

Exercice - Loi de Poisson et estimation par maximum de vraisemblance

On considère un échantillon X_1, \dots, X_n suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. On cherche un estimateur de λ par la méthode du maximum de vraisemblance. On note (x_1, \dots, x_n) une réalisation de cet échantillon.

- Exprimer la fonction de vraisemblance $L(x_1, \dots, x_n, \lambda)$ en fonction de l'échantillon et du paramètre λ à estimer.

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i) \text{ or } X_i \sim \mathcal{P}(\lambda) \text{ donc}$$

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda) = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda}$$

- Trouver pour quelle valeur de λ la fonction de vraisemblance atteint son maximum.

On a

$$\begin{aligned} \ln L(x_1, \dots, x_n, \lambda) &= \sum_{i=1}^n (\ln(\lambda^{x_i}) - \lambda - \ln(x_i!)) \\ &= (\ln \lambda) \sum_{i=1}^n x_i - n\lambda - \sum_{i=1}^n \ln(x_i!) \end{aligned}$$

donc en dérivant par rapport à λ ,

$$\frac{\partial L(x_1, \dots, x_n, \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n x_i - n.$$

Or

$$\frac{\partial L(x_1, \dots, x_n, \lambda)}{\partial \lambda} = 0 \iff \lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

- Conclure.

L'estimateur par maximum de vraisemblance de λ est $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ et une estimation de λ est

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$