Ex

G5Jt

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et 2 boules noires numérotées 1 et 2. On effectue le tirage de toutes les boules de l'urne, une à une, et sans remise. On appelle X le rang d'apparition de la première boule blanche et Y celui du premier numéro 1.

1. Déterminer la loi de X.

✓

L'ensemble des valeurs prises par X est $X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$. Les boules sont a priori indiscernables au toucher donc le tirage d'un boule parmi les $n+2$ suit une loi uniforme, autrement dit la probabilité de tirer une boule en particulier est $\frac{1}{n+2}$. On en déduit que la probabilité que la première boule tirée soit blanche est

$$\mathrm{P}(X = 1) = \frac{n}{n+2}$$

.

Par indépendance des tirages et formule de Baye, on a

$$\mathrm{P}(X = 2) = \mathrm{P}(\overline{N_1})\mathrm{P}(N_2 \mid \overline{N_1}) = \frac{2}{n+2}\frac{n}{n+1} = \frac{2n}{(n+2)(n+1)}$$

De même, on a

$$\mathrm{P}(X = 3) = \frac{2}{n+2}\frac{1}{n+1}\frac{n}{n} = \frac{2}{(n+2)(n+1)}$$

2. Montrer que les événements $\{X = 1\}$ et $\{Y = 1\}$ sont indépendants si et seulement si $n = 2$.

✓

On a $\mathrm{P}(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{n+2}$, c'est la probabilité que la première boule tirée soit blanche et qu'elle porte le numéro 1.
On a $\mathrm{P}(Y = 1) = \frac{2}{n+2}$ car au premier tirage, 2 boules portent le numéro 1.
Les événements $\{X = 1\}$ et $\{Y = 1\}$ sont indépendants si et seulement si :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X = 1, Y = 1) = \mathrm{P}(X = 1)\mathrm{P}(Y = 1) &\iff \frac{1}{n+2} = \frac{n}{n+2} \times \frac{2}{n+2} \\ &\iff 2n = n + 2 \\ &\iff n = 2 \end{aligned}$$

3. Montrer que les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépenantes.

✓

On compare par exemple $\mathrm{P}(X = 3, Y = 3)$ et $\mathrm{P}(X = 3) \times \mathrm{P}(Y = 3)$. Or $\mathrm{P}(X = 3, Y = 3) = 0$ car pour que la première boule blanche apparaisse au rang 3, il faut que les deux premières tirées soient noires, dont l'une d'elle porte le numéro 1.
Or il est clair que $\mathrm{P}(X = 3) \neq 0$ et $\mathrm{P}(Y = 3) \neq 0$. On en déduit que $\mathrm{P}(X = 3, Y = 3) \neq \mathrm{P}(X = 3) \times \mathrm{P}(Y = 3)$ ce qui permet de conclure que les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépenantes.

4. On suppose maintenant que $n = 2$.
   (a) Montrer que X et Y ont la même loi de probabilité.

✓

Sous cette hypothèse, on a $Y(\Omega) = \{1, 2, 3\}$. De plus, d'après la question 1, on a

$$\mathrm{P}(X = 1) = \frac{1}{2} \quad \mathrm{P}(X = 2) = \frac{1}{3} \quad \mathrm{P}(X = 3) = \frac{1}{6}$$

Par ailleurs :
— $\mathrm{P}(Y = 1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, c'est la probabilité que la première boule tirée porte le numéro 1.
— $\mathrm{P}(Y = 2) = \mathrm{P}(B_1)\mathrm{P}(\overline{B_2} \mid_1) = \frac{2}{4}\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.
— de même, $\mathrm{P}(Y = 3) = \frac{2}{4}\frac{1}{3}\frac{2}{2} = \frac{1}{6}$.

Les deux variables X et Y ont donc la même loi de probabilité.

   (b) Déterminer la loi du couple (X, Y).

✓

En utilisant les questions précédentes et en calculant de manière similaire $\mathrm{P}(X = 1, Y = 2)$, $\mathrm{P}(X = 1, Y = 3)$, $\mathrm{P}(X = 3, Y = 1)$

$X \backslash Y$	1	2	3
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0

En sommant les lignes et les colonnes, on retrouve les résultats des lois marginales calculées précédemment.