Ex **Jeu de boules**

Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n, où $n \in \mathbb{N}^*$ et deux boules noires numérotées 1 et 2. On effectue le tirage de toutes les boules de l'urne, une à une et sans remise. On appelle X le rang d'apparition de la première boule blanche et Y celui du premier numéro 1.

1. Déterminer la loi de X.

✓

X étant le rang d'apparition de la première boule blanche et l'urne contenant n boules blanches et 2 boules noires, les valeurs prises par X sont les suivantes

$$X(\Omega) = \{1, 2, 3\}.$$

Déterminons les probabilités de chaque issue :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X=1) &= \mathrm{P}(\text{"On obtient une boule blanche au premier tirage“}) \\
&= \frac{n}{n+2} \\
\mathrm{P}(X=2) &= \mathrm{P}(\text{"On obtient une boule noire puis une boule blanche“}) \\
&= \frac{2}{n+2} \times \frac{n}{n+1} \\
\mathrm{P}(X=3) &= \mathrm{P}(\text{"On obtient deux boules noires puis une boule blanche“}) \\
&= \frac{2}{n+2} \times \frac{1}{n+1} \times \frac{n}{n} \\
&= \frac{2}{(n+2)(n+2)}.
\end{aligned}$$

On peut vérifier que $\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3) = 1$. On a ainsi déterminer la loi de X, que l'on peut résumer dans le tableau ci-dessous :

k	1	2	3
$\mathrm{P}(X=k)$	$\frac{n}{n+2}$	$\frac{2n}{(n+2)(n+1)}$	$\frac{2}{(n+2)(n+1)}$

2. Montrer que les événements $\{X=1\}$ et $\{Y=1\}$ sont indépendants si et seulement si $n=2$.

✓

On a :
- $\mathrm{P}(X=1, Y=1) = \mathrm{P}(\text{"On obtient la boule blanche numérotée 1 au premier tirage“}) = \frac{1}{n+2}$.
- $\mathrm{P}(X=1)\mathrm{P}(Y=1) = \frac{n}{n+2} \times \frac{2}{n+2}$
- $\{X=1\}$ et $\{Y=1\}$ sont indépendants si et seulement si

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X=1, Y=1) = \mathrm{P}(X=1)\mathrm{P}(Y=1) &\Leftrightarrow \frac{1}{n+2} = \frac{2n}{(n+2)^2} \\
&\Leftrightarrow 2n = n+2 \\
&\Leftrightarrow n = 2.
\end{aligned}$$

3. Montrer que les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

✓

Pour $n \neq 2$, on a montré, par la question précédente, que les événements $\{X=1\}$ et $\{Y=1\}$ n'étaient pas indépendants, ce qui montre que les variables X et Y ne sont pas indépendantes.
Pour $n=2$, on a alors 2 boules blanches et 2 boules noires dans l'urne. Ainsi,

$$\mathrm{P}(X=2, Y=2) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

et $\mathrm{P}(X=2) = \frac{1}{3}$ et $\mathrm{P}(Y=2) = \frac{1}{3}$. Par conséquent, $\mathrm{P}(X=2, Y=2) \neq \mathrm{P}(X=2)\mathrm{P}(Y=2)$, ce qui implique que les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

4. On suppose maintenant que $n=2$.
   (a) Montrer que X et Y ont même loi.

✓

La loi de X a été déterminée à la question 1. Pour Y, on a $Y(\Omega) = \{1, 2, 3\}$ et

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Y=1) &= \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = \mathrm{P}(X=1) \\
\mathrm{P}(Y=2) &= \frac{1}{3} = \mathrm{P}(X=2) \\
\mathrm{P}(Y=3) &= \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{6} = \mathrm{P}(X=3)
\end{aligned}$$

donc X et Y ont même loi.

   (b) Déterminer la loi du couple (X, Y).

✓

$Y \backslash X$	1	2	3	P_Y (loi de Y)
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{6}$
P_X (loi de X)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1