Ex 1 **Durée de vie et temps d'attente**

On considère n lampes, $n \in \mathbb{N}^*$. La durée de vie (en années) d'une lampe est une variable aléatoire absolument continue dont la densité f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f : t \mapsto \frac{1}{16} t e^{-\frac{t}{4}} 1_{[0;+\infty[}(t)$$

On suppose que les lampes évoluent de manière indépendante.
Pour tout entier $i \in \{1, ..., n\}$, on note X_i la variable aléatoire égale à la durée de vie de la i-ème lampe.

1. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X_1.
2. Un appareil de type A comporte 6 lampes, toutes nécessaires à son fonctionement. On note $T = \min\limits_{i \in \{1,...,6\}} (X_i)$.
   (a) Que modélise la variable aléatoire T ?
   (b) Déterminer la loi de T.
   (c) Calculer la probabilité que l'appareil de type A fonctionne de manière continue pendant au moins 4 ans à partir de sa mise en marche, sans changer de lampe.
3. Un appareil de type B fonctionne avec une lampe seulement. On dispose cette fois d'une lampe de remplacement. Lorsque l'appareil fonctionne et que la lampe tombe en panne, celle-ci est immédiatement remplacée par la lampe de remplacement. Soit U la variable aléatoire donnant la durée de fonctionnement d'un appareil de type B avec une lampe de remplacement.
   (a) Exprimer U en fonction de X_1 et X_2.
   (b) Déterminer la loi de U.
4. On dispose de 4 appareils de type B, sans aucune lampe de remplacement. On met en marche ces 4 appareils simultanément. On note V le temps durant lequel au moins un des 4 appareils fonctionne.
   (a) Exprimer V en fonction de X_1, X_2, X_3, X_4.
   (b) En déduire la loi de V.

Ex 2 **Durée de vie et temps d'attente**

On considère n lampes, $n \in \mathbb{N}^*$. La durée de vie (en années) d'une lampe est une variable aléatoire absolument continue dont la densité f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f : t \mapsto \frac{1}{16} t e^{-\frac{t}{4}} 1_{[0;+\infty[}(t)$$

On suppose que les lampes évoluent de manière indépendante.
Pour tout entier $i \in \{1, ..., n\}$, on note X_i la variable aléatoire égale à la durée de vie de la i-ème lampe.

1. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X_1.

✓ On note F_{X_1} la fonction de répartition de la variable aléatoire X_1. Par définition,

$$\begin{aligned}\forall t\in\mathbb{R}, F_{X_1}(t) &= \int_{-\infty}^{t} f(x)dx\\ &= \begin{cases}0 & \text{si } t<0\\ \int_0^t \frac{1}{16}xe^{-\frac{x}{4}}dx & \text{si } t\geqslant 0\end{cases}\end{aligned}$$

c'est-à-dire pour $t\in\mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned}F_{X_1}(t) &= \left[\frac{-1}{4}xe^{-\frac{x}{4}}\right]_0^t + \int_0^t \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}dx \quad \text{par une I.P.P.}\\ &= \frac{-1}{4}te^{-\frac{t}{4}} + \left[-e^{-\frac{x}{4}}\right]_0^t\\ &= 1-e^{-\frac{t}{4}}\left(\frac{t}{4}+1\right)\end{aligned}$$

Finalement on a :

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad F_{X_1}(t) = \left(1-e^{-\frac{t}{4}}\left(\frac{t}{4}+1\right)\right)\mathbf{1}_{[0;+\infty[}(t)$$

2. Un appareil de type A comporte 6 lampes, toutes nécessaires à son fonctionement. On note $T=\min\limits_{i\in\{1,\dots,6\}}(X_i)$.

   (a) Que modélise la variable aléatoire T ?

   ✓ La variable aléatoire T modélise la durée de fonctionnement de l'appareil de type A.

   (b) Déterminer la loi de T.

