Ex 1 - CC Math 4

Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ de terme général $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$u_n = \frac{n^2}{n-1!},$$

converge.

Ex 2 - CC Math 4

Soit α un nombre réel et (u_n) la suite définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

$$u_n = \left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right) \times \left(1+\frac{2}{n^\alpha}\right) \times \cdots \times \left(1+\frac{n}{n^\alpha}\right) - 1.$$

1. Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, la suite (u_n) vérifie l'inégalité suivante :

$$u_n \geqslant \frac{n(n+1)}{2n^\alpha}.$$

On pourra utiliser la formule suivante : $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

2. Donner un équivalent à la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{n(n+1)}{2n^\alpha}$. En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ diverge pour $\alpha \leqslant 3$.
3. On suppose dans cette question $\alpha > 3$. Montrer l'inégalité suivante, pour tout $n \geqslant 1$:

$$0 \leqslant u_n \leqslant (1+\frac{n}{n^\alpha})^n - 1.$$

En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge pour $\alpha > 3$.

Ex 3 - CC Math 4

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

$$u_n = \cos(\frac{1}{\sqrt{n}})^n - \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

1. Montrer que le développement limité à l'ordre 4 de $x \mapsto \ln(\cos(x))$ en 0 est :

$$\ln(\cos(x)) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4).$$

2. Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, la suite $(n\ln(\cos(\frac{1}{\sqrt{n}})))_{n\geqslant 1}$ admet le développement limité suivant :

$$n\ln(\cos(\frac{1}{\sqrt{n}})) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{12n} + o(\frac{1}{n}).$$

3. Donner un équivalent de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et conclure quant à la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$.