Ex

Calcul approché de probabilité et loi normale

Une machine fabrique des lames de carton empilées par paquets de 36. On suppose que chaque lame a une épaisseur X_i sont i.i.d. avec $\mathbb{E}(X_i) = 0.6$ cm et $\sigma(X_i) = 0.1$ cm. On note X l'épaisseur d'un paquet de 36 cartons.

1. Si les X_i suivent une loi normale, quelle est la loi de probabilité de X ?

✓

Si les X_i suivent des lois Normales, alors $X_i \sim \mathcal{N}(0.6, \sigma = 0.1)$ et la variable $X = \sum_{i=1}^{36}$ suit une loi Normale de paramètres $\mu = 36 \times 0.6 = 21.6$ et $\sigma = \sqrt{36 \times 0.1^2} = 0.6$.

2. Si on ne connaît pas la loi des X_i, donner une approximation de la loi de X en justifiant.

✓

Comme $n \geqslant 30$, on peut appliquer le théorème central limite et ainsi X suit approximativement la loi $\mathcal{N}(21.6, \sigma = 0.6)$.

3. On pose

$$Y = \frac{1}{36} \sum_{i=1}^{36} X_i$$

Quelle est la probabilité que Y soit compris entre 0.63 et 0.66 cm ? Comment peut-on interpréter ce résultat ?

✓

On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(0.63 \leqslant Y \leqslant 0.66) &= \mathbb{P}(36 \times 0.63 \leqslant X \leqslant 36 \times 0.66) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{36 \times 0.63 - 21.6}{0.6} \leqslant \frac{X - 21.6}{0.6} \leqslant \frac{36 \times 0.66 - 21.6}{0.6}\right) \\
&\simeq \mathbb{P}(1.8 \leqslant Z \leqslant 3.6) \quad \text{par le théorème central-limite, avec } Z \sim \mathcal{N}(0,1) \\
&\simeq \mathbb{P}(Z \leqslant 3.6) - \mathbb{P}(Z \leqslant 1.8) \\
&\simeq 0.999 - 0.9641 \quad \text{par lecture du tableau de loi} \\
&\simeq 0.0358
\end{aligned}$$

Y représente l'épaisseur moyenne d'un carton sur un paquet de 36 cartons.