NCVL $\trianglerighteq$ **Exercice** - *Reste de division euclidienne*

On cherche, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le reste de la division euclidienne du polynôme $P(X) = X^n$ par $X^3 + X^2 + X + 1$.

1. Déterminer une racine évidente de $X^3 + X^2 + X + 1$, et factoriser le polynôme. Quelles sont ses racines dans $\mathbb{C}$?
2. Justifier l'existence d'un polynôme $Q_n(X)$ et de trois réels a_n, b_n et c_n tels que :
$$X^n = \left(X^3 + X^2 + X + 1\right) \cdot Q_n(X) + a_n X^2 + b_n X + c_n$$
On ne demande pas de déterminer $Q_n(X)$.
3. Exprimer $P(-1), P(i)$ et $P(-i)$ en fonction de a_n, b_n et c_n, et en déduire l'expression du reste de la division euclidienne de $P(X)$ par $X^3 + X^2 + X + 1$. On distinguera deux cas : $n = 2p$ (cas n pair) et $n = 2p + 1$ (cas n impair).