

Exercice - Étude d'une fonction de deux variables

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on passe en coordonnées polaires en posant $x = r \cos(\theta)$ et $y = r \sin(\theta)$ avec $(r, \theta) \in [0; +\infty[\times [0; 2\pi[$.

Vérifier que

$$|f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))| \leq 2r^2$$

Le dénominateur vaut $x^2 + y^2 = r^2$. On majore le numérateur :

$$\begin{aligned} |f(r \cos \theta, r \sin \theta)| &= \frac{|(r \cos \theta)^3(r \sin \theta) - (r \cos \theta)(r \sin \theta)^3|}{r^2} \\ &= \frac{|r^4 \cos^3 \theta \sin \theta - r^4 \cos \theta \sin^3 \theta|}{r^2} \\ &\leqslant \frac{|r^4 \cos^3 \theta \sin \theta| + |r^4 \cos \theta \sin^3 \theta|}{r^2} \text{ par inégalité triangulaire} \\ &\leqslant \frac{r^4 (|\cos^3 \theta \sin \theta| + |\cos \theta \sin^3 \theta|)}{r^2} \\ &\leqslant \frac{r^4 (1+1)}{r^2} \text{ car } |\cos \theta| \leqslant 1 \text{ et } |\sin \theta| \leqslant 1 \\ &\leqslant 2r^2 \end{aligned}$$

2. Peut-on conclure que la fonction f est continue en $(0, 0)$? Justifier.

$|f(x, y) - f(0, 0)| = |f(x, y) - 0| \leq 2r^2 \xrightarrow[r \rightarrow 0]{} 0$. La convergence en r est uniforme en θ . On peut ainsi conclure que f est bien continue en $(0, 0)$.

3. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$.

Les formules de dérivation usuelles s'appliquent sur l'expression de f en tout point $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(y^2 + x^2)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{(-x)(y^4 + 4y^2x^2 - x^4)}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

4. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$

Hors de question ici d'utiliser des formules de dérivation puisqu'il n'y a pas d'expression de la fonction au voisinage de ce point... On doit donc revenir à la définition et regarder la limite du taux d'accroissement pour chaque variable.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = 0 \end{aligned}$$