

Un joueur effectue une suite de parties de pile ou face indépendantes, avec probabilité  $p$  d'obtenir pile à chaque partie. Soit  $n$  un entier. Le joueur peut choisir entre deux jeux :

**le Jeu 1 :** le joueur effectue  $2n - 1$  parties. Il est déclaré vainqueur s'il obtient au moins  $n$  fois pile ;

**le Jeu 2 :** le joueur effectue  $2n$  parties. S'il obtient au moins  $n + 1$  fois pile, il est déclaré vainqueur. S'il obtient  $n$  fois pile exactement, on tire au sort et il est déclaré vainqueur avec probabilité  $\frac{1}{2}$ .

On note  $X$  le nombre de piles obtenus lorsque le joueur choisit le Jeu 1, et  $Y$  le nombre de piles obtenus lorsqu'il choisit le Jeu 2. On note  $p_1$  la probabilité de gagner au Jeu 1 et  $p_2$  la probabilité de gagner au Jeu 2.

L'objectif est de savoir s'il vaut mieux jouer au Jeu 1 ou au Jeu 2.

- Écrire  $Y = X + U$  où  $U$  est une variable aléatoire indépendante de  $X$  dont la loi reste à préciser.



Soit  $U$  la variable aléatoire de Bernoulli égale à 1 si on a choisi le jeu 2 et que le  $2n$ -ième lancer donne "pile". Comme les lancers sont indépendants, la variable aléatoire  $U$  est indépendante de  $X$  et on a bien  $Y = X + U$ , avec  $U \sim \mathcal{B}(p)$ .

- Démontrer que  $\mathbb{P}(Y > n) = \mathbb{P}(X > n) + p\mathbb{P}(X = n)$ .



Comme  $Y = X + U$ , on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y > n) &= \mathbb{P}(Y > n, X > n) + \mathbb{P}(Y > n, X = n) + \mathbb{P}(Y > n, X < n) \text{ d'après le th. des proba. totale} \\ &= \mathbb{P}(X > n) + \mathbb{P}(X = n, U = 1) + 0 \\ &= \mathbb{P}(X > n) + \mathbb{P}(X = n) \mathbb{P}(U = 1) \text{ par indépendance de } X \text{ et } U \\ &= \mathbb{P}(X > n) + p \mathbb{P}(X = n).\end{aligned}$$

- Vérifier que  $p_1 - p_2 = (1 - p)\mathbb{P}(X = n) - \frac{1}{2}\mathbb{P}(Y = n)$



On a :

$$\begin{aligned}p_1 - p_2 &= \mathbb{P}(X \geq n) - \left[ \mathbb{P}(Y > n) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(Y = n) \right] \\ &= \mathbb{P}(X = n) + \mathbb{P}(X > n) - \mathbb{P}(X > n) - p \mathbb{P}(X = n) - \frac{1}{2} \mathbb{P}(Y = n) \\ &= (1 - p) \mathbb{P}(X = n) - \frac{1}{2} \mathbb{P}(Y = n).\end{aligned}$$

- Conclure.



Étudions le signe de  $p_1 - p_2$ . Comme  $X \sim \mathcal{B}(2n - 1, p)$  et  $Y \sim \mathcal{B}(2n, p)$ , on a

$$\begin{aligned}p_1 - p_2 &= (1 - p) \binom{2n - 1}{n} p^n (1 - p)^{2n - 1 - n} - \frac{1}{2} \binom{n}{2n} p^n (1 - p)^{2n - n} \\ &= \frac{(2n - 1)!}{n! \times (n - 1)!} p^n (1 - p)^n - \frac{1}{2} \times \frac{(2n)!}{n! \times n!} p^n (1 - p)^n \\ &= \frac{(2n)!}{(n!)^2} \left( \frac{n}{2n} - \frac{1}{2} \right) p^n (1 - p)^n \\ &= 0\end{aligned}$$

On en conclut qu'aucun des deux jeux n'est préférable à l'autre.