Ex

Convergence d'une suite de variables aléatoires

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ où $p \in]0;1[$. On considère un n-échantillon de X et on note $\overline{X}$ sa moyenne empirique. On pose $Y = n\overline{X}$.

1. Exprimer $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(Y^2)$ en fonction de n et p.

✓

On considère $Y = n\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i$: par définition, Y suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, ce qui permet d'affirmer que $\mathbb{E}(Y) = np$ et $V(Y) = np(1-p)$. Or on sait que $V(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2$, donc $\mathbb{E}(Y^2) = np(1-p) + (np)^2 = np(1+p(n-1))$

2. On pose $Z = \overline{X}^2$. Peut-on dire que Z est un estimateur sais biais de p^2 ?

✓

En voyant la variable Z comme un estimateur de p^2, on va calculer son biais $B(Z) = \mathbb{E}(Z-p^2) = \mathbb{E}(Z) - p^2$. Or $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}\left(\left(\frac{1}{n}Y\right)^2\right) = \frac{1}{n^2}\mathbb{E}(Y^2) = \frac{p}{n} + p^2\frac{n-1}{n} \neq p^2$ donc $B(Z) \neq 0$.

3. On pose $T = \frac{Y(Y-1)}{n(n-1)}$. Vérifier que T est un estimateur sans biais de p^2.

✓

En revanche, $\mathbb{E}(T) = \frac{1}{n(n-1)}\mathbb{E}(Y(Y-1)) = \frac{1}{n(n-1)}(np(1+(n-1)p) - np) = p^2$ donc T est un estimateur non biaisé de la valeur p^2.