

kzan ▷ Exercice - Convergence d'une suite de variables aléatoires

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires i.i.d. selon une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. On définit la suite de variables aléatoires (Y_n) par

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{k} X_k$$

Etudier le comportement asymptotique en loi de la suite (Y_n) .

Les variables $\sqrt{k} X_k$ ne sont pas identiquement distribuées ! on se lance donc dans un calcul de limite « à la main ».

Par indépendance, Y_n suit une loi normale d'espérance 0 et de variance $\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sqrt{k}^2 \times 1 = \frac{1}{n^2} \times \frac{n(n+1)}{2}$.

On peut donc écrire $Y_n = \sqrt{\frac{n(n+1)}{2n^2}} Z_n$ où Z_n suit une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

Soit $\varphi_{Y_n}(t)$ la fonction caractéristique de Y_n . On sait que $\varphi_{Z_n}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ donc

$$\varphi_{Y_n}(t) = \varphi_{Z_n}\left(\sqrt{\frac{n(n+1)}{2n^2}} t\right) = e^{-\frac{-n(n+1)}{2n^2} t^2}$$

En passant à la limite, $\varphi_{Y_n}(t) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^{-\frac{t^2}{4}}$. On reconnaît la fonction caractéristique de $\frac{1}{\sqrt{2}} Z_n$ qui suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2 = \frac{1}{2})$.

On a ainsi démontré que la suite (Y_n) converge en loi vers une loi normale $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2 = \frac{1}{2})$.