

Le temps d'attente à une caisse de supermarché peut être modélisé par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

- Vérifier que le choix d'un paramètre $\lambda = 0,12$ permet d'avoir environ $P(T \leq 10) = 0,7$. Par la suite, on fixera $\lambda = 0,12$.



$$\begin{aligned} P(T \leq 10) &= \int_{-\infty}^{10} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \int_0^{10} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \left[-e^{-\lambda x} \right]_0^{10} \\ &= 1 - e^{-\lambda \times 10} \\ &= 1 - e^{-1,2} \\ &\approx 0,7 \end{aligned}$$

- Calculer $P(T > 5)$ et interpréter.



$$\begin{aligned} P(T > 5) &= 1 - P(T \leq 5) \\ &= 1 - \int_{-\infty}^5 \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= 1 - \int_0^5 \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= 1 - \left[-e^{-\lambda x} \right]_0^5 \\ &= 1 - (-e^{-\lambda \times 5} + 1) \\ &= e^{-\lambda \times 5} \\ &= e^{-0,12 \times 5} \\ &= e^{-0,6} \\ &= 0,5488 \end{aligned}$$

La probabilité que le temps d'attente soit supérieur à 5 minutes est d'environ 55%.

- Sachant qu'un client a déjà attendu 10 minutes à la caisse, quelle est la probabilité que son attente totale dépasse 15 minutes ?



$$\begin{aligned} P(T > 15 \mid T > 10) &= \frac{P(T > 15 \cap T > 10)}{P(T > 10)} \\ &= \frac{P(T > 15)}{P(T > 10)} \\ &= \frac{e^{-\lambda \times 15}}{e^{-\lambda \times 10}} \\ &= e^{-\lambda \times 5} \\ &= e^{-0,12 \times 5} \\ &= e^{-0,6} = P(T > 5) \\ &= 0,5488 \end{aligned}$$

La probabilité que le temps d'attente soit supérieur à 15 minutes sachant qu'il est déjà supérieur à 10 minutes est la même que la probabilité que le temps d'attente soit supérieur à 5 minutes. Cette probabilité est d'environ 55%. Cette propriété est appelée *absence de mémoire* de la loi exponentielle.

- On suppose que chaque caisse fonctionne manière indépendante. Etant donné que 6 caisses sont ouvertes, on note Y la variable aléatoire donnant le nombre de caisses pour lesquelles la durée d'attente est supérieure à 10 minutes. Quelle est la loi suivie par la variable Y ? Calculer la probabilité qu'au moins 4 des 6 caisses imposent une durée d'attente supérieure à 10 minutes, ce qui obligeraient le magasin à ouvrir une nouvelle caisse.



On a $Y \sim \mathcal{B}(6, P(T > 10))$ avec $P(T > 10) = e^{-1,2} \approx 0,3012$.
Donc

$$\begin{aligned} P(Y \geq 4) &= P(Y = 4) + P(Y = 5) + P(Y = 6) \\ &= \binom{6}{4} \times P(T > 10)^4 \times P(T \leq 10)^2 + \binom{6}{5} \times P(T > 10)^5 \times P(T \leq 10)^1 \\ &\quad + \binom{6}{6} \times P(T > 10)^6 \times P(T \leq 10)^0 \\ &= \binom{6}{4} \times e^{-1,2 \times 4} \times (1 - e^{-1,2})^2 + \binom{6}{5} \times e^{-1,2 \times 5} \times (1 - e^{-1,2})^1 \\ &\quad + \binom{6}{6} \times e^{-1,2 \times 6} \times (1 - e^{-1,2})^0 \\ &\approx 0,07 \end{aligned}$$

La probabilité qu'au moins 4 des 6 caisses imposent une durée d'attente supérieure à 10 minutes est d'environ 7%.