JUo8 ⊳ **Exercice** - *Résolution de système linéaire à paramètre*

Résoudre les deux systèmes linéaires suivants en distinguant les cas selon les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{R}$.

$$(\mathcal{S}_1)\begin{cases} x+y+\lambda.z=\lambda \\ x+\lambda\cdot y-z=1 \\ x+y-z=1 \end{cases}$$

$$(\mathcal{S}_2)\begin{cases} x-2y+mz=-m-3 \\ y+z=m+2 \\ 4x+y+9z=5m+6 \\ x+y+3z=2m+3 \end{cases}$$

Résolution de : $(\mathcal{S}_1)\begin{cases} x+y+\lambda\cdot z=\lambda \\ x+\lambda\cdot y-z=1 \\ x+y-z=1 \end{cases}$ Calculons le déterminant associé à ce système :

- Pour $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$, par les formules de CRAMER :

$$x=\frac{\begin{vmatrix} \mathcal{C}_1 & \mathcal{C}_2 & \mathcal{C}_3 \\ \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} \mathcal{C}_1-\mathcal{C}_3 & \mathcal{C}_2 & \mathcal{C}_3 \\ 2\lambda & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-(\lambda-1)(\lambda+1)}=\frac{2\lambda(-\lambda+1)}{-(\lambda-1)(\lambda+1)}=\frac{2\lambda}{\lambda+1}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{0}{-(\lambda-1)(\lambda+1)} \text{ car } \ell_2=\ell_3$$

La solution de $(\mathcal{S}_1)$ est : $\left(\frac{2\lambda}{\lambda+1}, 0, \frac{\lambda-1}{\lambda+1}\right)$.

- Pour $\lambda=1$: $(\mathcal{S}_1)\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y-z=1 \\ x+y-z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y-z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ z=0 \end{cases}$ L'ensemble des solutions est :

$$\{(x, 1-x, 0)/x \in \mathbb{R}\}$$

- Pour $\lambda=-1$: $(\mathcal{S}_1)\begin{cases} x+y-z=-1 \\ x-y-z=1 \\ x+y-z=1 \end{cases}$ $\quad \ell_1-\ell_3 \Leftrightarrow 0=-2$ Impossible ! Résolution de :

$$(\mathcal{S}_2)\begin{cases} x-2y+mz=-m-3 \\ y+z=m+2 \\ 4x+y+9z=5m+6 \\ x+y+3z=2m+3 \end{cases}$$

Remarque : $\ell_3=4\ell_4-3\ell_2$.

- Pour $m \in \mathbb{R}^*$, par les formules de Cramer :

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -m-3 & -2 & m \\ m+2 & 1 & 1 \\ 2m+3 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & m \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} -m-1 & -2 & m \\ m+1 & 1 & 1 \\ 2m+2 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-m}$$
$$=\frac{-m(m+1)}{-m}$$
$$=m+1$$

De même,

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -m-3 & m \\ 0 & m+2 & 1 \\ 1 & 2m+3 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & m \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}=\frac{-m(m+2)}{-m}=m+2$$

et enfin :

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & -m-3 \\ 0 & 1 & m+2 \\ 1 & 1 & 2m+3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & m \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & -m-3 \\ 0 & 1 & m+2 \\ 0 & 3 & 3m+6 \end{vmatrix}}{-m}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & -m-3 \\ 0 & 1 & m+2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{-m}=0$$

La solution est :

$$\{(m+1, m+2, 0)\}$$

- Pour $m=0$:

$$(\mathcal{S}_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y & =-3 \\ y+z & =2 \\ x+y+3z & =3 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \ell_1 \begin{cases} x-2y & =-3 \\ y+z & =2 \\ 3y+3z & =6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y & =-3 \\ y+z & =2 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est : $\{(1-2z, 2-z, z)/z \in \mathbb{R}\}$.