wBKf ⊵ **Exercice** - *Simplification de nombres complexes*

Simplifier au maximum les expressions complexes suivantes.

1. $\frac{(1+3i)(3+i)}{1+i}$

   En multipliant numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur :

   $$\frac{(1+3i)(3+i)}{1+i} = \frac{(1+3i)(3+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{10+10i}{2} = 5+5i$$

2. $(1-i)^8$

   On a $(1-i)^2 = -2i$. On en déduit :

   $$(1-i)^8 = \left((1-i)^2\right)^4 = (-2i)^4 = 2^4 \cdot i^4 = 16$$

3. $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^5$

   $$\begin{aligned}\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^5 &= \left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}}\right)^5 \\ &= \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)}\right)^5 \\ &= \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{-i\frac{\pi}{3}}}\right)^5 \\ &= \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^5 = e^{i\frac{10\pi}{3}} \\ &= e^{-i\frac{2\pi}{3}} \\ &= \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

4. $\frac{i}{(1+i\sqrt{2})^2}$

   $$\begin{aligned}\frac{i}{(1+i\sqrt{2})^2} &= \frac{i}{1^2+2\sqrt{2}i+(i\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{i}{1-2+2\sqrt{2}i} = \frac{i}{-1+2\sqrt{2}i} \\ &= \frac{i(-1-2\sqrt{2}i)}{(-1+2\sqrt{2}i)(-1-2\sqrt{2}i)} \\ &= \frac{2\sqrt{2}-i}{(1+8)} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{9} - \frac{i}{9}\end{aligned}$$