Ex

Fonction de n variables et laplacien nul

Soit $g\colon]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Soit un entier $n \geqslant 2$ et $f\colon \mathbb{R}^n\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x_1,\dots,x_n) = g(\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2})$.

On note $\Delta f = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ le laplacien de f. On pose $r = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$.

1. Démontrer que pour tout $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, $\Delta f(x) = g''(r) + \frac{n-1}{r} g'(r)$.

✓

On applique la règle des chaînes en voyant r comme une fonction de n variables :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r} g'(r)$$

puis

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x_i}\right) g'(r) + \frac{x_i^2}{r^2} g''(r) = \frac{r^2 - x_i^2}{r^3} g'(r) + \frac{x_i^2}{r^2} g''(r)$$

Il reste à sommer pour i variant de 1 à n pour avoir le résultat.

2. Déterminer l'ensemble des fonctions g telles que $\Delta f = 0$.

✓

On en déduit que $\Delta f = 0$ si et seulement si g' est solution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$y' + \frac{n-1}{r} y = 0$$

d'où $g'(r) = \frac{k_1}{r^{n-1}}$ (avec $k_1 \in \mathbb{R}$) d'où $g(r) = \frac{k_1}{r^{n-2}} + k_2$ si $n \geqslant 3$ et $g(r) = k_1 \ln(r) + k_2$ si $n = 2$.