9UsO ⊵ **Exercice** - *Séries entières solutions d'équations différentielles*

Déterminer les fonctions développables en série entière au voisinage de 0 solutions de l'équation différentielle (E) suivante :

$$x^2(1-x)y''(x) - x(1+x)y'(x) + y(x) = 0.$$

Soit y une solution développable en série entière, de rayon de convergence R : on note $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et on a

$$\forall x \in]-R;R[, \qquad y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{et} \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

On a les équivalences suivantes :

$$y \text{ solution de } (E) \Leftrightarrow \forall x \in]-R;R[,\ a_0 + (a_2 - a_1)x^2 + \sum_{n=3}^{+\infty} [(n^2-2n+1)a_n - (n^2-2n+1)a_{n-1}]x^n =$$

$$\Leftrightarrow a_0 = 0 \quad \text{et} \quad a_2 = a_1 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 3,\ a_n = a_{n-1}$$

On en conclut que $a_0 = 0$ et pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = a_1$ et donc les solutions développables en série entière au voisinage de 0 de cette équation différentielle sont les fonctions y_α, avec $\alpha \in \mathbb{R}$, définies par :

$$y(x) = \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} x^n$$

sur l'intervalle $]-1;1[$. On peut également déterminer la fonction somme, ce qui donne

$$\forall x \in]-1;1[, \qquad y(x) = \alpha x \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{\alpha x}{1-x}.$$