Ex **Nature de séries**

Pour chacune des séries ci-dessous, préciser si elle est absolument convergente, semi-convergente, grossièrement divergente ou divergente sans l'être grossièrement. Donner une courte justification de votre réponse.

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{(\sqrt{n})^7}$

✓

$\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{(\sqrt{n})^7} = \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^{\frac{7}{2}}}$: c'est une série à termes positifs, une série de Riemann avec $\alpha = \frac{7}{2} > 1$ absolument convergente.

2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)}{n^3+1}$

✓

On peut majorer la valeur absolue du terme général de cette série :
$\displaystyle\left|\frac{\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)}{n^3+1}\right| = \frac{\left|\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right|}{n^3+1} \leqslant \frac{1}{n^3+1}$; or $n^3+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^3$ donc $\displaystyle\frac{1}{n^3+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3}$; or $\frac{1}{n^3}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente, donc par majoration, la série de terme général $\displaystyle\left|\frac{\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)}{n^3+1}\right|$ est convergente. Cela prouve que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)}{n^3+1}$ est absolument convergente.

3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{4}}}$

✓

On constate que $\displaystyle\left|\frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{4}}}\right| = \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}$ qui est le terme général d'une série de Riemann divergente.

Cela prouve que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{4}}}$ n'est pas absolument convergente.

Par ailleurs, $\displaystyle\frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{4}}} = (-1)^n a_n$ avec $a_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}$; il est clair que pour tout $n \geqslant 2$, $a_n \geqslant 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ et $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{1}{4}} < 1$ donc la suite (a_n) est décroissante. Les trois hypothèses du Théorème Spécial des Séries Alternées sont réunies : la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{4}}}$ est donc convergente