

1. Trouver sous forme d'une série entière la solution de l'équation différentielle (E) :

$$(1-t)ty'(t) = (1+t)y(t)$$

vérifiant les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

Soit y une solution développable en série entière, de rayon de convergence R : on note $y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ et on a

$$\forall t \in]-R; R[, \quad y'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1}.$$

On a les équivalences suivantes :

$$y \text{ solution de (E)} \Leftrightarrow \forall t \in]-R; R[, (1-t)ty'(t) - (1+t)y(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in]-R; R[, \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n \times t^n - \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-1}(n-1)t^n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in]-R; R[, -a_0 - a_0 t + \sum_{n=2}^{+\infty} [a_n(n-1) - n a_{n-1}] t^n = 0$$

$$\Leftrightarrow a_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2, a_n = \frac{n}{n-1} a_{n-1}$$

Les conditions initiales donnent :

$$y(0) = a_0 = 0 \quad \text{et} \quad y'(0) = a_1 = 1.$$

On en conclut que pour tout $n \geq 0$, $a_n = n$ et donc

$$y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} n t^n.$$

2. Calculer la somme de cette série en précisant son intervalle de convergence.

La série $\sum_{n \geq 0} n t^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$.

On a

$$\forall t \in]-1; 1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$$

donc en dérivant

$$\forall t \in]-1; 1[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n t^{n-1} = \frac{1}{(1-t)^2}.$$

Par conséquent,

$$\forall t \in]-1; 1[, \quad y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} n t^n = t \sum_{n=0}^{+\infty} n t^{n-1} = t \sum_{n=1}^{+\infty} n t^{n-1} = \frac{t}{(1-t)^2}.$$