2sPY ▷ **Exercice** - *Résolution de système linéaire à paramètre, homogène et non homogène*

On considère les systèmes suivants :

$$(\mathcal{S}_m)\begin{cases}(m-1)x+(1-m)y & +\left(m^2-1\right)z=0\\ my & +z=0\\ (1-m)x-y & -z=0\end{cases}$$

et :

$$\left(\mathcal{S}'_m\right)\begin{cases}(m-1)x+(1-m)y+ & \left(m^2-1\right)z=1\\ my & +z=1\\ (1-m)x-my & -z=-2\end{cases}$$

où $m\in\mathbb{R}$ est un paramètre réel.

1. Déterminer, suivant la valeur de m, le déterminant de la matrice :

$$A_m=\begin{pmatrix} m-1 & 1-m & m^2-1\\ 0 & m & 1\\ 1-m & -1 & -1\end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} m-1 & 1-m & m^2-1\\ 0 & m & 1\\ 1-m & -1 & -1\end{vmatrix} &= (m-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & m+1\\ 0 & m & 1\\ 1-m & -1 & -1\end{vmatrix}\\ &=(m-1)\cdot\left[(m-1)\cdot m\cdot(m+1)+1-m+(m-1)\right]\\ &=m\cdot(m-1)^2\cdot(m+1)\end{aligned}$$

Donc $\det(A_m)\neq 0$ si et seulement si $m\notin\{-1,0,1\}$.

2. En déduire les valeurs du paramètre m pour lesquelles le système $(\mathcal{S}_m)$ admet des solutions non nulles et, dans ces cas, résoudre le système.

Le système $(\mathcal{S}_m)$ est homogène. Il admet des solutions non nulles si et seulement si $\det(A_m)=0 \iff m\in\{-1,0,1\}$.

Pour $m=0$:

$$(\mathcal{S}_0)\Leftrightarrow\begin{cases}-x+y-z&=0\\ z&=0\\ x-y-z&=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\ z=0\end{cases}$$

$$\text{Sol }=\left\{(x,x,0)\in\mathbb{R}^3\ \mid\ x\in\mathbb{R}\right\}$$

Pour $m=1$:

$$(\mathcal{S}_1)\Leftrightarrow\begin{cases}0&=0\\ y+z&=0\\ -y-z&=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\text{ quelconque}\\ y=-z\end{cases}$$

$$\text{Sol }=\left\{(x,y,-y)\in\mathbb{R}^3\ \mid\ x,y\in\mathbb{R}\right\}$$

Pour $m=-1$:

$$(\mathcal{S}_{-1})\Leftrightarrow\begin{cases}-2x+2y=0\\ -y+z=0\\ 2x-y-z=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\ y=z\end{cases}$$

$$\text{Sol }=\left\{(x,x,x)\in\mathbb{R}^3\ \mid\ x\in\mathbb{R}\right\}$$

3. Trouver les solutions du système $(\mathcal{S}'_m)$ pour $m=2$ et $m=-1$.

$$(\mathcal{S}'_2)\Leftrightarrow\begin{cases}x-y+3z=1\\ 2y+z=1\\ -x-y-z=-2\end{cases}$$

On a $\det A_2=2\cdot(2-1)^2\cdot(2+1)=6\neq 0$ donc le système est de CRAMER, il admet une unique solution que l'on détermine par les formules de CRAMER :

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1&-1&3\\1&2&1\\-2&-1&-1\end{vmatrix}}{6}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}\quad y=\frac{\begin{vmatrix}1&1&3\\0&1&1\\-1&-2&-1\end{vmatrix}}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}\quad z=\frac{\begin{vmatrix}1&-1&1\\0&2&1\\-1&-1&-2\end{vmatrix}}{6}=\frac{0}{2}=$$

$$\Rightarrow\text{Sol}=\left\{\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},0\right)\right\}$$

$$(\mathcal{S}'_1)\Leftrightarrow\begin{cases}-2x+2y&=1\\ -y+z&=1\\ 2x-y-z&=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-y-z&=-2\\ -y+z&=1\\ y-z&=-1\end{cases}$$

Donc

$$S=\left\{\left(z-\frac{3}{2},z-1,z\right)\in\mathbb{R}^3\ \mid\ z\in\mathbb{R}\right\}$$