Ex

Calcul d'une somme de série entière

1. Déterminer la somme de la série entière à valeurs réelles $S_1(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)^2 x^k$. On précisera son domaine de convergence.

$$\forall x \in]-1;1[, \quad S_1(x) = 1 + \frac{1+x}{(1-x)^3}.$$

2. Après avoir décomposé la fraction rationnelle $\frac{1}{n(n+2)}$ en éléments simples, déterminer la somme de la série entière à valeurs réelles $S_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+2)}$. On précisera son rayon de convergence.

Ici, $R = 1$:

$$\forall x \in]-1;1[, \quad S_2(x) = \frac{1}{2}\left(-\ln(1-x) + \frac{1}{x^2}\left[\ln(1-x) + x + \frac{x^2}{2}\right]\right).$$