

Étudier l'existence et le cas échéant, calculer

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$



On pose $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$: cette fonction n'est pas continue en $(0, 0)$ et on peut étudier sa limite ; or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $f(x, 0) = 1$ et $f(0, y) = -1$ donc les limites de f le long de chaque axe en $(0, 0)$ n'ont pas la même valeur : $f(x, 0) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ et $f(0, y) \xrightarrow{y \rightarrow 0} -1 \neq 1$. Cela suffit pour affirmer que f n'admet pas de limite en $(0, 0)$.