Ex **Déterminant de Van Der Monde**

On se propose de calculer le déterminant de VAN DER MONDE :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & x^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & x^3 \end{vmatrix}$$

1. Quel est le degré du polynôme $P(x) = \Delta$?

✓

Si l'on développe le déterminant Δ par rapport à sa 4 ème colonne, on voit que $P(x)$ est un polynôme de degré au plus 3.

2. Sans calculer Δ, donner trois racines évidentes du polynôme $P(x)$. En déduire Δ.

✓

Pour $x = a, \Delta = 0$ car deux colonnes sont identiques. De même, pour $x = b$ et pour $x = c$. Ainsi, a, b et c sont trois racines évidentes de $P(x)$. Ainsi :

$$P(x) = k \cdot (x-a)(x-b)(x-c)$$

où k est le coefficient de x^3. Ainsi :

$$\begin{aligned} k = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} \\ &= (b-a)(c-a) \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \rfloor_1 & c_2 & c_3-c_2 \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ a^2 & b+a & c-b \end{vmatrix} \end{array} \\ &= (b-a)(c-a)(c-b) \end{aligned}$$

Conclusion :

$$P(x) = (b-a)(c-a)(c-b)(x-a)(x-b)(x-c)$$

3. Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{vmatrix}$.

✓

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{vmatrix} = P(-i)$ pour $a = 1, b = i$ et $c = -1$. Aussi :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{vmatrix} &= (i-1)\underbrace{(-1-1)}_{-2}(-1-i)(-i-1)\underbrace{(-i-i)}_{-2i}(-i+1) \\ &= 4i\underbrace{(i-1)(-1-i)}_{2}\underbrace{(-i-1)(-i+1)}_{-2} \\ &= -16i \end{aligned}$$