Ex

Deux urnes U_1 et U_2 contiennent des boules permettant des gains ou des pertes décrits comme suit :

— dans l'urne U_1, il y a 1 boule « perdant 1€ », 2 boules « sans gain », 3 boules « gagnant 2€ » ;

— dans l'urne U_2, il y a 3 boules « perdant 1€ », 2 boules « sans gain », 1 boules « gagnant 2€ » ;

Un joueur lance un dé équilibré : s'il obtient 6, il pioche une boule dans l'urne U_1, sinon il pioche une boule dans l'urne U_2.

On note X la variable aléatoire égale à 1 si le dé sort 6, 0 sinon. On note Y la variable aléatoire égale au gain (en euros.)

1. Donner la loi du couple (X, Y).

✓

Pour calculer par exemple $\mathrm{P}(X = 1, Y = -1)$, on utilise la formule de Bayes :

$$\mathrm{P}(X = 1, Y = -1) = \mathrm{P}(\{X = 1\} \cap \{Y = -1\}) = \mathrm{P}(X = 1)\mathrm{P}(Y = -1 \mid X = 1)$$

Or d'après l'énoncé, $\mathrm{P}(X = 1) = \frac{1}{6}$ et $\mathrm{P}(Y = -1 \mid X = 1) = \frac{1}{6}$ d'où $\mathrm{P}(X = 1, Y = -1) = \frac{1}{36}$. En procédant de même pour tous les couples de valeurs possibles, on obtient :

	$Y = -1$	$Y = 0$	$Y = 2$
$X = 1$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$
$X = 0$	$\frac{15}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{5}{36}$

2. Calculer les lois marginales du couple (X, Y). Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

✓

On obtient directement que X suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{6}$. De plus, par somme, on obtient la loi suivante pour Y :

k	-1	0	2
$\mathrm{P}(Y = k$	$\frac{4}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$