

Déterminer l'ordre de multiplicité de la racine x_0 du polynôme P , et en déduire la factorisation du polynôme, dans les cas suivants :

1. $P(X) = X^4 - X^3 - 3X^2 + 5X - 2 \quad x_0 = 1.$



$$P(X) = X^4 - X^3 - 3X^2 + 5X - 2.$$

On a :

$$P(1) = 1 - 1 - 3 + 5 - 2 = 0$$

$$P'(X) = 4X^3 - 3X^2 - 6X + 5$$

$$P'(1) = 4 - 3 - 6 + 5 = 0$$

$$P''(X) = 12X^2 - 6X - 6$$

$$P''(1) = 12 - 6 - 6 = 0$$

$$P^{(3)}(X) = 24X - 6$$

$$P^{(3)}(1) \neq 0$$

Ainsi $x_0 = 1$ est racine d'ordre 3 de P et :

$$\begin{aligned} P(X) &= (X - 1)^3 \cdot (X - a) = (X^3 - 3X^2 + 3X - 1) \cdot (X - a) = X^4 \dots + a \\ &= X^4 - X^3 - 3X^2 + 5X - 2 \\ &\Rightarrow a = -2 \\ P(X) &= (X - 1)^3 \cdot (X + 2) \end{aligned}$$

2. $P(X) = X^3 - iX^2 + X - i \quad x_0 = i.$



$$P(X) = X^3 - iX^2 + X - i.$$

On a :

$$P(i) = i^3 - i \cdot i^2 + i - i = 0$$

$$P'(X) = 3X^2 - 2iX + 1$$

$$P'(i) = 3 \cdot i^2 - 2 \cdot i \cdot i + 1 = 0$$

$$P''(X) = 6X - 2i$$

$$P''(i) = 6i - 2i \neq 0$$

Ainsi $x_0 = 1$ est racine double de P et :

$$\begin{aligned} P(X) &= (X - i)^2 \cdot (X - a) = (X^2 - 2iX - 1) \cdot (X - a) = X^3 \dots + a \\ &= X^3 - iX^2 + X - i \\ &\Rightarrow a = -i \end{aligned}$$

d'où

$$P(X) = (X - i)^2(X + i)$$