Ex

On considère un échantillon (X_i) de taille $n = 4$ dans une population suivant une loi normale de paramètres μ et σ^2.
On pose

$$T_1 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} X_i \qquad T_2 = \frac{1}{5}(2X_1 + X_2) + \frac{1}{10}(3X_3 + X_4)$$

$$U = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{4} (X_i - \mu)^2 \qquad V = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{4} (X_i - T_1)^2$$

1. On cherche à estimer μ à l'aide des estimateurs T_1 et T_2. Étudier leur biais et comparer leurs efficacités.

✓

Par linéarité de l'espérance, on calcule $\mathbb{E}(T_1) = \frac{4\mu}{4} = \mu$, $\mathbb{E}(T_2) = \frac{3\mu}{5} + \frac{4\mu}{10} = \mu$. Par conséquent, $B(T_1) = B(T_2) = 0$.
Pour comparer l'efficacité des deux estimateurs sais biais, on calcule leur EQM (ce qui revient à calculer leur variance.) Par indépendance des variables, on a :
$V(T_1) = \frac{\sigma^2}{4} < V(T_3) = \frac{(4^2+2^2+3^2+1^2)\sigma^2}{100}$. Le plus efficace est donc l'estimateur T_1 qui est la moyenne empirique.

2. Quelle est la loi suivie par la variable T_1 ? la variable T_2 ? la variable U ? la variable V ? justifier.

✓

$U = \sum_{i=1}^{4} \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2$; or les X_i sont des variables aléatoires indépendantes et $\frac{X_i-\mu}{\sigma}$ suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$ donc par définition, U suit une loi de $\chi^2(4)$.
De plus, $T_1 = \overline{X}$ est l'estimateur de moyenne empirique donc d'après le théorème de Fisher, V suit une loi de $\chi^2(4 - 1) = \chi^2(3)$.

3. Déterminer $x \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{P}(U > x) = 0{,}05$.

✓

On lit dans la table de loi $\mathrm{P}(U < x) = 0{,}95$ pour $x = 11{,}07$.

4. A l'aide du tableur, calculer $\mathrm{P}(V > 5)$ avec une précision de 10^{-8}.

✓

On a constaté que V suit une loi de $\chi^2(3)$ d'après le théorème de Fisher.
Ensuite, en tapant la formule `1-LOI.KHIDEUX.N(5;3;1)` dans le tableur, on trouve que $\mathrm{P}(V > 5) \approx 0{,}17179714$.

5. Quelle est la loi de la variable aléatoire $\frac{4(T_1-\mu)}{\sigma\sqrt{U}}$?

✓

On pose $Z = \frac{T_1-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{4}}} = \frac{2(T_1-\mu)}{\sigma}$ variable distribuée selon une loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Soit alors $Y = \frac{Z}{\sqrt{\frac{U}{4}}}$: par définition, Y suit une loi $St(4)$. Après simplifications, on peut réécrire $Y = \frac{4(T_1-\mu)}{\sigma\sqrt{U}}$.