

Soit X une variable aléatoire absolument continue dont la densité est donnée par

$$f(x) = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{[-1;1]}(x)$$

On cherche à identifier la loi de $Y = X^2$.



1. pour tout t , $F_Y(t) = P(X^2 \leq t)$
2. si $t \geq 0$, $\{X^2 \leq t\} = \{X \in [-\sqrt{t}; \sqrt{t}]\}$;
si $t < 0$ $\{X^2 \leq t\} = \emptyset$
3. donc pour tout $t \geq 0$,

$$F_Y(t) = P(X \in [-\sqrt{t}; \sqrt{t}]) = \int_{-\sqrt{t}}^{+\sqrt{t}} \frac{1}{2} \mathbf{1}_{[-1;1]}(x) dx$$

$$\text{si } 0 \leq t \leq 1 \text{ alors } F_Y(t) = \int_{-\sqrt{t}}^{+\sqrt{t}} \frac{1}{2} dx = \sqrt{t}$$

$$\text{si } t > 1 \text{ alors } F_Y(t) = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} dx = 1$$

4. pour tout $t \in]0; 1[$, F_Y est dérivable en t et $F_Y'(t) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{t}}$ donc en intégrant, $F_Y(t) = \int_0^t \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ de sorte que $F_Y(0) = 0$ et $F_Y(1) = 1$.

Pour résumer ces conditions, on peut écrire que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$F_Y(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} \mathbf{1}_{[0;1]}(x) dx$$

On en déduit que Y admet pour densité la fonction $g: x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}} \mathbf{1}_{[0;1]}(x)$