KZCb ⊵ **Exercice** - *Différents types de convergence*

Soit n un entier naturel non-nul et soit a un réel. On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{an}{\pi(1+n^2x^2)}.$$

1. Déterminer a pour que f_n soit une densité de variable aléatoire.

La fonction f_n étant continue et positive, elle est une densité de variable aléatoire si et seulement si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx = 1$$

Or, effectuant le changement de variables $u = nx$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{an}{\pi\left(1+n^2x^2\right)}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{\pi\left(1+u^2\right)}du = \frac{a}{\pi}[\arctan(u)]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{a}{\pi} \times \pi = a$$

f_n est donc une densité de variable aléatoire si et seulement si $a = 1$.

2. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires telle que chaque X_n admet pour densité f_n. Étudier l'existence de moments pour X_n.

On a $xf_n(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{\pi n x}$ dont l'intégrale est divergente au voisinage de $+\infty$, et qui est une fonction positive. Ainsi, la variable aléatoire X_n n'admet pas d'espérance, ni aucun autre moment.

3. Étudier la convergence en loi de la suite (X_n).

Soit F_n la fonction de répartition de X_n, définie pour tout x réel par

$$F_n(x) = \int_{-\infty}^{x} f_n(t)dt = \frac{1}{\pi}\left(\arctan(nx) + \frac{\pi}{2}\right).$$

Si $x < 0, \arctan(nx) \to -\pi/2$, et donc $F_n(x) \to 0$. Si $x > 0, \arctan(nx) \to \pi/2$ et donc $F_n(x) \to 1$.

Soit maintenant X une variable aléatoire identiquement nulle Sa fonction de répartition F_X vérifie $F_X(x) = 0$ si $x < 0$ et $F_X(x) = 1$ si $x \geqslant 0$. Autrement dit, en tout point de continuité de F_X, la suite $(F_n(x))$ converge vers $F_X(x)$. On en déduit la convergence en loi de la suite (X_n) vers X.

4. Étudier la convergence en probabilité de la suite (X_n).

Soit $\varepsilon > 0$. On cherche la limite de $P\left(|X_n - x| < \varepsilon\right)$ où X est la variable nulle.

on

$$\begin{aligned} P\left(|X_n| < \varepsilon\right) &= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{n}{\pi\left(1+n^2x^2\right)}dx \\ &= \int_{-n\varepsilon}^{n\varepsilon} \frac{du}{\pi\left(1+u^2\right)} \\ &= \frac{1}{\pi}(\mathrm{Arctan}(n\varepsilon) - \mathrm{Arctan}(-n\varepsilon)) \\ &= \frac{2}{\pi}\mathrm{Arctan}(n\varepsilon) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{\pi} \times \frac{\pi}{2} = 1 \end{aligned}$$

Donc on a bien $X_n \underset{\text{proba}}{\longrightarrow} 0$