

Exercice - Convergence vers une loi exponentielle

Soit une suite de variables indépendantes $(U_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ suivant chacune une loi uniforme $\mathcal{U}([0; 1])$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $M_n = \max(U_1, \dots, U_n)$.

1. Démontrer que $M_n \xrightarrow{\mathcal{P}} 1$.
2. En déduire que $M_n \xrightarrow{\text{p.s.}} 1$ et $M_n \xrightarrow{\text{en loi}} 1$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = n(1 - M_n)$. Démontrer que la suite (Y_n) converge en loi vers une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.