Ex

Construction d'un schéma à deux pas par interpolation

1. Soit f une fonction $\mathcal{C}^1([-1;1])$. Écrire le polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ qui interpole f aux points -1, 0 et 1.

✓

On cherche les coefficients a_0, a_1 et a_2 du polynôme $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$ tels que $P(-1) = f(-1)$, $P(0) = f(0)$, $P(1) = f(1)$. Après identification, on trouve

$$a_0 = f(0) \qquad a_1 = \frac{f(1) - f(-1)}{2} \qquad a_2 = \frac{f(1) - 2f(0) + f(-1)}{2}$$

2. En déduire une approximation de l'intégrale $\int_0^1 f(s)ds$.

✓

On en déduit

$$\int_0^1 f(s)ds \approx \int_0^1 P(s)ds = a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} = \frac{-f(-1) + 8f(0) + 5f(1)}{12}$$

3. En déduire par changement de variable une approximation de l'intégrale $\int_a^b f(s)ds$ pour f de classe $\mathcal{C}^1([a-(b-a); a+(b-a)])$.

✓

$\int_a^b f(s)ds = (b-a)\int_0^1 f(a+(b-a)\tau) \approx (b-a)\frac{-f(2a-b)+8f(a)+5f(b)}{12}$

4. En déduire un schéma à deux pas implicite pour approcher la solution d'un problème de Cauchy.

✓

Pour résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(0) = a \end{cases}$$

l'approximation d'intégrale conduit à poser

$$y_{n+1} = y_n + h\frac{-f(t_{n-1}, y_{n-1}) + 8f(t_n, y_n) + 5f(t_{n+1}, y_{n+1})}{12}$$

avec $y_0 = a$ et y_1 à déterminer en prenant par exemple $y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0)$.