

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer A^{-1} et B^{-1} .

Soient :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Retranchons à la deuxième ligne 2 fois la première et à la troisième ligne 1 fois la première :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & -7 & 8 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Changeons le signe de la deuxième et de la troisième ligne et permutons les lignes 2 et 3 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 7 & -8 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Retranchons à la troisième ligne 7 fois la première :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -5 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Changeons le signe de la troisième ligne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

Ajoutons à la première ligne 3 fois la troisième ligne et ajoutons à la deuxième ligne la troisième :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 16 & 3 & -21 \\ 6 & 1 & -8 \\ 5 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

Retranchons à la première ligne 4 fois la deuxième ligne :

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & -1 & 11 \\ 6 & 1 & -8 \\ 5 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

Soient :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ajoutons à la troisième ligne a fois la quatrième :

$$\begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ajoutons à la deuxième ligne a fois la troisième :

$$\begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ajoutons à la première ligne a fois la deuxième :

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$