

▷ Exercice - Étude de séries à termes positifs

Pour chacune des séries suivantes, déterminer si elle converge ou diverge.

$$1. \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 + 1};$$

On pose  $u_n = \frac{1}{n^2 + 1}$ . Alors  $u_n \geq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$  donc par comparaison à une série de Riemann convergente ( $\alpha = 2 > 1$ ), la série  $\sum u_n$  converge.

$$2. \sum_{n \geq 1} \frac{|\cos(n)|}{n^2(\sqrt{n} + 1)};$$

On pose  $u_n = \frac{|\cos(n)|}{n^2(\sqrt{n} + 1)}$ . Alors  $u_n \geq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $u_n \leq \frac{1}{n^2(\sqrt{n} + 1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{5/2}}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  donc par comparaison d'une série positive à une série de Riemann convergente, la série  $\sum u_n$  converge.