Ex

Résolution de système linéaire à paramètre

Résoudre le système d'équations suivant, où $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$:

$$(\mathcal{S})\left\{\begin{array}{l} y^3 \times z^5 = 2x^2 \\ x \times y^4 \times z^3 = 1 \\ x \times z^2 = 3y \end{array}\right.$$

✓

On pose $X = \ln(x)$, $Y = \ln(y)$, $Z = \ln(z)$ et on utilise les formules suivantes :

$$\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$$

$$\ln\left(a^n\right) = n \ln a$$

$$(\mathcal{S}) \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} \ell_1 \\ 11\ell_3 + 5\ell_2 \end{array} \left\{\begin{array}{l} X + 4Y + 3Z = 0 \\ Y + Z = \frac{\ln 2}{11} \\ 44Z = 11 \cdot \ln 3 + 5 \cdot \ln 2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} X = \frac{11.\ln 3 - 11.\ln 2}{44} \\ Y = \frac{-11.\ln 3 - \ln 2}{44} \\ Z = \frac{11.\ln 3 + 5\ln 2}{44} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = e^X = e^{\frac{11}{44}\ln 3 - \frac{11}{44}\ln 2} = \frac{3^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{1}{4}}} \\ y = e^Y = e^{-\frac{11}{44}\ln 3 - \frac{1}{44}\ln 2} = 3^{-\frac{1}{4}} \times 2^{-\frac{1}{44}} \\ z = e^Z = e^{\frac{11}{44}\ln 3 + \frac{5}{44}\ln 2} = 3^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{5}{44}} \end{array}\right.$$