

On étudie la fonction de deux variables

$$f: (x, y) \mapsto x \ln(y) - y \ln(x)$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f et vérifier que f est de classe \mathcal{C}^2 sur son ensemble de définition.

L'ensemble de définition de f est $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0\}$

2. On pose $h(t) = t - \ln(t) - \frac{1}{t}$: déterminer l'ensemble de définition de h et étudier ses variations.

L'ensemble de définition de h est $D_h = \{t \in \mathbb{R}, t > 0\} = \mathbb{R}_+^*$. La fonction h est dérivable sur son ensemble de définition et $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$h'(t) = 1 - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} = \frac{t^2 - t + 1}{t^2} = \frac{(t+1)^2 + t}{t^2} > 0$$

Par conséquent, h est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

3. Démontrer que $\text{grad}_f(x, y) = (0, 0) \iff \begin{cases} h\left(\frac{x}{y}\right) = 0 \\ \frac{x}{y} - \ln(x) = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \ln(y) - \frac{y}{x} = 0 \\ \frac{x}{y} - \ln(x) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \ln(y) - \ln(x) + \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = 0 \\ \frac{x}{y} - \ln(x) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} h\left(\frac{x}{y}\right) = 0 \\ \frac{x}{y} - \ln(x) = 0 \end{cases}$$

4. En déduire l'ensemble des points stationnaires de f .

La fonction h s'annule une et une seule fois sur son ensemble de définition en $t = 1$ donc (x, y) est un point stationnaire si et seulement si $x = y = e$. Il existe un unique point stationnaire qui est le point (e, e) .

5. Déterminer l'ensemble des points extrémaux (locaux et globaux) de f .

Il est clair que f n'admet pas d'extremum global. En effet, on peut voir par exemple que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x, 1) = -\infty$ et $\lim_{y \rightarrow +\infty} f(1, y) = +\infty$.

De plus, au voisinage du point stationnaire (e, e) , on peut étudier les conditions du second ordre en formant la matrice hessienne :

$$\text{Hess}_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 1/x^2 & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 1/y - 1/x \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 1/y - 1/x & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -1/y^2 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\text{Hess}_f(e, e) = \begin{pmatrix} 1/e^2 & 0 \\ 0 & -1/e^2 \end{pmatrix}$$

On a un déterminant négatif, donc le point (e, e) est un point selle.