RrKo ⊵ **Exercice** - *Autour de la méthode d'Euler implicite*

Soit $f\colon [0;T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}$ et l'équation différentielle :

$$(E)\begin{cases} y'(t)=f(t,y(t))\\ y(0)=a\end{cases}$$

pour laquelle on admet l'existence et l'unicité d'une solution y de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose de plus qu'il existe $M>0$ tel que $\forall t\in[0;T]$, $\forall y\in\mathbb{R}$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t,y)>0 \qquad ; \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\right|\leqslant M$$

On rappelle que la méthode d'Euler implicite est donnée par le schéma

$$y_{n+1}=y_n+hf(t_{n+1},y_{n+1})$$

et on suppose que le pas vérifie $h\leqslant\frac{1}{2M}$.
Pour tout $n\geqslant 0$, on pose $\varphi_n(x)=y_n+hf(t_{n+1},x)-x$ et $H_n(x)=y_n+hf(t_{n+1},x)$.

1. Vérifier que H_n est une application contractante et en déduire que le schéma est bien défini.

   $|H_n'(x)=h\left|\frac{\partial f}{\partial y}(t_{n+1},x)\right|\leqslant hM\leqslant\frac12<1$.

2. On propose la méthode suivante :

$$(S):\begin{cases}\widehat{y}_{n+1}=y_n-\frac{\varphi_n(y_n)}{\varphi_n'(y_n)}\\ y_{n+1}=y_n+hf(t_{n+1},\widehat{y}_{n+1})\end{cases}$$

   On admet que cette méthode est stable. Expliquer ce choix puis montrer qu'elle est convergente.

   Ce schéma permet de résoudre l'écriture implicite en utilisant la méthode de Newton. On écrit le schéma sous la forme standard

$$y_{n+1}=y_n+hF(t_n,y_n,h)$$

   avec

$$F(t,y,h)=f\left(t+h,y+h\frac{f(t+h,y)}{1-h\frac{\partial f}{\partial y}(t+h,y)}\right)$$

   et on vérifie que $F(t,y,0)=f(t,y)$: la méthode est consistante au moins d'ordre 1. On pourrait vérifier que la méthode n'est pas d'ordre 2 en calculant $\frac{\partial F}{\partial h}$ et en constatant que $\frac{\partial F}{\partial h}(t,y,0)=f^{[1]}(t,y)\neq\frac12 f^{[1]}(t,y)$. La méthode étant supposée stable, elle est donc convergente.

3. On suppose maintenant que l'équation différentielle est autonome : $f(t,y)=f(y)$ et que $\forall y\in\mathbb{R}$, $|f(y)|\leqslant M$, $|f'(y)|\leqslant M$ et $|f''(y)|\leqslant M$.

   (a) Simplifier le schéma (S) en l'écrivant en fonction de f et f'.

   Le schéma devient

$$(S'):\begin{cases}\widehat{y}_{n+1}=y_n-\frac{f(y_n)}{1-hf'(y_n)}\\ y_{n+1}=y_n+hf(t_{n+1},\widehat{y}_{n+1})\end{cases}$$

   (b) Montrer que $\forall y,z\in\mathbb{R}$,

$$|f(y)(f'(z)-f(z)f'(y)|\leqslant 2M^2|y-z|$$

$$\begin{aligned}|f(y)(f'(z)-f(z)f'(y)| &= |f(y)(f'(z)-f'(y))+f'(y)(f(y)-f(z)|\\ &\leqslant |f(y)||f'(z)-f'(y)|+|f'(y)||f'(y)-f(z)|\\ &\leqslant M\left(|f'(z)-f'(y)|+|f'(y)-f(z)|\right)\end{aligned}$$

   Or $|f'(y)|\leqslant M$ et $|f''(y)|\leqslant M$ donc f et f' sont M-lipschitziennes, d'où le résultat.

   (c) Montrer que $\forall y\in\mathbb{R}$:

$$\left|\frac{1}{1-hf'(y)}\right|\leqslant 2$$

   On a $hf'(y)\leqslant Mh\leqslant\frac12$ d'où $1-hf'(y)\geqslant\frac12$ d'où le résultat demandé.

   (d) On pose $g_R(y,h)=\frac{f(y)}{1-hf'(y)}$. Montrer que $\forall y,z\in\mathbb{R}$:

$$|g_R(y,h)-g_R(z,h)|\leqslant 4|f(y)f'(z)-f(y)-f(z)f'(y)+f(z)|$$

   puis

$$|g_R(y,h)-g_R(z,h)|\leqslant 4M(1+2Mh)|y-z|$$

$$\begin{aligned}|g_R(y,h)-g_R(z,h)| &= \left|\frac{f(y)}{1-hf'(y)}-\frac{f(z)}{1-hf'(z)}\right|\\ &= \frac{|f(y)-f(z)+h(f(z)f'(y)-f(y)f'(z)|}{|1-hf'(y)||1-hf'(z)|}\\ &\leqslant 4|f(y)-f(z)|+4h|f(z)f'(y)-f(y)f'(z)|\\ &\leqslant 4M|y-z|+8M^2h|y-z|\\ &\leqslant 4M(1+2Mh)|y-z|\end{aligned}$$

   (e) En déduire que la méthode est stable, consistante et convergente.

   On étudie la consistance du nouveau schéma (S') : il s'écrit $y_{n+1}=y_n+hF(y_n,h)$ avec $F(y,h)=f(y+hg_R(y,h))$. Or f est M-lipschitzienne donc

$$\begin{aligned}F(y,h)-F(z,h) &\leqslant M(|y-z|+h|g_R(y,h)-g_R(z,h)|)\\ &\leqslant M(1+2Mh(1+2Mh))|y-z|\\ &\leqslant 5M|y-z|\end{aligned}$$

   Donc F est lipschitzienne uniformément en h : cela prouve la stabilité du schéma. La consistance ayant déjà établie dans le cas général, cela prouve que la méthode est convergente.