zhq8 **Exercice** - *Construction de la loi du χ^2*

On appelle loi Gamma $\Gamma(\alpha, \lambda)$ où $\alpha > 0$, $\lambda > 0$ la loi dont la densité est définie par

$$f(t) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\lambda t} \mathbf{1}_{[0;+\infty[}(t)$$

où

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite. On pose $Y = X^2$.

1. En étudiant sa fonction de répartition, montrer que Y suit une loi $\Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
2. Soit un entier $n \geqslant 1$ et soit U_n une variable aléatoire suivant une loi $\Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$. Déterminer la fonction génératrice de U_1 puis celle de U_n pour $n \geqslant 1$.
3. Soient $(Z_1, ..., Z_n)$ des variables i.i.d selon une loi normale centrée réduite. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i^2$$