Ex 1 - Fonction caractéristique et loi normale

aaap

Soit Z une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite. On rappelle que la fonction caractéristique de Z est définie pour tout réel t par :

$$\phi_Z(t) = \mathbb{E}(e^{itZ}) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

1. Soit μ un réel et σ un réel strictement positif. Sans justifier, donner la loi de $X = \sigma Z + \mu$, puis calculer la fonction caractéristique de X.
2. Soit $(X_1, \ldots, X_5)$ une suite de 5 variables aléatoires indépendantes et équidistribuées selon une loi normale de moyenne $\mu = 70$ et d'écart type $\sigma = 15$. Soit $S = \sum_{i=1}^{5} X_i$.
   (a) Calculer la fonction caractéristique de S et en déduire la loi de S.
   (b) Calculer la valeur de $\mathrm{P}(S > 450)$ à 10^{-2} près.

Ex 2 - Loi d'un couple

vUFN

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé. On considère deux variables aléatoires discrètes X et Y telles que $X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$, $Y(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$ et $\mathrm{P}(X = x, Y = y)$ et :

$$\forall i \in \{1, 2, 3\}, \quad \mathrm{P}(X = i, Y = i) = \mathrm{P}(X = i, Y = i + 1) = \frac{1}{6}.$$

1. Déterminer la loi du couple de variables aléatoires (X, Y) sous forme d'un tableau.
2. Déterminer les lois marginales du couple (X, Y) puis calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$.
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
4. On pose $Z = X - Y$. Déterminer la loi du couple (X, Z). Les variables aléatoires X et Z sont-elles indépendantes ?