

Exercice - Résolution de système linéaire à paramètre, homogène et non homogène

On considère les systèmes suivants :

$$(\mathcal{S}_m) \begin{cases} (m-1)x + (1-m)y + (m^2-1)z = 0 \\ my + z = 0 \\ (1-m)x - y - z = 0 \end{cases}$$

et :

$$(\mathcal{S}'_m) \begin{cases} (m-1)x + (1-m)y + (m^2-1)z = 1 \\ my + z = 1 \\ (1-m)x - my - z = -2 \end{cases}$$

où $m \in \mathbb{R}$ est un paramètre réel.

1. Déterminer, suivant la valeur de m , le déterminant de la matrice :

$$A_m = \begin{pmatrix} m-1 & 1-m & m^2-1 \\ 0 & m & 1 \\ 1-m & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. En déduire les valeurs du paramètre m pour lesquelles le système (\mathcal{S}_m) admet des solutions non nulles et, dans ces cas, résoudre le système.
3. Trouver les solutions du système (\mathcal{S}'_m) pour $m = 2$ et $m = -1$.