

Soit la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue sur \mathbb{R}^2 ?
2. Calculer $\overrightarrow{\text{grad}} f(x, y)$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$.
3. La fonction f est-elle de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 ?
4. La fonction f est-elle différentiable sur \mathbb{R}^2 ?