9ty1 ⊵ **Exercice** - *Utilisation d'une table de loi normale*

À l'aide des tables de valeurs, effectuer les calculs suivants à 10^{-2} près.

1. Calculer $\mathrm{P}(-1.2 \leqslant Z \leqslant 1.1)$ où Z suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$.

On exprime la probabilité à l'aide de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite notée Φ :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(-1.2 \leqslant Z \leqslant 1.1) &= \mathrm{P}(Z \leqslant 1.1) - \mathrm{P}(Z < -1.2) \\
&= \mathrm{P}(Z \leqslant 1.1) - \mathrm{P}(Z > 1.2) && \text{par symétrie} \\
&= \mathrm{P}(Z \leqslant 1.1) - (1 - \mathrm{P}(Z \leqslant 1.2)) \\
&= \Phi(1.1) + \Phi(1.2) - 1 \\
&\approx 0{,}75
\end{aligned}$$

2. Calculer $\mathrm{P}(70 \leqslant QI \leqslant 130)$ où QI suit une loi $\mathcal{N}(100, \sigma = 15)$.

On pose $Z = \frac{QI-100}{15}$ de telle sorte que Z suit une loi normale centrée réduite. On exprime alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(70 \leqslant QI \leqslant 130) &= \mathrm{P}\left(\frac{70-100}{15} \leqslant \frac{QI-100}{15} \leqslant \frac{130-100}{15}\right) \\
&= \mathrm{P}(-2 \leqslant Z \leqslant 2) \\
&= 2 \times \Phi(2) - 1 \\
&\approx 0{,}95
\end{aligned}$$

3. Déterminer un réel t tel que $\mathrm{P}(|X-5| < t) = 95\%$ où X suit une loi $\mathcal{N}(5, \sigma = 1)$.

On pose $Z = X - 5$ de telle sorte que Z suit une loi normale centrée réduite. On exprime alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(|X-5| < t) &= \mathrm{P}\left(-t < X - 5 < t\right) \\
&= \mathrm{P}\left(-t \leqslant Z \leqslant t\right) \\
&= 2 \times \Phi(t) - 1
\end{aligned}$$

On cherche $t \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(|X-5| < t) = 0.95 &\iff 2 \times \Phi(t) - 1 = 0.95 \\
&\iff \Phi(t) = 0.975 \\
&\iff t \approx 1{,}96 && \text{par lecture inverse de la table}
\end{aligned}$$