On cherche, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le reste de la division euclidienne du polynôme $P(X) = X^n$ par $X^3 + X^2 + X + 1$.

1. Déterminer une racine évidente de X^3+X^2+X+1, et factoriser le polynôme. Quelles sont ses racines dans $\mathbb{C}$?

✓

Soit $T(X) = X^3 + X^2 + X + 1$ On remarque que $T(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1 = -1 + 1 - 1 + 1 = 0$. Ainsi : -1 est racine de T ou encore $(X + 1)$ divise $T(X)$:

$$\begin{aligned} T(X) &= X^2 + X + X^2 + 1 = X\left(X^2+1\right) + X^2 + 1 = (X+1)\left(X^2+1\right) \\ &= (X+1)(X+i)(X-i) \end{aligned}$$

Les racines de $T(X)$ dans $\mathbb{C}$ sont : $-1, i$ et $-i$.

2. Justifier l'existence d'un polynôme $Q_n(X)$ et de trois réels a_n, b_n et c_n tels que :

$$X^n = \left(X^3 + X^2 + X + 1\right) \cdot Q_n(X) + a_n X^2 + b_n X + c_n$$

On ne demande pas de déterminer $Q_n(X)$.

✓

Par la division euclidienne de $P(X)$ par $T(X)$, il existe deux polynômes $Q_n(X)$ et $R_n(X)$ tels que :

$$P(X) = T(X) \cdot Q_n(X) + R_n(X)$$

Avec $d^\circ(R_n) < d^\circ(T) = 3$. Ainsi il existe trois réels a_n, b_n et c_n tels que :

$$R_n(X) = a_n X^2 + b_n X + c_n.$$

3. Exprimer $P(-1), P(i)$ et $P(-i)$ en fonction de a_n, b_n et c_n, et en déduire l'expression du reste de la division euclidienne de $P(X)$ par X^3+X^2+X+1. On distinguera deux cas : $n = 2p$ (cas n pair) et $n = 2p+1$ (cas n impair).

✓

$$P(X) = X^n = \underbrace{\left(X^3 + X^2 + X + 1\right)}_{=T(X)} \cdot Q_n(X) + a_n X^2 + b_n X + c_n$$

On a : - $P(-1) = (-1)^n = \underbrace{T(-1)}_{=0} \cdot Q_n(-1) + a_n(-1)^2 + b_n(-1) + c_n$, donne :

$$\begin{array}{ll} n = 2p : & (-1)^{2p} = 1 = a_n - b_n + c_n \\ n = 2p+1 : & (-1)^{2p+1} = -1 = a_n - b_n + c_n \end{array}$$

- $P(i) = (i)^n = T(i) \cdot Q_n(i) + a_n(i)^2 + b_n(i) + c_n$, donne :

$$= 0$$

$$\begin{array}{ll} n = 2p : & (i)^{2p} = (-1)^p = -a_n + ib_n + c_n \\ n = 2p+1 : & (i)^{2p+1} = (-1)^p \cdot i = -a_n + ib_n + c_n \end{array}$$

- $P(-i) = (-i)^n = T(-i) \cdot Q_n(-i) + a_n(-i)^2 + b_n(-i) + c_n$, donne :

$$\begin{array}{ll} = 0 & (-i)^{2p} = (-1)^p = -a_n - ib_n + c_n \\ n = 2p : & (-i)^{2p+1} = -(-1)^p i = -a_n - ib_n + c_n \end{array}$$

Ainsi : - Pour $n = 2p$:

$$\left\{\begin{array}{l} a_n - b_n + c_n = 1 \\ -a_n + ib_n + c_n = (-1)^p \\ -a_n - ib_n + c_n = (-1)^p \end{array}\right. \begin{array}{c} \ell_1 \\ \\ \\ \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \ell_2 + \ell_1 \\ \ell_3 + \ell_1 \end{array} \left\{\begin{array}{c} a_n - b_n + c_n = 1 \\ (-1+i)b_n + 2c_n = 1 + (-1)^p \\ (-1-i)b_n + 2c_n = 1 + (-1)^p \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 - \ell_2 \end{array} \left\{\begin{array}{c} a_n - b_n + c_n = 1 \\ (-1+i)b_n + 2c_n = 1 + (-1)^p \\ 2ib_n = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a_n = \frac{1}{2}\left(1 - (-1)^p\right) \\ c_n = \frac{1}{2}\left(1 + (-1)^p\right) \\ b_n = 0 \end{array}\right.$$

$$X^n = \left(X^3 + X^2 + X + 1\right) \cdot Q_n(X) + \frac{1}{2}\left(1 - (-1)^p\right) X^2 + \frac{1}{2}\left(1 - (-1)^p\right)$$

- Pour $n = 2p+1$:

$$\left\{\begin{array}{c} a_n - b_n + c_n = -1 \\ -a_n + ib_n + c_n = (-1)^p.i \\ -a_n - ib_n + c_n = -(-1)^p i \end{array}\right. \begin{array}{c} \ell_1 \\ \\ \\ \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \ell_2 + \ell_1 \\ \ell_3 + \ell_1 \end{array} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \begin{array}{c} a_n - b_n + c_n = -1 \\ (-1+i)b_n + 2c_n = -1 + (-1)^p.i \int \\ (-1-i)b_n + 2c_n = -1 - (-1)^p i \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \ell_2 \\ \ell_3 - \ell_2 \end{array} \left\{\begin{array}{c} a_n - b_n + c_n = -1 \\ (-1+i)b_n + 2c_n = -1 + (-1)^p.i \\ 2ib_n = 2(-1)^p i \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{array}{c} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 - \ell_2 \end{array} \left\{\begin{array}{l} a_n = \frac{1}{2}\left(-1 + (-1)^p\right) \\ c_n = \frac{1}{2}\left(-1 + (-1)^p\right) \\ b_n = (-1)^p \end{array}\right.$$

$$X^n = \left(X^3 + X^2 + X + 1\right) \cdot Q_n(X) + \frac{1}{2}\left(-1 + (-1)^p\right) X^2 + (-1)^p X + \frac{1}{2}\left(-1 + (-1)^p\right)$$