

Exercice - Maximum de vraisemblance pour une loi géométrique

On rappelle qu'une variable X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0; 1[$ si X est à valeurs dans $\mathbb{N}^* = \{1; 2; 3; \dots\}$ et si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$$

On cherche à estimer ce paramètre p à partir d'un échantillon.

1. On considère un échantillon $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ ayant pour loi mère une loi géométrique de paramètre p et on suppose que la suite $(3; 4; 4; 2; 3)$ constitue une réalisation de cet échantillon.
 - (a) Exprimer la fonction de vraisemblance associée à cet échantillon.
 - (b) En déduire une estimation de p par la méthode du maximum de vraisemblance.
2. Afin de déterminer un estimateur de p , on considère maintenant un n -échantillon (X_1, \dots, X_n) ayant pour loi mère une loi géométrique de paramètre p et n entiers non nuls (x_1, \dots, x_n) constituant une réalisation de cet échantillon.
 - (a) Exprimer la fonction de vraisemblance associée à cet échantillon.
 - (b) En utilisant la méthode du maximum de vraisemblance, déterminer un estimateur du paramètre p .