

Exercice - Application du théorème central limite

On considère une production de feuilles cartonnées dont l'épaisseur est modélisée par une variable aléatoire qui a pour espérance 5 mm et pour écart type 0,4 mm.

Considérant un paquet de 100 feuilles choisies au hasard de manière indépendante, comme calculer la probabilité que ce paquet ait une épaisseur comprise entre 49 et 51 cm ?

Soit X_1, \dots, X_{100} un échantillon où X_i représente l'épaisseur d'une feuille, $\mathbb{E}(X_i) = 5$ et $V(X_i) = 0,16$. Par indépendance, d'après le théorème central limite, la variable $S = \sum_{i=1}^{100} X_i$ suit approximativement une loi normale de moyenne $\mu = 100 \times 5 = 500$ et de variance $\sigma^2 = 100 \times 0,16 = 16$. Dit autrement, la variable $\frac{S-500}{\sqrt{16}}$ suit approximativement une loi normale centrée réduite.

On souhaite calculer

$$\text{P}(490 < S < 510) = \text{P}\left(\frac{490 - 500}{\sqrt{16}} < \frac{S - 500}{\sqrt{16}} < \frac{510 - 500}{\sqrt{16}}\right) = \text{P}\left(-2.5 < \frac{S - 500}{4} < 2.5\right) = \boxed{0,9876}$$