Ex

Calculer les racines carrées de $1, i, 3+4i, 8-6i, 7+24i$.

✓

1. Les deux racines carrées de $z = 1 = e^{i.0}$ sont $z_k = e^{i\cdot\frac{0}{2}+ik\pi}$ $k \in \{0;1\}$, c'est-à-dire : $z_0 = e^{i.0} = 1$ et $z_1 = e^{i.\pi} = -1$;
2. Les deux racines carrées de $z = i = e^{i\cdot\frac{\pi}{2}}$ sont $z_k = e^{i\cdot\frac{\pi}{4}+ik\pi}$ $k \in \{0;1\}$, c'est-à-dire : $z_0 = e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}$ et $z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}+i\pi} = e^{i\cdot\frac{5\pi}{4}}$
3. Les deux racines carrées de $z = 3+4i = a+ib$ sont $z_1 = x+iy$ et $z_2 = -x$-iy telles que : $(x+iy)^2 = x^2-y^2+2ixy = 3+4i$ et $|x+iy|^2 = |3+4i| \Leftrightarrow x^2+y^2 = \sqrt{3^2+4^2} = 5$.
   Résolvons :
   $$\begin{cases} x^2-y^2 & = 3 \\ \quad 2xy & = 4 > 0 \\ x^2+y^2 & = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{3+5}{2} = 4 \\ y^2 = \frac{5-3}{2} = 1 \\ xy > 0 \end{cases}$$
   Les deux carrées de $z = 3+4i$ sont donc $z_1 = 2+i$ et $z_1 = -2-i$.
4. Les deux racines carrées de $z = 8-6i = a+ib$ sont $z_1 = x+iy$ et $z_2 = -x-iy$ telles que : $(x+iy)^2 = x^2-y^2+2ixy = 8-6i$ et $|x+iy|^2 = |8-6i| \Leftrightarrow x^2+y^2 = \sqrt{8^2+6^2} = 10$.
   Résolvons :
   $$\begin{cases} x^2-y^2 & = 8 \\ \quad 2xy & = -6 < 0 \\ x^2+y^2 & = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{8+10}{2} = 9 \\ y^2 = \frac{10-8}{2} = 1 \\ xy < 0 \end{cases}$$
   Les deux carrées de $z = 8-6i$ sont donc $z_1 = 3-i$ et $z_1 = -3+i$.
5. $7+24i$ Les deux racines carrées de $z = 7+24i = a+ib$ sont $z_1 = x+iy$ et $z_2 = -x-iy$ telles que : $(x+iy)^2 = x^2-y^2+2ixy = 7+24i$ et :
   $$|x+iy|^2 = |7+24i| \Leftrightarrow x^2+y^2 = \sqrt{7^2+24^2} = 25.$$
   Résolvons :
   $$\begin{cases} x^2-y^2 & = 7 \\ \quad 2xy & = 24 < 0 \\ x^2+y^2 & = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{7+25}{2} = 16 \\ y^2 = \frac{25-7}{2} = 9 \\ xy > 0 \end{cases}$$
   Les deux carrées de $z = 7+24i$ sont donc $z_1 = 4+3i$ et $z_1 = -4-3i$.