HvSs **Ex 1** - *Calcul de probabilités*

Une machine est conçue pour fabriquer des pièces pesant chacune 0,5 g. Dans les faits, le résultat n'est pas parfait et on observe que la distribution du poids de chaque pièce a une moyenne de 0,50 g et un écart type de 0,02 g.

1. On modélise le poids d'une pièce fabriquée par la machine avec une variable aléatoire X. Que peut-on dire de la variable X ?

   On sait donc que $\mathbb{E}(X) = 0.5\ g$ et $\sigma(X) = 0.02\ g$.

2. Soit $\overline{X}$ la variable aléatoire égale au poids moyen d'une pièce dans un échantillon de n pièces. Que peut-on dire de l'espérance et la variance de $\overline{X}$? Que peut-on dire de la loi suivie par $\overline{X}$?

   On sait que $\mathbb{E}(\overline{X}) = \mathbb{E}(X) = 0.5$ et $\sigma^2(\overline{X}) = \frac{\sigma^2(X)}{n} = \frac{(0.02)^2}{n}$
   On ne peut pas déterminer exactement la loi de $\overline{X}$, mais si l'échantillon est grand, d'après le Théorème Central Limite, on peut approcher la loi de $\boxed{\overline{X} \text{ par une loi normale } \mathcal{N}(0.5, \frac{(0.02)^2}{n})}$

3. Définir une variable aléatoire permettant de modéliser le poids total d'un échantillon de n pièces. Que peut-on dire de sa loi de probabilité si n est suffisamment grand ?

   Soit P le poids total de l'échantillon. Alors $P = X_1 + ... + X_n = n \times \overline{X}$. Or :
   $\mathbb{E}(n\overline{X}) = n\mathbb{E}(\overline{\mathbb{X}}) = 0.5n$ et
   $\sigma^2(n\overline{X}) = n^2\sigma^2(\overline{X}) = n \times (0.02)^2$.
   Donc le poids total de l'échantillon $\boxed{P \text{ suit approximativement une loi normale } \mathcal{N}(0.5n, (0.02)^2 n)}$

4. On considère deux échantillons de 1000 pièces chacun. Définir une variable aléatoire permettant de modéliser la différence de poids entre ces deux échantillons.

   On note P_1 le poids du premier échantillon de taille 1000, P_2 le poids du second échantillon de taille 1000. La différence de poids est donc P_1-P_2 si P_1 plus grand que P_2, et $P_2 - P_1$ si P_2 plus grand que P_1. En résumé, cette différence s'écrit $|P_1 - P_2|$ (nombre toujours positif).

5. Calculer la probabilité pour que le poids de deux lots de 1000 pièces chacun diffère de plus de 2 g.

   D'après la question précédente, on sait que P_1 et P_2 suivent chacune une loi $\mathcal{N}(0.5 \times 1000, (0.02)^2 \times 1000)$. On va déterminer la loi de $P_1 - P_2$ en supposant que P_1 et P_2 sont indépendantes : pour cela, on calcule :
   — $\mathbb{E}(P_1 - P_2) = \mathbb{E}(P_1) - \mathbb{E}(P_2) = 0$
   — $\sigma^2(P_1 - P_2) = \sigma^2(P_1) + \sigma^2(P_2) = 2 \times (0.02)^2 \times 1000 = (0.02)^2 \times 2000$
   On cherche à calculer $\mathrm{P}(|P_1 - P_2| > 2)$. Par symétrie ($P_1$ plus grand que P_2 ou l'inverse), il suffit de calculer $\mathrm{P}(P_1 - P_2 > 2)$ (cas où P_1 plus grand que P_2) et de multiplier le résultat par 2 (on trouvera le même résultat pour $\mathrm{P}(P_2 - P_1 > 2)$)
   La variable $P_1 - P_2$ suit approximativement une loi normale $\mathcal{N}(0, (0.02)^2 \times 2000)$ donc $U = \frac{P_1 - P_2}{0.02\sqrt{2000}}$ suit approximativement une loi $\mathcal{N}(0, 1)$.
   Or $\mathrm{P}(U > \frac{2}{0.02\sqrt{2000}}) = \mathrm{P}(U > \frac{1}{0.1\sqrt{20}}) = \mathrm{P}(U > 2.236)$.
   Donc $\mathrm{P}(X_1 - X_2 > 2) = \mathrm{P}(U > 2.236) = 1 - \mathrm{P}(U < 2.236) = 0.0129$. On en déduit que

   $$\mathrm{P}(|P_1 - P_2| > 2) = 2 \times 0.0129 = 0.0258$$

   La probabilité que l'écart entre les poids des deux échantillons soit supérieur à 2 g est d'environ 2.6%.