

On considère un avion contenant 100 passagers. On suppose que le poids d'un passager pris au hasard suit une loi de probabilité dont l'espérance est 71 kg et l'écart type est 7 kg.

- Soit X la variable aléatoire donnant le poids total des 100 passagers. Que peut-on dire de la variable X ?

On ne connaît pas la loi de X mais d'après le théorème central limite, X suit approximativement une loi normale.

On peut calculer l'espérance de X et la variance de X : Si on note Y_i le poids du i -ème passager, on a $X = \sum_{i=1}^{100} Y_i$. Par conséquent, $\mathbb{E}(X) = 100 \times 71 = 7100$ et $V(X) = 100 \times 7^2 = 4900$. D'après le théorème central limite, la loi de X peut être approchée par une loi normale de moyenne 7100 et de variance 4900, soit un écart type de 70.

- Calculer la probabilité que le poids de l'ensemble des passagers soit supérieur à 7,3 tonnes.

En notant Z une variable aléatoire normale centrée réduite, on en déduit que

$$\begin{aligned} P(X > 7300) &= P\left(\frac{X - 7100}{70} > \frac{7300 - 7100}{70}\right) \\ &\approx P\left(Z > \frac{200}{70} \approx 2,857\right) \\ &\approx 0,0021 = 0,21\% \end{aligned}$$

Il n'y a quasiment aucune chance que le poids total des passagers dépasse 73 tonnes.

- Sur 40 passagers interrogés au hasard, 23 voyagent avec un bagage en soute. Déterminer à l'aide d'un intervalle de confiance au niveau 95% une estimation de la proportion de passagers qui voyagent avec un bagage en soute sur ce vol.

On cherche à estimer une fréquence à partir d'un échantillon de taille 40. La fréquence observée dans l'échantillon est $f_{obs} = \frac{23}{40}$. On peut donc utiliser la formule du cours :

$$I_{conf}(F(\omega)) = \left[f_{obs} - u_{\alpha/2} \sqrt{\frac{f_{obs}(1 - f_{obs})}{n}} ; f_{obs} + u_{\alpha/2} \sqrt{\frac{f_{obs}(1 - f_{obs})}{n}} \right]$$

en remplaçant $u_{\alpha/2}$ par 1,96 pour une confiance de 95%, on obtient numériquement $I_{conf} \approx [0.42; 0.73]$.

On peut estimer que la proportion de passagers voyageant avec un bagage en soute est compris entre 42% et 73%.

- L'avion ne peut pas accueillir plus de 65 bagages en soute. Quelle information en terme de risque peut-on donner à la compagnie aérienne ?

D'après la question précédente, il est tout à fait probable (avec une confiance de 95%) que le nombre de bagages en soute soit supérieur à 65 (entre 42 et 73). Pour que l'intervalle de confiance ne contienne pas 65%, il faut prendre un risque supérieur à 33%.