

▷ **Exercice - Extremum d'un polynôme**

Soit une fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par :

$$f: (x, y) \mapsto x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$$

- La fonction f admet-elle des points critiques sur \mathbb{R}^2 ?

La fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 . On étudie d'abord l'éventualité d'un extremum local en cherchant les points critiques :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \iff 2x + y + 2 = x + 2y + 3 = 0 \iff (x, y) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$$

- Vérifier que $-\frac{7}{3}$ constitue un minimum local et global de f sur \mathbb{R}^2 .

Or $f(x, y) = (x + y/2 + 1)^2 + \frac{3}{4}(y + 4/3)^2 - \frac{7}{3} \geq -\frac{7}{3} = f\left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ donc $-\frac{7}{3}$ est un minimum local et global de f .

- La fonction f admet-elle un maximum global sur \mathbb{R}^2 ?

On constate facilement que f n'admet pas de maximum global car $f(x, 0) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.