Ex - Approximation par inégalité ZU3E

Soit X le nombre d'avions arrivant en une heure sur un aéroport. On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 16$.

1. Á l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, donner une minoration de la probabilité $\mathrm{P}(10 < X < 22)$.

✓

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

$$\mathrm{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant 6) \leqslant \frac{\mathrm{V}(X)}{6^2}$$

ce qui donne :

$$\mathrm{P}(10 \leqslant X \leqslant 22) = \mathrm{P}(|X - 16| \geqslant 6) \leqslant \frac{\mathrm{V}(X)}{6^2} = \frac{16}{36}$$

2. Á l'aide d'une table de la fonction de répartition de la loi de Poisson $\mathcal{P}(16)$ donnée ci-dessous, donner une valeur approchée de la probabilité $\mathrm{P}(10 < X < 22)$.

k	9	10	11	...	21	22	23
$\mathrm{P}(X \leqslant k)$	0.043	0.077	0.127	...	0.911	0.942	0.963

✓

On a $\mathrm{P}(10 < X < 22) = \mathrm{P}(10 < X \leqslant 21) = \mathrm{P}(X \leqslant 21) - \mathrm{P}(X \leqslant 10) = 0.911 - 0.077 = 0.834$.

3. On admet que X peut s'écrire comme la somme de n variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$. Donner une autre approximation de la probabilité $\mathrm{P}(10 < X < 22)$ en utilisant une loi normale.

✓

On a $\mathbb{E}(X) = 16$ et $\mathrm{V}(X) = 16$. D'après le théorème central limite, la variable aléatoire $Z = \frac{X-16}{4}$ suit approximativement une loi normale centrée réduite. On a donc :

$$\mathrm{P}(10 < X < 22) = \mathrm{P}\left(\frac{10-16}{4} < Z < \frac{22-16}{4}\right) = \mathrm{P}(-1.5 < Z < 1.5)$$

Par lecture de la table de la loi normale centrée réduite, on trouve $\mathrm{P}(-1.5 < Z < 1.5) = 2 \times \Phi(1.5) - 1 = 2 \times 0.9332 - 1 \approx 0.8664$.