Ex

Etude de point fixe

On s'intéresse au calcul de $\ell \in [0;\pi]$ tel que $\ell = \ell - \frac{1}{4}\cos(\ell)$.
On considère la méthode de point fixe suivante : $x_0 \in [0;\pi]$ et $x_{k+1} = \phi(x_k)$ pour tout $k \geqslant 0$, où ϕ est la fonction définie sur l'intervalle $[0;\pi]$ par $\phi(x) = 1 - \frac{1}{4}\cos(x)$.

1. Montrer que la méthode converge pour tout $x_0 \in [0;\pi]$.

✓ La dérivée de la fonction g vérifie $\forall x \in [0;\pi]$, $|\phi'(x)| \leqslant \frac{1}{4} < 1$. De plus, $\phi([0;\pi]) = [\frac{3}{4};\frac{5}{4}] \subset [0;\pi]$. Par conséquent, la méthode de point fixe converge vers le point fixe l pour tout $x_0 \in [0;\pi]$.

2. (a) Montrer qu'il existe une constante $C \in]0;1[$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|x_k - \ell| \leqslant C^k|x_0 - \ell|$ et donner une valeur de C.
   (b) En déduire le nombre d'itérations nécessaires pour approcher ℓ à 10^{-3} près.

✓ Par le théorème des accroissements finis, on a l'existence de ζ_k compris entre ℓ et x_k tel que

$$|x_k - \ell| = |\phi(x_{k-1}) - g(\ell)| = |\phi'(\zeta_k)||x_{k-1} - \ell| \leqslant \frac{1}{4}|x_{k-1} - \ell|.$$

Par récurrence, on montre ainsi

$$|x_k - \ell| \leqslant \frac{1}{4^k}|x_0 - \ell|.$$

On a donc $|x_k - \ell| \leqslant \frac{\pi}{4^k}$. Pour approcher ℓ à 10^{-3} près, il faut

$$\frac{\pi}{4^k} \leqslant 10^{-3} \quad \Leftrightarrow \quad k \geqslant \frac{\ln(\pi 10^3)}{\ln(2)} \simeq 5.9,$$

soit 6 itérations.

3. (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|x_k - \ell| \leqslant \frac{4}{3}|x_{k+1} - x_k|$.
   (b) En déduire la valeur ε du contrôle de l'incrément (en tant que critère d'arrêt) pour approcher ℓ à 10^{-3} près.

✓ On a

$$\begin{aligned} |x_k - l| - |x_{k+1} - x_k| &\leqslant |x_k - l + x_{k+1} - x_k| = |x_{k+1} - l| \\ &\leqslant C|x_k - l| \end{aligned}$$

d'où $|x_k - l| - C|x_k - l| \leqslant |x_{k+1} - x_k|$ qui implique

$$|x_k - l| \leqslant \frac{1}{1-C}|x_{k+1} - x_k| \leqslant \frac{\varepsilon}{1-C}.$$

Il faut choisir ε tel que $\frac{\varepsilon}{1-C} < 10^{-3}$ pour approcher l à 10^{-3} près.