XQqR ⊵ **Exercice** - *Méthode du point milieu (Euler améliorée)*

La méthode d'Euler explicite est convergente et consistante d'ordre 1. On considère l'approximation suivante :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, y(s))ds \approx h \cdot f\left(t_n + \frac{h}{2}, y\left(t_n + \frac{h}{2}\right)\right).$$

La méthode qui en découle s'écrit donc sous la forme

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_{n+1/2}\right)$$

où $y_{n+1/2}$ reste à définir sous la forme

$$y_{n+1/2} = y_n + \frac{h}{2} G(t_n, y_n, h)$$

Déterminer une fonction G permettant à ce schéma d'être consistant d'ordre 2.

La méthode s'écrit donc sous la forme $y_{n+1} = y_n + H(t_n, y_n, h)$ avec $H(t, y, h) = f\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} G(t, y, h)\right)$
Quel que soit le choix de G, on obtient $H(t, y, 0) = f(t, y)$ de sorte que par théorème, la méthode est consistante au moins d'ordre 1.
On dérive H par rapport à h : ...
et on trouve que $\frac{\partial H}{\partial h}(t, y, 0) = \frac{1}{2} f^{[1]}(t, y)$ si et seulement si $G(t, y, 0) = f(t, y)$. On prend donc $G(t, y, h) = f(t, y)$.