

On pose  $f(x, y) = k(1 + xy(x^2 - y^2))\mathbf{1}_{[-1;1]^2}(x, y)$ .

- Déterminer la valeur de  $k$  pour que  $f$  soit une densité de probabilité associée à un couple de variables aléatoires  $(X, Y)$ .

$f$  est positive sur  $\mathbb{R}$  si  $k \geq 0$ . Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 k(1 + x^3 y - xy^3) dx dy \\ &= \int_{-1}^1 k \left[ x + \frac{1}{4} x^4 y - \frac{1}{2} x^2 y^3 \right]_{x=-1}^1 dy \\ &= \int_{-1}^1 2k dy \\ &= 4k. \end{aligned}$$

Pour  $k = \frac{1}{4}$ ,  $f$  est positive sur  $\mathbb{R}$  et  $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$  donc  $f$  est une densité de probabilité.

- Déterminer les densités marginales de  $X$  et de  $Y$ , ainsi que leurs fonctions caractéristiques. Les variables  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?

Les lois marginales de  $X$  et de  $Y$  sont

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \\ &= \frac{1}{4} \mathbf{1}_{[-1;1]}(x) \int_{-1}^1 (1 + x^3 y - xy^3) dy \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{1}_{[-1;1]}(x). \end{aligned}$$

Par symétrie, on obtient  $f_Y(y) = \frac{1}{2} \chi_{[-1;1]}(y)$ . Donc  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires de loi uniforme sur  $[-1; 1]$ .

Soit  $t \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \phi_X(t) &= \mathbb{E}(e^{itX}) \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f_X(x) dx \quad (\text{théorème de transfert}) \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{itx} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{it} e^{itx} \right]_{x=-1}^{x=1} \quad \text{si } t \neq 0 \\ &= \frac{1}{2it} (e^{it} - e^{-it}) \quad \text{si } t \neq 0 \\ &= \frac{\sin t}{t} \quad \text{si } t \neq 0. \end{aligned}$$

Pour  $t = 0$ ,  $\phi_X(t) = \mathbb{E}(1) = 1 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t}$  donc pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\phi_X(t) = \frac{\sin t}{t}$ . Comme  $X$  et  $Y$  sont de même loi, on a également pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\phi_Y(t) = \frac{\sin t}{t}$ .

Les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  ne sont pas indépendantes car leur densité jointe n'est pas le produit de leurs densités marginales.

- Calculer la fonction caractéristique de  $X + Y$ .

Soit  $t \in \mathbb{R}^*$ . On a

$$\begin{aligned} \phi_{X+Y}(t) &= \mathbb{E}(e^{itX} e^{itY}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{itx} e^{ity} f(x, y) dx dy \quad (\text{théorème de transfert}) \\ &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 e^{itx} e^{ity} dx dy + \frac{1}{4} \left( \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 -1^1 x^3 y e^{itx} e^{ity} dx dy - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 -1^1 xy^3 e^{itx} e^{ity} dx dy \right) \\ &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 e^{itx} dx \int_{-1}^1 e^{ity} dy + 0 \\ &= \left[ \frac{1}{2it} (e^{it} - e^{-it}) \right]^2 \\ &= \left( \frac{\sin t}{t} \right)^2 \end{aligned}$$

et par continuité de la fonction  $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$  en 0, on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi_{X+Y}(t) = \left( \frac{\sin t}{t} \right)^2.$$

Ici, on peut remarquer que nous avons l'égalité  $\phi_{X+Y} = \phi_X \phi_Y$  malgré le fait que les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  ne soient pas indépendantes.