aUnN $\trianglerighteq$ **Exercice** - *Problème de continuité*

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$(x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?

On peut passer en coordonnées polaires en posant $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$: en utilisant l'inégalité triangulaire et le fait que $|\cos(\theta)| \leqslant 1$ et $|\sin(\theta)| \leqslant 1$, on obtient la majoration suivante : $|f(x,y)| \leqslant \frac{r\times r(r^2+r^2)}{r^2} \leqslant 2r^2 \xrightarrow[r\to 0]{} 0$. On peut ainsi conclure que f est bien continue en $(0,0)$.

2. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pour $(x,y) \neq (0,0)$.

Les formules de dérivation usuelles s'appliquent sur l'expression de f en tout point $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(y^2+x^2)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{(-x)(y^4+4y^2x^2-x^4)}{(x^2+y^2)^2}$$

3. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

Hors de question ici d'utiliser des formules de dérivation puisqu'il n'y a pas d'expression de la fonction au voisinage de ce point... On doit donc revenir à la définition et regarder la limite du taux d'accroissement pour chaque variable.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0$$