Ex

Calcul de dérivées partielles

On pose $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \dfrac{x^2+xy}{y^2}$.

1. Préciser l'ensemble de dérivabilité de f et calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

✓

La fonction f admet des dérivées partielles en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{2x+y}{y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= -\frac{2x^2}{y^3} - \frac{x}{y^2} \\ &= \frac{-2x^2-xy}{y^3} \end{aligned}$$

2. On note $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto t^2+t$. En remarquant que $f(x,y) = F\left(\dfrac{x}{y}\right)$, et en utilisant les règles de dérivation composée, retrouver les expressions obtenues à la question 1.

✓

Dans un premier temps, on remarque que F est dérivable en tout point $t \in \mathbb{R}$ et $F'(t) = 2t+1$. D'autre part, par application de la règle des chaînes, on peut calculer

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(F\left(\frac{x}{y}\right)\right) \\ &= \left(F'\left(\frac{x}{y}\right)\right) \times \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right) \\ &= \left(2\left(\frac{x}{y}\right)+1\right) \times \frac{1}{y} \\ &= \frac{2x+y}{y^2} \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(F\left(\frac{x}{y}\right)\right) \\ &= \left(F'\left(\frac{x}{y}\right)\right) \times \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) \\ &= \left(2\left(\frac{x}{y}\right)+1\right) \times \frac{-x}{y^2} \\ &= \frac{-2x^2-xy}{y^3} \end{aligned}$$