xCO3 ⊳ **Exercice** - *Lois, fonctions caractéristiques pour un couple*

On pose $f(x,y) = k(1+xy(x^2-y^2))\mathbf{1}_{[-1;1]^2}(x,y)$.

1. Déterminer la valeur de k pour que f soit une densité de probabilité associée à un couple de variables aléatoires (X,Y).

f est positive sur $\mathbb{R}$ si $k \geqslant 0$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} k(1+x^3y-xy^3)dxdy \\ &= \int_{-1}^{1} k\left[x+\frac{1}{4}x^4y-\frac{1}{2}x^2y^3\right]_{x=-1}^{1} dy \\ &= \int_{-1}^{1} 2kdy \\ &= 4k.\end{aligned}$$

Pour $k = \dfrac{1}{4}$, f est positive sur $\mathbb{R}$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$ donc f est une densité de probabilité.

2. Déterminer les densités marginales de X et de Y, ainsi que leurs fonctions caractéristiques. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Les lois marginales de X et de Y sont

$$\begin{aligned}f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy \\ &= \frac{1}{4}\mathbf{1}_{[-1;1]}(x)\ \int_{-1}^{1}(1+x^3y-xy^3)dy \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[-1;1]}(x).\end{aligned}$$

Par symétrie, on obtient $f_Y(y) = \frac{1}{2}\chi_{[-1;1]}(y)$. Donc X et Y sont deux variables aléatoires de loi uniforme sur $[-1;1]$.
Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\phi_X(t) &= \mathbb{E}(e^{itX}) \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f_X(x)dx \quad \text{(théorème de transfert)} \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{itx}dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{it}e^{itx}\right]_{x=-1}^{x=1} \qquad \text{si } t \neq 0 \\ &= \frac{1}{2it}(e^{it}-e^{-it}) \quad \text{si } t \neq 0 \\ &= \frac{\sin t}{t} \quad \text{si } t \neq 0.\end{aligned}$$

Pour $t = 0$, $\phi_X(t) = \mathbb{E}(1) = 1 = \lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}$ donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi_X(t) = \frac{\sin t}{t}$. Comme X et Y sont de même loi, on a également pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi_Y(t) = \frac{\sin t}{t}$.
Les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes car leur densité jointe n'est pas le produit de leurs densités marginales.

3. Calculer la fonction caractéristique de $X+Y$.

Soit $t \in \mathbb{R}^*$. On a

$$\begin{aligned}\phi_{X+Y}(t) &= \mathbb{E}(e^{itX}e^{itY}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{itx}e^{ity}f(x,y)dxdy \quad \text{(théorème de transfert)} \\ &= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} e^{itx}e^{ity}dxdy + \frac{1}{4}\left(\int_{-1}^{1}\int -1^1 x^3ye^{itx}e^{ity}dxdy - \int_{-1}^{1}\int -1^1 xy^3e^{itx}e^{ity}dxdy\right) \\ &= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} e^{itx}dx\int_{-1}^{1} e^{ity}dy + 0 \\ &= \left[\frac{1}{2it}(e^{it}-e^{-it})\right]^2 \\ &= \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\end{aligned}$$

et par continuité de la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ en 0, on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi_{X+Y}(t) = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2.$$

Ici, on peut remarquer que nous avons l'égalité $\phi_{X+Y} = \phi_X\phi_Y$ malgré le fait que les variables aléatoires X et Y ne soient pas indépendantes.