Une urne contient 2 boules noires et 8 boules blanches.

1. Un joueur tire successivement 5 boules en remettant la boule dans l'urne après chaque tirage. S'il tire une boule blanche il gagne 2 points dans le cas contraire il perd trois points. Soit X le nombre de points obtenus par le joueur en une partie.

   (a) Dresser le tableau définissant la loi de X.

   ✓

   On peut dénombrer les cas possibles en regardant le nombre de boules blanches au sein d'un tirage de 5 boules :
   0 boule blanche : $X = 5 \times (-3) = -15$ pts
   1 boule blanche : $X = 2 + 4 \times (-3) = -11$ pts
   2 boules blanches : $X = 2 \times 2 + 3 \times (-3) = -5$ pts
   3 boules blanches : $X = 3 \times 2 + 2 \times (-3) = 0$ pts
   4 boules blanches : $X = 4 \times 2 + 1 \times (-3) = 5$ pts
   5 boules blanches : $X = 5 \times 2 = 10$ pts

   A chaque tirage, la probabilité d'avoir une boule noire est 0.2 et la probabilité d'avoir une boule blanche est 0.8 car il y a remise. La probabilité d'avoir un certain tirage contenant k boules blanches et $5-k$ boules noires est donc $(0.8)^k \times (0.2)^{5-k}$. Sur un tirage de 5 boules, il y a $\binom{5}{k}$ combinaisons possibles pour avoir k boules blanches parmi ces 5 boules. Au final, on a une probabilité d'avoir k boules blanches : $\binom{5}{k} \times (0.8)^k \times (0.2)^{5-k}$.
   Pour $k = 2$ par exemple, on a une probabilité de 0.0512. Le nombre de points X étant déterminé par le nombre de boules blanches, on en déduit directement la loi de la variable X :

k	-15	-11	-5	0	5	10
$P(X = k)$	0,00032	0,0064	0,0512	0,2048	0,4096	0,32768

   (b) Calculer l'espérance et la variance de X.

   ✓

   L'espérance de X se calcule à partir du tableau et on trouve $\mathbb{E}(X) = 4$: c'est le nombre de points que l'on peut obtenir en moyenne à ce jeu.

2. Le joueur tire 5 boules simultanément, les 10 boules de l'urne étant numérotées de 1 à 10. Soit Y le plus grand des numéros tirés. Déterminer la loi de probabilité de Y et calculer son espérance.

   ✓

   La variable Y est le plus grand des numéros tirés sur les 5 boules. Sur 5 boules tirées, la plus grande valeur est nécessairement supérieure ou égale à 5. Ainsi, les valeurs possibles prises par Y sont $\{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.
   Il y a $\binom{10}{5}$ tirages possibles, ils sont équiprobables.
   Pour obtenir $Y = 5$, il n'y a qu'un seul tirage possible : 5 boules parmi les 5 plus petits numéros.
   Pour obtenir $Y \leqslant 6$, il y a $\binom{6}{5}$ tirages possibles : 5 boules parmi les 6 plus petits numéros.
   On généralise : pour obtenir $Y \leqslant k$, il y a $\binom{k}{5}$ tirages possibles : 5 boules parmi les k plus petits numéros (avec k compris entre 5 et 10). On en déduit la fonction de répartition de Y :

   $$P(Y \leqslant k) = \frac{\binom{k}{5}}{\binom{10}{5}}$$

   puis on obtient $P(Y = k) = P(Y \leqslant k) - P(Y \leqslant k-1)$. Numériquement, cela donne :

k	5	6	-7	8	9	10
$P(Y \leqslant k)$	0,003968	0,0238095	0,083333	0,222222	0,5	1
$P(Y = k)$	0,003968	0,019841	0,059524	0,138889	0,277778	0,5