uR6d ⊵ **Exercice** - *Étude de la nature d'une série*

1. Prouver qu'un équivalent de $e^{x^2} - \cos(x)$ au voisinage de 0 est $\frac{3x^2}{2}$. On pourra utiliser un développement limité.

Pour démontrer ceci, nous devons d'abord obtenir les développements limités de e^{x^2} et $\cos(x)$ autour de 0 jusqu'à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned} e^{x^2} &= 1 + x^2 + o(x^2) \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \end{aligned}$$

Ensuite, nous soustrayons ces deux séries terme à terme pour obtenir le développement limité de $e^{x^2} - \cos(x)$:

$$\begin{aligned} e^{x^2} - \cos(x) &= (1 + x^2 + o(x^2)) - (1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) \\ &= \frac{3x^2}{2} + o(x^2) \end{aligned}$$

On en déduit que l'équivalent de $e^{x^2} - \cos(x)$ au voisinage de 0 est bien $\frac{3x^2}{2}$.

2. Étudier la convergence de la série $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ où pour tout $n \geqslant 1$,

$$u_n = e^{\frac{1}{n^2}} - \cos\left(\frac{1}{n}\right).$$

On déduit de la question précédente que

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{3}{2n^2}$$

Cela prouve que $u_n \geqslant 0$ à partir d'un certain rang et que la série $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ converge par comparaison à une série de Riemann convergente.