

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle de densité  $f_\theta$  définie par

$$f_\theta(x) = (1 - \theta)1_{[-\frac{1}{2}; 0]}(x) + (1 + \theta)1_{[0; \frac{1}{2}]}(x)$$

où  $\theta$  est un paramètre réel tel que  $|\theta| \neq 1$ .

1. A quelles conditions sur  $\theta$  la fonction  $f_\theta$  est bien une densité de probabilité ?

La fonction  $f_\theta$  est une densité de probabilité si elle est intégrable, positive sur  $\mathbb{R}$  et d'intégrale égale à 1.

— La positivité impose  $-1 \leq \theta \leq 1$ .

—  $\int_{\mathbb{R}} f_\theta(x) dx = \int_{-1/2}^0 (1 - \theta) dx + \int_0^{1/2} (1 + \theta) dx = \frac{1}{2}(1 - \theta) + \frac{1}{2}(1 + \theta) = 1$  donc ne fournit pas de condition spécifique sur  $\theta$ .

En synthèse,  $f_\theta$  est une densité si et seulement si  $|\theta| \leq 1$ .

2. Calculer l'espérance de  $X$ .

C'est une simple application de la définition

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \int_{\mathbb{R}} x f_\theta(x) dx \\ &= \int_{-1/2}^0 x(1 - \theta) dx + \int_0^{1/2} x(1 + \theta) dx \\ &= \left[(1 - \theta)\frac{x^2}{2}\right]_{-1/2}^0 + \left[(1 + \theta)\frac{x^2}{2}\right]_0^{1/2} \\ &= \frac{\theta}{4}\end{aligned}$$

3. Soient  $n$  variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  indépendantes et identiquement distribuées selon la loi de  $X$ . On définit les variables aléatoires :

$$U_n = \sum_{i=1}^n 1_{]-\infty; 0]}(X_i) \quad V_n = \sum_{i=1}^n 1_{]0; +\infty[}(X_i)$$

- (a) Vérifier que si  $1 \leq i \leq n$  alors la variable aléatoire  $1_{]0; +\infty[}(X_i)$  suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre.

La variable aléatoire

$$p = P(1_{]0; +\infty[}(X_i) = 1) = P(X_i \in ]0; +\infty[) = \int_0^{+\infty} f_\theta(x) dx = \int_0^{1/2} (1 + \theta) dx = \frac{1 + \theta}{2}$$

d'où  $1_{]0; +\infty[}(X_i) \sim \mathcal{B}\left(\frac{1+\theta}{2}\right)$ .

- (b) En déduire que  $V_n$  suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

Les variables aléatoires  $(X_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$  étant indépendantes, il en est de même des variables aléatoires  $(1_{]0; +\infty[}(X_i))_{i \in \{1, \dots, n\}}$ , qui sont telles que  $1_{]0; +\infty[}(X_i) \sim \mathcal{B}\left(\frac{1+\theta}{2}\right)$  pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Donc  $V_n$  est une somme de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre  $\frac{1+\theta}{2}$ . On en conclut que  $V_n \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{1+\theta}{2}\right)$ .

- (c) Vérifier que la variable aléatoire  $U_n + V_n$  est constante.

$$U_n + V_n = \sum_{i=1}^n (1_{]-\infty; 0]}(X_i) + 1_{]0; +\infty[}(X_i) = \sum_{i=1}^n 1_{\mathbb{R}}(X_i) = \sum_{i=1}^n 1 = n$$

- (d) Calculer l'espérance de la variable aléatoire  $\frac{V_n - U_n}{n}$ .

$$\mathbb{E}\left(\frac{V_n - U_n}{n}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{V_n - (n - V_n)}{n}\right) = \frac{2}{n}\mathbb{E}(V_n) - 1 = \frac{2}{n} \times n \times \frac{1 + \theta}{2} - 1 = \theta$$

- (e) Vérifier que  $\mathbb{E}(U_n V_n) = (n^2 - n)\frac{1-\theta^2}{4}$  et en déduire  $\text{cov}(U_n, V_n)$ .

$$\mathbb{E}(U_n V_n) = \mathbb{E}((n - V_n)V_n) = n\mathbb{E}(V_n) - \mathbb{E}(V_n^2)$$

or  $V_n \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{1+\theta}{2}\right)$  donc

—  $\mathbb{E}(V_n) = n \times \frac{1+\theta}{2}$

—  $\text{V}(V_n) = n \times \frac{1+\theta}{2} \times \left(1 - \frac{1+\theta}{2}\right) = \frac{n}{4}(1 - \theta^2)$ , or  $\text{V}(V_n) = \mathbb{E}(V_n^2) - \mathbb{E}(V_n)^2$  donc

$$\mathbb{E}(V_n^2) = \frac{n}{4}(1 - \theta^2) + \frac{n^2}{4}(1 + \theta)^2$$

d'où

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(U_n V_n) &= \frac{n^2}{2}(1 + \theta) - \left(\frac{n}{4}(1 - \theta^2) + \frac{n^2}{4}(1 + \theta)^2\right) \\ &= \frac{n^2}{4}(1 + \theta)(2 - (1 + \theta)) - \frac{n}{4}(1 - \theta^2) \\ &= \frac{n^2}{4}(1 - \theta^2) - \frac{n}{4}(1 - \theta^2) \\ &= (n^2 - n)\frac{1 - \theta^2}{4}\end{aligned}$$

On en déduit la covariance :

$$\begin{aligned}\text{cov}(U_n, V_n) &= \mathbb{E}(U_n V_n) - \mathbb{E}(U_n)\mathbb{E}(V_n) \\ &= \frac{n^2 - n}{4}(1 - \theta^2) - \mathbb{E}(n - V_n)\mathbb{E}(V_n) \\ &= \frac{n^2 - n}{4}(1 - \theta^2) - \left(n - \frac{n}{2}(1 + \theta)\right) \frac{n}{2}(1 + \theta) \\ &= \frac{n^2 - n}{4}(1 - \theta^2) - \frac{n^2}{4}(1 - \theta^2) \\ &= \frac{-n}{4}(1 - \theta^2)\end{aligned}$$

- (f) Montrer que la variance de  $\frac{V_n - U_n}{n}$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini.

$$\text{V}\left(\frac{V_n - U_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} (\text{V}(U_n) + \text{V}(V_n) - 2\text{cov}(U_n, V_n))$$

$$= \frac{1}{n^2} (2\text{V}(V_n) - 2\text{cov}(U_n, V_n)) \quad \text{car} \quad \text{V}(U_n) = \text{V}(n - V_n) = \text{V}(V_n)$$

$$= \frac{1}{n^2} \left(\frac{n}{2}(1 - \theta^2) + \frac{n}{2}(1 - \theta^2)\right)$$

$$= \frac{1 - \theta^2}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$