AxDZ ▷ **Exercice** - *Loi normale et loi de Laplace*

Définition : la fonction caractéristique d'une variable aléatoire U est la fonction définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par :

$$\Phi_U : t \longmapsto \mathbb{E}\left(e^{\mathbf{i}tU}\right)$$

Soit $\lambda > 0$ et soit une variable aléatoire X dont la loi est définie par la densité :

$$f_X : x \mapsto \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$$

On dit alors que X suit une loi de Laplace $\mathcal{L}(\lambda)$.

1. Montrer que $|X|$ suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

Soit $t \in \mathbb{R}$, on exprime la fonction de répartition de la variable aléatoire $|X|$:

$$\begin{aligned} F_{|X|}(t) &= \mathrm{P}(|X| \leqslant t) \\ &= \begin{cases} \mathrm{P}(-t \leqslant X \leqslant t) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Soit $t > 0$:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(-t \leqslant X \leqslant t) &= \int_{-t}^{t} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|} dx \\ &= 2\int_{0}^{t} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{t} \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{[0;+\infty[}(x) dx \end{aligned}$$

On en déduit que $|X|$ suit une loi exponentielle de paramètre λ.

2. Montrer que la fonction caractéristique de X est $\Phi_X : t \mapsto \frac{\lambda^2}{\lambda^2+t^2}$.

Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} \Phi_X(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda}{2} e^{\mathbf{i}tx} e^{-\lambda|x|} dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} \frac{\lambda}{2} e^{x(\lambda+\mathbf{i}t)} dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{\lambda}{2} e^{x(-\lambda+\mathbf{i}t)} dx \\ &= \frac{\lambda}{2}\frac{1}{\lambda+\mathbf{i}t} - \frac{\lambda}{2}\frac{1}{-\lambda+\mathbf{i}t} \\ &= \frac{\lambda^2}{\lambda^2+t^2} \end{aligned}$$

Soient Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 quatre variables aléatoires indépendantes suivant une même loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On rappelle que si Z suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$ alors sa fonction caractéristique est $\Phi_Z : t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$.

3. Montrer que la fonction caractéristique de la variable aléatoire $Z_1 \times Z_2$ peut s'écrire sous cette forme :

$$\Phi_{Z_1 Z_2} : t \longmapsto \int_{\mathbb{R}} \Phi_Z(tu) \mathrm{e}^{-u^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{d}u.$$

Par indépendance, le couple de variables aléatoires (Z_1, Z_2) a pour densité :

$$(x,y) \mapsto \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

Donc d'après le théorème de transfert puis le théorème de Fubini, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \Phi_{Z_1 Z_2}(t) &= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{\mathbf{i}txy} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{\mathbf{i}txy} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \Phi_Z(ty) \mathrm{e}^{-y^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{d}y \end{aligned}$$

4. En déduire que :

$$\Phi_{Z_1 Z_2} : t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

On a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \Phi_{Z_1 Z_2}(t) &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-y^2\theta^2/2} \times \mathrm{e}^{-y^2/2} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-(1+t^2)y^2/2} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-u^2/2} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{aligned}$$

5. En déduire la loi de la variable aléatoire $Z_1 Z_2 + Z_3 Z_4$ puis la loi de $|Z_1 Z_2 + Z_3 Z_4|$.

La variable aléatoire $Z_3 Z_4$ est indépendante de $Z_1 Z_2$ et suit la même loi que $Z_1 Z_2$ donc par propriété de la fonction caractéristique, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \Phi_{Z_1 Z_2 + Z_3 Z_4}(t) &= \left(\Phi_{Z_1 Z_2}(t)\right)^2 \\ &= \frac{1}{1+t^2} \end{aligned}$$

On reconnait la fonction caractéristique d'une loi de Laplace de paramètre $\lambda = 1$.

On en déduit d'après la question 2 que la variable aléatoire $|Z_1 Z_2 + Z_3 Z_4|$ suit une loi exponentielle de paramètre 1.