Ex - Deux approximations

Une machine produit des rondelles métalliques en grande série. Une rondelle est acceptée si son diamètre extérieur est compris entre 21.9 et 22.1 mm. On suppose que sur l'ensemble de la production, le diamètre extérieur des rondelles est une variable aléatoire X qui suit une loi normale de moyenne 22 mm et d'écart-type 0.05 mm.

1. Quelle est la probabilité p qu'une pièce soit refusée ?

✓

On calcule la probabilité qu'une pièce soit acceptée

$$\mathrm{P}(21.9 \leqslant X \leqslant 22.1) = \mathrm{P}(-2 \leqslant \frac{X-22}{0.05} \leqslant 2) = 2\mathrm{P}(\frac{X-22}{0.05} \leqslant 2) - 1 = 2 \times 0.9772 - 1 = 0.9544.$$

Ainsi, la probabilité qu'une pièce soit refusée est $p = 1 - 0.9544 = 0.0456$.

2. On prélève 100 pièces. En utilisant une approximation par la loi de Poisson, donner une approximation de la probabilité qu'il y ait k rondelles refusées, pour $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

✓

Soit Y le nombre de rondelles refusées sur les 100 pièces. On a $Y \sim \mathcal{B}(100, p)$ et $\mathbb{E}(Y) = 100 \times p = 4.56$ donc Y peut être approchée par la variable aléatoire Z de loi $\mathcal{P}(4.56)$. Ainsi,

$$\forall k \in \{0, \cdots, 4\}, \quad \mathrm{P}(Y = k) \simeq \mathrm{P}(Z = k) = \frac{4.56^k}{k!} e^{-4.56}.$$

Les résultats demandés sont dans le tableau suivant :

k	0	1	2	3	4
$\mathrm{P}(Y = k)$	0.0105	0.0477	0.1088	0.1653	0.1885

3. On prélève 1000 pièces. Proposer une approximation de la probabilité qu'il y ait au moins 50 pièces refusées.

✓

Soit R le nombre de pièces refusées parmi les 1000 pièces. Alors $Z \sim \mathcal{B}(1000, p)$ qui peut être approchée par une loi Normale :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Y \geqslant 50) &\simeq \mathrm{P}(Z \geqslant 49.5) \qquad \text{où } Z \sim \mathcal{N}(45.6, \sigma^2 = 43.52) \\
&\simeq \mathbb{P}\left(\frac{Z - 45.6}{\sqrt{43.52}} \geqslant 0.59\right) \\
&\simeq 1 - \mathbb{P}\left(\frac{Z - 45.6}{\sqrt{43.52}} \leqslant 0.59\right) \\
&\simeq 1 - 0.7224 \\
&\simeq 0.2776
\end{aligned}$$

Il y a donc environ 27.76% de chances d'avoir au moins 50 pièces refusées dans le lot de 1000 pièces.