

Exercice - Séries à termes réels positifs

Étudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n = \frac{n}{n^3+1}$

2. $u_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$

3. $u_n = n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

4. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

5. $u_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$

6. $u_n = \frac{(-1)^n+n}{n^2+1}$

7. $u_n = \frac{1}{n!}$

8. $u_n = \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$

Indications : Pour la question 5., utiliser la quantité conjuguée, i.e. multiplier le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$. Pour la question 7., utiliser l'inégalité $n! \geq 2^{n-1}$. Pour la question 8., utiliser un équivalent de $\ln(1+x)$ en 0.