

On s'intéresse à l'équation :

$$x = -\ln(x) \quad (1)$$

d'inconnue $x \in]0; +\infty[$.

1. Montrer que cette équation admet une unique solution $\ell \in [\frac{1}{10}; 1]$.



On pose $h(x) = x + \ln(x)$: h est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$, de plus $h(1/10) = 0.1 - \ln(10) < 0$ et $h(1) = 1 > 0$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\ell \in [\frac{1}{10}; 1]$ tel que $h(\ell) = 0$.

2. On considère la méthode numérique définie ci après (où `log` permet de calculer le logarithme népérien) : `x0 = 0.5 maxiter = 1000 for i in range(maxiter) : x = - log(x) print(x)` Expliquer pourquoi cette méthode n'est pas convergente.



Cette méthode est définie par la suite définie par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$x_{k+1} = \varphi_1(x_k)$$

où $\varphi_1 : x \mapsto -\ln(x)$ et $x_0 = 0.5$. Si cette méthode converge, alors elle converge vers l'unique point fixe ℓ de φ_1 . Or $\ell \in [\frac{1}{10}; 1]$ donc $-\frac{1}{\ell} \in [-10; -1]$. Il est même clair que $\ell \neq 1$ donc

$$\phi'_1(\ell) = -\frac{1}{\ell} \in [-10; -1[$$

ce qui implique en particulier que $|\varphi_1(\ell)| > 1$. On en conclut que ℓ est un point fixe répulsif de φ_1 , par conséquent la méthode ne converge pas localement, elle ne converge donc pas.

3. Soit la fonction $\varphi : x \mapsto e^{-x}$ définie sur \mathbb{R}_+^* . Vérifier que ℓ est un point fixe de la fonction φ puis que $\varphi([\frac{1}{10}; 1]) \subset [\frac{1}{10}; 1]$.



Il est clair que $\varphi(\ell) = e^{-\ell} = \ell$. De plus, La fonction φ est continue et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$, de plus $\varphi(1/10) = e^{-1/10} < 1$ et $\varphi(1) = e^{-1} > 1/10$ donc par théorème des valeurs intermédiaires, $\varphi([\frac{1}{10}; 1]) \subset [\frac{1}{10}; 1]$.

4. On considère une autre méthode numérique définie ci dessous : `x0 = 0.5 maxiter = 1000 for i in range(maxiter) : x = exp(-x) print(x)` Démontrer que cette méthode converge vers la solution ℓ de l'équation et donner l'ordre de convergence.



On a $|\varphi'| = \varphi$ donc d'après ce qui précède, pour tout $x \in [\frac{1}{10}; 1]$, $|\varphi'(x)| \leq |\varphi'(1)| < 1$ donc d'après le théorème de convergence globale du point fixe, la méthode converge au moins d'ordre 1 avec $x_0 = 0.5 \in [\frac{1}{10}; 1]$.

La convergence n'est pas d'ordre 2 car $\varphi'(\ell) \neq 0$.

5. On souhaite approcher la solution ℓ par la suite (x_k) avec une précision donnée $\varepsilon > 0$, et donc arrêter les itérations lorsque cette précision est atteinte. En se basant sur l'inégalité des accroissements finis, majorer le nombre d'itérations à réaliser.
6. Soit la fonction $h : x \mapsto x - e^{-x}$. En complétant le programme ci-dessous, expliciter une méthode de Newton permettant de calculer ℓ . `x0 = 0.5 maxiter = 1000 for i in range(maxiter) : x = ... print(x)`



Pour appliquer la méthode de Newton à l'équation, on pose $h(x) = x - e^{-x}$ et ainsi ℓ est l'unique solution à l'équation $h(x) = 0$. Comme $h'(x) = 1 + e^{-x} \neq 0$ sur $]0, +\infty[$, la méthode de Newton pour l'équation $h(x) = 0$ s'écrit

$$\begin{cases} x_0 \in [\frac{1}{10}, 1] \text{ donné} \\ x_{n+1} = x_n - \frac{h(x_n)}{h'(x_n)}, \quad \forall n \geq 0, \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} x_0 \in [\frac{1}{10}, 1] \text{ donné,} \\ x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - e^{-x_n}}{1 + e^{-x_n}}, \quad \forall n \geq 0. \end{cases}$$

Il faut donc écrire dans le programme `x = x - (x - exp(-x)) / (1 + exp(-x))`