Ocbl ⊳ **Exercice** - *Convergence vers une loi exponentielle*

Soit une suite de variables indépendantes $(U_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ suivant chacune une loi uniforme $\mathcal{U}([0;1])$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $M_n = \max(U_1, ..., U_n)$.

1. Démontrer que $M_n \xrightarrow{\mathcal{P}} 1$.

Soit $M_n = \max(U_1, \ldots, U_n)$. Pour tout i, $U_i \leqslant 1$ donc $M_n \leqslant 1$. Soit $\varepsilon > 0$. On cherche la limite de

$$P(|M_n - 1| < \varepsilon) = P(1 - M_n < \varepsilon) = P(M_n > 1 - \varepsilon)$$

Or la fonction de répartition de M_n est définie pour tout réel t par

$$\begin{aligned} F_n(t) &= \mathrm{P}(\Pi_n \leqslant t) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} (U_i \leqslant t)\right) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}(U_i \leqslant t) \text{ par indépendance} \\ &= \mathrm{P}(U_1 \leqslant t)^n \text{ car les variables sont identiquement distribuées} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t^n & \text{si } t \in [0;1] \\ 1 & \text{si } t > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(M_n > 1 - \varepsilon) &= 1 - \mathrm{P}(M_n \leqslant 1 - \varepsilon) \\ &= 1 - (1 - \varepsilon)^n \\ &\xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration de la convergence en probabilité de la suite (M_n) vers 1.

2. En déduire que $M_n \xrightarrow{\text{p.s.}} 1$ et $M_n \xrightarrow{\text{en loi}} 1$.

On remarque que pour tout $\omega \in \Omega$, la suite $(M_n(\omega))$ est une suite réelle croissante. Cette suite est également majorée par 1 puisque chaque variable U_i est majorée par 1. La suite $(M_n(\omega))$ est donc une suite convergente, notons $L(\omega)$ sa suite. Il existe donc une variable aléatoire L telle que la suite (M_n) converge vers L presque sûrement. Or on sait que la convergence presque sûre implique la convergence en probabilité. Et d'après la question précédente, la suite (M_n) converge en probabilité vers la variable aléatoire constante 1. Par unicité de la limite, on déduit que pour tout $\omega \in \Omega$, $L(\omega) = 1$.

On a donc montré que $M_n \xrightarrow{\text{p.s.}} 1$, ce qui implique directement par théorème du cours que $M_n \xrightarrow{\text{en loi}} 1$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = n(1 - M_n)$. Démontrer que la suite (Y_n) converge en loi vers une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

On cherche à étudier la convergence de la fonction de répartition F_{Y_n} de Y_n. Soit $t \in \mathbb{R}$. On constate que

$$Y_n \leqslant t \iff M_n \geqslant 1 - \frac{t}{n}$$

Si $t \leqslant 0$ alors $\mathrm{P}(Y_n \leqslant t) = \mathrm{P}(M_n \geqslant 1 - \frac{t}{n}) = 0$ car $M_n \leqslant 1$.
Si $t \in [0; n]$ alors $\mathrm{P}(Y_n \leqslant t) = 1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$ d'après la question précédente.
Si $t > n$ alors $\mathrm{P}(Y_n \leqslant t) = 1$ car $M_n \geqslant 0$.
Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}$.
Donc :

— si $t < 0$, $F_{Y_n}(t) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$;
— si $t \geqslant 0$, $F_{Y_n}(t) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 - e^{-t}$.

On en déduit que la suite de fonctions (F_{Y_n}) converge simplement vers la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre 1.

Cela prouve la convergence en loi de la suite (Y_n) vers une loi exponentielle de paramètre 1.