

On considère un avion contenant 100 passagers. On suppose que le poids d'un passager pris au hasard suit une loi de probabilité dont l'espérance est 71 kg et l'écart type est 7 kg.

1. Soit X la variable aléatoire donnant le poids total des 100 passagers. Que peut-on dire de la variable X ?

On ne connaît pas la loi de X mais d'après le théorème central limite, X suit approximativement une loi normale.

On peut calculer l'espérance de X et la variance de X : Si on note Y_i le poids du i -ème passager, on a $X = \sum_{i=1}^{100} Y_i$. Par conséquent, $\mathbb{E}(X) = 7100$ et $V(X) = 100 \times 7^2 = 4900$. D'après le théorème central limite, la loi de X peut être approchée par une loi normale de moyenne 7100 et de variance 4900, soit un écart type de 70.

2. Calculer la probabilité que le poids de l'ensemble des passagers soit supérieur à 7,3 tonnes.

En notant Z une variable aléatoire normale centrée réduite, on en déduit que

$$\begin{aligned} P(X > 7300) &= P\left(\frac{X - 7100}{70} > \frac{7300 - 7100}{70}\right) \\ &\approx P\left(Z > \frac{200}{70} \approx 2,857\right) \\ &\approx 0,0021 = 0,21\% \end{aligned}$$

Il n'y a quasiment aucune chance que le poids total des passagers dépasse 73 tonnes.

3. Sur 40 passagers interrogés au hasard, 23 voyagent avec un bagage en soute. Déterminer à l'aide d'un intervalle de confiance au niveau 95% une estimation de la proportion de passagers qui voyagent avec un bagage en soute sur ce vol.

On cherche à estimer une fréquence à partir d'un échantillon de taille 40. La fréquence observée dans l'échantillon est $f_{obs} = \frac{23}{40}$. On peut donc utiliser la formule du cours :

$$I_{conf}(F(\omega)) = \left[f_{obs} - u_{\alpha/2} \sqrt{\frac{f_{obs}(1-f_{obs})}{n}} ; f_{obs} + u_{\alpha/2} \sqrt{\frac{f_{obs}(1-f_{obs})}{n}} \right]$$

en remplaçant $u_{\alpha/2}$ par 1,96 pour une confiance de 95%, on obtient numériquement $I_{conf} \approx [0.42; 0.73]$.

On peut estimer que la proportion de passagers voyageant avec un bagage en soute est compris entre 42% et 73%.

4. L'avion ne peut pas accueillir plus de 65 bagages en soute. Quelle information en terme de risque peut-on donner à la compagnie aérienne ?

D'après la question précédente, il est tout à fait probable (avec une confiance de 95%) que le nombre de bagages en soute soit supérieur à 65 (entre 42 et 73). Pour que l'intervalle de confiance ne contienne pas 65%, il faut prendre un risque supérieur à 33%.