

Une usine a besoin de deux machines  $m_1$  et  $m_2$ . La probabilité que  $m_1$  tombe en panne est 0,005 et la probabilité que  $m_2$  tombe en panne est 0,007. La probabilité que  $m_2$  tombe en panne sachant que  $m_1$  est en panne est 0,5.



Soit  $M_1$  (respectivement  $M_2$ ) l'événement “la machine  $m_1$  (respectivement  $m_2$ ) fonctionne”. On a ainsi :  $P(\overline{M}_1) = 0,005$ ,  $P(\overline{M}_2) = 0,007$ ,  $P(\overline{M}_2|\overline{M}_1) = 0,5$ .

1. (a) Quelle est la probabilité que  $m_1$  et  $m_2$  soient simultanément en panne ?



$$P(\overline{M}_1 \cap \overline{M}_2) = P(\overline{M}_1)P(\overline{M}_2|\overline{M}_1) = 0,5 \times 0,005 = 0,0025.$$

- (b) En déduire la probabilité qu'une machine au moins fonctionne.



$$P(M_1 \cup M_2) = P(\overline{M}_1 \cap \overline{M}_2) = 1 - P(\overline{M}_1 \cap \overline{M}_2) = 1 - 0,0025 = 0,9975$$

2. (a) Quelle est la probabilité que  $m_1$  (respectivement  $m_2$ ) soit seule en panne ?



Probabilité que  $m_1$  soit seule en panne :

$$P(\overline{M}_1 \cap M_2) = P(M_2|\overline{M}_1)P(\overline{M}_1) = 0,005 \times 0,5 = 0,0025.$$

On peut aussi voir que  $\overline{M}_1 \cap M_2 = \overline{M}_1 \setminus (\overline{M}_1 \cap \overline{M}_2)$ , ce qui donne  $P(\overline{M}_1 \cap M_2) = 0,005 - 0,0025 = 0,0025$ .

Probabilité que  $m_2$  soit seule en panne :

$$\begin{aligned} P(\overline{M}_2 \cap M_1) &= 1 - P(\overline{M}_1 \cup M_2) &= 1 - (P(\overline{M}_1) + P(M_2) - P(\overline{M}_1 \cap M_2)) \\ &= 1 - (0,005 + 0,993 - 0,0025) = 0,0045 \end{aligned}$$

On peut aussi voir comme ci-dessus que  $\overline{M}_2 \cap M_1 = \overline{M}_2 \setminus (\overline{M}_2 \cap \overline{M}_1)$ , ce qui donne également que  $P(\overline{M}_2 \cap M_1) = 0,007 - 0,0025 = 0,0045$ .

- (b) En déduire la probabilité d'avoir une seule machine en panne.



Soit  $A$  l'événement : “une seule machine est en panne”. Alors

$$P(A) = P(M_1 \cap \overline{M}_2) + P(M_2 \cap \overline{M}_1) = 0,025 + 0,0045 = 0,007$$

- (c) Quelle est la probabilité de n'avoir aucune machine en panne ?



L'événement qui nous intéresse est  $M_1 \cap M_2$ . Or on a

$$\begin{aligned} P(M_1 \cap M_2) &= 1 - P(\overline{M}_1 \cup \overline{M}_2) &= 1 - (P(\overline{M}_1) + P(\overline{M}_2) - P(\overline{M}_1 \cap \overline{M}_2)) \\ &= 1 - (0,005 + 0,007 - 0,0025) = 0,9905. \end{aligned}$$

Il y a donc 99,05% de chances que les deux machines fonctionnent.

On peut aussi voir que  $A$ ,  $\overline{M}_1 \cap \overline{M}_2$  et  $M_1 \cap M_2$  forme un système complet d'événements : soit 0 machine fonctionne, soit une seule fonctionne, soit les deux fonctionnent. Ainsi, on retrouve

$$P(M_1 \cap M_2) = 1 - P(A) - P(\overline{M}_1 \cap \overline{M}_2) = 1 - 0,007 - 0,0025 = 0,9905.$$