

Exercice - Loi géométrique et estimation par maximum de vraisemblance

On fixe un réel $a > 0$ et on définit une variable aléatoire X sur \mathbb{N} dont la loi de probabilité est définie par

$$\mathrm{P}(X = k) = \frac{a^k}{(1 + a)^{k+1}}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$.

À l'aide de la méthode du maximum de vraisemblance, définir un estimateur de a et déterminer son biais.

On définit un échantillon X_1, \dots, X_n et on considère la probabilité que cet échantillon réalise un ensemble de valeurs $V = \{x_1, \dots, x_n\}$. La fonction de vraisemblance s'écrit alors

$$L(x_1, \dots, x_n, a) = \mathrm{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \prod_{k=1}^n \mathrm{P}(X = x_k) = \prod_{k=1}^n \frac{a^{x_k}}{(1 + a)^{x_k + 1}} = \frac{a^{\sum x_k}}{(1 + a)^{\sum x_k + n}}$$

On dérive ce quotient par rapport à a , on factorise par $a^{\sum x_k - n}$ et on trouve que

$$\frac{\partial L}{\partial a}(x_1, \dots, x_n, a) = 0 \iff \sum_{k=0}^n x_k(1 + a) - a(n + \sum_{k=0}^n x_k) = 0 \iff a = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n x_k$$

On a donc trouvé un meilleur estimateur du paramètre a selon la méthode du maximum de vraisemblance : il s'agit de l'estimateur $T = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n X_k$.

Reste à calculer le biais de cet estimateur, autrement dit à calculer $B(T) = \mathbb{E}(T - a)$. Or pour tout entier i , X_i suit la loi définie ci-dessus et on espérance se calcule de la manière suivante :

$$\mathbb{E}(X_i) = \sum_{k=0}^n k \mathrm{P}(X_i = k) = \sum_{k=0}^n k \left(\frac{a}{1 + a} \right)^{k-1} \frac{a}{(1 + a)^2} = \frac{1}{\left(1 - \frac{a}{1 + a} \right)^2} \times \frac{a}{(1 + a)^2} = a$$

Donc $B(T) = \frac{1}{n} \times n \times a - a = 0$: la variable T est donc un estimateur sans biais du paramètre a .