

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires admettant pour densité la fonction f définie par

$$f(x, y) = \frac{3}{8}(x^2 + y^2)\mathbf{1}_{[-1;1]^2}(x, y)$$

Déterminer la loi de $(X + Y, X - Y)$.

On pose $U = X + Y$, $V = X - Y$ et on étudie la loi du couple (U, V) . D'après le théorème de transfert, si h est continue bornée,

$$\mathbb{E}(h(U, V)) = \frac{3}{8} \int_{[-1;1]^2} h(x + y, x - y)(x^2 + y^2) dx dy$$

Pour faire apparaître la densité de (U, V) , on effectue le changement de variable

$$(u, v) = (x + y, x - y)$$

(c'est une bijection de classe \mathcal{C}^1). La réciproque s'écrit $(x, y) = (\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2})$. La matrice jacobienne est $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et la valeur absolue de son déterminant est $\frac{1}{2}$. On peut donc écrire $dx dy = \frac{1}{2} du dv$ et on a finalement :

$$\mathbb{E}(h(U, V)) = \frac{3}{8} \int_C h(u, v) \left(\frac{u^2 + v^2}{2} \right) \frac{1}{2} du dv$$

où $C = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / -2 \leq u + v \leq 2 \text{ et } -2 \leq u - v \leq 2\}$ est le carré image de $[-1; 1]^2$ par le changement de variables.

On en déduit que (U, V) a pour densité la fonction g définie par

$$g(u, v) = \frac{3}{16}(u^2 + v^2)\mathbf{1}_C(u, v)$$

Pour avoir indépendamment la loi de $(X + Y)$ et $(X - Y)$, il resterait à calculer les lois marginales.