Ex - Min et Max

oXIK

Soit $X_1, .., X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant chacune une même loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$.

1. Calculer la fonction de répartition de la variable $\max(X_1, ..., X_n)$ et en déduire la loi de cette variable aléatoire.

✓

On note $V = \max(X_1, ..., X_n)$. On sait que $\mathrm{P}(V \leqslant t) = \mathrm{P}((X_1 \leqslant t) \cap ... \cap (X_n \leqslant t))$ et par indépendance des variables qui suivent chacune une même loi, on en déduit que

$$\mathrm{P}(V \leqslant t) = \mathrm{P}(X_1 \leqslant t)^n = \begin{cases} (1 - e^{-\lambda t})^n & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On obtient ainsi la fonction de répartition de V. La densité de V s'obtient en dérivant cette fonction.

2. Calculer la loi de la variable $\min(X_1, ..., X_n)$.

✓

On note $U = \min(X_1, ..., X_n)$. On sait que $\mathrm{P}(U \geqslant t) = \mathrm{P}((X_1 \geqslant t) \cap ... \cap (X_n \geqslant t))$ et par indépendance des variables qui suivent chacune une même loi, on en déduit que

$$\mathrm{P}(U \geqslant t) = \mathrm{P}(X_1 \geqslant t)^n = \begin{cases} e^{-\lambda n t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

On en déduit que la fonction de répartition de U est la fonction

$$t \mapsto \begin{cases} 1 - e^{-\lambda n t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Une fonction densité de U s'obtient en dérivant cette fonction de répartition.