Ex

Fonction caractéristique et loi de Poisson

1. Soit X une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λ. Calculer sa fonction caractéristique.

✓

Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \sum_{k\geqslant 0} e^{itk}\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k\geqslant 0} e^{itk}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k\geqslant 0}\frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

2. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètres respectifs λ et μ. En utilisant la fonction caractéristique, montrer que la variable $X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre à déterminer.

✓

Comme les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t)\phi_Y(t) = e^{(\lambda+\mu)(e^{it}-1)},$$

ce qui correspond à la fonction caractéristique d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$. Donc $X+Y \sim \mathcal{P}(\lambda+\mu)$.