On sait qu'il y a à peu près une chance sur deux d'avoir une fille à chaque naissance, mais on veut avoir une estimation plus précise de cette probabilité p.
On regarde ce qui se passe sur n naissances, et on appelle S_n le nombre de filles parmi les n naissances.

1. Que vaut la variable Y_n égale à la proportion de filles dans les naissances ? Donner son espérance et sa variance.

✓

$Y_n = \frac{S_n}{n}$, où S_n est une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n,p)$. On a donc

$$\mathbb{E}(Y_n) = \frac{1}{n}\mathbb{E}(S_n) = \frac{1}{n} \times np = p \text{ et } \sigma^2(X) = \frac{1}{n^2}\sigma^2(S_n) = \frac{1}{n^2} \times np(1-p) = \frac{p(1-p)}{n}.$$

2. Soit $a > 0$. Montrer que $\mathrm{P}(|Y_n - p| \geqslant a) \leqslant \frac{1}{4na^2}$.

✓

Soit $a > 0$. On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à Y_n :

$$\mathrm{P}(|Y_n - p| \geqslant a) \leqslant \frac{\sigma^2(Y_n)}{a^2} = \frac{p(1-p)}{a^2 n} \leqslant \frac{1}{4na^2},$$

en utilisant l'indication donnée dans l'énoncé.

3. Déterminer un nombre n d'observations à faire pour que l'on puisse déduire de Y_n, avec moins de 1% de chances de se tromper, que $Y_n - 0.01 \leqslant p \leqslant Y_n + 0.01$.

✓

On souhaite avoir $\mathrm{P}(Y_n - 0.01 \leqslant p \leqslant Y_n + 0.01) \geqslant 0.99$. Or

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y_n - 0.01 \leqslant p \leqslant Y_n + 0.01) &= \mathrm{P}(-0.01 \leqslant p - Y_n \leqslant 0.01) = \mathrm{P}(|Y_n - p| \leqslant 0.01) \\ &= 1 - \mathrm{P}(|Y_n - p| \geqslant 0.01)\end{aligned}$$

On souhaite donc avoir $\mathrm{P}(|Y_n - p| \geqslant 0.01) \leqslant 0.01$. Or par la question 2., avec $a = 0.01$, on a l'inégalité :

$$\mathrm{P}(|Y_n - p| \geqslant a) \leqslant \frac{\sigma^2(Y_n)}{a^2} \leqslant \frac{1}{4n \times (0.01)^2}.$$

On prend donc n tel que $\frac{1}{4n\times(0.01)^2} \leqslant 0.01$, c'est-à-dire $n \geqslant 250\ 000$.

4. Parmi 250 000 naissances, combien faut-il, au minimum, observer de naissances de filles pour conclure avec 99% de chances de ne pas se tromper, qu'il naît plus de filles que de garçons ?

✓

Par la question 3., on sait que $\mathrm{P}(p \in [Y_n - 0.01; Y_n + 0.01]) \geqslant 0.99$.
Soit X_0 le nombre de filles observées. Avec moins de 1% de chances de se tromper, on veut que $p > \frac{1}{2}$, c'est-à-dire $\frac{X_0}{n} - 0.01 > \frac{1}{2}$, donc $X_0 > 125\ 250$.
Il faut donc observer au minimum 500 filles de plus que de garçons pour être sûr à 99% qu'il y a plus de filles que de garçons.