Ex

On considère l'intégrale

$$I = \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy$$

1. Démontrer qu'il existe une fonction $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $I = \mathbb{E}(\varphi(Z_1))$ où Z_1 est une variable aléatoire normale $\mathcal{N}(0,1)$.

✓ Il suffit de poser $\varphi = 1_{[0;4]}$ de telle sorte qu'en appliquant le théorème de transfert à Z_1 admettant pour densité $f_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, on obtienne

$$\mathbb{E}(1_{[0;4]}(Z_1)) = \int_{\mathbb{R}} 1_{[0;4]}(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy = I$$

2. On définit une suite de variables $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ indépendantes et identiquement distribuées selon une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

(a) Déterminer une fonction $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n g(Z_i)\right)_{n\geqslant 1}$ converge presque sûrement vers I.

✓ Il suffit de poser $g = \varphi = 1_{[0;4]}$ pour que les variables $(g(Z_i))$ soient i.i.d et admettent une espérance I. Ainsi, d'après la Loi Forte des Grands Nombres, on a

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n 1_{[0;4]}(Z_i) \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} I$$

(b) Construire un intervalle de confiance I_{conf} tel que $\mathbb{P}(I \in I_{conf}) \approx 0{,}95$.

✓ On note $\sigma^2 = \mathbb{V}(g(Z_1))$. D'après le Théorème Central Limite,

$$\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n 1_{[0;4]}(Z_i) - I}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Si n est grand, on peut considérer que la variable $Z'_n = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n 1_{[0;4]}(Z_i) - I}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ suit approximativement une loi $\mathcal{N}(0,1)$. Par conséquent, d'après la table de loi,

$$\mathrm{P}(-1{,}96 \leqslant Z'_n \leqslant 1{,}96) \approx 0{,}95 \iff \mathbb{P}\left(Z'_n - 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant I \leqslant Z'_n + 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \approx 0{,}95$$

On en déduit un intervalle de confiance $I_{conf} = \left[Z'_n - 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; Z'_n + 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ qui est en réalité un intervalle de confiance asymptotique. Il resterait à expliciter $\sigma = \sqrt{V(g(Z_1))}$.

3. On définit une suite de variables (U_n) indépendantes et identiquement distribuées selon une loi uniforme $\mathcal{U}([0;4])$.

(a) A l'aide de cette suite, définir une suite de variables aléatoires (Y_n) qui converge presque sûrement vers I.

✓ D'après la loi forte des grands nombres,

$$\frac{4}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{U_i^2}{2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} \mathbb{E}\left(\frac{4}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{U_1^2}{2}}\right) = \int_{\mathbb{R}} \frac{4}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{4} 1_{[0;4]}(x)dx = I$$

(b) En déduire une méthode de Monte Carlo permettant d'obtenir une valeur approchée de I en complétant l'algorithme suivant : `n=1000;S=0`

```
for i in range(n):
u = ...
S= S + ...
print(...)
```

✓

```
u = 4*rand()
S= S + 1/sqrt(2*pi)*exp(-u**2/2)
print(4*S/n)
```

(c) Construire un intervalle de confiance I_{conf} tel que $\mathbb{P}(I \in I_{conf}) \approx 0{,}95$.

✓ On procède de même en posant $h\colon x \mapsto \frac{4}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.
On note $\sigma'^2 = \mathbb{V}(h(Z_1))$. D'après le Théorème Central Limite,

$$\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{4}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{U_i^2}{2}} - I}{\frac{\sigma'}{\sqrt{n}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Si n est grand, on peut considérer que la variable $Z''_n = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{4}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{U_i^2}{2}} - I}{\frac{\sigma'}{\sqrt{n}}}$ suit approximativement une loi $\mathcal{N}(0,1)$. On en déduit un intervalle de confiance $I_{conf} = \left[Z''_n - 1{,}96\frac{\sigma'}{\sqrt{n}} ; Z''_n + 1{,}96\frac{\sigma'}{\sqrt{n}}\right]$

4. Afin d'obtenir une approximation de I, au vu des intervalles de confiance obtenus pour chaque méthode, mieux vaut-il utiliser une méthode de Monte Carlo basée sur la suite (Z_n) ou la suite (U_n) ?

✓ Il reste à comparer σ et σ'...