

Pour chacune des séries suivantes, déterminer si elle converge ou diverge.

1. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 + 1} ;$

On pose $u_n = \frac{1}{n^2+1}$. Alors $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ donc par comparaison à une série de Riemann convergente ($\alpha = 2 > 1$), la série $\sum u_n$ converge.

2. $\sum_{n \geq 1} \frac{|\cos(n)|}{n^2(\sqrt{n} + 1)} ;$

On pose $u_n = \frac{|\cos(n)|}{n^2(\sqrt{n}+1)}$. Alors $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_n \leq \frac{1}{n^2(\sqrt{n}+1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{5/2}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc par comparaison d'une série positive à une série de Riemann convergente, la série $\sum u_n$ converge.