

Scrl

**Exercice** - Inverse de matrice et application

Soient les matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ -6 & -13 & 12 \\ -6 & -12 & 11 \end{pmatrix}$  et  $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. Parmi les trois matrices suivantes, dire laquelle est l'inverse de  $P$  en justifiant.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

On a :

$$P \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \neq Id$$

donc  $P^{-1} \neq B$

$$P \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Id$$

et  $P^{-1} = C$  Par unicité de la matrice inverse, sans calcul, on peut affirmer  $P^{-1} \neq D$ .

2. Calculer  $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$ .

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ -6 & -13 & 12 \\ -6 & -12 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = D$$

3. En déduire  $A^{-1}$ ,  $A^{2n}$  et  $A^{2n+1}$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ .

On a :

$$D^2 = D \cdot D = I \Rightarrow F^{-1} = F$$

$$\begin{aligned} (P^{-1} \cdot A \cdot P)^{-1} &= P^{-1} \cdot A^{-1} \cdot P = P^{-1} \cdot A \cdot P \\ \Rightarrow A^{-1} \cdot P &= P \cdot P^{-1} \cdot A \cdot P = A \cdot P \\ \Rightarrow A^{-1} &= A \cdot P \cdot P^{-1} = A \end{aligned}$$

Donc  $A^{-1} = A$  d'où  $A^2 = I$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on déduit par récurrence que  $A^{2n} = I$  et  $A^{2n+1} = A$ .