Ex - Approximation par une loi normale

On effectue un contrôle sur des pièces de un euro dont une proportion $p = 0.05$ est fausse et sur des pièces de deux euros dont une proportion $p' = 0.02$ est fausse. On considère un lot de 500 pièces dont 150 pièces de un euro et 350 pièces de deux euros.

1. On prend une pièce au hasard dans ce lot : quelle est la probabilité qu'elle soit fausse ?

✓

On peut utiliser un arbre de probabilité pour modéliser la situation. En notant F l'événement "obtenir une pièce fausse" et A (resp. B) l'événement "obtenir une pièce de un euro (resp. deux euros)", on a

$$\mathrm{P}(F) = \mathrm{P}(F\cap A)+\mathrm{P}(F\cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(F|A)+\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(F|B) = \frac{150}{500}\times 0.05+\frac{350}{500}\times 0.02 = 0.029.$$

On a environ 2.9% d'avoir une pièce fausse.

2. Sachant que cette pièce est fausse, quelle est la probabilité qu'elle soit de un euro ?

✓

On calcule :

$$\mathrm{P}(A|F) = \frac{\mathrm{P}(A\cap F)}{\mathrm{P}(F)} = \frac{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(F|A)}{\mathrm{P}(F)} = \frac{\frac{150}{500}\times 0.05}{0.029} = 0.5172.$$

3. On contrôle à présent un lot de 1000 pièces de un euro. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de pièces fausses parmi les 1000.
Quelle est la loi de X ? Quelle est son espérance ? Son écart-type ?
En approchant cette loi par celle d'une loi normale adaptée, donner une approximation de la probabilité pour que X soit compris entre 48 et 52.

✓

On a : $X \sim \mathcal{B}(1000, 0.05)$, $\mathbb{E}(X) = 1000\times 0.05 = 50$ et $\sigma^2(X) = 1000\times 0.05\times 0.95 = 47.5$. La variable aléatoire X peut être approchée (avec correction de continuité) par la variable aléatoire Y de loi $\mathcal{N}(50, \sigma^2 = 47.5)$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(48 \leqslant X \leqslant 52) &= \mathrm{P}(47.5 \leqslant X \leqslant 52.5)\\
&\simeq \mathrm{P}(47.5 \leqslant Y \leqslant 52.5)\\
&\simeq \mathrm{P}(-0.36 \leqslant Z \leqslant 0.36) \quad \text{avec } Z = \frac{Y-50}{\sqrt{47.5}} \sim \mathcal{N}(0,1)\\
&\simeq 2\mathrm{P}(Z \leqslant 0.36) - 1\\
&\simeq 2\times 0.6406 - 1\\
1 &\simeq 0.2812
\end{aligned}$$