Ex

Couple de variables aléatoires, question de cours

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires admettant pour densité la fonction f définie par

$$f(x,y)=\frac{3}{8}(x^2+y^2)\mathbf{1}_{[-1;1]^2}(x,y)$$

Déterminer la loi de $(X+Y,X-Y)$.

✓

On pose $U=X+Y$, $V=X-Y$ et on étudie la loi du couple (U,V). D'après le théorème de transfert, si h est continue bornée,

$$\mathbb{E}(h(U,V))=\frac{3}{8}\int_{[-1;1]^2}h(x+y,x-y)(x^2+y^2)dxdy$$

Pour faire apparaître la densité de (U,V), on effectue le changement de variable

$$(u,v)=(x+y,x-y)$$

(c'est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$). La réciproque s'écrit $(x,y)=(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2})$. La matrice jacobienne est $\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et la valeur absolue de son déterminant est $\frac{1}{2}$. On peut donc écrire $dxdy=\frac{1}{2}dudv$ et on a finalement :

$$\mathbb{E}(h(U,V))=\frac{3}{8}\int_C h(u,v)(\frac{u^2+v^2}{2})\frac{1}{2}dudv$$

où $C=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2/-2\leqslant u+v\leqslant 2 \text{ et } -2\leqslant u-v\leqslant 2\}$ est le carré image de $[-1;1]^2$ par le changement de variables.
On en déduit que (U,V) a pour densité la fonction g définie par

$$g(u,v)=\frac{3}{16}(u^2+v^2)\mathbf{1}_C(u,v)$$

Pour avoir indépendamment la loi de $(X+Y)$ et $(X-Y)$, il resterait à calculer les lois marginales.