Ex

Calcul de dérivées partielles

1. Soit $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+3xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Étudier l'existence de la dérivée partielle de g selon x en $(0,0)$.

✓

Il faut revenir au taux d'accroissement :

$$\frac{g(0+h,0)-g(0,0)}{h} = \frac{h^3}{h \times h^2} = 1 \xrightarrow[h\to 0]{} 1$$

donc la dérivée partielle existe : $\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = 1$.

2. Soit $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}$ par :

$$h(x,y) = \ln(1+x+xy+e^y)$$

où $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1+x+xy+e^y > 0\}$.

Calculer $\dfrac{\partial h}{\partial x}$, $\dfrac{\partial h}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2}$ et $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x\, \partial y}$.

✓

Les dérivées partielles premières sont :

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \frac{1+y}{1+x+xy+e^y}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \frac{x+e^y}{1+x+xy+e^y}$$

Les dérivées partielles secondes demandées sont :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x,y) = \frac{e^y(1-x+xy)-x^2}{(1+x+xy+e^y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{1-ye^y}{(1+x+xy+e^y)^2}$$