

On considère le système linéaire :

$$\begin{cases} 5x + y + z = 7 \\ x + 5y - z = 5 \\ x - y + 4z = 4 \end{cases} \quad (S)$$

dont la solution est  $(1, 1, 1)$ .

- Montrer que l'on peut utiliser la méthode de Jacobi pour résoudre ce système et justifier que dans ce cas, la méthode converge.

Résoudre ce système revient à résoudre l'équation  $Ax = b$  où  $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$  et  $b = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ .

Cette matrice  $A$  est à diagonale strictement dominante car  $5 > 1+1$  et  $4 > 1+1$ . Par théorème, on en déduit que la méthode de Jacobi converge vers la solution.

- Calculer la première itération de la méthode de Jacobi en partant de  $X_0 = (0, 0, 0)$  puis la 50ème itération à l'aide d'un programme Python.

Pour appliquer la méthode de Jacobi, on décompose  $A$  sous la forme  $A = M - N$  où  $M = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$  et  $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Pour tout entier  $n$ , on définit  $X_{n+1} = F(X_n)$  où

$F(X) = M^{-1}NX + M^{-1}b$  et  $M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ . On décide d'initialiser l'itération avec

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On calcule :

$$X_1 = M^{-1}NX_0 + M^{-1}b = M^{-1}b = \begin{pmatrix} 1.4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X_2 = M^{-1}NX_1 + M^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.92 \\ 0.9 \end{pmatrix}$$

$$X_3 = M^{-1}NX_2 + M^{-1}b = \begin{pmatrix} 1.036 \\ 0.98 \\ 0.98 \end{pmatrix}$$

- Montrer que la méthode de Gauss-Seidel converge pour ce problème.

Pour utiliser la méthode de Gauss-Seidel, il faut s'assurer que la matrice  $A$  est symétrique définie positive. Elle est visiblement symétrique réelle donc diagonalisable. Il reste donc à vérifier que ses valeurs propres sont toutes strictement positives.

On se lance dans le calcul du polynôme caractéristique :

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 5-X & 1 & 1 \\ 1 & 5-X & -1 \\ 1 & -1 & 4-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6-X & 1 & 1 \\ 6-X & 5-X & -1 \\ 0 & -1 & 4-X \end{vmatrix} = (6-X)(X^2 - 8X + 14)$$

Une valeur propre évidente est donc  $\lambda_1 = 6$ . En analysant le polynôme du second degré ( $X^2 - 8X + 14$ ), on déduit que  $\lambda_2\lambda_3 = 14$  donc  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  sont de même signe. De plus,  $\lambda_2 + \lambda_3 = 8$  donc on est assuré que  $\lambda_2 > 0$  et  $\lambda_3 > 0$ .

- Calculer les cinquante premières itérations de la méthode de Gauss-Seidel en partant de  $X_0 = (0, 0, 0)$ .

On calcule :

$$X_1 = M^{-1}NX_0 + M^{-1}b = M^{-1}b = \begin{pmatrix} 1.4 \\ 0.72 \\ 0.83 \end{pmatrix}$$

$$X_2 = M^{-1}NX_1 + M^{-1}b = \begin{pmatrix} 1.09 \\ 0.948 \\ 0.9645 \end{pmatrix}$$

$$X_3 = M^{-1}NX_2 + M^{-1}b = \begin{pmatrix} 1.0175 \\ 0.9894 \\ 0.992975 \end{pmatrix}$$