Ex

Moments de la loi exponentielle

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Démontrer l'existence des moments d'ordre n de X pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis les calculer.

✓

On sait par comparaison que la fonction $x \mapsto xe^{-\lambda x}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ donc on peut calculer par théorème de transfert pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^n) &= \lambda \int_0^{+\infty} x^n e^{-\lambda x} dx \\
&= \lambda \left[\frac{x^n e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{\lambda} n \int_0^{+\infty} x^{n-1} \lambda e^{-\lambda x} dx \\
&= \frac{n}{\lambda} \mathbb{E}(X^{n-1})
\end{aligned}$$

De plus, on a immédiatement que $\mathbb{E}(X^0) = 1$ donc par récurrence, on obtient :

$$\mathbb{E}(X^n) = \frac{n!}{\lambda^n}$$