

Soit Z une variable aléatoire admettant une fonction de répartition F_Z définie par :

$$F_Z(x) = \begin{cases} \frac{1}{(2-x)^2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 - \frac{1}{3x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Graphique : <https://www.geogebra.org/m/vat8nub8>

1. Vérifier que F_Z définit bien une fonction de répartition.

F_Z est définie continue à droite et croissante sur \mathbb{R} . De plus, on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_Z(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_Z(x) = 1$. Il s'agit donc bien d'une fonction de répartition.

2. Calculer $P(Z = 0)$ et $P(Z = 1)$. Peut-on dire que Z est une variable aléatoire absolument continue ?

$\mathbb{P}(Z = 0) = F_Z(0^+) - F_Z(0^-) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. et $\mathbb{P}(Z = 1) = F_Z(1^+) - F_Z(1^-) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.
Comme $\mathbb{P}(Z = 0) \neq 0$, la variable Z n'est pas absolument continue.

3. On considère $Y: \Omega \rightarrow \{0; 1\}$ une variable aléatoire discrète dont la loi est définie par $P(Y = k) = \alpha P(Z = k)$ pour tout $k \in \{0; 1\}$ où α est un paramètre réel à déterminer.

- (a) Montrer que nécessairement, $\alpha = \frac{12}{5}$.

On a $\mathbb{P}(Y = 0) = \alpha \mathbb{P}(Z = 0) = \frac{1}{4}\alpha$ et $\mathbb{P}(Y = 1) = \alpha \mathbb{P}(Z = 1) = \frac{1}{6}\alpha$. Comme $\mathbb{P}(Y = 0) + \mathbb{P}(Y = 1) = 1$, on en déduit que $\alpha = \frac{12}{5}$.

- (b) Déterminer la fonction de répartition F_Y de la variable aléatoire Y .

La fonction de répartition de Y vaut $F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ \mathbb{P}(Y = 0) & \text{pour } 0 \leq t < 1 \\ \mathbb{P}(Y = 0) + \mathbb{P}(Y = 1) & \text{pour } t \geq 1. \end{cases}$ donc

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ \frac{3}{5} & \text{pour } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{pour } t \geq 1. \end{cases}$$

4. On pose $F(x) = F_Z(x) - \frac{5}{12}F_Y(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Tracer le graphe de la fonction F .

$$F(x) = F_Z(x) - \frac{5}{12}F_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{(2-x)^2} & \text{pour } x < 0 \\ \frac{1}{4} & \text{pour } 0 \leq x < 1 \\ \frac{7}{12} - \frac{1}{3x} & \text{pour } x \geq 1. \end{cases}$$

5. Démontrer qu'en multipliant F par une constante, on obtient la fonction de répartition d'une variable aléatoire que l'on notera X .

La fonction $\frac{12}{7}F_Z$ est définie continue et croissante sur \mathbb{R} . De plus, on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{12}{7}F_Z(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12}{7}F_Z(x) = 1$. Il est donc clair que $\frac{12}{7}F$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X , qui est absolument continue.

6. Déterminer une densité de probabilité de la variable X .

Par dérivation,

$$f_X(x) = \frac{12}{7}F'_X(x) \begin{cases} \frac{24}{7(2-x)^3} & \text{pour } x < 0 \\ 0 & \text{pour } 0 \leq x < 1 \\ \frac{4}{7x^2} & \text{pour } x \geq 1 \end{cases}.$$