Ex - Changement de variable

yTDM

Soit X une variable aléatoire absolument continue dont la densité est donnée par

$$f(x) = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[-1;1]}(x)$$

On cherche à identifier la loi de $Y = X^2$.

✓

1. pour tout t, $F_Y(t) = \mathrm{P}(X^2 \leqslant t)$
2. si $t \geqslant 0$, $\{X^2 \leqslant t\} = \{X \in [-\sqrt{t};\sqrt{t}]\}$;
   si $t < 0$ $\{X^2 \leqslant t\} = \varnothing$
3. donc pour tout $t \geqslant 0$,

   $$F_Y(t) = \mathrm{P}(X \in [-\sqrt{t};\sqrt{t}]) = \int_{-\sqrt{t}}^{+\sqrt{t}} \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[-1;1]}(x)dx$$

   si $0 \leqslant t \leqslant 1$ alors $F_Y(t) = \int_{-\sqrt{t}}^{+\sqrt{t}} \frac{1}{2}dx = \sqrt{t}$
   si $t > 1$ alors $F_Y(t) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}dx = 1$
4. pour tout $t \in]0;1[$, F_Y est dérivable en t et $F'_Y(t) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t}}$ donc en intégrant, $F_Y(t) = \int_0^t \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$ de sorte que $F_Y(0) = 0$ et $F_Y(1) = 1$.
   Pour résumer ces conditions, on peut écrire que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

   $$F_Y(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathbf{1}_{[0;1]}(x)dx$$

   On en déduit que Y admet pour densité la fonction $g\colon x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathbf{1}_{[0;1]}(x)$