

cRYI

Ex 1 - Mélange de lois, fonction de répartition

Soit  $Z$  une variable aléatoire admettant une fonction de répartition  $F_Z$  définie par :

$$F_Z(x) = \begin{cases} \frac{1}{(2-x)^2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 - \frac{1}{3x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Graphique : <https://www.geogebra.org/m/vat8nub8>

1. Vérifier que  $F_Z$  définit bien une fonction de répartition.

$F_Z$  est définie continue à droite et croissante sur  $\mathbb{R}$ . De plus, on a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_Z(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_Z(x) = 1$ . Il s'agit donc bien d'une fonction de répartition.

2. Calculer  $P(Z = 0)$  et  $P(Z = 1)$ . Peut-on dire que  $Z$  est une variable aléatoire absolument continue ?

$\mathbb{P}(Z = 0) = F_Z(0^+) - F_Z(0^-) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ . et  $\mathbb{P}(Z = 1) = F_Z(1^+) - F_Z(1^-) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ . Comme  $\mathbb{P}(Z = 0) \neq 0$ , la variable  $Z$  n'est pas absolument continue.

3. On considère  $Y: \Omega \rightarrow \{0; 1\}$  une variable aléatoire discrète dont la loi est définie par  $P(Y = k) = \alpha P(Z = k)$  pour tout  $k \in \{0; 1\}$  où  $\alpha$  est un paramètre réel à déterminer.

(a) Montrer que nécessairement,  $\alpha = \frac{12}{5}$ .

On a  $\mathbb{P}(Y = 0) = \alpha \mathbb{P}(Z = 0) = \frac{1}{4}\alpha$  et  $\mathbb{P}(Y = 1) = \alpha \mathbb{P}(Z = 1) = \frac{1}{6}\alpha$ . Comme  $\mathbb{P}(Y = 0) + \mathbb{P}(Y = 1) = 1$ , on en déduit que  $\alpha = \frac{12}{5}$ .

(b) Déterminer la fonction de répartition  $F_Y$  de la variable aléatoire  $Y$ .

La fonction de répartition de  $Y$  vaut  $F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ \mathbb{P}(Y = 0) & \text{pour } 0 \leq t < 1 \\ \mathbb{P}(Y = 0) + \mathbb{P}(Y = 1) & \text{pour } t \geq 1. \end{cases}$  donc

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ \frac{3}{5} & \text{pour } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{pour } t \geq 1. \end{cases}$$

4. On pose  $F(x) = F_Z(x) - \frac{5}{12}F_Y(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Tracer le graphe de la fonction  $F$ .

$$F(x) = F_Z(x) - \frac{5}{12}F_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{(2-x)^2} & \text{pour } x < 0 \\ \frac{1}{4} & \text{pour } 0 \leq x < 1 \\ \frac{7}{12} - \frac{1}{3x} & \text{pour } x \geq 1. \end{cases}$$

5. Démontrer qu'en multipliant  $F$  par une constante, on obtient la fonction de répartition d'une variable aléatoire que l'on notera  $X$ .

La fonction  $\frac{12}{7}F_Z$  est définie continue et croissante sur  $\mathbb{R}$ . De plus, on a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{12}{7}F_Z(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12}{7}F_Z(x) = 1$ . Il est donc clair que  $\frac{12}{7}F$  est la fonction de répartition d'une variable aléatoire  $X$ , qui est absolument continue.

6. Déterminer une densité de probabilité de la variable  $X$ .

Par dérivation,

$$f_X(x) = \frac{12}{7}F'_Z(x) \begin{cases} \frac{24}{7(2-x)^3} & \text{pour } x < 0 \\ 0 & \text{pour } 0 \leq x < 1 \\ \frac{4}{7x^2} & \text{pour } x \geq 1 \end{cases}.$$