

Dire si les matrices suivantes sont inversibles. Si oui, donner leur inverse :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3+4i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} i & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0,5 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} x & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ en fonction du paramètre } x \in \mathbb{C}$$

$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3+4i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale dont le déterminant est non nul :

$$\det A = (-3) \times (2i) \times (3+4i) \times (-2) \neq 0$$

Elle est donc inversible, et :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{i}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3+4i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale dont le déterminant est nul : B n'est pas inversible.

$$\det B = 1 \times 0 \times i \times 2 = 0$$

$$\det C = \begin{vmatrix} i & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0,5 \end{vmatrix} = 0 \text{ car } \ell_2 = -2\ell_4. \text{ Donc } C \text{ n'est pas inversible.}$$

$D = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice 2×2 dont le déterminant est non nul :

$$\det D = (-2) \times 2 - 1 \times (-3) = -1 \neq 0$$

D est inversible, et :

$$D^{-1} = - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = D$$

$E = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$ est une matrice 2×2 dont le déterminant est nul :

$$\det E = 2 \times (-6) - 3 \times (-4) = 0$$

E n'est pas inversible. $F = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & -6 & 3 \end{pmatrix}$ n'est pas une matrice carrée, elle n'est donc pas inversible.

$$\det(G) = \begin{vmatrix} x & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = x - 2 \times 3 = x - 6 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 6. \text{ Pour } x \in \mathbb{R} \setminus \{6\} :$$

$$G^{-1} = \frac{1}{x-6} \times \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x-6} & \frac{-3}{x-6} \\ \frac{-2}{x-6} & \frac{x}{x-6} \end{pmatrix}$$