

1. Soit $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + 3xy^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Étudier l'existence de la dérivée partielle de g selon x en $(0, 0)$.

Il faut revenir au taux d'accroissement :

$$\frac{g(0 + h, 0) - g(0, 0)}{h} = \frac{h^3}{h \times h^2} = 1 \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} 1$$

donc la dérivée partielle existe : $\frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) = 1$.

2. Soit $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$ par :

$$h(x, y) = \ln(1 + x + xy + e^y)$$

où $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 + x + xy + e^y > 0\}$.

Calculer $\frac{\partial h}{\partial x}$, $\frac{\partial h}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}$.

Les dérivées partielles premières sont :

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) &= \frac{1+y}{1+x+xy+e^y} \\ \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) &= \frac{x+e^y}{1+x+xy+e^y}\end{aligned}$$

Les dérivées partielles secondes demandées sont :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x, y) = \frac{e^y(1-x+xy)-x^2}{(1+x+xy+e^y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{1-ye^y}{(1+x+xy+e^y)^2}$$