Ex

Jeu et suite

Un débutant à un jeu effectue plusieurs parties successives. Pour la première partie, il a une probabilité de $\frac{1}{2}$ de gagner. Pour les parties suivantes, on suppose que :

— s'il a gagné la partie précédente, il a une probabilité de 0.6 de gagner la partie suivante ;

— s'il a perdu la partie précédente, il a une probabilité de 0.7 de perdre la partie suivante.

Soit G_n l'événement « le joueur a gagné la n-ième partie » et on note $u_n = \mathrm{P}(G_n)$. On note également $v_n = \mathrm{P}(\overline{G_n})$.

1. Calculer u_1, v_1, u_2, v_2.

✓

On a $u_1 = \mathrm{P}(G_1) = \frac{1}{2}$ et $v_1 = \mathrm{P}(\overline{G_1}) = \frac{1}{2}$. De plus, on a :

$$\begin{aligned}
u_2 &= \mathrm{P}(G_2)\\
&= \mathrm{P}(G_2 \cap G_1) + \mathrm{P}(G_2 \cap \overline{G_1})\\
&= \mathrm{P}(G_1) \times \mathrm{P}(G_2|G_1) + \mathrm{P}(\overline{G_1}) \times \mathrm{P}(G_2|\overline{G_1})\\
&= \frac{1}{2} \times 0.6 + \frac{1}{2} \times 0.3\\
&= 0.45.
\end{aligned}$$

De même, on a :

$$\begin{aligned}
v_2 &= \mathrm{P}(\overline{G_2})\\
&= \mathrm{P}(\overline{G_2} \cap G_1) + \mathrm{P}(\overline{G_2} \cap \overline{G_1})\\
&= \mathrm{P}(G_1) \times \mathrm{P}(\overline{G_2}|G_1) + \mathrm{P}(\overline{G_1}) \times \mathrm{P}(\overline{G_2}|\overline{G_1})\\
&= \frac{1}{2} \times 0.4 + \frac{1}{2} \times 0.7\\
&= 0.55.
\end{aligned}$$

2. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $u_{n+1} = 0.6u_n + 0.3v_n$. En déduire une relation matricielle entre $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

✓

D'après le théorème des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \mathrm{P}(G_{n+1})\\
&= \mathrm{P}(G_{n+1} \cap G_n) + \mathrm{P}(G_{n+1} \cap \overline{G_n})\\
&= \mathrm{P}(G_n) \times \mathrm{P}(G_{n+1}|G_n) + \mathrm{P}(\overline{G_n}) \times \mathrm{P}(G_{n+1}|\overline{G_n})\\
&= 0.6u_n + 0.3v_n.
\end{aligned}$$

De même, on a :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= \mathrm{P}(\overline{G_{n+1}})\\
&= \mathrm{P}(\overline{G_{n+1}} \cap G_n) + \mathrm{P}(\overline{G_{n+1}} \cap \overline{G_n})\\
&= \mathrm{P}(G_n) \times \mathrm{P}(\overline{G_{n+1}}|G_n) + \mathrm{P}(\overline{G_n}) \times \mathrm{P}(\overline{G_{n+1}}|\overline{G_n})\\
&= 0.4u_n + 0.7v_n.
\end{aligned}$$

On a donc pour tout $n \geqslant 1$,

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

3. Montrer que la suite de terme général $u_n - \frac{3}{7}$ est une suite géométrique de raison 0.3 et en déduire une expression de u_n et v_n en fonction de n ainsi que leur limite quand $n \to +\infty$.

✓

On a pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = 0.6u_n + 0.3(1 - u_n) = 0.3 + 0.3u_n$. Ainsi, la suite de terme général $u_n - \frac{3}{7}$ est une suite géométrique de raison 0.3 et de premier terme $u_1 - \frac{3}{7} = \frac{1}{2} - \frac{3}{7} = \frac{1}{14}$. On a donc pour tout $n \geqslant 1$, $u_n - \frac{3}{7} = \left(\frac{1}{14}\right) \times 0.3^{n-1}$ et donc $u_n = \frac{3}{7} + \left(\frac{1}{14}\right) \times 0.3^{n-1}$. Donc $v_n = 1 - u_n = 1 - \frac{3}{7} - \left(\frac{1}{14}\right) \times 0.3^{n-1} = \frac{4}{7} - \left(\frac{1}{14}\right) \times 0.3^{n-1}$.

On a donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{3}{7}$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{4}{7}$. Cela signifie que sur un grand nombre de parties, la probabilité de gagner du joueur tend vers $\frac{3}{7}$.