6n4q ⊳ **Exercice** - *Dérivées partielles et règle des chaînes*

On considère une boîte dont la longueur ℓ, la largeur w et la hauteur h varient au cours du temps t.
A l'instant t_0, les dimensions de la boîte sont $\ell = 1$ m, $w = h = 2$ m. A ce même instant, on sait que ℓ et w augmentent de 2m/s et h diminue de 3m/s.
On note V le volume, S la surface et D la longueur de la diagonale de cette boîte.

1. Exprimer V, S et D comme fonction des trois variables ℓ, w, h.

On écrit $V(\ell, w, h) = \ell \times w \times h$, $S(\ell, w, h) = 2(wh + w\ell + h\ell)$, $D = \sqrt{\ell^2 + w^2 + h^2}$.

2. Exprimer $\dfrac{\partial D}{\partial h}(\ell, w, h)$.

$\dfrac{\partial D}{\partial h}(\ell, w, h) = \frac{2h}{2\sqrt{\ell^2+w^2+h^2}} = \frac{h}{\sqrt{\ell^2+w^2+h^2}}$

3. Que valent $\ell'(t_0)$, $w'(t_0)$, $h'(t_0)$?

D'après l'énoncé, $\ell'(t_0) = w'(t_0) = 2$, $h'(t_0) = -3$.

4. On pose $\tilde{V}(t) = V(\ell(t), w(t), h(t))$. Exprimer $\frac{\partial V}{\partial \ell}$, $\frac{\partial V}{\partial w}$ et $\frac{\partial V}{\partial h}$ puis en calculant une dérivée partielle, déterminer les taux de variations à l'instant t_0 du volume, de la surface et de la diagonale de cette boîte.

Le taux de variation du volume est modélisé par la dérivée de $\tilde{V}$ par rapport au temps. On peut voir V comme la composée de la fonction $t \mapsto (\ell(t), w(t), h(t)$ avec la fonction de trois variables $(\ell, w, h) \mapsto \ell \times w \times h$.
D'après la règle des chaînes,

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial t}(t_0) = \frac{\partial V}{\partial \ell}(\ell(t_0), w(t_0), h(t_0)) \times \ell'(t_0) + \frac{\partial V}{\partial w}(w(t_0), w(t_0), h(t_0)) \times w'(t_0) + \frac{\partial V}{\partial h}(h(t_0), w(t_0), h(t_0))$$

Or $\frac{\partial V}{\partial \ell}(\ell, w, h) = wh$, $\frac{\partial V}{\partial w}(\ell, w, h) = \ell h$ et $\frac{\partial V}{\partial h}(\ell, w, h) = \ell w$.
Donc en substituant, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial t}(t_0) &= \ell'(t_0)w(t_0)h(t_0) + \ell(t_0)w'(t_0)h(t_0) + \ell(t_0)w(t_0)h'(t_0) \\ &= 2 \times 2 \times 2 + 1 \times 2 \times 2 + 1 \times 2 \times (-3) \\ &= 6m^3/s\end{aligned}$$

En suivant le même raisonnement avec la règle des chaînes, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial t}(t_0) &= 2\ell'(t_0)(w(t_0) + h(t_0)) + 2w'(t_0)(\ell(t_0) + h(t_0)) + 2h'(t_0)(\ell(t_0) + w(t_0)) \\ &= 10m^2/s\end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned}\frac{\partial D}{\partial t}(t_0) &= \frac{\ell(t_0)\ell'(t_0) + w(t_0)w'(t_0) + h(t_0)h'(t_0)}{\sqrt{\ell^2(t_0) + w^2(t_0) + h^2(t_0)}} \\ &= 0m/s\end{aligned}$$