ayant opté pour ce forfait, il a relevé la proportion mensuelle du forfait consommé par 15 clients et a obtenu, après avoir ordonné les résultats :

0.29	0.46	0.51	0.61	0.70	0.72	0.76	0.79
0.84	0.85	0.86	0.92	0.94	0.96	1	

Cette répartition suggère de modéliser les observations à l'aide d'une loi puissance de paramètre $(\lambda, 1)$ avec $\lambda > 0$ dont la fonction densité est :

$$f_\lambda(x) = \lambda x^{\lambda-1} \mathbf{1}_{[0;1]}(x)$$

1. À l'aide de la méthode du maximum de vraisemblance, construire un estimateur du paramètre λ , pour un n -échantillon (X_1, \dots, X_n) . On notera cet estimateur $\widehat{\lambda}_n$.
2. On admet que la variable aléatoire $2n \frac{\lambda}{\lambda_n}$ suit une loi $\chi^2(2n)$. En déduire l'expression d'un intervalle de confiance de niveau $1 - \alpha$ sous la forme $]-\infty ; T]$ pour le paramètre λ .