Ex - Étude d'un gain V97L

On lance un dé équilibré. On gagne 1 euro si le résultat est pair, on pert 1 euro si le résultat est impair. Ŝoit $n \geqslant 1$ le nombre de parties. On note X le nombre le nombre de lancers pairs obtenus au bout de n parties et G le gain obtenu au bout de n parties.

1. Donner la loi de X, son espérance et sa variance.

✓

La variable aléatoire X donne le nombre de succès à l'issue de n expériences indépendantes de Bernoulli où le succès est l'obtention d'un résultat pair, de probabilité $p = 0.5$. On a donc $X \sim \mathcal{B}(n, 0.5)$, $\mathbb{E}(X) = n \times 0.5 = \frac{n}{2}$ et $\mathrm{V}(X) = n \times 0.5 \times 0.5 = \frac{n}{4}$.

2. Exprimer G en fonction de X.

✓

On a $G = X - (n - X) = 2X - n$.

3. Exprimer l'événement « le gain ou la perte n'excède pas 20 euros » en fonction de X.

✓

On a $-20 \leqslant G \leqslant 20 \iff -20 \leqslant 2X - n \leqslant 20 \iff -10 \leqslant X - \frac{n}{2} \leqslant 10$. Donc l'événement considéré est $\{|X - \frac{n}{2}| \leqslant 10\}$ ou encore $\{-10 \leqslant X - \frac{n}{2} \leqslant 10\}$.

4. En utilisant le théorème central limite sans correction de continuité, déterminer le nombre maximal de lancers n à effectuer pour que la probabilité de l'événement « le gain ou la perte n'excède pas 20 euros » soit supérieure à 0.9544.

✓

On cherche n tel que $\mathrm{P}(|X - \frac{n}{2}| \leqslant 10) \geqslant 0.9544$. On sait que $\mathbb{E}(X) = \frac{n}{2}$ et $\mathrm{V}(X) = \frac{n}{4}$. D'après le théorème central limite, la variable aléatoire $Z = \frac{X - \frac{n}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}}$ suit approximativement une loi normale centrée réduite. On a donc :

$$\mathrm{P}(|X - \frac{n}{2}| \leqslant 10) = \mathrm{P}\left(\frac{|X - \frac{n}{2}|}{\frac{\sqrt{n}}{2}} \leqslant \frac{10}{\frac{\sqrt{n}}{2}}\right) = \mathrm{P}\left(|Z| \leqslant \frac{10}{\frac{\sqrt{n}}{2}}\right)$$

On cherche donc n tel que $\mathrm{P}(|Z| \leqslant \frac{10}{\frac{\sqrt{n}}{2}}) = 2 \times \Phi(\frac{10}{\frac{\sqrt{n}}{2}}) - 1 = 2 \times \Phi(\frac{20}{\sqrt{n}}) - 1 \geqslant 0.9544$ soit encore $\Phi(\frac{20}{\sqrt{n}}) \geqslant 0.9772$.
Par lecture de table, on trouve $\frac{20}{\sqrt{n}} \geqslant 2$ soit $n \leqslant 100$.