qyPc **Exercice** - *Simulation de loi : Rademacher, Laplace, Géométrique*

La fonction random disponible dans les logiciels de calcul permet de générer des nombres aléatoires sur l'intervalle $[0;1]$, distribués selon une loi uniforme $\mathcal{U}([0;1])$. A partir de cette fonction, il est facile de simuler des variables aléatoires suivant d'autres lois. On donne ou on rappelle la définition de quelques lois usuelles :

Définition : Soit $p \in]0;1[$: une variable X suit une loi de Rademacher $\mathcal{R}(p)$ si :

— $\mathrm{P}(X = 1) = p$

— $\mathrm{P}(X = -1) = 1 - p$

Définition : Soit $\lambda > 0$: une variable X suit une loi de Laplace $\mathcal{L}(\lambda)$ si elle admet pour densité :

$$f_X(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$$

Définition : Soit $p \in]0;1[$: une variable X suit une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ si pour tout entier $k \geqslant 1$:

$$\mathrm{P}(Z = k) = p(1-p)^{k-1}$$

Notations : pour tout événement A, on note $\mathbf{1}_A$ la fonction indicatrice de A ; pour tout x réel, on note $[x]$ la partie entière de x.

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes : X suit une loi Rademacher $\mathcal{R}(1/2)$ et Y suit une loi uniforme sur $[0;1]$.

1. Soit $\lambda > 0$. On pose $U = \frac{1}{\lambda} X \ln(Y)$.
   (a) Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer $\mathrm{P}(\ln(Y) \leqslant a, X = 1)$ et $\mathrm{P}(\ln(Y) \geqslant a, X = -1)$
   (b) Déterminer la fonction de répartition de la variable U.
   (c) En déduire que U suit une loi de Laplace $\mathcal{L}(\lambda)$.
2. Soit $p \in]0;1[$. On définit les variables $Z = \frac{\ln(Y)}{\ln(1-p)}$ et $V = 1 + [Z]$.
   (a) Déterminer la loi de Z.
   (b) Démontrer que V suit une loi géométrique.