

On considère les systèmes suivants :

$$(\mathcal{S}_m) \begin{cases} (m-1)x + (1-m)y + (m^2-1)z = 0 \\ my + z = 0 \\ (1-m)x - y - z = 0 \end{cases}$$

et :

$$(\mathcal{S}'_m) \begin{cases} (m-1)x + (1-m)y + (m^2-1)z = 1 \\ my + z = 1 \\ (1-m)x - my - z = -2 \end{cases}$$

où  $m \in \mathbb{R}$  est un paramètre réel.

- Déterminer, suivant la valeur de  $m$ , le déterminant de la matrice :

$$A_m = \begin{pmatrix} m-1 & 1-m & m^2-1 \\ 0 & m & 1 \\ 1-m & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$



$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} m-1 & 1-m & m^2-1 \\ 0 & m & 1 \\ 1-m & -1 & -1 \end{vmatrix} &= (m-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & m+1 \\ 0 & m & 1 \\ 1-m & -1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (m-1) \cdot [(m-1) \cdot m \cdot (m+1) + 1 - m + (m-1)] \\ &= m \cdot (m-1)^2 \cdot (m+1) \end{aligned}$$

Donc  $\det(A_m) \neq 0$  si et seulement si  $m \notin \{-1, 0, 1\}$ .

- En déduire les valeurs du paramètre  $m$  pour lesquelles le système  $(\mathcal{S}_m)$  admet des solutions non nulles et, dans ces cas, résoudre le système.



Le système  $(\mathcal{S}_m)$  est homogène. Il admet des solutions non nulles si et seulement si  $\det(A_m) = 0 \iff m \in \{-1, 0, 1\}$ .

Pour  $m = 0$  :

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}_0) &\Leftrightarrow \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases} \\ \text{Sol} &= \{(x, x, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Pour  $m = 1$  :

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}_1) &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ y + z = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \text{ quelconque} \\ y = -z \end{cases} \\ \text{Sol} &= \{(x, y, -y) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Pour  $m = -1$  :

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}_{-1}) &\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ -y + z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases} \\ \text{Sol} &= \{(x, x, x) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

- Trouver les solutions du système  $(\mathcal{S}'_m)$  pour  $m = 2$  et  $m = -1$ .



$$(\mathcal{S}'_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ 2y + z = 1 \\ -x - y - z = -2 \end{cases}$$

On a  $\det A_2 = 2 \cdot (2-1)^2 \cdot (2+1) = 6 \neq 0$  donc le système est de CRAMER, il admet une unique solution que l'on détermine par les formules de CRAMER :

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} & y &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} & z &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix}}{6} = \frac{0}{6} = 0 \\ &\Rightarrow \text{Sol} = \left\{ \left( \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right) \right\} \end{aligned}$$

$$(\mathcal{S}'_{-1}) \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2y = 1 \\ -y + z = 1 \\ 2x - y - z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z = -2 \\ -y + z = 1 \\ y - z = -1 \end{cases}$$

Donc

$$S = \left\{ \left( z - \frac{3}{2}, z - 1, z \right) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R} \right\}$$