Ex - Estimation par inégalité ptxH

On sait qu'une personne sur cent est dyslexique. Lors des journées "citoyens", on détecte ce problème. Sur n jeunes examinés, on note Y_n la proportion de dyslexiques.

1. Calculer l'espérance et la variance de Y_n : on introduira la variable X_n comptant le nombre de dyslexiques parmi les n jeunes.

✓

On a $X_n \sim \mathcal{B}(n, 0.01)$. Ainsi, $\mathbb{E}(X_n) = 0.01 \times n$ et $\sigma^2(X) = 0.01 \times 0.09 \times n$.
Comme $Y_n = \frac{X_n}{n}$ donc $\mathbb{E}(Y_n) = \frac{1}{n}\mathbb{E}(X_n) = 0.01$ et $\sigma^2(Y_n) = \frac{1}{n^2}\sigma^2(X_n) = \frac{0.0099}{n}$.

2. Trouver un entier n tel que la probabilité que $0.009 \leqslant Y_n \leqslant 0.011$ soit supérieure à 0.9.

✓

On cherche n tel que $\mathrm{P}(0.009 \leqslant Y_n \leqslant 0.011) \geqslant 0.9$. On a

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(0.009 \leqslant Y_n \leqslant 0.011) &= \mathrm{P}(-0.001 \leqslant Y_n - 0.01 \leqslant 0.001) \\ &= \mathrm{P}(|Y_n - 0.01| \leqslant 0.001) \\ &= 1 - \mathrm{P}(|Y_n - 0.01| \geqslant 0.001). \end{aligned}$$

On cherche donc n tel que

$$\mathrm{P}(|Y_n - 0.01| \geqslant 0.001) \leqslant 0.1.$$

Or par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a

$$\mathrm{P}(|Y_n - 0.01| \geqslant 0.001) \leqslant \frac{\sigma^2(Y_n)}{(0.001)^2} = \frac{9900}{n}.$$

Si on impose que

$$\frac{9900}{n} \leqslant 0.10,$$

on obtient bien $\mathrm{P}(|Y_n - 0.01| \geqslant 0.001) \leqslant 0.1$. Il faut donc que

$$n \geqslant \frac{9900}{0.1} = 99\,000.$$

On en conclut qu'il faut au moins examinés 99 000 jeunes pour avoir, dans 90% des cas, une proportion de dyslexiques comprise entre 0.9% et 1.1%.