

Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$$

On admet que le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(X) = -(X - 1 + a)^2(X - 1 - 2a)$.

1. En déduire des conditions sur $a \in \mathbb{R}$ telles que la matrice A soit symétrique définie positive.
On se restreindra à ce cas par la suite.

La matrice A est définie positive si ses valeurs propres $1 - a > 0$ et $1 + 2a > 0$, autrement dit si $-\frac{1}{2} < a < 1$.

2. Déterminer le rayon spectral de la matrice $I_3 - A$ où I_3 est la matrice identité.

D'après ce qui précède, la matrice $I_3 - A$ a deux valeurs propres : $-a$ et $2a$. Son rayon spectral est donc $2|a|$.

3. En déduire des conditions nécessaires et suffisantes sur $a \in \mathbb{R}$ pour que la méthode de Jacobi converge vers une solution du système $Ax = b$.

Pour que la méthode de Jacobi converge, il faut et il suffit que $\rho(D - A) < 1$ où $D = I_3$ est la diagonale de A . La méthode converge si et seulement si $\rho(D - A) = 2|a| < 1$. On en déduit que la condition nécessaire et suffisante de convergence de la méthode est que $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$.

4. Déterminer des conditions suffisantes sur $a \in \mathbb{R}$ pour que la méthode de Gauss-Seidel converge vers une solution du système $Ax = b$.

Pour que la méthode de Gauss converge, il suffit que la matrice soit symétrique définie positive.