Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $f\colon \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On dit que f est homogène de degré α si pour tout $(x, y, t) \in (\mathbb{R}^*)^3$:

$$f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$$

1. Donner un exemple de fonction de deux variables homogène de degré 2 et vérifier que ses dérivées partielles sont homogènes de degré 1.

✓

Posons par exemple $f(x,y) = x^2+xy+y^2$: on observe que que pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, $f(tx,ty) = t^2x^2 + t^2xy + t^2y^2 = t^2(x^2 + xy + y^2) = t^2 f(x,y)$ ce qui prouve que f est homogène de degré 2.

2. Soit $f\colon \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $t \in \mathbb{R}^*$. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$, on pose $g_t(x,y) = f(tx,ty)$. En calculant les dérivées partielles de g de deux manières différentes, montrer que si f est homogène de degré α alors $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont homogènes de degré $\alpha - 1$.

✓

On dérive l'expression qui caractérise les fonctions homogènes pour faire apparaître des relations mettant en jeu les dérivées partielles de f. D'une part, on a en vertu de la règle des chaînes :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(f(tx,ty)\right) = t\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)$$

D'autre part, on a

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(t^\alpha f(x,y)\right) = t^\alpha \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

Si f est homogène de degré α, alors on peut égaliser ces deux expressions, ce qui donne

$$t\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) = t^\alpha \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

Comme t est supposé non nul, on en déduit que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) = t^{\alpha-1} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

Ceci étant vrai pour tout $(x,y,t) \in (\mathbb{R}^*)^3$, on en déduit que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est bien une fonction homogène de degré $\alpha - 1$.
De même, on démontre que $\frac{\partial f}{\partial y}$ est bien une fonction homogène de degré $\alpha - 1$.

3. Démontrer que si f est homogène de degré α alors f vérifie la relation d'Euler :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \qquad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \alpha f(x,y)$$

✓

On dérive cette fois-ci par rapport à t : d'après la règle des chaînes, on obtient d'une part :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(f(tx,ty)\right) = x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) + y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)$$

et d'autre part :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(t^\alpha f(x,y)\right) = \alpha t^{\alpha-1} f(x,y)$$

Supposons que f est homogène de degré α, alors ces deux expressions sont égales pour tout $(x,y,t) \in (\mathbb{R}^*)^3$:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) + y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty) = \alpha t^{\alpha-1} f(x,y)$$

D'après la question précédente, on sait que les dérivées partielles sont homogènes de degré $\alpha - 1$ donc par définition :

$$xt^{\alpha-1}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + yt^{\alpha-1}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \alpha t^{\alpha-1} f(x,y)$$

On divise par $t^{\alpha-1} \neq 0$ et on obtient la relation d'Euler attendue.

4. Démontrer que si f est de classe $\mathcal{C}^2$ et homogène de degré α alors

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \qquad x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \alpha(\alpha-1)f(x,y)$$

✓

On exploite les questions précédentes : on sait désormais que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est une fonction homogène de degré $\alpha - 1$, on en déduit que $\frac{\partial f}{\partial x}$ vérifie la relation d'Euler :

$$x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + y\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = (\alpha-1)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

De même, $\frac{\partial f}{\partial y}$ vérifie la relation d'Euler :

$$x\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = (\alpha-1)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

Or f vérifie également la relation d'Euler et en multipliant celle-ci par $(\alpha - 1)$ on obtient :

$$(\alpha-1)x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + (\alpha-1)y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (\alpha-1)\alpha f(x,y)$$

En y substituant les égalités précédentes, on obtient :

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + xy\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) + yx\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$$

Or $xy = yx$ et d'après le théorème de Schwarz (Th 2.10 du cours) : $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ d'où l'égalité attendue :

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \alpha(\alpha-1)f(x,y)$$