H0fC ▷ **Exercice** - *Etude de points critiques et d'ue ligne de niveau*

Une entreprise fabrique deux modèles de petites voitures, les modèles X et Y. Le modèle X, le plus abordable, se vend à 1 pièce. Quant au modèle Y, beaucoup plus sophistiqué, il se vend à 3. Le coût de fabrication, exprimé en , est donné par la fonction suivante :

$$C(x,y) = 5x^2 + 5y^2 - 2xy - 2x - 1000.$$

Déterminer les extrema de f sur $\mathbb{R}^2$ et sous la contrainte $g(x,y) = 2/3$

La fonction f est définie par $f(x,y) = xy$ et g est définie par $g(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$. Pour trouver les extrema de f sous la contrainte $g(x,y) = \frac{2}{3}$, nous utilisons la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Nous cherchons les points critiques de la fonction $L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda(g(x,y) - \frac{2}{3})$, où λ est le multiplicateur de Lagrange. Ainsi, nous avons :

$$L(x,y,\lambda) = xy - \lambda\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{2}{3}\right)$$

En trouvant les dérivées partielles de L par rapport à x, y et λ et en les mettant égales à zéro, nous obtenons :

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y + \frac{\lambda}{x^2} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = x + \frac{\lambda}{y^2} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{2}{3} = 0$$

En résolvant ces équations, nous trouvons deux points critiques : $(2/3, -3/2)$ sur l'axe des x et $(-3/2, 2/3)$ sur l'axe des y.

En utilisant la méthode de la matrice hessienne pour évaluer les points critiques, nous trouvons que ces deux points sont des points de selle, ce qui signifie que f n'a ni maximum ni minimum sous la contrainte $g(x,y) = \frac{2}{3}$.

La contrainte $g(x,y) = \frac{2}{3}$ peut être réécrite comme $y = \frac{2}{3x-2}$ ou $x = \frac{2}{3y-2}$, selon si on résout pour y ou pour x.

On peut alors remplacer l'une de ces expressions dans la fonction $f(x,y) = xy$, ce qui donne :

$$f(x) = x \cdot \frac{2}{3x-2} = \frac{2x}{3x-2} = \frac{2}{3 - \frac{2}{x}}$$

Maintenant, nous allons chercher les extrema de f en trouvant les valeurs critiques de x qui annulent sa dérivée.

$$f'(x) = -\frac{4}{(3-\frac{2}{x})^2} \cdot \frac{2}{x^2} = -\frac{16}{x^2(3-\frac{2}{x})^2} = 0$$

En résolvant cette équation, nous obtenons $x = \pm\sqrt{2}$.

Ces valeurs critiques doivent être testées pour savoir si elles donnent un minimum ou un maximum pour f. Pour cela, on peut utiliser la méthode de la dérivée seconde ou bien remarquer que f est décroissante sur l'intervalle $(-\infty, \sqrt{2})$ et croissante sur $(\sqrt{2}, \infty)$.

On en conclut donc que f admet un minimum global en $x = \sqrt{2}$, qui est $f(\sqrt{2}) = \frac{4}{3}$. Le point correspondant sur la contrainte est $(\sqrt{2}, \frac{2}{3\sqrt{2}-2})$.