Ex

Autour de la méthode d'Euler implicite

Soit $f\colon [0;T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}$ et l'équation différentielle :

$$(E)\begin{cases} y'(t)=f(t,y(t)) \\ y(0)=a \end{cases}$$

pour laquelle on admet l'existence et l'unicité d'une solution y de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose de plus qu'il existe $M>0$ tel que $\forall t\in[0;T]$, $\forall y\in\mathbb{R}$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t,y)>0 \qquad ; \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\right|\leqslant M$$

On rappelle que la méthode d'Euler implicite est donnée par le schéma

$$y_{n+1}=y_n+hf(t_{n+1},y_{n+1})$$

et on suppose que le pas vérifie $h\leqslant\frac{1}{2M}$.
Pour tout $n\geqslant 0$, on pose $\varphi_n(x)=y_n+hf(t_{n+1},x)-x$ et $H_n(x)=y_n+hf(t_{n+1},x)$.

1. Vérifier que H_n est une application contractante et en déduire que le schéma est bien défini, c'est-à-dire qu'il permet bien de définir explicitement y_{n+1} en fonction de y_n.

✓ $|H_n'(x)|=h\left|\frac{\partial f}{\partial y}(t_{n+1},x)\right|\leqslant hM\leqslant\frac{1}{2}<1$. Si n est fixé et y_n est défini, alors H_n admet donc un unique point fixe que l'on note y_{n+1}.

2. On propose la méthode suivante :

$$(S):\begin{cases} \widehat{y}_{n+1}=y_n-\frac{\varphi_n(y_n)}{\varphi_n'(y_n)} \\ y_{n+1}=y_n+hf(t_{n+1},\widehat{y}_{n+1}) \end{cases}$$

On admet que cette méthode est stable. Expliquer pourquoi cette méthode ainsi décrite permet de définir explicitement y_{n+1} en fonction de y_n. Décrire en particulier la méthode utilisée pour définir $\widehat{y}_{n+1}$. Puis montrer que cette méthode (S) est consistante, donc convergente.

✓ Ce schéma permet de résoudre l'écriture implicite en utilisant la méthode de Newton. On écrit le schéma sous la forme standard

$$y_{n+1}=y_n+hF(t_n,y_n,h)$$

avec

$$F(t,y,h)=f\left(t+h,y+h\frac{f(t+h,y)}{1-h\frac{\partial f}{\partial y}(t+h,y)}\right)$$

et on vérifie que $F(t,y,0)=f(t,y)$: la méthode est consistante au moins d'ordre 1. On pourrait vérifier que la méthode n'est pas d'ordre 2 en calculant $\frac{\partial F}{\partial h}$ et en constatant que $\frac{\partial F}{\partial h}(t,y,0)=f^{[1]}(t,y)\neq\frac{1}{2}f^{[1]}(t,y)$. La méthode étant supposée stable, elle est donc convergente.

3. On suppose maintenant que l'équation différentielle est autonome : $f(t,y)=f(y)$ et que $\forall y\in\mathbb{R}$, $|f(y)|\leqslant M$, $|f'(y)|\leqslant M$ et $|f''(y)|\leqslant M$.

(a) Simplifier le schéma (S) en l'écrivant en fonction de f et f'.

✓ Le schéma devient

$$(S'):\begin{cases} \widehat{y}_{n+1}=y_n-\frac{f(y_n)}{1-hf'(y_n)} \\ y_{n+1}=y_n+hf(t_{n+1},\widehat{y}_{n+1}) \end{cases}$$

(b) Montrer que $\forall y,z\in\mathbb{R}$,

$$|f(y)(f'(z)-f(z)f'(y)|\leqslant 2M^2|y-z|$$

✓
$$\begin{aligned} |f(y)(f'(z)-f(z)f'(y)| &= |f(y)(f'(z)-f'(y))+f'(y)(f(y)-f(z)| \\ &\leqslant |f(y)||f'(z)-f'(y)|+|f'(y)||f'(y)-f(z)| \\ &\leqslant M\left(|f'(z)-f'(y)|+|f'(y)-f(z)|\right) \end{aligned}$$

Or $|f'(y)|\leqslant M$ et $|f''(y)|\leqslant M$ donc f et f' sont M-lipschitziennes, d'où le résultat.

(c) Montrer que $\forall y\in\mathbb{R}$:

$$\left|\frac{1}{1-hf'(y)}\right|\leqslant 2$$

✓ On a $hf'(y)\leqslant Mh\leqslant\frac{1}{2}$ d'où $1-hf'(y)\geqslant\frac{1}{2}$ d'où le résultat demandé.

(d) On pose $g_R(y,h)=\frac{f(y)}{1-hf'(y)}$. Montrer que $\forall y,z\in\mathbb{R}$:

$$|g_R(y,h)-g_R(z,h)|\leqslant 4|f(y)f'(z)-f(y)-f(z)f'(y)+f(z)|$$

puis

$$|g_R(y,h)-g_R(z,h)|\leqslant 4M(1+2Mh)|y-z|$$

✓
$$\begin{aligned} |g_R(y,h)-g_R(z,h)| &= \left|\frac{f(y)}{1-hf'(y)}-\frac{f(z)}{1-hf'(z)}\right| \\ &= \frac{|f(y)-f(z)+h(f(z)f'(y)-f(y)f'(z)|}{|1-hf'(y)||1-hf'(z)|} \\ &\leqslant 4|f(y)-f(z)|+4h|f(z)f'(y)-f(y)f'(z)| \\ &\leqslant 4M|y-z|+8M^2h|y-z| \\ &\leqslant 4M(1+2Mh)|y-z| \end{aligned}$$

(e) En déduire que la méthode est stable

✓ On étudie la stabilité du nouveau schéma (S') : il s'écrit $y_{n+1}=y_n+hF(y_n,h)$ avec $F(y,h)=f(y+hg_R(y,h))$. Or f est M-lipschitzienne donc

$$\begin{aligned} F(y,h)-F(z,h) &\leqslant M(|y-z|+h|g_R(y,h)-g_R(z,h)|) \\ &\leqslant M(1+2Mh(1+2Mh))|y-z| \\ &\leqslant 5M|y-z| \end{aligned}$$

Donc F est lipschitzienne uniformément en h : cela prouve la stabilité du schéma.

(f) En déduire que la méthode est convergente.

✓ La consistance ayant déjà établie dans le cas général, cela prouve que la méthode est convergente.