

On considère un échantillon (X_i) de taille $n = 5$ dans une population suivant une loi normale de paramètres μ et σ^2 . On pose

$$T_1 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 X_i \quad T_2 = \frac{1}{5}(X_1 + X_2) + \frac{1}{4}(X_3 + X_4 + X_5) \quad T_3 = \frac{1}{10}(2X_1 + 3X_2) + \frac{1}{8}(X_3 + 2X_4 + X_5)$$

$$U = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^5 (X_i - \mu)^2 \quad V = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^5 (X_i - T_1)^2$$

1. Quelle est la loi suivie par la variable $X_1 - X_2$? Justifier.

D'après le cours, $X_1 - X_2$ suit une loi normale d'espérance $\mathbb{E}(X_1 - X_2) = \mu - \mu = 0$. Par indépendance, $V(X_1 - X_2) = V(X_1) + (-1)^2 V(X_2) = 2\sigma^2$.

2. On cherche à estimer μ à l'aide des estimateurs T_1, T_2, T_3 . Étudier leur biais et comparer l'efficacité des estimateurs sans biais.

Par linéarité de l'espérance, on calcule $\mathbb{E}(T_1) = \frac{5\mu}{5} = \mu$, $\mathbb{E}(T_2) = \frac{2\mu}{5} + \frac{3\mu}{4}$, $\mathbb{E}(T_3) = \mu$. Par conséquent, $B(T_1) = B(T_3) = 0$ et $B(T_2) = \mathbb{E}(T_2) - \mu = \frac{3\mu}{20}$.

Pour comparer l'efficacité des deux estimateurs sans biais, on calcule leur EQM (ce qui revient à calculer leur variance.) Par indépendance des variables, on a :

$V(T_1) = \frac{\sigma^2}{5} < V(T_3) = \frac{147\sigma^2}{800}$. Le plus efficace est donc l'estimateur T_1 qui est la moyenne empirique.

3. Quelle est la loi suivie par la variable U ? la variable V ? Justifier.

$U = \sum_{i=1}^5 \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2$; or les X_i sont des variables aléatoires indépendantes et $\frac{X_i - \mu}{\sigma}$ suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$ donc par définition, U suit une loi de $\chi^2(5)$.

De plus, $T_1 = \bar{X}$ est l'estimateur de moyenne empirique donc d'après le théorème de Fisher, V suit une loi de $\chi^2(5 - 1) = \chi^2(4)$.

4. Déterminer $x \in \mathbb{R}$ tel que $P(U > x) = 0,05$.

On lit dans la table de loi $P(U < x) = 0,95$ pour $x = 11,07$.

5. En utilisant T_1 et U , construire une variable Y qui suive une loi de Student dont on précisera le paramètre.

On pose $Z = \frac{T_1 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{5}}}$ variable distribuée selon une loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Soit alors $Y = \frac{Z}{\sqrt{\frac{U}{5}}}$: par définition, Y suit une loi $St(5)$. Après simplification, on peut réécrire $Y = \frac{T_1 - \mu}{\frac{\sigma\sqrt{U}}{5}}$.