

Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a; b]$. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Soit f une fonction densité de X . Il suffit de calculer

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \\ &= \int_a^b x \times \frac{1}{b-a} dx \\ &= \frac{1}{b-a} \times \left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right) \\ &= \frac{(b+a)(b-a)}{2(b-a)} \\ &= \frac{a+b}{2}\end{aligned}$$

Pour calculer la variance $\mathbb{V}(X)$, il reste à calculer :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx \\ &= \int_a^b x^2 \times \frac{1}{b-a} dx \\ &= \frac{1}{b-a} \times \left(\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} \right) \\ &= \frac{a^2 + 2ab + b^2}{3}\end{aligned}$$

puis on applique la formule de Huygens :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \\ &= \frac{a^2 + 2ab + b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \\ &= \frac{(b-a)^2}{12}\end{aligned}$$