Ex

Pour chacune des fonctions suivantes : préciser l'ensemble de définition, puis calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$.

1. $f(x,y) = x^2 - 6xy - 6y^2 + 2x + 24y$

✓

La fonction f est polynomiale en x et y, elle définie sur $\mathbb{R}^2$. Les dérivées partielles existent également pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - 6y + 2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -6x - 12y + 24$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -12$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -6$$

2. $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - \frac{x^3}{y}$

✓

La fonction f est définie sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\}$. Les dérivées partielles existent également pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ telles que $y \neq 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - \frac{3x^2}{y}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y + \frac{x^3}{y^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 - \frac{6x}{y}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 4 - 2\frac{x^3}{y^3}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{3x^2}{y^2}$$

3. $f(x,y) = \exp(2x^2 + xy + 7x + y^2)$

✓

La fonction f est une composée d'une exponentielle avec une fonction polynomiale en x et y, elle définie sur $\mathbb{R}^2$. Les dérivées partielles existent également pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (4x + y + 7)\exp(2x^2 + xy + 7x + y^2)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x + 2y)\exp(2x^2 + xy + 7x + y^2)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = (4 + (4x + y + 7)^2)\exp(2x^2 + xy + 7x + y^2)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = (2 + (x + 2y)^2)\exp(2x^2 + xy + 7x + y^2)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = (1 + (x + 2y)(4x + y + 7))\exp(2x^2 + xy + 7x + y^2)$$

4. $f(x,y) = \sin(xy)$

✓

La fonction f est une composée d'un cosinus avec une fonction polynomiale en x et y, elle définie sur $\mathbb{R}^2$. Les dérivées partielles existent également pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et on observe que les rôles sont symétriques en x et y :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\cos(xy)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cos(xy)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -y^2\sin(xy)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -x^2\sin(xy)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \cos(xy) - xy\sin(xy)$$

5. $f(x,y) = \ln(x+y)$

✓

La fonction f est une composée d'un ln avec une fonction polynomiale en x et y, elle est définie sur le demi plan $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y > 0\}$. Les dérivées partielles existent également pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ telles que $x + y > 0$ et on observe que les rôles sont symétriques en x et y :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x+y}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x+y}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{1}{(x+y)^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\frac{1}{(x+y)^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -\frac{1}{(x+y)^2}$$