mVsg ⊳ **Exercice** - *Consommation d'oxygène*

On s'intéresse à un test pour mesurer la consommation maximale en oxygène d'un individu dans une population âgée. Pour un groupe de contrôle, il a été montré que les mesures suivent une loi normale dont l'espérance mathématique est de l'ordre de $\mu = 25{,}5$(ml/kg/min) et l'écart-type $\sigma = 6$(ml/kg/min). On pense qu'une population de malades (Parkinson) doit avoir des capacités cardio-respiratoires plus limitées. On souhaite ainsi tester si dans un tel groupe la moyenne μ est plus faible. On prendra un risque de première espèce $\alpha = 5\%$.

1. L'objectif du test est de décider entre les deux hypothèses suivantes : $H_0 : \mu = 25{,}5$ (absence d'effet de la maladie) et $H_1 : \mu < 25{,}5$ (existence de l'effet) à partir d'un échantillon de taille 15. On note $\overline{X} = \sum_{k=1}^{15} X_i$ la moyenne empirique des mesures dans un tel échantillon.

   (a) Supposons que la moyenne observée dans l'échantillon est de 24,0, quelle est la décision à prendre à la suite de ce test ?

   La variable de décision sous l'hypothèse H_0 est

   $$Z = \frac{\overline{X} - 25{,}5}{\sqrt{\frac{S^2}{15}}}$$

   et suit une loi de Student $St(14)$. Il convient de prendre pour valeur observée $S^2_{obs} = \frac{15}{14} \times 6^2 = 38.57$ soit $S_{obs} = 6.21$. Avec ces valeurs, on obtient $Z_{obs} = -0{,}93$.
   Or pour $\alpha = 0.05$, on calcule que la zone de rejet est $]-\infty; -1.76]$. Il n'y a donc pas lieu de rejeter l'hypothèse H_0.

   (b) Déterminer la moyenne critique μ_c, c'est-à-dire la valeur observée au deçà de laquelle le test conduit à un rejet de H_0.

   Il suffit de résoudre l'équation $\frac{\mu_c - 23{,}5}{\sqrt{\frac{S^2}{15}}} = -1.76$ et on obtient $\mu_c \approx 22.7$.

2. La professeur responsable du service pense qu'à partir de la valeur $\mu = 23{,}5$, la différence est scientifiquement significative et l'effet sur le malade important. Elle souhaite alors savoir quel risque elle prend lorsqu'elle ne rejette pas H_0 en étant sous l'hypothèse alternative (H_1): $\mu = 23{,}5$.

   (a) Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire $\overline{X}$ lorsque (H_1) est supposée vraie ?

   Dans ce cas $\overline{X}$ suit une loi normale de paramètre $\mu = 23.5$ et d'écart type $\sigma = 6$.

   (b) En déduire l'erreur de deuxième espèce et la puissance de ce test. Commenter le résultat.

   Il suffit de calculer :

   $$\begin{aligned} \mathrm{P}(\overline{X} \geqslant \mu_c) &= \mathrm{P}\left(\frac{\overline{X} - 23{,}5}{\sqrt{\frac{S^2}{15}}} \geqslant \frac{22.7 - 23{,}5}{\sqrt{\frac{S^2}{15}}}\right) \\ &\approx 0.7 \end{aligned}$$

   en utilisant la loi de Student de paramètre 14.

   On en déduit que le test ainsi réalisé n'est pas très puissant, de l'ordre de 30% seulement.