tSoF ⊳ **Exercice** - *Equivalents simples*

Trouver un équivalent simple pour chaque fonction suivante en $+\infty$ :

1. $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}$

$\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}=\frac{2}{x^2-1}\underset{x\to+\infty}{}\frac{2}{x^2}$, car $x^2-1\underset{x\to+\infty}{}x^2$.

2. $x+1+\ln(x)$

$x+1+\ln(x)\underset{x\to+\infty}{-}x$, car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1+\ln(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\times\left(1+\frac{1}{x}+\frac{\ln(x)}{x}\right)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}1+\frac{1}{x}+\frac{\ln(x)}{x}=1$.

3. $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)$

$\sin(u)\underset{u\to0}{\sim}u\Rightarrow\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{\sqrt{x+1}}\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{\sqrt{x}}$

4. $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$

On a : $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=\frac{(x+1)-(x-1)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$
et $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\underset{x\to+\infty}{\sim}2\sqrt{x}$ car :
$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+1}{x}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x-1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ Aussi :

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{2}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

5. $\ln\left(\frac{x^2+x+2}{x^2+x-1}\right)$

$\frac{x^2+x+2}{x^2+x-1}=\frac{x^2\times\left(1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\times\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}$

$$\frac{1+u+2u^2}{1+u-u^2}=1+3u^2+u^2.\varepsilon(u)$$

$\ln(1+v)=v-\frac{v^2}{2}+v^2.\underset{v\neq0}{\varepsilon(v)}\Rightarrow\ln\left(\frac{1+u+2u^2}{1+u-u^2}\right)=3u^2+u^2.\varepsilon(u)$

Ainsi : $\ln\left(\frac{x^2+x+2}{x^2+x-1}\right)=\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^2}\cdot\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$ ou encore $\ln\left(\frac{x^2+x+2}{x^2+x-1}\right)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{3}{x^2}$