Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_X : x \mapsto \begin{cases} kx^2 & \text{si } x \in [-1;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la valeur de k.

✓

Pour que f_X soit une densité, il faut que $\int_{\mathbb{R}} f_X(x)dx = 1$. On a donc :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f_X(x)dx &= \int_{-1}^{1} kx^2 dx \\ &= \left[\frac{k}{3}x^3\right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{2k}{3} = 1 \end{aligned}$$

Donc $k = \frac{3}{2}$.

2. Déterminer la fonction de répartition F_X de X.

✓

$$F_X : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < -1 \\ \frac{3}{2}\int_{-1}^{t} x^2 dx & \text{si } t \in [-1;1] \\ 1 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

donc :

$$F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < -1 \\ \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{2} & \text{si } t \in [-1;1] \\ 1 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

3. Calculer $\mathrm{P}(X \leqslant \frac{1}{2} \mid X > 0)$.

✓

D'après la formule des probabilités conditionnelles, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X \leqslant \frac{1}{2} \mid X > 0) &= \frac{\mathrm{P}(X \leqslant \frac{1}{2} \cap X > 0)}{\mathrm{P}(X > 0)} \\ &= \frac{\mathrm{P}(0 < X \leqslant \frac{1}{2})}{\mathrm{P}(X > 0)} \end{aligned}$$

Or $\mathrm{P}(X > 0) = 1 - \mathrm{P}(X \leqslant 0) = 1 - F_X(0) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ et :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(0 < X \leqslant \frac{1}{2}) &= F_X(\frac{1}{2}) - F_X(0) \\ &= \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^3 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{16} \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{P}(X \leqslant \frac{1}{2} \mid X > 0) = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$.

4. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$.

✓

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)dx \\ &= \int_{-1}^{1} x\frac{3}{2}x^2 dx \\ &= \left[\frac{3}{8}x^4\right]_{-1}^{1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

D'après le théorème de transfert, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)dx \\ &= \int_{-1}^{1} x^2\frac{3}{2}x^2 dx \\ &= \left[\frac{3}{10}x^5\right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{3}{5}$.

5. Soit $Y = X^2$. Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y et en déduire sa densité.

✓

Par définition, si $t \in \mathbb{R}$ alors $F_Y(t) = \mathrm{P}(Y \leqslant t) = \mathrm{P}(X^2 \leqslant t)$. Donc :

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \mathrm{P}(-\sqrt{t} \leqslant X \leqslant \sqrt{t}) & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Or si $t \geqslant 0$, $\mathrm{P}(-\sqrt{t} \leqslant X \leqslant \sqrt{t}) = F_X(\sqrt{t}) - F_X(-\sqrt{t}) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geqslant 1 \\ \left[\frac{1}{2}x^3\right]_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} = t\sqrt{t} & \text{si } t \in [0;1] \end{cases}$.

En définitive,

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t\sqrt{t} & \text{si } t \in [0;1] \\ 1 & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases}$$

Par dérivation de la fonction de répartition, on obtient la densité de Y :

$$f_Y(t) = \begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{t} & \text{si } t \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$