RrKo ⊵ **Exercice** - *Autour de la méthode d'Euler implicite*

Soit $f\colon [0;T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}$ et l'équation différentielle :

$$(E)\begin{cases} y'(t)=f(t,y(t)) \\ y(0)=a \end{cases}$$

pour laquelle on admet l'existence et l'unicité d'une solution y de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose de plus qu'il existe $M>0$ tel que $\forall t\in[0;T]$, $\forall y\in\mathbb{R}$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t,y)>0 \qquad ; \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\right|\leqslant M$$

On rappelle que la méthode d'Euler implicite est donnée par le schéma

$$y_{n+1}=y_n+hf(t_{n+1},y_{n+1})$$

et on suppose que le pas vérifie $h\leqslant \frac{1}{2M}$.
Pour tout $n\geqslant 0$, on pose $\varphi_n(x)=y_n+hf(t_{n+1},x)-x$ et $H_n(x)=y_n+hf(t_{n+1},x)$.

1. Vérifier que H_n est une application contractante et en déduire que le schéma est bien défini.
2. On propose la méthode suivante :

$$(S) : \begin{cases} \widehat{y}_{n+1}=y_n-\frac{\varphi_n(y_n)}{\varphi_n'(y_n)} \\ y_{n+1}=y_n+hf(t_{n+1},\widehat{y}_{n+1}) \end{cases}$$

   On admet que cette méthode est stable. Expliquer ce choix puis montrer qu'elle est convergente.
3. On suppose maintenant que l'équation différentielle est autonome : $f(t,y)=f(y)$ et que $\forall y\in\mathbb{R}$, $|f(y)|\leqslant M$, $|f'(y)|\leqslant M$ et $|f''(y)|\leqslant M$.
   (a) Simplifier le schéma (S) en l'écrivant en fonction de f et f'.
   (b) Montrer que $\forall y,z\in\mathbb{R}$,

$$|f(y)(f'(z)-f(z)f'(y)|\leqslant 2M^2|y-z|$$

   (c) Montrer que $\forall y\in\mathbb{R}$:

$$\left|\frac{1}{1-hf'(y)}\right|\leqslant 2$$

   (d) On pose $g_R(y,h)=\frac{f(y)}{1-hf'(y)}$. Montrer que $\forall y,z\in\mathbb{R}$:

$$|g_R(y,h)-g_R(z,h)|\leqslant 4|f(y)f'(z)-f(y)-f(z)f'(y)+f(z)|$$

   puis

$$|g_R(y,h)-g_R(z,h)|\leqslant 4M(1+2Mh)|y-z|$$

   (e) En déduire que la méthode est stable, consistante et convergente.