6YTv ⊵ **Exercice** - *Calcul d'une somme de série entière*

À l'aide des développements en séries entières des fonctions usuelles, calculer les développements en séries entières en 0 des fonctions réelles suivantes :

$$f(x) = \frac{1}{2+3x}, \qquad g(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \qquad h(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

et déterminer le rayon de convergence de ces développements.

On écrit les développements sur l'intervalle $]-R;R[$ où R est le rayon de convergence :

- $\forall x \in \left]\frac{-2}{3};\frac{2}{3}\right[, \qquad f(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\left(-\frac{3}{2}x\right)} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{3}{2}x\right)^n$
- $\forall x \in]-1;1[, \qquad g(x) = \ln(1+x)-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}+1}{n}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{2n-1}x^{2n-1}$
- $\forall x \in]-1;1[, \qquad h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\cdots\times\left(\frac{1}{2}+n-1\right)\right)x^{2n}$