Ex - Densité et transformation affine

BGJz

Soit X une variable aléatoire absolument continue admettant pour densité f. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a > 0$ et $Y = aX + b$.

Démontrer que Y est une variable aléatoire absolument continue en exprimant sa densité en fonction de f.

✓

On utilise le théorème d'identification. La densité f_Y de Y est l'unique fonction telle que pour toute fonction h continue bornée, on ait

$$\mathbb{E}(h(Y)) = \int_{\mathbb{R}} h(y) f_Y(y)\ dy.$$

Or, étant donné h, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(h(Y)) &= \mathbb{E}(h(aX+b)) \\
&= \int_{\mathbb{R}} h(ax+b) f_X(x)\ dx \quad \text{(par le théorème de transfert)} \\
&= \int_{\mathbb{R}} h(y) f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \frac{1}{a} dy \quad \text{(par changement de variable } y = ax+b\text{)}
\end{aligned}$$

d'où son identification

$$f_Y(y) = \frac{1}{a} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right).$$