

Soient f et g deux fonctions d'une variable, de classe $C^2(\mathbb{R})$. On définit une fonction $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x, y) = xf(x + y) + yg(x + y)$$

1. Calculer $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ en fonction de x, y, f', g' .



Par composition, φ est dérivable en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et par dérivation d'un produit et application de la règle des chaînes on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) &= f(x + y) + x \times 1 \times f'(x + y) + y \times 1 \times g'(x + y) \\ &= f(x + y) + xf'(x + y) + yg'(x + y) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) &= xf'(x + y) + g(x + y) + yg'(x + y)\end{aligned}$$

2. Calculer les dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}$ en fonction de x, y, f', g', f'', g'' .



On redérive les expressions ci-dessus :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} (f(x + y) + xf'(x + y) + yg'(x + y)) \\ &= 1 \times f'(x + y) + (1 \times f'(x + y) + x \times 1 \times f''(x + y)) + y \times 1 \times g''(x + y) \\ &= 2f'(x + y) + xf''(x + y) + yg''(x + y)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(x, y) = xf''(x + y) + 2g'(x + y) + yg''(x + y)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} (xf'(x + y) + g(x + y) + yg'(x + y)) \\ &= f'(x + y) + xf''(x + y) + g'(x + y) + yg''(x + y)\end{aligned}$$

3. Observer que $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}$. Quel théorème du cours permet de prévoir ce résultat ?



Puisque f est de classe C^2 au voisinage de tout point (x, y) le théorème de Schwarz s'applique (Th 2.10 du cours) et permet de conclure qu'en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}(x, y)$.

4. En déduire la valeur de

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$$



Il suffit de remplacer par les expressions trouvées ci-dessus, simplifier et on trouve $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, y) - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(x, y) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(x, y) = 0$