TwOd $\trianglerighteq$ **Exercice** - *Variance, covariance, indépendance dans un couple*

Soit $a \in \mathbb{R}$ et (X, Y) un couple de variables aléatoires admettant une densité f définie par

$$f(x, y) = a(x + y)\mathbf{1}_{[0;1]}(x)\mathbf{1}_{[0;1]}(y)$$

1. Déterminer a.

> On calcule $\int_0^1 \int_0^1 (x+y)dxdy = \int_0^1 xdx \int_0^1 dy + \int_0^1 dx \int_0^1 ydy = \frac{1}{2} \times 1 + 1 \times \frac{1}{2} = 1$ donc il faut $a = 1$.

2. Déterminer les lois marginales du couple (X, Y).

> On détermine les densités marginales f_X et f_Y à partir de la densité f du couple de variables : $f_X(x) = \int f(x, y)dy = 1_{[0;1]}(x) \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = 1_{[0;1]}(x) \left(x + \frac{1}{2}\right)$. De même, $f_Y(y) = 1_{[0;1]}(y) \left(y + \frac{1}{2}\right)$

3. Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\sigma^2(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\sigma^2(Y)$, $cov(X, Y)$.

> On utilise les densités marginales : $\mathbb{E}(X) = \int x f_X(x)dx = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{x}{2}\right) dx = \frac{7}{12}$. De même, $\mathbb{E}(Y) = \frac{7}{12}$.
> Par théorème de transfert, $\mathbb{E}(X^2) = \int x^2 f_X(x)dx = \int_0^1 x^3 + \frac{x^2}{2}dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$. De même, $\mathbb{E}(Y^2) = \frac{5}{12}$.
> On peut ainsi calculer la variance $\sigma^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{11}{144}$ et $\sigma^2(Y) = \sigma^2(X)$.
> Pour le calcul de la covariance, on calcule $\mathbb{E}(XY)$ en appliquant le théorème de transfert sur la loi du couple (X, Y) : $\mathbb{E}(XY) = \int_0^1 \int_0^1 xy(x+y)dxdy = \int_0^1 x^2dx \int_0^1 ydy + \int_0^1 xdx \int_0^1 y^2dy = \frac{1}{3}$. Il vient $cov(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \frac{-1}{144}$.

4. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

> Les variables X et Y sont donc corrélées, elles ne sont donc pas indépendantes. Cela se vérifie également en comparant le produit des densités marginales avec la densité du couple (X, Y).