

On pose

$$f(x, y) = x(x + 1)^2 - y^2$$

1. Déterminer les points stationnaires de la fonction f et préciser la nature de chacun d'eux.
2. Tracer la courbe constituée des points tels que $f(x, y) = 0$ et $x \geq 0$ en faisant apparaître des éléments qualitatifs (tangente, inflexion de la courbe).
3. Montrer que le point $(-1, 0)$ est un point isolé de la partie $\mathcal{C} = \{(x, y); f(x, y) = 0\}$ du plan, c'est-à-dire, le point $(-1, 0)$ appartient à cette partie et il existe un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que $D_\varepsilon \cap \mathcal{C} = \{(-1, 0)\}$ où D_ε est le disque ouvert centré en $(-1, 0)$ et de rayon ε .