SX3y ⊵ **Exercice** - *Calcul de probabilité*

On jette 3 fois un dé à 6 faces, et on note a, b et c les résultats successifs obtenus. On note $Q(x) = ax^2 + bx + c$. Déterminer la probabilité pour que :

— Q ait deux racines réelles distinctes.
— Q ait une racine réelle double.
— Q n'ait pas de racines réelles.

On associe à l'expérience aléatoire l'univers des possibles $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^3$, muni de l'équiprobabilité. Ainsi, la probabilité d'un événement A vaut card $(A)/6^3$. On s'intéresse d'abord à l'événement $A = \{(a, b, c) \in \Omega; b^2 - 4ac > 0\}$. Il suffit de dénombrer A. On commence par établir un petit tableau avec les valeurs de $4ac$:

$c \backslash a$	1	2	3	4	5	6
1	4	8	12	16	20	24
2	8	16	24	32	40	48
3	12	24	36	48	60	72
4	16	32	48	64	80	96
5	20	40	60	80	100	120
6	24	48	72	96	120	144

On calcule le cardinal de A en regardant dans le tableau le nombre de valeurs de a et c pour lesquelles $b^2 > 4ac$, pour les 6 valeurs que peut prendre b. On trouve :

$$\mathrm{card}(A) = 0 + 0 + 3 + 5 + 14 + 16 = 38.$$

On en déduit :

$$P(A) = \frac{38}{216} = \frac{19}{108}.$$

On note pareillement $B = \{(a, b, c) \in \Omega; b^2 - 4ac = 0\}$ et $C = \{(a, b, c) \in \Omega; b^2 - 4ac < 0\}$. Le même dénombrement prouve que :

$$P(B) = \frac{5}{216}.$$

On peut calculer $P(C)$ de la même façon, ou remarquer que les 3 événement A, B, C forment un système complet d'événements. On déduit alors :

$$P(C) = 1 - P(A) - P(B) = \frac{173}{216}.$$