Calcul d'intégrale

Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale :

$$I = \int_0^1 \ln(t)\ln(1-t)\mathrm{d}t$$

à l'aide d'un développement en série entière. On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\int_0^1 \frac{-t^n \ln(t)}{n}\mathrm{d}t = \frac{1}{n(n+1)^2}$$

✓

On réalise une intégration par parties en posant $u'(t) = \frac{t^n}{n}$ et $v(t) = \ln(t)$.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{t^n \ln(t)}{n}\mathrm{d}t &= \left[\frac{t^{n+1}}{n(n+1)}\ln(t)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^n}{n(n+1)}\mathrm{d}t \\ &= 0 - \left[\frac{t^{n+1}}{n(n+1)^2}\right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{n(n+1)^2}\end{aligned}$$

d'où le résultat.

2. Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{1}{n(n+1)^2} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{(n+1)^2}$$

✓

On trouve

$$\frac{1}{n(n+1)^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

3. À l'aide d'un développement en série entière et des résultats des questions précédentes, déterminer la valeur exacte de I.

✓

On rappelle d'abord que pour tout $t \in]-1;1[$:

$$\ln(1-t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-t^n}{n}$$

Par théorème d'intégration terme à terme pour une série entière, la variable t variant dans $]0;1[\subset]-1;1[$, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln(t)\ln(1-t)\mathrm{d}t &= \int_0^1 \ln(t)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-t^n}{n}\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 \ln(t)\times\frac{-t^n}{n}\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)^2} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2} \\ &= 1 - \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2} \\ &= 1 + 1 - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\end{aligned}$$

Donc $\boxed{I = 2 - \frac{\pi^2}{6}}$.