On considère la série entière réelle $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(n+1)x^n}{2^n}$.

Ex **Etude de séries entières**

1. Calculer le rayon de convergence R de cette série entière.

✓

On pose $u_n(x) = \frac{(n+1)x^n}{2^n}$ et on utilise le théorème de d'Alembert :

$$\begin{aligned}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} &= \frac{(n+2)|x|^{n+1}}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{(n+1)|x|^n} \\ &= \frac{(n+2)}{2(n+1)}|x| \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}|x|\end{aligned}$$

Donc la série converge absolument si et seulement si $\frac{1}{2}|x| < 1 \iff |x| < 2$, cela revient à dire que le rayon de convergence est $R = 2$.

2. Étudier la série évaluée en $x = R$ et $x = -R$. En déduire le domaine de convergence de cette série entière.

✓

D'après le cours, la série converge absolument si $x \in]-2, 2[$.
Si $x = 2$ ou $x = -2$, on a un terme général $|u_n(2)| = |u_n(-2)| = n+1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(2) \neq 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(-2) \neq 0$.
La série diverge donc grossièrement pour $x = 2$ et $x = -2$.

3. Soit la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{x}{2}\right)^n$ et R' son rayon de convergence. Calculer R' puis calculer la somme de cette série pour tout $x \in]-R', R'[$.

✓

On reconnaît une série géométrique qui converge si $\frac{|x|}{2} < 1$ d'où un rayon de convergence $R' = 2$. La somme vaut

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{2}{2-x}$$

4. En déduire la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(n+1)x^n}{2^n}$.

✓

Par dérivation d'une série entière sur son intervalle ouvert de convergence, on obtient pour tout $x \in]-2; 2[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{nx^{n-1}}{2^n} = \frac{2}{(2-x)^2}$$

Or

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{nx^{n-1}}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^{n-1}}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)x^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)x^n}{2^n}$$

donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)x^n}{2^n} = \frac{4}{(2-x)^2}$$