

Le général Contant doit échanger des documents top secrets avec le général Janty. Pour cela, ils ont rendez-vous au bar Le Torkel. On suppose que l'heure d'arrivée de chaque individu au point de rendez-vous est uniformément distribué entre 20h et 21h. En revanche, chacun a promis de ne pas attendre l'autre plus de 10 minutes sur place.

Quelle est la probabilité que ces deux personnes puissent effectuer leur transaction ?

Soit X l'heure d'arrivée du général Contant et Y l'heure d'arrivée du général Janty. L'énoncé suggère que X et Y sont des variables aléatoires indépendantes et nous dit qu'elles suivent toutes les deux une loi uniforme sur $[20; 21]$. La probabilité cherchée est $\mathbb{P}(|X - Y| \leq \frac{1}{6})$.

Comme X et Y sont indépendantes, on a

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) = \mathbf{1}_{[20;21]^2}(x,y).$$

Donc

$$p = \iint_D dx dy,$$

$$\text{où } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 20 \leq x \leq 21, 20 \leq y \leq 21, -\frac{1}{6} \leq x - y \leq \frac{1}{6}\}.$$

On peut évaluer géométriquement cette aire mais nous allons faire le calcul de l'intégrale double. On commence par remplacer l'intervalle $[20; 21]$ par l'intervalle $[0; 1]$ en effectuant une translation. Ainsi, l'écriture est simplifiée.

$$\begin{aligned} p &= \int_0^{\frac{1}{6}} \int_0^{\frac{1}{6}+y} dx dy + \int_{\frac{1}{6}}^{\frac{5}{6}} \int_{y-\frac{1}{6}}^{y+\frac{1}{6}} dx dy + \int_{\frac{5}{6}}^1 \int_{y-\frac{1}{6}}^1 dx dy \\ &= \int_0^{\frac{1}{6}} \left(\frac{1}{6} + y\right) dy + \int_{\frac{1}{6}}^{\frac{5}{6}} \frac{1}{3} dy + \int_{\frac{5}{6}}^1 \left(\frac{7}{6} - y\right) dy \\ &= \left[\frac{1}{6}y + \frac{1}{2}y^2\right]_0^{\frac{1}{6}} + \left[\frac{1}{3}y\right]_{\frac{1}{6}}^{\frac{5}{6}} + \left[\frac{7}{6}y - \frac{1}{2}y^2\right]_{\frac{5}{6}}^1 \\ &= \frac{11}{36}. \end{aligned}$$

La probabilité que les deux généraux puissent effectuer leur transaction est donc de l'ordre de 0.31.