

## Exercice - Maximum de vraisemblance pour une loi géométrique

On rappelle qu'une variable  $X$  suit une loi géométrique de paramètre  $p \in ]0; 1[$  si  $X$  est à valeurs dans  $\mathbb{N}^* = \{1; 2; 3; \dots\}$  et si pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\mathrm{P}(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$$

On cherche à estimer ce paramètre  $p$  à partir d'un échantillon.

1. On considère un échantillon  $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$  ayant pour loi mère une loi géométrique de paramètre  $p$  et on suppose que la suite  $(3; 4; 4; 2; 3)$  constitue une réalisation de cet échantillon.
  - (a) Exprimer la fonction de vraisemblance associée à cet échantillon.
  - (b) En déduire une estimation de  $p$  par la méthode du maximum de vraisemblance.
2. Afin de déterminer un estimateur de  $p$ , on considère maintenant un  $n$ -échantillon  $(X_1, \dots, X_n)$  ayant pour loi mère une loi géométrique de paramètre  $p$  et  $n$  entiers non nuls  $(x_1, \dots, x_n)$  constituant une réalisation de cet échantillon.
  - (a) Exprimer la fonction de vraisemblance associée à cet échantillon.
  - (b) En utilisant la méthode du maximum de vraisemblance, déterminer un estimateur du paramètre  $p$ .