Ex

Equivalents simples

Trouver un équivalent simple pour chaque fonction suivante en $+\infty$:

1. $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$

$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x^2-1} \underset{x\to+\infty}{} \frac{2}{x^2}$, car $x^2 - 1 \underset{x\to+\infty}{} x^2$.

2. $x + 1 + \ln(x)$

$x+1+\ln(x) \underset{x\to+\infty}{-} x$, car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1+\ln(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\times\left(1+\frac{1}{x}+\frac{\ln(x)}{x}\right)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x}+\frac{\ln(x)}{x} =$ 1.

3. $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)$

$\sin(u) \underset{u\to0}{\sim} u \Rightarrow \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x+1}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}$

4. $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$

On a : $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \frac{(x+1)-(x-1)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$
et $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{x}$ car :
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+1}{x}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x-1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ Aussi :

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

5. $\ln\left(\frac{x^2+x+2}{x^2+x-1}\right)$

$\frac{x^2+x+2}{x^2+x-1} = \frac{x^2\times\left(1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\times\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}$

$$\frac{1+u+2u^2}{1+u-u^2} = 1 + 3u^2 + u^2.\varepsilon(u)$$

$\ln(1+v) = v - \frac{v^2}{2} + v^2.\underset{v\neq0}{\varepsilon(v)} \Rightarrow \ln\left(\frac{1+u+2u^2}{1+u-u^2}\right) = 3u^2 + u^2.\varepsilon(u)$

Ainsi : $\ln\left(\frac{x^2+x+2}{x^2+x-1}\right) = \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^2}\cdot\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$ ou encore $\ln\left(\frac{x^2+x+2}{x^2+x-1}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{3}{x^2}$