Ex - Autour d'une loi exponentielle

b6cm

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi exponentielle $\mathcal{E}(3)$. On rappelle qu'une densité de probabilité de la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On note $Z = \min(X, Y)$ la variable aléatoire donnant le minimum de X et Y.

1. Déterminer $\mathrm{P}(X \geqslant t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

✓

Soit $t \in \mathbb{R}$. Si $t \geqslant 0$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X \geqslant t) &= \int_t^{+\infty} f(x)x \\ &= \int_t^{+\infty} 3e^{-3x}x \\ &= \left[-e^{-3x}\right]_t^{+\infty} \\ &= e^{-3t}. \end{aligned}$$

Si $t < 0$, on a $\mathrm{P}(X \geqslant t) = 1$.

2. Déterminer $\mathrm{P}(Z \geqslant t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

✓

Soit $t \in \mathbb{R}$. Si $t \geqslant 0$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(Z \geqslant t) &= \mathrm{P}(X \geqslant t \text{ et } Y \geqslant t) \\ &= \mathrm{P}(X \geqslant t)\mathrm{P}(Y \geqslant t) \text{ par indépendance de } X \text{ et } Y \\ &= e^{-3t} \times e^{-3t} \\ &= e^{-6t}. \end{aligned}$$

Si $t < 0$, on a $\mathrm{P}(Z \geqslant t) = 1$.
On voit ainsi que $Z = \min(X, Y)$ suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(6)$.