

Exercice - Fonction de n variables et laplacien nul

Soit $g:]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 . Soit un entier $n \geq 2$ et $f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x_1, \dots, x_n) = g(\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2})$.

On note $\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ le laplacien de f . On pose $r = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.

1. Démontrer que pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\Delta f(x) = g''(r) + \frac{n-1}{r}g'(r)$.
2. Déterminer l'ensemble des fonctions g telles que $\Delta f = 0$.