aOYg ⊳ **Exercice** - *Etude d'une matrice pentadiagonale*

Soit $n \geqslant 3$, $\varepsilon > 0$ et $A(\varepsilon)$ la matrice pentadiagonale définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & & & \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & & \\ \varepsilon^2 & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & & & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ & & & \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ & & & \varepsilon^2 & \varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$

et on s'intéresse au système $Ax = b$ où $x, b \in \mathbb{R}^n$.

1. Ecrire une fonction Python qui génère la matrice $A(\varepsilon)$ pour tout n et ε :
   def epsmatrice(n,epsilon) : ... return ...
2. Donner un intervalle de valeurs de ε pour lesquelles $A(\varepsilon)$ est à diagonale strictement dominante, et calculer numériquement le conditionnement de $A(\varepsilon)$ pour $n = 10$ et $\varepsilon = 0.2$.

   > La matrice $A(\varepsilon)$ est à diagonale strictement dominante si et seulement si $1 > 2\varepsilon + 2\varepsilon^2 \iff \varepsilon \in \left[0; \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right]$.

3. Que permet de calculer la fonction suivante où `matrice` est une matrice carrée de taille n quelconque ?
   def rs(matrice) : return max(abs(eigvals(matrice)))

   > On reconnaît le calcul du rayon spectral de la matrice.

4. Ecrire une fonction Python qui génère la matrice $b_\varepsilon = A(\varepsilon)\overline{x}$ où $\overline{x} = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$. def epsb(n,epsilon) : ... return b
5. La méthode de Jacobi est-elle convergente pour $n = 10$ et $\varepsilon = 0.2$? Si oui, résoudre le système $A(\varepsilon)x = b_\varepsilon$ par cette méthode et donner le nombre d'itérations nécessaire pour une erreur de 10^{-8} et un vecteur initial $x_0 = 0$.

   > La matrice est à diagonale strictement dominante pour cette valeur de ε. La résolution demande 64 itérations.

6. Soit B la matrice d'itération associée à la méthode de Jacobi pour la matrice $A(\varepsilon)$. Pour $n = 20$ fixé, représenter graphiquement le rayon spectral de B en fonction de $\varepsilon \in [0; 1]$.
7. Faire de même pour la méthode de Gauss-Seidel.