7J6y ▷ **Exercice** - *Etude de séries numériques*

Dans chacun des cas, dire si la série de terme général u_n est absolument convergente, semi-convergente, divergente, grossièrement divergente.
Attention, pour pouvoir répondre, certaines séries demandent deux démonstrations : par exemple, pour montrer que $\sum u_n$ est semi-convergente, il faut démontrer que $\sum u_n$ est convergente et que $\sum |u_n|$ est divergente.

1. $u_n = \frac{\sin(n^2)}{n^2}$

La série converge car elle est absolument convergente (le terme général est dominé par $1/n^2$).

2. $u_n = \frac{(-1)^n \ln(n)}{n}$

On a $|u_n| \geqslant \frac{1}{n}$, qui est le terme général d'une série de Riemann divergente. Par comparaison, la série $\sum u_n$ ne converge pas absolument.
Par le critère des séries alternées, comme la suite $\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)_n$ est décroissante et tend vers 0, la série $\sum u_n$ converge.
Donc la série $\sum u_n$ est **semi-convergente**.

3. $u_n = \frac{\cos(n^2\pi)}{n\ln(n)}$

La série converge absolument, par comparaisno à une série de Bertrand.

4. $u_n = \frac{(2n+1)^4}{(7n^2+1)^3}$

C'est une série à termes positifs, elle converge car le terme général est équivalent à $\frac{16}{7^3n^2}$ qui est une série de Riemann convergente de paramètre 2.

5. $u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

La série diverge grossièrement car le terme général tend vers $1/e$ et ne tend donc pas vers 0.

6. $u_n = \ln(1 + e^{-n})$

C'est une série à termes positifs, elle converge car le terme général est équivalent à $1/e^n$, c'est le terme général d'une série géométrique convergente.

7. $u_n = \frac{1}{n\cos^2(n)}$

Pour tout n, on a $u_n \geqslant \frac{1}{n} \geqslant 0$ donc par comparaison de séries à termes positifs, la série diverge.

8. $u_n = \sin\left(\frac{n^2+1}{n}\pi\right)$

On a : $u_n = \sin((n + \frac{1}{n})\pi) = \sin(n\pi + \frac{\pi}{n}) == (-1)^n \sin(\frac{\pi}{n})$. u_n n'est pas de signe constant : on commence par étudier la convergence absolue. $|u_n| \sim \frac{\pi}{n}$, qui est le terme d'une série de Riemann divergente donc la série $\sum u_n$ ne converge pas absolument.
Par le critère des séries alternées, comme la suite $(\sin(\frac{\pi}{n}))_n$ est décroissante et tend vers $\sin(0) = 0$, la série $\sum u_n$ converge.
Finalement, la série $\sum u_n$ est **semi-convergente**.

9. $u_n = \frac{n}{2^n}$

On utilise le critère de d'Alembert : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{2n}$, qui tend vers $\frac{1}{2} < 1$. On en conclut que la série $\sum u_n$ converge. Comme il s'agit d'une série à termes positifs, cette série **converge absolument**.

10. $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

$u_n = (1 + \frac{1}{n})^{n^2} > 1$ donc la suite (u_n) ne peut pas tendre vers 0 : la série $\sum u_n$ **diverge grossièrement**

11. $u_n = \frac{n^{10000}}{n!}$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = (\frac{n+1}{n})^{10000}\frac{1}{n+1}$ tend vers 0 en l'infini. Par le critère de D'Alembert, la série $\sum u_n$ converge. Comme elle est à termes positifs, cette série **converge absolument**.

12. $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$

u_n est de signe non constant ; on commence par étudier la convergence absolue. $|u_n| \sim \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ donc la série $\sum u_n$ ne converge pas absolument.
Par le critère des séries alternées, comme $(\frac{1}{\sqrt{n+1}})_n$ est une suite décroissante et de limite 0, la série $\sum u_n$ converge.
Conclusion : la série $\sum u_n$ est **semi-convergente**.

13. $u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

On a $u_n \sim \frac{1}{n^3}$ qui est le terme général d'une série de Riemann convergente. La série $\sum u_n$ est absolument convergente. Comme il s'agit d'une série télescopique, on peut calculer sa somme : on décompose la fraction en éléments simples :

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{\frac{1}{2}}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{\frac{1}{2}}{n+2}$$

On calcule les sommes partielles :

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{4} + \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}.$$

Donc la somme de la série $\sum u_n$ vaut $\frac{1}{4}$.

14. $u_n = \frac{1}{(\ln(n))^n}$

$(|u_n|)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\ln(n)}$ qui tend vers 0 en l'infini. Par le critère de Cauchy, la série est convergente. Comme elle est à termes positifs, elle est également **absolument convergente**.
$u_n \sim \frac{1}{2n^2}$, qui est une série de Riemann convergente donc la série $\sum u_n$ converge. Étant à termes positifs, elle **converge absolument**.

15. $u_n = 1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)$

Par développement limité du cosinus, on obtient l'équivalent : $u_n \sim \frac{1}{2n^2}$, qui est le terme général d'une série de Riemann convergente. Donc la série $\sum u_n$ converge. Étant à termes positifs, elle **converge absolument**.

16. $u_n = \left(\frac{4n+1}{3n+2}\right)^n$

La série diverge grossièrement car le terme général ne tend pas vers 0.

17. $u_n = \frac{\ln(n)}{n}$

C'est une série à termes positifs et $u_n \geqslant \frac{1}{n}$ donc par comparaison à une série de Riemann divergente, la série diverge.