

Soit X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes suivant chacune une même loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$.

1. Calculer la fonction de répartition de la variable $\max(X_1, \dots, X_n)$ et en déduire la loi de cette variable aléatoire.

On note $V = \max(X_1, \dots, X_n)$. On sait que $P(V \leq t) = P((X_1 \leq t) \cap \dots \cap (X_n \leq t))$ et par indépendance des variables qui suivent chacune une même loi, on en déduit que

$$P(V \leq t) = P(X_1 \leq t)^n = \begin{cases} (1 - e^{-\lambda t})^n & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On obtient ainsi la fonction de répartition de V . La densité de V s'obtient en dérivant cette fonction.

2. Calculer la loi de la variable $\min(X_1, \dots, X_n)$.

On note $U = \min(X_1, \dots, X_n)$. On sait que $P(U \geq t) = P((X_1 \geq t) \cap \dots \cap (X_n \geq t))$ et par indépendance des variables qui suivent chacune une même loi, on en déduit que

$$P(U \geq t) = P(X_1 \geq t)^n = \begin{cases} e^{-\lambda n t} & \text{si } t \geq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

On en déduit que la fonction de répartition de U est la fonction

$$t \mapsto \begin{cases} 1 - e^{-\lambda n t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Une fonction densité de U s'obtient en dérivant cette fonction de répartition.