na3z ▷ **Exercice** - *Nature de séries*

Étudier la convergence des séries $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ suivantes et préciser la somme de la série quand celle-ci est convergente.

1. $u_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$, $n_0 = 0$

   C'est une série géométrique de raison $q = \frac{3}{2} > 0$ donc une série divergente.

2. $u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$, $n_0 = 2$

   On écrit la somme partielle :

   $$\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^{n} \ln(k+1) + \ln(k-1) - 2\ln(k$$
   $$= \sum_{k=2}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) - (\ln(k) - 1$$
   $$= \ln(n+1) - \ln(n) - \ln 2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -$$

3. $u_n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n$, $n_0 = 0$

   C'est une série géométrique de raison $q = \frac{1+i}{2}$ et $|q| = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ donc une série convergente. Sa somme vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{1}{1-q} = \frac{2}{1-\mathrm{i}}$.

4. $u_n = \frac{1}{3^n}$, $n_0 = 0$

   C'est une série géométrique de raison $q = \frac{1}{3} < 1$ donc c'est une série convergente. Sa somme vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{1}{1-q} = \frac{3}{2}$.

5. $u_n = \frac{2n-1}{n(n^2-4)}$, $n_0 = 3$

   On trouve dans un premier temps que $u_n = \frac{1}{4n} - \frac{5}{8(n+2)} + \frac{3}{8(n-2)}$. On écrit la somme partielle pour $n \geqslant 3$ (les termes de la série ne sont pas bien définis pour $n \leqslant 2$) :

   $$\sum_{k=3}^{n} u_n = \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{4k} - \frac{5}{8(k+2)} + \frac{3}{8(k-2)}$$
   $$= \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{4k} - \sum_{k=5}^{n+2} \frac{5}{8k} + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{3}{8k}$$
   $$= \frac{1}{12} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4(n-1)} + \frac{1}{4n} - \sum_{k=n}^{n+}$$
   $$\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{89}{96}$$

Indications : Pour 2., on pourra remarquer que $\ln(1-\frac{1}{n^2}) = \ln(n-1) + \ln(n+1) - 2\ln(n)$. *Pour 5., on pourra décomposer la fraction en éléments simples, i.e. chercher a, b et c des réels tels que* $\frac{2n-1}{n(n^2-4)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n-2} + \frac{c}{n+2}$.