Ex

Vrai ou faux

Pour chacune des assertions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Une justification, le cas échéant avec un contre exemple, est attendue.

1. Soit (u_n) une suite de réels positifs tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
   Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n^2} = 0$ et la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{1}{u_n^2}$ converge.

   ✓ Faux. Par exemple, considérer $u_n = \sqrt{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Soit (a_n) une suite de réels tels que la série entière $\sum a_n x^n$ ait un rayon de convergence $R = 2$.
   Alors la série $\sum a_n(-3)^n$ diverge.

   ✓ Vrai. Par définition du rayon de convergence, si $R = 2$ alors la série $\sum a_n x^n$ diverge pour tout $x \in]-\infty; -2[$, donc en particulier pour $x = -3$.