Ex

Étude d'une fonction de deux variables

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$(x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on passe en coordonnées polaires en posant $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$ avec $(r,\theta) \in [0;+\infty[\times[0;2\pi[$.
   Vérifier que
   $$|f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))| \leqslant 2r^2$$

✓

Le dénominateur vaut $x^2+y^2 = r^2$. On majore le numérateur :

$$\begin{aligned} |f(r\cos\theta, r\sin\theta)| &= \frac{|(r\cos\theta)^3(r\sin\theta) - (r\cos\theta)(r\sin\theta)^3|}{r^2} \\ &= \frac{|r^4\cos^3\theta\sin\theta - r^4\cos\theta\sin^3\theta|}{r^2} \\ &\leqslant \frac{|r^4\cos^3\theta\sin\theta| + |r^4\cos\theta\sin^3\theta|}{r^2} \text{ par inégalité triangulaire} \\ &\leqslant \frac{r^4(|\cos^3\theta\sin\theta| + |\cos\theta\sin^3\theta|)}{r^2} \\ &\leqslant \frac{r^4(1+1)}{r^2} \text{ car } |\cos\theta| \leqslant 1 \text{ et } |\sin\theta| \leqslant 1 \\ &\leqslant 2r^2 \end{aligned}$$

2. Peut-on conclure que la fonction f est continue en $(0,0)$? Justifier.

✓

$|f(x,y) - f(0,0)| = |f(x,y) - 0| \leqslant 2r^2 \xrightarrow[r\to 0]{} 0$. La convergence en r est uniforme en θ. On peut ainsi conclure que f est bien continue en $(0,0)$.

3. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pour tout $(x,y) \neq (0,0)$.

✓

Les formules de dérivation usuelles s'appliquent sur l'expression de f en tout point $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(y^2+x^2)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{(-x)(y^4 + 4y^2x^2 - x^4)}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

4. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

✓

Hors de question ici d'utiliser des formules de dérivation puisqu'il n'y a pas d'expression de la fonction au voisinage de ce point... On doit donc revenir à la définition et regarder la limite du taux d'accroissement pour chaque variable.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0 \end{aligned}$$