Ex **Règle des chaînes**

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable.

1. On fixe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$ on pose $g(t) = f(x+t, y+t)$. Calculer $g'(t)$ quelque soit $t \in \mathbb{R}$ en l'exprimant en fonction de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x+t, y+t)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x+t, y+t)$.

   ✓ Par la règle des chaînes, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(t) = 1 \times \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 1 \times \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

2. On suppose que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x+t, y+t) = f(x, y)$$

   En déduire que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$.

   ✓ Par hypothèse sur la fonction f, $g(t) = f(x, y)$ donc g est constante par rapport à t donc $g'(t) = 0$. D'où l'égalité demandée.