Ex

Soit un entier $k \geqslant 1$.

1. Calculer :

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{3}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3}\right).$$

✓

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors on a

$$\begin{aligned}
S_k &= \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{3}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} - 3\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n+1} + \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n+2} + \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n+3} \\
&= \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} - 3\sum_{n=2}^{k+1} \frac{1}{n} + \sum_{n=3}^{k+2} \frac{1}{n} + \sum_{n=4}^{k+3} \frac{1}{n} \\
&= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \sum_{n=4}^{k} \frac{1}{n}\right) - 3\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \sum_{n=4}^{k} \frac{1}{n} + \frac{1}{k+1}\right) \\
&\quad + \left(\frac{1}{3} + \sum_{n=4}^{k} \frac{1}{n} + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right) + \left(\sum_{n=4}^{k} \frac{1}{n} + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{3}{2} - \frac{3}{3} - \frac{3}{k+1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3}
\end{aligned}$$

D'où pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$S_k = -\frac{1}{3} - \frac{1}{k+1} + \frac{2}{k+2} + \frac{1}{k+3}.$$

2. Que peut-on dire de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{-2n^2 - 2n + 6}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$?

✓

En faisant tendre k vers l'infini, on obtient $\lim\limits_{k \to +\infty} S_k = -\frac{1}{3}$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{1}{n} - \frac{3}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} = \frac{-2n^2 - 2n + 6}{n(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

On en conclut que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{-2n^2 - 2n + 6}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$ est convergente et sa somme vaut $-\dfrac{1}{3}$.