

KZCB

Exercice - *Differents types de convergence*

Soit n un entier naturel non-nul et soit a un réel. On considère la fonction f_n définie sur \mathbb{R} par

$$f_n(x) = \frac{an}{\pi(1+n^2x^2)}.$$

1. Déterminer a pour que f_n soit une densité de variable aléatoire.

La fonction f_n étant continue et positive, elle est une densité de variable aléatoire si et seulement si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx = 1$$

Or, effectuant le changement de variables $u = nx$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{an}{\pi(1+n^2x^2)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{\pi(1+u^2)} du = \frac{a}{\pi} [\arctan(u)]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{a}{\pi} \times \pi = a$$

f_n est donc une densité de variable aléatoire si et seulement si $a = 1$.

2. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires telle que chaque X_n admet pour densité f_n . Étudier l'existence de moments pour X_n .

On a $xf_n(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{\pi n x}$ dont l'intégrale est divergente au voisinage de $+\infty$, et qui est une fonction positive. Ainsi, la variable aléatoire X_n n'admet pas d'espérance, ni aucun autre moment.

3. Étudier la convergence en loi de la suite (X_n) .

Soit F_n la fonction de répartition de X_n , définie par

$$F_n(x) = \int_{-\infty}^x f_n(t)dt = \frac{1}{\pi} \left(\arctan(nx) + \frac{\pi}{2} \right).$$

Si $x < 0$, $\arctan(nx) \rightarrow -\pi/2$, et donc $F_n(x) \rightarrow 0$. Si $x > 0$, $\arctan(nx) \rightarrow \pi/2$ et donc $F_n(x) \rightarrow 1$. Soit maintenant X une variable aléatoire identiquement nulle. Sa fonction de répartition F_X vérifie $F_X(x) = 0$ si $x < 0$ et $F_X(x) = 1$ si $x \geq 0$. Autrement dit, en tout point de continuité de F_X , la suite $(F_n(x))$ converge vers $F_X(x)$. C'est exactement la définition de la convergence en loi de la suite (X_n) vers X .

4. Étudier la convergence en probabilité de la suite (X_n) .

On va prouver que (X_n) converge en probabilité vers 0. Pour cela, on revient à la définition et on fixe $\varepsilon > 0$. On doit prouver que $\lim_n P(|X_n| \geq \varepsilon) = 0$. Utilisons la densité pour calculer cette probabilité. Puisque la densité est une fonction pair il faut en réalité démontrer que

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)} dx \rightarrow 0$$

Faisant le changement de variables $u = nx$, on a

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)} dx = \int_{n\varepsilon}^{+\infty} \frac{du}{\pi(1+u^2)}$$

Ceci tend bien vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ car c'est le reste d'une intégrale impropre convergente.