Ex

Inverse de matrice et application

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ -6 & -13 & 12 \\ -6 & -12 & 11 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Parmi les trois matrices suivantes, dire laquelle est l'inverse de P en justifiant.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

✓

On a :

$$P \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \neq Id$$

donc $P^{-1} \neq B$

$$P \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Id$$

et $P^{-1} = C$ Par unicité de la matrice inverse, sans calcul, on peut affirmer $P^{-1} \neq D$.

2. Calculer $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

✓

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ -6 & -13 & 12 \\ -6 & -12 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = D$$

3. En déduire A^{-1}, A^{2n} et A^{2n+1}, pour $n \in \mathbb{N}$.

✓

On a :

$$D^2 = D \cdot D = I \Rightarrow F^{-1} = F$$

$$\left(P^{-1} \cdot A \cdot P\right)^{-1} = P^{-1} \cdot A^{-1} \cdot P = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

$$\Rightarrow A^{-1} \cdot P = P \cdot P^{-1} \cdot A \cdot P = A \cdot P$$

$$\Rightarrow A^{-1} = A \cdot P \cdot P^{-1} = A$$

Donc $A^{-1} = A$ d'où $A^2 = I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on déduit par récurrence que $A^{2n} = I$ et $A^{2n+1} = A$.