cRYI **Exercice** - *Mélange de lois, fonction de répartition*

Soit Z une variable aléatoire admettant une fonction de répartition F_Z définie par :

$$F_Z(x) = \begin{cases} \frac{1}{(2-x)^2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 - \frac{1}{3x} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Graphique : `https://www.geogebra.org/m/vat8nub8`

1. Vérifier que F_Z définit bien une fonction de répartition.

> F_Z est définie continue à droite et croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} F_Z(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F_Z(x) = 1$. Il s'agit donc bien d'une fonction de répartition.

2. Calculer $\mathrm{P}(Z = 0)$ et $\mathrm{P}(Z = 1)$. Peut-on dire que Z est une variable aléatoire absolument continue ?

> $\mathbb{P}(Z = 0) = F_Z(0^+) - F_Z(0^-) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. et $\mathbb{P}(Z = 1) = F_Z(1^+) - F_Z(1^-) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$. Comme $\mathbb{P}(Z = 0) \neq 0$, la variable Z n'est pas absolument continue.

3. On considère $Y : \Omega \to \{0; 1\}$ une variable aléatoire discrète dont la loi est définie par $\mathrm{P}(Y = k) = \alpha\mathrm{P}(Z = k)$ pour tout $k \in \{0; 1\}$ où α est un paramètre réel à déterminer.

   (a) Montrer que nécessairement, $\alpha = \frac{12}{5}$.

   > On a $\mathbb{P}(Y = 0) = \alpha\mathbb{P}(Z = 0) = \frac{1}{4}\alpha$ et $\mathbb{P}(Y = 1) = \alpha\mathbb{P}(Z = 1) = \frac{1}{6}\alpha$. Comme $\mathbb{P}(Y = 0) + \mathbb{P}(Y = 1) = 1$, on en déduit que $\alpha = \frac{12}{5}$.

   (b) Déterminer la fonction de répartition F_Y de la variable aléatoire Y.

   > La fonction de répartition de Y vaut $F_Y(t) = \begin{cases} 0 \text{ pour } t < 0 \\ \mathbb{P}(Y = 0) \text{ pour } 0 \leqslant t < 1 \\ \mathbb{P}(Y = 0) + \mathbb{P}(Y = 1) \text{ pour } t \geqslant 1. \end{cases}$ donc $F_Y(t) = \begin{cases} 0 \text{ pour } t < 0 \\ \frac{3}{5} \text{ pour } 0 \leqslant t < 1 \\ 1 \text{ pour } t \geqslant 1. \end{cases}$

4. On pose $F(x) = F_Z(x) - \frac{5}{12}F_Y(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Tracer le graphe de la fonction F.

> $F(x) = F_Z(x) - \frac{5}{12}F_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{(2-x)^2} \text{ pour } x < 0 \\ \frac{1}{4} \text{ pour } 0 \leqslant x < 1 \\ \frac{7}{12} - \frac{1}{3x} \text{ pour } x \geqslant 1. \end{cases}$

5. Démontrer qu'en multipliant F par une constante, on obtient la fonction de répartition d'une variable aléatoire que l'on notera X.

> La fonction $\frac{12}{7}F_Z$ est définie continue et croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{12}{7}F_Z(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{12}{7}F_Z(x) = 1$. Il est donc clair que $\frac{12}{7}F$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X, qui est absolument continue.

6. Déterminer une densité de probabilité de la variable X.

> Par dérivation,
>
> $$f_X(x) = \frac{12}{7}F'_X(x) \begin{cases} \frac{24}{7(2-x)^3} \text{ pour } x < 0 \\ 0 \text{ pour } 0 \leqslant x < 1 \\ \frac{4}{7x^2} \text{ pour } x \geqslant 1 \end{cases}.$$