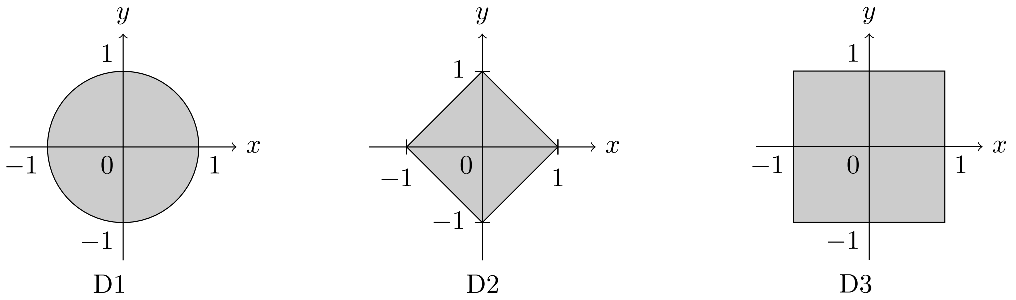
bOga **Exercice -** *Loi d'un couple de variables aléatoires*

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires admettant pour densité la fonction f définie par

$$f(x,y) = k \cdot \mathbf{1}_{\mathcal{C}}(x,y)$$

où $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leqslant 1\}$ et $k \in \mathbb{R}$.

1. Dire lequel de ces trois domaines de $\mathbb{R}^2$ représentés ci-dessous est le domaine $\mathcal{C}$.



Le domaine $\mathcal{C}$ est représenté en $D2$. C'est un carré d'aire $= 2$

2. Déterminer la valeur de $k \in \mathbb{R}$ telle que f définisse bien une fonction densité.

On choisit k de telle sorte que $f \geqslant 0$ et $\iint f(x,y)dxdy = 1$. Or $\iint f(x,y)dxdy = k \iint_{\mathcal{C}} dxdy = k \times aire(\mathcal{C}) = 2k$. Donc il faut prendre $\boxed{k = \frac{1}{2}}$.

On peut aussi faire calcul de manière analytique en utilisant la relation de Chasles (on distingue selon le signe de x et on encadre y) et le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\mathcal{C}} dxdy &= \int_{-1}^{0} \left(\int_{-1-x}^{1+x} dy\right) dx + \int_{0}^{1} \left(\int_{-1+x}^{1-x} dy\right) dx \\ &= \int_{-1}^{0} (2+2x)\,dx + \int_{0}^{1} (2-2x)\,dx \\ &= 2\end{aligned}$$

3. Déterminer les lois marginales du couple (X,Y).

On calcule les densités marginales : pour tout $x \in \mathbb{R}$: Si $x > 1$ ou si $x < -1$: $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy = \int_{\mathbb{R}} 0 = 0$;
Si $x \in [0;1]$:

$$\begin{aligned}f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1+x}^{1-x} dy \\ &= 1 - x\end{aligned}$$

Si $x \in [-1;0]$:

$$\begin{aligned}f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1-x}^{1+x} dy \\ &= 1 + x\end{aligned}$$

Avec des fonctions indicatrices, cela se réécrit pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_X(x) = \mathbf{1}_{[-1;0[}(x)(1+x) + \mathbf{1}_{[0;1[}(x)(1-x) = \mathbf{1}_{[-1;1]}(x)(1-|x|)$$

Les rôles étant symétriques en x et en y, on obtient de manière similaire que pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$f_Y(y) = \mathbf{1}_{[-1;0[}(y)(1+y) + \mathbf{1}_{[0;1[}(y)(1-y) = \mathbf{1}_{[-1;1]}(y)(1-|y|)$$

4. Déterminer $cov(X,Y)$.

On utilise la formule de Huygens : $cov(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. Ainsi, on calcule :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)dx \\ &= \int_{-1}^{0} x(1+x)dx + \int_{0}^{1} x(1-x)dx \\ &= -\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \\ &= 0\end{aligned}$$

Du fait que X et Y suivent la même loi, on déduit que $\mathbb{E}(Y) = 0$.
Il reste à calculer :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(XY) &= \iint\limits_{\mathbb{R}^2} xyf(x,y)dxdy \\ &= \frac{1}{2}\iint\limits_{\mathcal{C}} dxdy \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\left(\int_{-1-x}^{1+x} xydy\right)dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{1}\left(\int_{-1+x}^{1-x} xydy\right)dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{-1-x}^{1+x} dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{1} x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{-1+x}^{1-x} dydx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{0}(x \times 0)dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{1}(x\times 0)dx \\ &= 0\end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{\text{cov(X,Y)} = 0}$.

5. Étudier l'indépendance des variables X et Y.

On pourrait penser que les variables sont indépendantes car leur covariance est nulle. Cependant, ce n'est pas une condition suffisante et on observe que $f_X(x)f_Y(y) \neq f(x,y)$. La conclusion est que $\boxed{X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes}}$.