

Soit la fonction  $f$  de deux variables  $x$  et  $y$  définie par

$$f(x, y) = 4 - \sqrt{1 + x^2 + y^2}$$

### Partie A

- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $f$ .

Pour tous réels  $x$  et  $y$ ,  $1 + x^2 + y^2 \geq 0$  donc la fonction  $f$  est bien définie sur  $\mathbb{R}^2$ .

- Exprimer les équations des lignes de niveau  $k$  de cette fonction.

Soit  $k$  réel : la ligne de niveau  $k$  est l'ensemble des points  $(x, y)$  tels que  $f(x, y) = k$ , c'est-à-dire

$$\sqrt{1 + x^2 + y^2} = 4 - k$$

Or  $1 + x^2 + y^2 \geq 1$  quels que soient  $x$  et  $y$  réels donc  $\sqrt{1 + x^2 + y^2} \geq 1$  et ainsi l'ensemble des points  $(x, y)$  tels que  $f(x, y) = k$  est non vide si  $4 - k \geq 1$  soit  $k \leq 3$  : dans ce cas, la ligne de niveau est un cercle centré en 0 de rayon  $\sqrt{(4 - k)^2 - 1}$ .

### Partie B

- Calculer les dérivées partielles de la fonction  $f$ .

On calcule les dérivées partielles :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 0 - \frac{0 + 2x + 0}{2\sqrt{1 + x^2 + y^2}} \\ &= \frac{-x}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 0 - \frac{0 + 0 + 2y}{2\sqrt{1 + x^2 + y^2}} \\ &= \frac{-y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}\end{aligned}$$

- Exprimer la matrice hessienne de  $f$ .

On calcule les dérivées partielles secondes :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{-\sqrt{1 + x^2 + y^2} - \frac{-x \times 2x}{2\sqrt{1+x^2+y^2}}}{(\sqrt{1 + x^2 + y^2})^2} \\ &= \frac{-\sqrt{1 + x^2 + y^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}}}{1 + x^2 + y^2} \\ &= \frac{\frac{-(1+x^2+y^2)+x^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}}}{1 + x^2 + y^2} \\ &= \frac{-(1 + x^2 + y^2) + x^2}{(1 + x^2 + y^2)\sqrt{1 + x^2 + y^2}} \\ &= \frac{-1 - y^2}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= -(1 + y^2)(1 + x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

De même,  $x$  et  $y$  jouant des rôles symétriques,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{-1 - x^2}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= -(1 + x^2)(1 + x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

Enfin, on calcule  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$  en réécrivant  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{-x}{\sqrt{1+x^2+y^2}} = -x(1+x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}$  puis en dérivant cette expression par rapport à  $y$  :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= -x \times (2y) \times \frac{-1}{2}(1 + x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}-1} \\ &= xy(1 + x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

On peut enfin écrire la matrice hessienne :

$$\begin{aligned}Hess_f(x, y) &= \begin{pmatrix} -(1 + y^2)(1 + x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} & xy(1 + x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} \\ xy(1 + x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} & -(1 + x^2)(1 + x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} \end{pmatrix} \\ &= (1 + x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} -(1 + y^2) & xy \\ xy & -(1 + x^2) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

- Déterminer les points critiques de la fonction  $f$ .

Pour déterminer les points critiques (stationnaires) de la fonction  $f$ , on résout le système d'équations :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-x}{\sqrt{1+x^2+y^2}} = 0 \\ \frac{-y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Il existe donc un unique point stationnaire : c'est le point  $(0, 0)$ .

- Vérifier que la fonction  $f$  admet un maximum local au point  $(0, 0)$  et donner la valeur de ce maximum. Peut-on dire que ce maximum est global ?

On étudie la nature de ce point stationnaire en évaluant  $Hess_f(0, 0) = 1 \times \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Le

déterminant de cette matrice est  $(-1) \times (-1) = 1 > 0$  donc la matrice admet bien un extremum local. Du fait que  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = -1 < 0$ , on en déduit qu'il s'agit bien d'un maximum local dont la valeur est  $f(0, 0) = 4 - \sqrt{1} = 3$ .

Il s'agit bien d'un maximum global car pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\sqrt{1 + x^2 + y^2} \geq 1$  ce qui implique que  $f(x, y) \leq 3$ .