DEZs **Exercice** - *Estimateur et intervalle de confiance*

Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi ayant pour densité :

$$f_\theta \colon x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}(1+\theta x) & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

où $\theta \in [-1;1]$ est un paramètre.

1. Montrer que pour tout $\theta \in [-1;1]$, f_θ est une densité de probabilité.
2. Calculer $\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathbb{V}(X_1)$. En déduire l'espérance et la variance de la variable aléatoire $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.
3. On pose $T_n = \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Montrer que T est un estimateur sans biais et convergent de θ.
4. À l'aide du Théorème Central Limite, donner une approximation de la loi de T_n.
5. Démontrer qu'il existe une constante M_n ne dépendant pas de θ telle que si $\lambda > 0$,

$$\mathrm{P}(|T_n - \theta| < \lambda) \geqslant 1 - \frac{M_n}{\lambda^2}$$

6. Déterminer un intervalle de confiance permettant d'estimer θ avec une confiance d'au moins 95%.