

En 2008, le célèbre opérateur FSR proposait un forfait téléphonique de 1 heure mensuelle. Pour étudier la consommation des clients ayant opté pour ce forfait, il a relevé la proportion mensuelle du forfait consommé par 15 clients et a obtenu, après avoir ordonné les résultats :

$$\begin{array}{cccccccc} 0.29 & 0.46 & 0.51 & 0.61 & 0.70 & 0.72 & 0.76 & 0.79 \\ & 0.84 & 0.85 & 0.86 & 0.92 & 0.94 & 0.96 & 1 \end{array}$$

Cette répartition suggère de modéliser les observations à l'aide d'une loi puissance de paramètre $(\lambda, 1)$ avec $\lambda > 0$ dont la fonction densité est :

$$f_\lambda(x) = \lambda x^{\lambda-1} \mathbf{1}_{[0;1]}(x)$$

1. À l'aide de la méthode du maximum de vraisemblance, construire un estimateur du paramètre λ , pour un n -échantillon (X_1, \dots, X_n) . On notera cet estimateur $\widehat{\lambda}_n$.

Avec la log-vraisemblance, on obtient l'estimateur $\widehat{\lambda}_n = \frac{n}{-\sum \ln(x_i)}$.

2. On admet que la variable aléatoire $2n \frac{\lambda}{\widehat{\lambda}_n}$ suit une loi $\chi^2(2n)$. En déduire l'expression d'un intervalle de confiance de niveau $1 - \alpha$ sous la forme $]-\infty ; T]$ pour le paramètre λ .

Si on note $q_{\alpha,n}$ le quantile tel que $P(Z < q_{\alpha,n}) = 1 - \alpha$ où $Z \sim \chi^2(n)$, on obtient un intervalle de confiance

$$]-\infty ; q_{\alpha,2n} \frac{\widehat{\lambda}_n}{2n}]$$