Ex - Temps de transport

Une commune a lancé une étude concernant les problèmes liés au transport. Sur une ligne de bus, une enquête a permis de révéler que le retard (ou l'avance) sur l'horaire officiel du bus à une station donnée est donné par une variable aléatoire X, en minutes, suivant une loi normale $\mathcal{N}(5, \sigma)$ où $\sigma > 0$ est pour l'instant indéterminé. Cependant, on sait que la probabilité que le retard soit inférieur à 7 minutes est de $p = 84{,}13\%$.

1. Justifier que $\sigma = 2$.

✓ On sait que $\mathrm{P}(X \leqslant 7) = 0{,}8413$ d'où $\mathrm{P}\left(\frac{X-5}{\sigma} \leqslant \frac{2}{\sigma}\right) = 0{,}8413$. Par lecture de table, $\frac{2}{\sigma} = 1$ d'où $\sigma = 2$.

2. Sachant que le retard est supérieur à 3 minutes, quelle est la probablité que ce retard soit inférieur à 7 minutes ?

✓ On cherche $\mathrm{P}(X \leqslant 7 \mid X \geqslant 3) = \frac{\mathrm{P}(3 \leqslant X \leqslant 7)}{\mathrm{P}(X \geqslant 3)}$. Or $\mathrm{P}(3 \leqslant X \leqslant 7) = \mathrm{P}\left(-1 \leqslant \frac{X-5}{2} \leqslant 1\right) = 2\Phi(1) - 1 \approx 2 \times 0{,}8413 - 1 = 0{,}6826$ et $\mathrm{P}(X \geqslant 3) = \mathrm{P}\left(\frac{X-5}{2} \geqslant -1\right) \approx 0{,}8413$ d'où $\mathrm{P}(X \leqslant 7 \mid X \geqslant 3) \approx 0{,}8114$.

3. Une dame fréquente cette ligne de bus une fois par jour pendant 10 jours. On suppose que les retards journaliers sont indépendants. On note Y le nombre de jours où la dame a attendu moins de 7 minutes.

   (a) Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.

   ✓ On a $Y \sim \mathcal{B}(10, p)$ d'où $\mathbb{E}(Y) = 10p = 8{,}413$ et $\mathrm{V}(Y) = 10p(1-p) = 1{,}3351431$.

   (b) Soit T la variable aléatoire définie de la manière suivante : si la dame attend moins de 7 minutes chaque jour pendant les 10 jours, T prend la valeur 0 ; sinon T pend la valeur du k-ème jour ($k \in \{1, \ldots, 10\}$) où pour la première fois, la dame attend plus de 7 minutes. Déterminer, en fonction de p, la loi de probabilité de T.

   ✓ Pour $k \in \{1, \ldots, 10\}$, $\mathrm{P}(X = k) = p^{k-1}(1-p)$ (on reconnait la loi géométrique de paramètre $1-p$ pour ces 10 cas). Pour $k = 0$, $\mathrm{P}(T = 0) = \sum_{k=11}^{+\infty} p^{k-1}(1-p) = (1-p)\sum_{k=11}^{+\infty} p^{k-1} = (1-p) \times \frac{p^{10}}{1-p} = p^{10}$.