99Xf **Exercice** - *Double jeu et probabilités discrètes*

Un joueur effectue une suite de parties de pile ou face indépendantes, avec probabilité p d'obtenir pile à chaque partie. Soit n un entier. Le joueur peut choisir entre deux jeux :

le Jeu 1 : le joueur effectue $2n-1$ parties. Il est déclaré vainqueur s'il obtient au moins n fois pile ;

le Jeu 2 : le joueur effectue $2n$ parties. S'il obtient au moins $n+1$ fois pile, il est déclaré vainqueur. S'il obtient n fois pile exactement, on tire au sort et il est déclaré vainqueur avec probabilité $\frac{1}{2}$.

On note X le nombre de piles obtenus lorsque le joueur choisit le Jeu 1, et Y le nombre de piles obtenus lorsqu'il choisit le Jeu 2. On note p_1 la probabilité de gagner au Jeu 1 et p_2 la probabilité de gagner au Jeu 2.
L'objectif est de savoir s'il vaut mieux jouer au Jeu 1 ou au Jeu 2.

1. Écrire $Y = X + U$ où U est une variable aléatoire indépendante de X dont la loi reste à préciser.
2. Démontrer que $\mathrm{P}(Y > n) = \mathrm{P}(X > n) + p\mathrm{P}(X = n)$.
3. Vérifier que $p_1 - p_2 = (1-p)\mathrm{P}(X = n) - \frac{1}{2}\mathrm{P}(Y = n)$
4. Conclure.