   ✓ On détermine la fonction de répartition de T :

   $$\forall t\in\mathbb{R},\quad F_T(t)=\mathbb{P}(T\leqslant t).$$

   Si $t\leqslant 0$, $F(t)=0$. Soit $t\in\mathbb{R}^+$. Alors

   $$\begin{aligned}F_T(t) &= \mathbb{P}(\min_{i\in\{1,\dots,6\}}(X_i)\leqslant t)\\ &= 1-\mathbb{P}(\min_{i\in\{1,\dots,6\}}(X_i)>t)\\ &= 1-\mathbb{P}(\{X_1>t\}\cap\cdots\cap\{X_6>t\})\\ &= 1-\prod_{i=1}^{6}\mathbb{P}(X_i>t) \quad \text{par indépendance des } (X_i)_{i\in\{1,\cdots,6\}}\\ &= 1-\mathbb{P}(X_1>t)^6 \quad \text{car les } (X_i)_{i\in\{1,\cdots,6\}} \text{ sont de même loi}\\ &= 1-(1-F_{X_1}(t))^6.\end{aligned}$$

   En utilisant la question 1, on en déduit que :

   $$\forall t\in\mathbb{R},\quad F_T(t)=\left(1-e^{-\frac{3t}{2}}\left(1+\frac{t}{4}\right)^6\right)\mathbf{1}_{[0;+\infty[}(t).$$

   (c) Calculer la probabilité que l'appareil de type A fonctionne de manière continue pendant au moins 4 ans à partir de sa mise en marche, sans changer de lampe.

   ✓ On cherche à déterminer la probabilité $\mathrm{P}(T\geqslant 4)$:

   $$\mathrm{P}(T\geqslant 4)=1-\mathbb{P}(T<4)=1-F_T(4)=2^6e^{-6}\simeq 0.1586.$$

   La probabilité que l'appareil de type A fonctionne de manière continue pendant au moins 4 ans à partir de sa mise en marche est d'environ 15.86%.

3. Un appareil de type B fonctionne avec une lampe seulement. On dispose cette fois d'une lampe de remplacement. Lorsque l'appareil fonctionne et que la lampe tombe en panne, celle-ci est immédiatement remplacée par la lampe de remplacement. Soit U la variable aléatoire donnant la durée de fonctionnement d'un appareil de type B avec une lampe de remplacement.
   (a) Exprimer U en fonction de X_1 et X_2.

   ✓ D'après l'énoncé, $U = X_1 + X_2$.

   (b) Déterminer la loi de U.

   ✓ Comme U est une somme de deux variables aléatoires indépendantes de densité f, une densité de U se calcule à l'aide du produit de convolution : pour $s \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f_U(s) &= f * f(s) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(s-x)f(x)dx \\ &= \frac{1}{16^2}e^{-\frac{s}{4}}\mathbf{1}_{[0;+\infty[}(s)\int_0^s x(s-x)dx \\ &= \frac{1}{16^2}e^{-\frac{s}{4}}\mathbf{1}_{[0;+\infty[}(s)\left[\frac{1}{2}x^2s - \frac{1}{3}x^3\right]_{x=0}^{x=s} \\ &= \frac{1}{16^2}e^{-\frac{s}{4}}\mathbf{1}_{[0;+\infty[}(s)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)s^3 \\ &= \frac{1}{16^2 \times 6}s^3e^{-\frac{s}{4}}\mathbf{1}_{[0;+\infty[}(s) \\ &= \frac{1}{1536}s^3e^{-\frac{s}{4}}\mathbf{1}_{[0;+\infty[}(s), \end{aligned}$$

   ce qui détermine la loi de U.

4. On dispose de 4 appareils de type B, sans aucune lampe de remplacement. On met en marche ces 4 appareils simultanément. On note V le temps durant lequel au moins un des 4 appareils fonctionne.
   (a) Exprimer V en fonction de X_1, X_2, X_3, X_4.

   ✓ D'après l'énoncé, $V = \max\limits_{i \in \{1,\ldots,4\}}(X_i)$.

   (b) En déduire la loi de V.

   ✓ Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} F_V(t) &= \mathbb{P}(\max_{i \in \{1,\ldots,4\}}(X_i) \leqslant t) \\ &= \mathbb{P}(\{X_1 \leqslant t\} \cap \cdots \cap \{X_4 \leqslant t\}) \\ &= \prod_{i=1}^4 \mathbb{P}(X_i \leqslant t) \quad \text{par indépendance des } (X_i)_{i\in\{1,\cdots,4\}} \\ &= F_{X_1}(t)^4 \quad \text{car les } (X_i)_{i\in\{1,\cdots,4\}} \text{ sont de même loi} \\ &= \left(1 - e^{-\frac{t}{4}}\left(1 + \frac{t}{4}\right)\right)^4 \mathbf{1}_{[0;+\infty[}(t) \end{aligned}$$