

Supposons que  $(X, Y)$  suive la loi uniforme sur le disque unité  $D$  centré en  $(0, 0)$ .  
Déterminer la loi de  $X$ .



Alors  $(X, Y)$  admet pour densité  $f(x, y) = \frac{1}{\pi} \mathbf{1}_D(x, y)$ . Alors  $X$  admet pour densité  $f_X$  définie par  $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy = \frac{1}{\pi} \int_{\{y^2 < 1-x^2\}} dy$ .

Or  $y^2 < 1 - x^2 \iff \begin{cases} -\sqrt{1-x^2} < y < \sqrt{1-x^2} \\ -1 < x < 1 \end{cases}$  donc

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi} \mathbf{1}_{]-1;1[}(x) \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} dy = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2} \mathbf{1}_{]-1;1[}(x)$$