

▷ Exercice - Calcul d'une somme de série entière

On considère la série entière  $S(x) = \sum \frac{(3x)^n}{n^2 + 3n + 2}$ .

1. Calculer son rayon de convergence  $R$ . Si  $|x| = R$ , cette série converge-t-elle ?

$$R = \frac{1}{3}$$

Pour  $|x| = \frac{1}{3}$ , la série converge absolument car  $\frac{1}{n^2 + 3n + 2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ .

2. Décomposer la fraction rationnelle  $\frac{1}{n^2 + 3n + 2}$  en éléments simples, c'est-à-dire trouver les réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $\frac{1}{n^2 + 3n + 2} = \frac{\alpha}{n+1} + \frac{\beta}{n+2}$ .

$$\alpha = 1 \text{ et } \beta = -1$$

3. Calculer la somme de la série pour  $|x| < R$ .

Soit  $|x| < R$ . On a

$$S(x) = \frac{1}{3x} \ln(1 - 3x) \left( \frac{1}{3x} - 1 \right) + \frac{1}{3x}.$$