

M00y Exercice - Propriété des fonctions de répartition

Soit la fonction  $F$  définie pour tout  $x$  réel par

$$F(x) = \begin{cases} ae^x & \text{si } x < 0 \\ -\frac{1}{2}e^{-x} + b & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1. Déterminer des conditions sur les réels  $a$  et  $b$  de sorte qu'il existe une variable aléatoire réelle  $X$  telle que  $F$  soit la fonction de répartition de  $X$ .
2. À quelles conditions cette fonction  $F$  définit-elle la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité ?

Il est nécessaire que  $b = 1$  pour que  $\lim_{+\infty} F = 1$ .

Pour que  $F$  soit croissante, il est nécessaire que  $a \geq 0$  et  $F(0^-) \leq F(0)$  soit  $a \leq b - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ .

Dans tous les cas,  $F$  est bien continue à droite.

Réciproquement,  $F$  vérifie toutes les conditions suffisantes pour que  $F$  soit une fonction de répartition.

Si on ajoute la condition que  $a = \frac{1}{2}$  alors  $F$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et c'est la fonction de répartition d'une variable absolument continue.