

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 - 2x^2 y + 3y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Montrer que la restriction de f à toute droite passant par l'origine est continue en $(0, 0)$. Autrement dit, montrer que les trois limites suivantes existent et sont égales à 0 :

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0),$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, ax),$ pour $a \in \mathbb{R}^*,$

(c) $\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y)$



On a effectivement $f(x, 0) = 0 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, $f(x, ax) = \frac{ax}{x^2 - 2ax + 3a^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et $f(0, y) = 0 \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0$.

2. Calculer la limite en $(0, 0)$ de la restriction de f à la courbe d'équation $y = x^2$.



On évalue f sur la courbe d'équation $y = x^2$: quelque soit x , $f(x, x^2) = \frac{x^4}{x^4(1-2+3)} = \frac{1}{2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}$.

3. La fonction f est-elle continue en $(0, 0)$? Justifier.



D'après ce qui précède, f n'est pas continue en $(0, 0)$ puisqu'on observe des limites différentes en $(0, 0)$ selon le chemin suivi.