JPjn **Exercice** - *Densité, fonction de répartition*

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}(1-x)^{\frac{1}{3}} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire Y.

Il faut et il suffit de vérifier que f est positive intégrable et $\int_{\mathbb{R}} f = 1$. Le premier point est immédiat. La fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}$ car elle est continue par morceaux à support compact. Enfin, on a

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_0^1 \frac{4}{3}(1-x)^{1/3}dx = \left[-(1-x)^{4/3}\right]_0^1 = 1.$$

2. Déterminer la fonction de répartition F de la variable Y.

Par définition, pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a $F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f(t)dt$. Alors
— si $y < 0$, $F_Y(y) = 0$,
— si $0 \leqslant y \leqslant 1$, $F_Y(y) = \int_0^y \frac{4}{3}(1-x)^{1/3}dx = \left[-(1-x)^{4/3}\right]_0^y = 1-(1-y)^{4/3}$
— si $y > 1$, $F_Y(y) = 1$.

3. Calculer l'espérance de la variable Y.

L'espérance de Y se calcule de la manière suivante :

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{\mathbb{R}} yf(y)dy = \int_0^1 \frac{4}{3}y(1-y)^{1/3}dy,$$

et par intégration par parties,

$$\mathbb{E}(Y) = \left[-y(1-y)^{4/3}\right]_0^1 + \int_0^1 (1-y)^{4/3}dy = \left[\frac{-3}{7}(1-y)^{7/3}\right]_0^1 = \frac{3}{7}.$$

4. Calculer la probabilité de l'événement $[0.488 < Y \leqslant 1.2]$.

Méthode 1 :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(0.488 < Y < 1.2) &= \int_{0.488}^{1.2} f(y)dy = \int_{0.488}^{1.2} \frac{4}{3}(1-y)^{1/3}dy = \left[-(1-y)^{4/3}\right]_{0.488}^1 \\ &= (1-0.488)^{1/3} = 0.8\end{aligned}$$

Méthode 2 :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(0.488 < Y < 1.2) &= F_Y(1.2) - F_Y(0.488) \\ &= 1 - [1-(1-0.488)^{1/3}] \\ &= (1-0.488)^{1/3} \\ &= 0.8\end{aligned}$$