

## Exercice - Limite et continuité d'une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$

Étudier l'existence et le cas échéant, calculer

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

On pose  $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$  : cette fonction n'est pas continue en  $(0, 0)$  et on peut étudier sa limite ; or pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $y \in \mathbb{R}$ ,  $f(x, 0) = 1$  et  $f(0, y) = -1$  donc les limites de  $f$  le long de chaque axe en  $(0, 0)$  n'ont pas la même valeur :  $f(x, 0) \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 1$  et  $f(0, y) \xrightarrow[y \rightarrow 0]{} -1 \neq 1$ .

Cela suffit pour affirmer que  $f$  n'admet pas de limite en  $(0, 0)$ .