

Étudier la convergence des séries  $\sum u_n$  suivantes :

1.  $u_n = \frac{n}{n^3+1}$

Alors  $u_n \geq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$  donc par comparaison à une série de Riemann convergente ( $\alpha = 2 > 1$ ), la série  $\sum u_n$  converge.

2.  $u_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$

Alors  $u_n \geq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}$  donc par comparaison à une série de Riemann convergente ( $\alpha = 3/2 > 1$ ), la série  $\sum u_n$  converge.

3.  $u_n = n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

Alors  $u_n \geq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $u_n \underset{+\infty}{\sim} n \times \frac{1}{n} = 1$  donc la série  $\sum u_n$  diverge grossièrement.

4.  $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Alors  $u_n \geq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n}$  donc par comparaison à une série de Riemann divergente ( $\alpha = 1 < 1$ ), la série  $\sum u_n$  diverge.

5.  $u_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$

Alors  $u_n \geq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $u_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} = \frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{1}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{1}{n\sqrt{n}(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n \times 2\sqrt{n}} = \frac{1}{2n^{3/2}}$  donc par comparaison à une série de Riemann convergente ( $\alpha = 3/2 > 1$ ), la série  $\sum u_n$  converge.

6.  $u_n = \frac{(-1)^{n+n}}{n^2+1}$  Alors  $u_n \geq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $u_n = \frac{(-1)^{n+n}}{n^2+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$  donc par comparaison à une série de Riemann divergente ( $\alpha = 1 < 1$ ), la série  $\sum u_n$  diverge.

7.  $u_n = \frac{1}{n!}$

Alors  $u_n \geq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  donc par comparaison à une série géométrique convergente ( $q = \frac{1}{2} < 1$ ), la série  $\sum u_n$  converge.

8.  $u_n = \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$

Alors  $u_n \geq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $u_n = \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right) = \ln\left(1 + \frac{2}{n^2+n-1}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n^2+n-1}$  donc par comparaison à une série de Riemann convergente ( $\alpha = 2 > 1$ ), la série  $\sum u_n$  converge.

*Indications : Pour la question 5., utiliser la quantité conjuguée, i.e. multiplier le numérateur et le dénominateur par  $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ . Pour la question 7., utiliser l'inégalité  $n! \geq 2^{n-1}$ . Pour la question 8., utiliser un équivalent de  $\ln(1+x)$  en 0.*