

Exercice - Evolution d'une concentration chimique

L'évolution de la concentration de certaines réactions chimiques au cours du temps peut être décrite par l'équation différentielle :

$$y'(t) = -\frac{1}{1+t^2}y(t)$$

1. Sachant qu'à l'instant $t = 0$, la concentration vaut $y(0) = 5$, déterminer la concentration en $t = 2$ à l'aide de la méthode d'Euler implicite avec un pas $h = 0.5$.

Le schéma implicite s'écrit

$$y_{n+1} = y_n + hF(t_{n+1}, y_{n+1})$$

où $F(t, y) = -\frac{1}{1+t^2}y$.

Après réécriture sous forme explicite, on obtient

$$y_{n+1} = \frac{y_n}{1 + \frac{h}{1+t_{n+1}^2}}$$

Avec $h = 0.5$, on a $t_n = \frac{n}{2}$.

Après calculs, on trouve $y_4 = \frac{520}{231} \approx 2.25$ soit $y(2) \approx 2.25$.

2. Faire de même pour un pas de $h = 10^{-3}$ et commenter la différence.
3. Proposer sur un même graphique la solution approchée de la méthode d'Euler implicite et la solution exacte pour différentes valeurs de h .