Ex

Contrôle de première intention avec la loi de Benford

Le principe de ce contrôle est le suivant : on relève au hasard 120 montants apparaissant dans une zone éventuellement falsifiée de la comptabilité de l'entreprise.
On a remarqué que dans des comptes d'entreprises, les zones falsifiées comportent plus de montants commençant par le chiffre 6 que dans les zones non falsifiées, pour lesquelles la proportion théorique de montants commençant par 6 est égale à 6.7% selon la loi de Benford.
En première intention, le contrôleur décide de regarder la proportion de montants commençant par 6 dans les montants qu'il a relevés.

1. On souhaite construire un test avec $(H_0) : \theta = 0.067$ contre $(H_1) : \theta > 0.067$. Que signifie ce choix d'hypothèses ?

✓

On souhaite savoir si la proportion de montants commençant par 6 est anormalement élevé. En faisant ce choix d'hypothèse, on se prémunit en priorité du risque de déclarer que la zone considérée est falsifiée alors qu'elle ne l'est pas.

2. Sur les 120 montants relevés par le contrôleur, 18 commencent par le chiffre 6. À l'aide d'un test de niveau 5%, peut-on conclure sur une éventuelle falsification des données ?

✓

(a) Hypothèses : $(H_0) : \theta = 0.067$ contre $(H_1) : \theta > 0.067$ (test unilatéral droit) (b) Variable aléatoire de décision :

$$Z = \frac{F - 0.067}{\sqrt{\frac{0.067(1-0.067)}{120}}} \simeq \frac{F - 0.067}{0.022824},$$

où F est la fréquence empirique et $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ si H_0 est vraie. (c) Zone de rejet : $W =]u;+\infty[$, avec u le réel tel que $\mathbb{P}(Z \leqslant u) = 1 - 0.05 = 0.95$ et $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, c'est-à-dire $u = 1.64$. La zone de rejet est donc $W =]1.64;+\infty[$.
(d) Valeur observée :

$$z_{obs} = \frac{\frac{18}{120} - 0.067}{0.022824} \simeq 3.6365$$

(e) Conclusion : $z_{obs} \in W$ donc on rejette H_0 et on peut considérer que les données sont a priori falsifiées.