

En 2008, le célèbre opérateur FSR proposait un forfait téléphonique de 1 heure mensuelle. Pour étudier la consommation des clients ayant opté pour ce forfait, il a relevé la proportion mensuelle du forfait consommé par 15 clients et a obtenu, après avoir ordonné les résultats :

0.29	0.46	0.51	0.61	0.70	0.72	0.76	0.79
	0.84	0.85	0.86	0.92	0.94	0.96	1

Cette répartition suggère de modéliser les observations à l'aide d'une loi puissance de paramètre  $(\lambda, 1)$  avec  $\lambda > 0$  dont la fonction densité est :

$$f_{\lambda}(x) = \lambda x^{\lambda-1} \mathbf{1}_{[0;1]}(x)$$

1. Á l'aide de la méthode du maximum de vraisemblance, construire un estimateur du paramètre  $\lambda$ , pour un  $n$ -échantillon  $(X_1, \dots, X_n)$ . On notera cet estimateur  $\widehat{\lambda}_n$ .
2. On admet que la variable aléatoire  $2n \frac{\lambda}{\widehat{\lambda}_n}$  suit une loi  $\chi^2(2n)$ . En déduire l'expression d'un intervalle de confiance de niveau  $1 - \alpha$  sous la forme  $] - \infty ; T]$  pour le paramètre  $\lambda$ .