

On s'intéresse à la méthode de contrôle fiscal d'une entreprise qui consiste à vérifier la comptabilité de l'entreprise.

On considère que le temps de contrôle d'une entreprise est une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. On réalise 7 contrôles et on obtient les temps suivants (en jours) :

57 61 42 53 45 65 58.

- Donner une estimation de m et de σ^2 . On précisera les estimateurs utilisés en indiquant leurs propriétés.



On estime la moyenne m à l'aide de la moyenne empirique $(\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i)$, qui est sans biais et convergente :

$$\bar{x} = \frac{57 + 61 + 42 + 53 + 45 + 65 + 58}{7} = \frac{381}{7} \simeq 54.43$$

On estime la variance σ^2 à l'aide de la variance empirique $(S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2)$, qui est sans biais et convergent :

$$s^2 = \frac{1}{6} ((57 - 54.43)^2 + (61 - 54.43)^2 + \dots + (58 - 54.43)^2) \simeq 69.95$$

- Donner un intervalle de confiance de niveau 90% permettant d'estimer m .



Il s'agit d'un intervalle de confiance d'une moyenne dans le cas où la variance est inconnue et la loi mère de l'échantillon est une loi Normale. On a donc :

$$IC(\bar{X}) = \left[\bar{x} - t \times \frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{x} + t \times \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$$

avec $\bar{x} = 54.43$, $s = \sqrt{69.95} \simeq 8.36$, $n = 7$ et t est le réel tel que $\mathbb{P}(U \leq t) = 1 - \frac{0.10}{2} = 0.95$, où $U \sim St(6)$, c'est-à-dire $t = 1.9432$. On obtient alors

$$IC(\bar{X}) = [48.29; 60.57]$$