

On souhaite calculer à l'aide d'une méthode de Monte Carlo une approximation de l'intégrale

$$I = \int_0^1 \sin(\sqrt{x})dx$$

Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées selon une loi uniforme $\mathcal{U}([0; 1])$.

1. Démontrer que si on définit la suite de variables aléatoires (I_n) par

$$I_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin\left(\sqrt{X_k}\right)$$

alors la suite (I_n) converge presque sûrement vers la constante I .

Les variables $(\sin(\sqrt{X_k}))_i$ sont indépendantes et identiquement distribuées, elles admettent en outre une espérance qui se calcule à l'aide du théorème de transfert. Soit f la densité d'une loi uniforme sur $[0; 1]$. Alors $\mathbb{E}(X_1) = \int \sin(\sqrt{x}) f(x)dx = \int_0^1 \sin(\sqrt{x}) dx = I$.
D'après la loi forte de grands nombres, la suite de variables aléatoires (I_n) converge donc presque sûrement vers $\mathbb{E}(X_1) = I$.

2. Compléter le code Python suivant, comportant deux champs manquants, afin qu'il affiche une approximation de I .

```
n=1000
S=0
for i in range(n):
    u = ...
    S= S+sin(sqrt(u))
print("Valeur approchée de I = ")
print(...)
```

Il manque `u=rand()` et `print(S/n)`

3. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_k = \sin(\sqrt{X_k})$. Les variables aléatoires (X_k) étant i.i.d., les variables aléatoires (Y_k) le sont aussi et on note μ leur espérance et σ^2 leur variance.

- (a) Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire I_n en fonction de μ , σ et n .

Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(I_n) = \frac{1}{n} \times n \times I = I$. Par propriétés de la variance et indépendance des variables dans la somme, $V(I_n) = \frac{1}{n^2} \times n \times V(Y_1) = \frac{V(Y_1)}{n} = \frac{\sigma^2}{n}$.

- (b) Déterminer, en justifiant, une approximation de la loi de la variable aléatoire

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(I_n - I)$$

lorsque n est suffisamment grand.

Les variables Y_k sont indépendantes, identiquement distribuées, admettent une espérance et une variance finies, donc d'après le Théorème Central Limite, la variable

$$\frac{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k - I}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{Y_k}{n} - \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^n \frac{Y_k}{n}\right)}{\sigma \left(\sum_{k=1}^n \frac{Y_k}{n}\right)}$$

suit approximativement une loi normale centrée réduite.

- (c) En déduire le nombre d'itérations N_0 (dépendant de σ) à partir duquel la suite (I_n) réalise une approximation de I à 10^{-3} près avec une confiance de 95%.

On cherche le rang à partir duquel $P(|I_n - I| < \varepsilon) \geq 0.95$ où $\varepsilon = 10^{-3}$. Or

$$\begin{aligned} P(|I_n - I| < \varepsilon) &= P(-\varepsilon < I_n - I < \varepsilon) \\ &= P\left(-\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\varepsilon < \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(I_n - I) < \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\varepsilon\right) \\ &\approx P\left(-\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\varepsilon < Z < \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\varepsilon\right) \text{ où } Z \sim \mathcal{N}(0, 1) \end{aligned}$$

Or par lecture de tables, $P(-1.96 < Z < 1.96) \approx 0.95$ donc il suffit de prendre n tel que $\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\varepsilon \geq 1.96$ i.e.

$$n \geq 10^6 (1.96\sigma)^2$$

- (d) Soit la variable

$$V_n = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n (Y_{2k} - Y_{2k-1})^2$$

Vérifier que la suite (V_n) permet d'approcher la valeur de σ^2 .

On calcule

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((Y_{2k} - Y_{2k-1})^2) &= \mathbb{E}(Y_{2k}^2 - 2Y_{2k}Y_{2k-1} + Y_{2k-1}^2) \\ &= \mathbb{E}(Y_{2k}^2) - 2\mathbb{E}(Y_{2k}Y_{2k-1}) + \mathbb{E}(Y_{2k-1}^2) \text{ par linéarité} \\ &= 2\mathbb{E}(Y_{2k}^2) - 2\mathbb{E}(Y_{2k}Y_{2k-1}) \text{ par identique distribution} \\ &= 2\mathbb{E}(Y_{2k}^2) - 2\mathbb{E}(Y_{2k})\mathbb{E}(Y_{2k-1}) \text{ par indépendance} \\ &= 2\mathbb{E}(Y_{2k}^2) - 2\mathbb{E}(Y_{2k})^2 \\ &= 2\mathbb{E}(Y_1^2) - 2\mathbb{E}(Y_1)^2 \\ &= 2V(Y_1) \end{aligned}$$

donc d'après la loi forte des grands nombres, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (Y_{2k} - Y_{2k-1})^2$ converge simplement vers $2V(Y_1)$, ce qui répond à la question posée.