

Soit f une fonction réelle définie par

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité. On définit X une variable aléatoire admettant f comme densité.

Il suffit de vérifier que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ puis de calculer :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \int_0^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \left[-e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_0^{+\infty} \\ &= 1 \end{aligned}$$

2. Déterminer la fonction de répartition F de la variable aléatoire $Y = X^2$ en fonction de celle de X . En déduire la densité de la variable Y .

Soit $t \in \mathbb{R}$ et F_{X^2} la fonction de répartition de la variable aléatoire X^2 : alors

$$\begin{aligned} F_{X^2}(t) &= P(X^2 \leq t) \\ &= \begin{cases} P(-\sqrt{t} \leq X \leq \sqrt{t}) & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} f(x) dx & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \int_0^{\sqrt{t}} xe^{-\frac{x^2}{2}} dx & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \left[-e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_0^{\sqrt{t}} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \\ &= \left(1 - e^{-\frac{t}{2}} \right) \mathbf{1}_{[0; +\infty[}(t) \end{aligned}$$

La fonction F_{X^2} est dérivable presque partout (sauf en 0). Sa dérivée coïncide donc presque partout avec une fonction densité g de la variable X^2 . On peut donc poser

$$g(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}} \mathbf{1}_{[0; +\infty[}(x)$$

et on conclut que X^2 suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{2}$.