Ex

Développement en série entière

Développer en série entière la fonction de la variable réelle suivante :

$$f : x \mapsto \ln(x^2 - 5x + 6)$$

Pour tout réel x, $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$ et donc si $x < 2$, $x^2 - 5x + 6 > 0$. Pour $x \in]-2, 2[$,

$$\ln(x^2 - 5x + 6) = \ln(2-x) + \ln(3-x) = \ln(6) + \ln\left(1 - \frac{x}{2}\right) + \ln\left(1 - \frac{x}{3}\right),$$

et puisque pour x dans $]-2, 2[$, $\frac{x}{2}$ et $\frac{x}{3}$ sont dans $]-1, 1[$,

$$\ln(x^2 - 5x + 6) = \ln(6) - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) \frac{x^n}{n},$$

En résumé, la fonction f est développable en série entière et on vérifie avec la règle de d'Alembert que son rayon de convergence est $R = 2$.