

Soient  $(X_i)_{1 \leq i \leq 9}$  des variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, suivant chacune une loi normale de moyenne  $\mu = 2$  et de variance  $\sigma^2 = 9$ .

1. Déterminer la probabilité de l'événement  $\{X_1 \geq 1\}$ .

$X_1$  suit une loi  $\mathcal{N}(2, 3^2)$  donc  $P(X_1 \geq 1) = P(\frac{X_1 - 2}{3} \geq \frac{1-2}{3}) = P(U \geq -0.3333)$  où  $U$  suit une loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Or par symétrie,  $P(U \geq -0.3333) = P(U \leq 0.3333)$  et d'après la table,  $P(U \leq 0.3333) = 0.6293$

Donc  $P(X_1 \geq 1) = 0.6293$

2. Soit  $Y$  la variable aléatoire définie par

$$Y = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 X_i$$

Déterminer la loi de  $Y$  et calculer  $P(Y \geq 1)$ .

On sait que  $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 \mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{9} \times 9 \times 2 = 2$ .

On sait que par indépendance des variables,  $\sigma^2(Y) = \frac{1}{9^2} \sum_{i=1}^9 \sigma^2(X_i) = \frac{1}{9^2} \times 9 \times 3^2 = 1$ .

Donc  $Y$  suit une loi  $\mathcal{N}(2, 1)$ .

3. Soit  $Z$  la variable aléatoire définie par

$$Z = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 - X_6 - X_7 - X_8 - X_9$$

Déterminer la loi de  $Z$  et calculer  $P(Z \geq 1)$ .

De même,  $\mathbb{E}(Z) = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 - 2 - 2 - 2 - 2 = 2$  et, puisque toutes ces variables sont indépendantes,

$$\sigma^2(Z) = 3^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2 + (-3)^2 + (-3)^2 + (-3)^2 + (-3)^2 = 5 \times 3^2 + 4 \times 3^2 = 81 = 9^2$$

Donc  $Z$  suit une loi  $\mathcal{N}(2, 9^2)$ .

Puis on calcule  $P(Z \geq 1) = P(U \geq \frac{1-2}{9}) = P(U \geq -\frac{1}{9}) = P(U \leq \frac{1}{9})$ . D'après la table,

$$P(Z \geq 1) = 0.5438$$