

On considère un dé truqué cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On suppose que le dé est truqué de sorte que la probabilité d'obtenir une face est proportionnelle au numéro inscrit sur cette face.

Soit X la variable aléatoire donnant le numéro obtenu à l'issue d'un lancer.

- Déterminer la loi de X .



D'après les informations, pour tout $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, on a $P(X = k) = kP(X = 1)$. Or, par définition d'une loi de probabilité, on a $\sum_{k=1}^6 P(X = k) = 1$. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k=1}^6 P(X = k) \\ &= \sum_{k=1}^6 kP(X = 1) \\ &= P(X = 1) \sum_{k=1}^6 k \\ &= P(X = 1) \times \frac{6 \times 7}{2} \\ &= 21P(X = 1). \end{aligned}$$

On en déduit que $P(X = 1) = \frac{1}{21}$ et donc que pour tout $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, on a $P(X = k) = \frac{k}{21}$.

- Calculer l'espérance de X .



Par définition de l'espérance, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^6 kP(X = k) \\ &= \sum_{k=1}^6 k \times \frac{k}{21} \\ &= \frac{1}{21} \sum_{k=1}^6 k^2 \\ &= \frac{7 \times 13}{21} \\ &= \frac{13}{3}. \end{aligned}$$

- On pose $Y = \frac{1}{X}$. Déterminer la loi de Y et calculer son espérance.



Les valeurs prises par Y sont les inverses des valeurs prises par X . Ainsi, on a pour tout $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $P\left(Y = \frac{1}{k}\right) = P(X = k)$.

Pour calculer l'espérance, on utilise la définition :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=1}^6 \frac{1}{k} P\left(Y = \frac{1}{k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^6 \frac{1}{k} \times \frac{k}{21} \\ &= \frac{1}{21} \sum_{k=1}^6 1 \\ &= \frac{6}{21} \\ &= \frac{2}{7}. \end{aligned}$$