Ex

Propriété des fonctions de répartition

Soit la fonction F définie pour tout x réel par

$$F(x) = \begin{cases} ae^x & \text{si } x < 0 \\ -\frac{1}{2}e^{-x} + b & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

1. Déterminer des conditions sur les réels a et b de sorte qu'il existe une variable aléatoire réelle X telle que F soit la fonction de répartition de X.
2. À quelles conditions cette fonction F définit-elle la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité ?

✓

Il est nécessaire que $b = 1$ pour que $\lim\limits_{+\infty} F = 1$.

Pour que F soit croissante, il est nécessaire que $a \geqslant 0$ et $F(0^-) \leqslant F(0)$ soit $a \leqslant b - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.
Dans tous les cas, F est bien continue à droite.
Réciproquement, F vérifie toutes les conditions suffisantes pour que F soit une fonction de répartition.

Si on ajoute la condition que $a = \frac{1}{2}$ alors F est continue sur $\mathbb{R}$ et c'est la fonction de répartition d'une variable absolument continue.