Ex

Inversibilité de matrices

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer $A^3 - 3 \cdot A^2 + 3 \cdot A$ et en déduire la matrice A^{-1}.

✓

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 & -6 \\ -3 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 - 3 \cdot A^2 + 3 \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & -6 \\ -3 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 5 & 4 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit :

$$A^3 - 3 \cdot A^2 + 3 \cdot A = I_3 \Leftrightarrow A \cdot \underbrace{\left(A^2 - 3 \cdot A + 3 \cdot I_3\right)}_{=A^{-1}} = I_3$$

$$\Rightarrow A^{-1} = A^2 - 3 \cdot A + 3 \cdot I_3$$