Ex

Calcul de déterminant

Calculer :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix},$$

où a et b sont deux réels non nuls.

✓

$$\Delta = \begin{vmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix} = \ell_2 - \ell_3 \begin{array}{c} \ell_4 \\ \begin{vmatrix} a^2 - b^2 & 0 & 0 & b^2 - a^2 \\ 0 & a^2 - b^2 & b^2 - a^2 & 0 \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= \left(a^2 - b^2\right)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix} = (a-b)^2 \cdot (a+b)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix}$$

$c_1 + c_2 + c_3 + c_4$

$$= (a-b)^2 \cdot (a+b)^2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ (a+b)^2 & b^2 & a^2 & ab \\ (a+b)^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)^2 \cdot (a+b)^4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & b^2 & a^2 & ab \\ 1 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix} = (a-b)^2 \cdot (a+b)^4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & b^2 & a^2 \\ 1 & ab & ab \end{vmatrix}$$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & b^2 & a^2 \\ 1 & ab & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & b^2 & a^2 + b^2 \\ 1 & ab & 2ab \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & a^2 + b^2 \\ 1 & 2ab \end{vmatrix} = a^2 + b^2 - 2ab$$

$$\Delta = (a-b)^4 \cdot (a+b)^4$$