

Etant donnés trois nombres réels dans l'intervalle  $[0; 1]$ , on définit deux stratégies :

**Stratégie A :** choisir le plus grand des trois nombres ;

**Stratégie B :** choisir la somme des deux nombres les plus petits.

Deux personnes jouent au jeu comportant les étapes suivantes :

- choisir entre la stratégie A et la stratégie B ;
- à l'aide d'un générateur pseudo aléatoire, tirer au hasard et de manière indépendante trois nombres réels entre 0 et 1 ;
- le gagnant est celui qui obtient la plus grande valeur, compte tenu de la stratégie choisie.

On note  $X_1, X_2, X_3$  les nombres obtenus lors des tirages au sort. On note  $Y_A$  la variable égale à la valeur obtenue par la stratégie A et  $Y_B$  la variable égale à la valeur obtenue par la stratégie B.

1. Quelle la loi de probabilité suivie par chaque variable aléatoire  $X_i, i \in \{1, 2, 3\}$  ?

$X_1, X_2$  et  $X_3$  suivent une loi uniforme sur  $[0; 1]$ .

2. Exprimer  $Y_A$  en fonction des  $X_i$ .

$$Y_A = \max(X_1, X_2, X_3)$$

3. Exprimer  $Y_B$  en fonction de  $Y_A$  et des  $X_i$ .

$$Y_B = X_1 + X_2 + X_3 - Y_A$$

4. Déterminer la fonction de répartition de  $Y_A$ . En déduire que  $Y_A$  est une variable aléatoire absolument continue dont on déterminera la densité.

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$F_{Y_A}(t) = \mathbb{P}(Y_A \leq t) = \mathbb{P}(\max(X_1, X_2, X_3) \leq t) = \mathbb{P}(\{X_1 \leq t\} \cap \{X_2 \leq t\} \cap \{X_3 \leq t\}).$$

Comme les variables aléatoires  $X_i$  sont i.i.d., on obtient :

$$F_{Y_A}(t) = \mathbb{P}(X_1 \leq t)\mathbb{P}(X_2 \leq t)\mathbb{P}(X_3 \leq t) = (F_{X_1}(t))^3.$$

Donc  $F_{Y_1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t^3 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{si } t > 1 \end{cases}$ . La variable aléatoire  $Y_A$  est donc absolument continue et sa densité vaut  $f_{Y_A}(t) = F'_{Y_A}(t) = 3t^2 \mathbf{1}_{[0;1]}(t)$ .

5. Y a-t-il une meilleure stratégie ?

Comparons l'espérance des variables aléatoires  $Y_A$  et  $Y_B$  :

$$\mathbb{E}(Y_A) = \int_0^1 x \times 3x^2 dx = \left[ \frac{3}{4}x^4 \right]_0^1 = \frac{3}{4},$$

$$\mathbb{E}(Y_B) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) + \mathbb{E}(X_3) - \mathbb{E}(Y_A) = \frac{1}{2} \times 3 - \frac{3}{4} = \frac{3}{4}.$$

Les deux stratégies sont donc équivalentes.

Pour comparer les deux stratégies plus finement, il faut calculer  $\mathbb{P}(Y_B \geq Y_A)$ .

Comme  $\{Y_B \geq Y_A\} = \{X_1 + X_2 + X_3 - 2Y_A \geq 0\}$ , on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_B \geq Y_A) &= \int_{[0;1]^3} \mathbb{1}_{\{x_1+x_2+x_3-2\max(x_1,x_2,x_3) \geq 0\}} dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= \int_{D_1} dx_1 dx_2 dx_3 + \int_{D_2} dx_1 dx_2 dx_3 + \int_{D_3} dx_1 dx_2 dx_3 \end{aligned}$$

avec

$$D_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in [0; 1]^3 | x_2 \leq x_1, x_3 \leq x_1, x_2 + x_3 \geq x_1\}$$

$$D_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in [0; 1]^3 | x_1 \leq x_2, x_3 \leq x_2, x_1 + x_3 \geq x_2\}$$

$$D_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in [0; 1]^3 | x_1 \leq x_3, x_2 \leq x_3, x_1 + x_2 \geq x_3\}$$

Par permutations des indices, il est immédiat que les trois intégrales sont égales or

$$\int_{D_1} dx_1 dx_2 dx_3 = \int_0^1 \int_0^{x_1} \int_{x_1-x_2}^{x_1} dx_3 dx_2 dx_1 = \int_0^1 \int_0^{x_1} x_2 dx_2 dx_1 = \int_0^1 \frac{x_1^2}{2} dx_1 = \frac{1}{6}.$$

Ainsi  $\mathbb{P}(Y_B \geq Y_A) = 3 \int_{D_1} dx = \frac{1}{2}$ . On retrouve que les deux stratégies sont équivalentes, au sens où si le joueur A adopte la stratégie 1 et le joueur B adopte la stratégie 2, alors A et B ont la même probabilité  $\frac{1}{2}$  de gagner.