Ex

Donner le développement limité de e^x et de $\sin(x)$ au voisinage de 0 à l'ordre 3. En déduire le développement limité de $e^x \cdot \sin(x)$ à l'ordre 3.

✓

On prend d'abord les développements usuels :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + x^3 \cdot \varepsilon(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + x^3 \cdot \varepsilon(x) = x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$$

Effectuons le produit $\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) \times \left(x - \frac{x^3}{6}\right)$ en ne conservant que les termes de degré $\leqslant 3$:

$$\begin{aligned}
\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) \times \left(x - \frac{x^3}{6}\right) &= 1 \times \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + x \times (x) + \frac{x^2}{2} \times (x) + \dots \\
&= x + x^2 + \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right) x^3 + \dots \\
&= x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \dots
\end{aligned}$$

Ainsi : $e^x \cdot \sin(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right) = x + x^2 + \frac{x^3}{3} + x^3 \cdot \varepsilon(x)$