Ex - Calcul par approximation B3ac

L'observation a permis d'affirmer que le nombre d'étudiants qui entrent à la bibliothèque entre 9h00 et 10h30 suit une loi de Poisson de paramètre 16 dont voici un extrait de la table :

k	14	15	16	17	18
$\mathrm{P}(X \leqslant k)$	0.3675	0.4667	0.5660	0.6593	0.7423

1. (a) En utilisant le tableau ci-dessus, déterminer $\mathrm{P}(X = 15)$.

✓ $\mathrm{P}(X = 15) = \mathrm{P}(X \leqslant 15) - \mathrm{P}(X \leqslant 14) = 0.4667 - 0.3675 \simeq 0,0992$.

(b) Déterminer les paramètres de la loi normale que suit la variable aléatoire Y qui approche X.

✓ X peut être approchée par Y qui suit la loi $\mathcal{N}(\mu = 16, \sigma^2 = 16)$.

(c) Calculer $\alpha = \mathrm{P}(14.5 \leqslant Y \leqslant 15.5)$. Quel est le lien entre α et $\mathrm{P}(X = 15)$?

✓ On a

$$\begin{aligned}
\alpha = \mathrm{P}(14.5 \leqslant Y \leqslant 15.5) &= \mathbb{P}\left(\frac{-1.5}{\sqrt{16}} \leqslant \frac{Y-16}{\sqrt{16}} \leqslant \frac{-0.5}{\sqrt{16}}\right) \\
&= \mathrm{P}(-0.375 \leqslant Z \leqslant -0.125), \quad \text{où } Z \sim \mathcal{N}(0,1) \\
&= \mathrm{P}(0.125 \leqslant Z \leqslant 0.375) \\
&= \mathrm{P}(Z \leqslant 0.375) - \mathrm{P}(Z \leqslant 0.125) \\
&= 0.64615 - 0.54975 \\
&= 0.0964
\end{aligned}$$

α est une approximation (avec correction de continuité) de $\mathrm{P}(X = 15)$. En effet,

$$\mathrm{P}(X = 15) = \mathrm{P}(14.5 \leqslant X \leqslant 15.5) \simeq \mathrm{P}(14.5 \leqslant Y \leqslant 15.5).$$

2. Déterminer une approximation de $\mathrm{P}(15 \leqslant X \leqslant 20)$.

✓

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(15 \leqslant X \leqslant 20) &= \mathrm{P}(14.5 \leqslant X \leqslant 20.5) \\
&\simeq \mathrm{P}(14.5 \leqslant Y \leqslant 20.5) \\
&\simeq \mathbb{P}\left(-0.375 \leqslant \frac{Y-16}{4} \leqslant 1.125\right) \\
&\simeq \mathrm{P}(Z \leqslant 1.125) - \mathrm{P}(Z \leqslant -0.375) \\
&\simeq \mathrm{P}(Z \leqslant 1.125) - (1 - \mathrm{P}(Z \leqslant 0.375)) \\
&\simeq 0.8697 - 1 + 0.64615 \\
&\simeq 0.51585
\end{aligned}$$