

Soient f et g deux fonctions d'une variable, de classe $C^2(\mathbb{R})$. On définit une fonction $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x, y) = xf(x + y) + yg(x + y)$$

1. Calculer $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ en fonction de x, y, f', g' .
2. Calculer les dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}x$ en fonction de x, y, f', g', f'', g'' .
3. Observer que $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}$. Quel théorème du cours permet de prévoir ce résultat ?
4. En déduire la valeur de

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$$