Ex - Approximation d'une intégrale

Su3X

On suppose dans cet exercice que l'on dispose d'une fonction `normale()` pour simuler la variable $\mathcal{N}(0,1)$ et de `rand()` pour simuler la loi $\mathcal{U}([0;1])$.
Soient $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (iid) selon la loi $\mathcal{N}(0,1)$.
On cherche une valeur approchée de l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

1. Pour tout $i \geqslant 1$, exprimer $\mathbb{E}(X_i^2)$ sous forme d'intégrale.

✓

On applique le théorème de transfert :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_i^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}dx\\ &= 2\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}dx\\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}I\end{aligned}$$

2. Montrer que $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} \sqrt{\frac{2}{\pi}}I$.

✓

On applique la loi forte des grands nombres à la suite de variables aléatoires iid $(X_i^2)_{i\geqslant 1}$: $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} \mathbb{E}(X_1^2) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}I$.

3. Soit $\tilde{f}\colon x \mapsto xe^{-\frac{x^2}{2}}\mathbf{1}_{[0;+\infty[}(x)$. Vérifier que $\tilde{f}$ définit une densité de probabilité et exprimer la fonction de répartition associée à cette loi.

✓

On constate que $\tilde{f}(x) \geqslant 0$ pour tout $x \geqslant 0$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\int \tilde{f}(x)dx &= \int_0^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}dx\\ &= \left[-e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^{+\infty}\\ &= 1\end{aligned}$$

Donc $\tilde{f}$ est bien une fonction densité de probabilité.
Soit $\tilde{F}$ la fonction de répartition associée : si $t \leqslant 0$, il est clair que $\tilde{F}(t) = 0$. Soit $t > 0$:

$$\begin{aligned}\tilde{F}(t) &= \int_0^t xe^{-\frac{x^2}{2}}dx\\ &= 1 - e^{-\frac{t^2}{2}}\end{aligned}$$

4. Soit U une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{U}([0;1])$. Démontrer que la variable aléatoire $\sqrt{-2\ln(1-U)}$ admet $\tilde{f}$ comme densité. En déduire une commande permettant de simuler la loi d'une variable aléatoire admettant $\tilde{f}$ pour densité.

✓

Plusieurs méthodes sont possibles. On peut utiliser le théorème d'identification pour identifier la loi de la variable aléatoire $\sqrt{-2\ln(1-U)}$. On peut aussi remarquer que si $u \in [0;1]$ alors $u = \tilde{F}(x)$ pour $x = \sqrt{-2\ln(1-x)}$. D'après le théorème de simulation par inversion de la fonction de répartition, cela prouve que la fonction de répartition de la variable $\sqrt{-2\ln(1-U)}$ est $\tilde{F}$, ce qui revient à dire que sa loi admet $\tilde{f}$ pour densité.

5. En remarquant que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} x\tilde{f}(x)dx$, déterminer une nouvelle suite convergeant presque sûrement vers I. En déduire une méthode (que l'on détaillera) permettant d'approcher I.

✓

Soit $J_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i$ où (Y_i) est une suite de variables aléatoires i.i.d. selon une loi admettant $\tilde{f}$ pour densité. Alors on remarque que $I = \mathbb{E}(Y_1)$ et d'après la loi forte des grands nombres,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} I$$

Sachant simuler la loi de Y_1, on déduit l'algorithme suivant permettant de déterminer une valeur approchée de I :

```
n=1000
S=0
for i in range(n):
u = rand()
S= S + sqrt(-2*log(1-u))
print("Valeur approchée de I = ")
print(S/n)
```