Ex

Lignes de niveau d'un polynôme

Soit $f\ :\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2 - 4x + y^2 + 6y$.

1. Trouver une écriture de la forme

$$f(x,y) = (x+a)^2 + (y+b)^2 + c$$

   où a, b, c sont trois réels que l'on explicitera.

✓

Obtenir cette écriture est un des classiques de manipulation du trinôme du second degré : on écrit $x^2 - 4x = x^2 - 2\cdot 2x + 2^2 - 2^2 = (x-2)^2 - 4$. De même $y^2 + 6y = (y+3)^2 - 9$. Ainsi $f(x,y) = (x-2)^2 + (y+3)^2 - 13$ ce qui donne la forme voulue avec $a = 2, b = -3, c = -13$

2. En déduire une équation et la nature de la ligne de niveau k de f, pour $k \in \mathbb{R}$ (on peut distinguer selon la valeur de k).

✓

La ligne de niveau k de g a pour équation $f(x,y) = k$, donc d'après la question 1

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = k + 13$$

.

Il s'agit de l'équation d'un cercle de centre $(2,-3)$ à condition que $k + 13 \geqslant 0$. Sinon c'est l'ensemble vide. Si $k + 13 = 0$, le cercle est de rayon 0 et est donc réduit à un point (son centre), et si $k + 13 > 0$ c'est un cercle de rayon $\sqrt{k+13}$ de centre $(2,-3)$.