

On considère la série entière $S(x) = \sum \frac{(3x)^n}{n^2 + 3n + 2}$.

1. Calculer son rayon de convergence R . Si $|x| = R$, cette série converge-t-elle ?

$$R = \frac{1}{3}$$

Pour $|x| = \frac{1}{3}$, la série converge absolument car $\frac{1}{n^2 + 3n + 2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$.

2. Décomposer la fraction rationnelle $\frac{1}{n^2 + 3n + 2}$ en éléments simples, c'est-à-dire trouver les réels α et β tels que $\frac{1}{n^2 + 3n + 2} = \frac{\alpha}{n+1} + \frac{\beta}{n+2}$.

$$\alpha = 1 \text{ et } \beta = -1$$

3. Calculer la somme de la série pour $|x| < R$.

Soit $|x| < R$. On a

$$S(x) = \frac{1}{3x} \ln(1 - 3x) \left(\frac{1}{3x} - 1 \right) + \frac{1}{3x}.$$