Ex

Calcul de dérivées partielles

Une étude des glaciers a montré que la température T à l'instant t (mesuré en jours) à la profondeur x (mesurée en pied) peut être modélisée par la fonction

$$T(x,t) = T_0 + T_1 e^{-\lambda x} \sin(\omega t - \lambda x)$$

où T_0, T_1, $\omega = \frac{2\pi}{365}$ et λ sont des constantes réelles.

1. Exprimer les deux dérivées partielles de T.

✓

Les dérivées partielles sont définies pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial x}(x,t) &= -\lambda T_1 e^{-\lambda x} \left(\sin(\omega t - \lambda x) + \cos(\omega t - \lambda x)\right) \\
\frac{\partial T}{\partial t}(x,t) &= \omega T_1 e^{-\lambda x} \cos(\omega t - \lambda x)
\end{aligned}$$

2. Montrer que T vérifie l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x,t) = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t)$$

pour une certaine constante k à déterminer.

✓

Il suffit de dériver une seconde fois par rapport à x l'expression de $\frac{\partial T}{\partial x}(x,t)$: on trouve

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t) &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x}(x,t) \\
&= (-\lambda)^2 T_1 e^{-\lambda x} \left(\sin(\omega t - \lambda x) + \cos(\omega t - \lambda x)\right) + (-\lambda)^2 T_1 e^{-\lambda x} (\cos(\omega t - \lambda x) - \sin(\omega t - \lambda x \\
&= 2\lambda^2 T_1 e^{-\lambda x} \cos(\omega t - \lambda x)
\end{aligned}$$

La constante attendue est donc $k = \frac{\omega}{2\lambda^2}$.