Ex

HThN

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n, n étant un entier non nul et non premier. On tire une boule au hasard de l'urne et on définit les événements A_{p_i} comme étant “Le nombre est divisible par p_i.”, où les entiers $p_1, p_2, \ldots, p_r$ sont les diviseurs premiers de n.

1. Calculer la probabilité $\mathrm{P}(A_{p_i})$.

✓

Il y a $\frac{n}{p_i}$ multiples de p_i inférieurs à n, donc $\mathrm{P}(A_{p_i}) = \frac{\frac{n}{p_i}}{n} = \frac{1}{p_i}$.

2. Calculer $\mathrm{P}(A_{p_{i_1}} \cap A_{p_{i_2}} \cap \ldots \cap A_{p_{i_k}})$ pour k quelconques de ces r événements. En déduire que $A_{p_1}, A_{p_2}, \ldots, A_{p_r}$ sont r événements indépendants dans leur ensemble.

✓

L'événement $A_{p_{i_1}} \cap A_{p_{i_2}} \cap \ldots \cap A_{p_{i_k}}$ est réalisé ssi le nombre est divisible à la fois par p_{i_1}, p_{i_2}, ..., p_{i_k}. Comme il s'agit de nombres premiers, ceci équivaut à dire que le nombre est divisible par $p_{i_1} \times p_{i_2} \times \ldots \times p_{i_k}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(A_{p_{i_1}} \cap A_{p_{i_2}} \cap \ldots \cap A_{p_{i_k}}) &= \mathrm{P}(\text{“Le nombre est divisible par } p_{i_1} \times p_{i_2} \times \ldots \times p_{i_k}\text{”}) \\
&= \frac{1}{p_{i_1} \times p_{i_2} \times \ldots \times p_{i_k}} \\
&= \frac{1}{p_{i_1}} \times \frac{1}{p_{i_2}} \times \ldots \frac{1}{\times p_{i_k}} \\
&= \mathrm{P}(A_{p_{i_1}}) \times \mathrm{P}(A_{p_{i_2}}) \times \ldots \times \mathrm{P}(A_{p_{i_k}}).
\end{aligned}$$

On vient donc de montrer que $A_{p_1}, A_{p_2}, \ldots, A_{p_r}$ sont indépendants dans leur ensemble.

3. On appelle A l'événement “le nombre choisi n'est divisible par aucun p_i”. Calculer $\mathrm{P}(A)$. En déduire que le nombre d'entiers de $\{1, 2, \ldots, n\}$ qui sont premiers avec n, c'est-à-dire qui n'ont aucun facteur premier commun avec n, est $\Phi(n) = n\prod_{i=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$.

✓

L'événement A se réécrit $\overline{A}_{p_1} \cap \overline{A}_{p_2} \cap \ldots \cap \overline{A}_{p_r}$. Comme les événements $A_{p_1}, A_{p_2}, \ldots, A_{p_r}$ sont indépendants dans leur ensemble, c'est aussi le cas des événements $\overline{A}_{p_1}, \ldots, \overline{A}_{p_r}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(A) &= \mathrm{P}(\overline{A}_{p_1} \cap \overline{A}_{p_2} \cap \ldots \cap \overline{A}_{p_r}) \\
&= \prod_{i=1}^{r} \mathrm{P}(\overline{A_{p_i}}) = \prod_{i=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)
\end{aligned}$$

d'où $\dfrac{\Phi(n)}{n} = \prod_{i=1}^{r}\left(1 - \dfrac{1}{p_i}\right)$ et $\Phi(n) = n\prod_{i=1}^{r}\left(1 - \dfrac{1}{p_i}\right)$.

La fonction Φ est appellée l'indicatrice d'Euler. Elle associe à tout entier naturel n non nul, le nombre d'entiers compris entre 1 et n et premiers avec n.