

Exercice - Simulation d'une loi exponentielle

Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi uniforme sur $[0; 1]$ et $\lambda > 0$.

- Quelle est la loi suivie par $Y = \frac{-1}{\lambda} \ln(1 - X)$?

Soit $t \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= \mathbb{P}(Y \leq t) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{-1}{\lambda} \ln(1 - X) \leq t\right) \\ &= \mathbb{P}(\ln(1 - X) \geq -\lambda t) \\ &= \mathbb{P}(1 - X \geq e^{-\lambda t}) \\ &= \mathbb{P}(X \leq 1 - e^{-\lambda t}) \\ &= F_X(1 - e^{-\lambda t}). \end{aligned}$$

$$\text{Or } X \sim \mathcal{U}([0; 1]) \text{ donc } F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0; 1[\\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$

De plus, si $t \geq 0$, $1 - e^{-\lambda t} \in [0; 1[$ et si $t \leq 0$, $1 - e^{-\lambda t} < 0$.

Par conséquent,

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

ce qui nous permet de reconnaître la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre λ donc $Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

- Dans un langage de programmation, on simule une loi uniforme sur $[0; 1]$ avec la commande `rand()`. Quelle commande peut-on écrire pour simuler une loi exponentielle de paramètre λ ?

Il suffit d'écrire `-1/lambda*log(1-rand())` et même `-1/lambda*log(rand())` car $1 - X$ suit une loi uniforme sur $[0; 1]$.