mVsg $\trianglerighteq$ **Exercice** - *Consommation d'oxygène*

On s'intéresse à un test pour mesurer la consommation maximale en oxygène d'un individu dans une population âgée. Pour un groupe de contrôle, il a été montré que les mesures suivent une loi normale dont l'espérance mathématique est de l'ordre de $\mu = 25{,}5$(ml/kg/min) et l'écart-type $\sigma = 6$(ml/kg/min). On pense qu'une population de malades (Parkinson) doit avoir des capacités cardio-respiratoires plus limitées. On souhaite ainsi tester si dans un tel groupe la moyenne $\mu$ est plus faible. On prendra un risque de première espèce $\alpha = 5\%$.

1. L'objectif du test est de décider entre les deux hypothèses suivantes : $H_0 : \mu = 25{,}5$ (absence d'effet de la maladie) et $H_1 : \mu < 25{,}5$ (existence de l'effet) à partir d'un échantillon de taille 15. On note $\overline{X} = \sum_{k=1}^{15} X_i$ la moyenne empirique des mesures dans un tel échantillon.
   (a) Supposons que la moyenne observée dans l'échantillon est de 24,0, quelle est la décision à prendre à la suite de ce test ?
   (b) Déterminer la moyenne critique $\mu_c$, c'est-à-dire la valeur observée au deçà de laquelle le test conduit à un rejet de $H_0$.
2. La professeur responsable du service pense qu'à partir de la valeur $\mu = 23{,}5$, la différence est scientifiquement significative et l'effet sur le malade important. Elle souhaite alors savoir quel risque elle prend lorsqu'elle ne rejette pas $H_0$ en étant sous l'hypothèse alternative $(H_1)$: $\mu = 23{,}5$.
   (a) Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire $\overline{X}$ lorsque $(H_1)$ est supposée vraie ?
   (b) En déduire l'erreur de deuxième espèce et la puissance de ce test. Commenter le résultat.