

1. En utilisant le déterminant, justifier l'existence d'une matrice A vérifiant :

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 7 & 6 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A$$

puis déterminer A .

Remarque : Compte-tenu des règles du produit matriciel, si elles existent, les matrices A et B sont des matrices 3×3 . Puisque $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 7 & 6 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}}_{Id} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A = A$$

On calcule $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ par l'une ou l'autre méthode d'inversion.

Méthode 1 : Par la méthode du pivot de Gauss. Posons :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Permutons la première et la troisième ligne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Retranchons la première ligne de la deuxième :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Retranchons la deuxième ligne de la troisième :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Changeons le signe de la troisième ligne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Retranchons la troisième ligne de la première :

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = M^{-1}$$

2. Peut-on utiliser le même procédé pour déterminer B qui vérifie :

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 7 & 6 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

En revanche, puisque $\forall M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \det(M \times N) = \det(M) \times \det(N)$, il n'existe pas de matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 7 & 6 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ car $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 7 & 6 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ et

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$