

On construit différentes méthodes de Monte Carlo afin de donner une valeur approchée de $\frac{\pi}{4}$. Afin de les comparer, on donnera la variance de l'estimation sous la forme $\frac{C}{n}$ où n est la taille de l'échantillon. On souhaite avoir la variance la plus faible possible.

Partie 1 : Technique du Hit or Miss.

On considère le carré $[0; 1]^2$ et on note D le quart de disque centré en 0 et de rayon 1 :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

L'aire de D vaut $\frac{\pi}{4}$.

Soit (X_i, Y_i) une suite de couples variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées selon une loi uniforme sur $[0; 1]^2$. Pour tout entier $i \geq 1$, on pose

$$Z_i = \mathbf{1}_{(X_i, Y_i) \in D}$$

Ainsi, les variables $(Z_i)_{i \geq 1}$ sont indépendantes.

1. Déterminer la loi de Z_1 et en déduire que $\mathbb{E}(Z_1) = \frac{\pi}{4}$.



On remarque que Z_1 prend des valeurs dans $\{0, 1\}$ donc Z_1 suit une loi de Bernoulli. Or

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_1 = 1) &= \mathbb{P}((X_1, Y_1) \in D) \\ &= \iint_D dx dy \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Donc Z_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{\pi}{4}$ et son espérance vaut $\mathbb{E}(Z_1) = \frac{\pi}{4}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$T_n^{(1)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i$$

Justifier que $T_n^{(1)}$ est un estimateur sans biais de $\frac{\pi}{4}$.



On remarque que $\mathbb{E}(T_n^{(1)}) = \mathbb{E}(Z_1) = \frac{\pi}{4}$ donc par linéarité, $B(T_n^{(1)}) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0$.

3. Justifier que la suite de variables aléatoires $(T_n^{(1)})_{n \geq 1}$ converge presque sûrement vers $\frac{\pi}{4}$ lorsque n tend vers l'infini.



Les variables aléatoires (Z_i) sont indépendantes, identiquement distribuées, admettent une espérance donc par application directe de la loi forte des grands nombres, la suite $(T_n^{(1)})_{n \geq 1}$ converge presque sûrement vers $\frac{\pi}{4}$.

4. Montrer qu'il existe $C^{(1)} \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{V}(T_n^{(1)}) = \frac{C^{(1)}}{n}$ et donner une valeur numérique approchée de $C^{(1)}$ à 10^{-4} .



Par indépendance, $\mathbb{V}(T_n^{(1)}) = \frac{\mathbb{V}(Z_1)}{n}$ or $V(Z_1) = \frac{\pi}{4} (1 - \frac{\pi}{4}) \approx 0,1685$.

Partie 2 : Technique de la moyenne empirique.

On définit une fonction $g: [0; 1] \rightarrow [0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

Soit (U_i) une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées selon une loi uniforme sur $[0; 1]$.

1. Justifier que $\mathbb{E}(g(U_1)) = \frac{\pi}{4}$.



Par application du théorème de transfert,

$$\mathbb{E}(g(U_1)) = \int g(x) \mathbf{1}_{[0,1]}(x) dx = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{\pi}{4}$$

2. En déduire une suite de variables aléatoires convergeant presque sûrement vers $\frac{\pi}{4}$.



En posant $T_n^{(2)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(U_i)$ alors d'après la loi forte des grands nombres, la suite $(T_n^{(2)})$ converge presque sûrement vers $\mathbb{E}(g(U_1)) = \frac{\pi}{4}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$T_n^{(2)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(U_i)$$

Montrer qu'il existe $C^{(2)} \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{V}(T_n^{(2)}) = \frac{C^{(2)}}{n}$ et donner une valeur numérique approchée de $C^{(2)}$ à 10^{-4} .



Il s'agit comme en partie 1 de calculer $\mathbb{V}(g(U_1)) = \mathbb{E}(g(U_1)^2) - (\frac{\pi}{4})^2$. Or :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(g(U_1)^2) &= \int_0^1 g(x)^2 dx \\ &= \int_0^1 (1 - x^2) dx \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

On a donc $\mathbb{V}(T_n^{(2)}) = \frac{C^{(2)}}{n}$ avec $C^{(2)} = \frac{2}{3} - (\frac{\pi}{4})^2 \approx 0,0498$.

4. Comparer les deux techniques d'approximation présentées ici.



Des deux estimateurs de $\frac{\pi}{4}$ présentés ici, le plus efficace est celui qui a la plus petite variance, c'est $T_n^{(2)}$.