z2ZN ▷ **Exercice** - *Loi de Cauchy*

Soit f une fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$.

1. Vérifier que f définit une densité de probabilité. On note X une variable aléatoire admettant f pour densité.

   Il suffit de vérifier que $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ puis de calculer :

   $$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\arctan(x)\right]_{-\infty}^{+\infty} \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= 1\end{aligned}$$

2. Montrer que X n'admet pas de moment d'ordre 1.

   On remarque que $x \times \frac{1}{1+x^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ donc par comparaison, la fonction $x \mapsto xf(x)$ n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$. Donc X n'est pas intégrable et $\mathbb{E}(X)$ n'existe pas.

3. Calculer la fonction de répartition de X.

   Soit $t \in \mathbb{R}$:

   $$\begin{aligned}F_X(t) &= \mathrm{P}(X \leqslant t) \\ &= \int_{-\infty}^{t} f(x)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\arctan(x)\right]_{-\infty}^{t} \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\arctan(t) + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(t)\end{aligned}$$

4. Déterminer la fonction de répartition de $Y = \arctan(X)$ et en déduire sa loi.

   On sait que $-\frac{\pi}{2} \leqslant Y < \frac{\pi}{2}$. Donc si $t < -\frac{\pi}{2}$ alors $F_Y(t) = 0$ et si $t > \frac{\pi}{2}$ alors $F_Y(t) = 1$. Soit $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$:

   $$\begin{aligned}F_Y(t) &= \mathrm{P}(X \leqslant \tan(t)) \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\arctan(x)\right]_{-\infty}^{\tan(t)} \\ &= \frac{t}{\pi} + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

   On reconnaît la fonction de répartition d'une loi uniforme $\mathcal{U}\left(\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]\right)$.