qGet ⊵ **Exercice** - *Etude de point fixe*

On considère le problème du calcul de $l \in [0;\pi]$ tel que $l = 1 - \frac{1}{4}\cos(l)$.
On considère la méthode de point fixe suivante : $x_0 \in [0;\pi]$ et $x_{k+1} = g(x_k)$ pour tout $k \geqslant 0$, où g est la fonction définie sur l'intervalle $[0;\pi]$ par $g(x) = 1 - \frac{1}{4}\cos(x)$.

1. Montrer que la méthode converge pour tout $x_0 \in [0;\pi]$.

> La dérivée de la fonction g vérifie $\forall x \in [0;\pi]$, $|g'(x)| \leqslant \frac{1}{4} < 1$. De plus, $g([0;\pi]) = [\frac{3}{4};\frac{5}{4}] \subset [0;\pi]$. Par conséquent, la méthode de point fixe converge vers le point fixe l pour tout $x_0 \in [0;\pi]$.

2. Montrer que l'erreur satisfait l'inégalité $|x_k - l| \leqslant C^k|x_0 - l|$. Donner une estimation de la constante C et l'utiliser pour minorer le nombre d'itérations nécessaires pour approcher l à 10^{-3} près.

> Par le théorème des accroissements finis, on a l'existence de ζ_k compris entre l et x_k tel que
>
> $$|x_k - l| = |g(x_{k-1}) - g(l)| = |g'(\zeta_k)||x_{k-1} - l| \leqslant \frac{1}{4}|x_{k-1} - l|.$$
>
> Par récurrence, on montre ainsi
>
> $$|x_k - l| \leqslant \frac{1}{4^k}|x_0 - l|.$$
>
> On a donc $|x_k - l| \leqslant \frac{\pi}{4^k}$. Pour approcher l à 10^{-3} près, il faut
>
> $$\frac{\pi}{4^k} \leqslant 10^{-3} \quad \Leftrightarrow \quad k \geqslant \frac{\ln(\pi 10^3)}{\ln(2)} \simeq 5.9,$$
>
> soit 6 itérations.

3. Montrer que si on utilise le critère d'arrêt $|x_{k+1} - x_k| \leqslant \varepsilon$, alors $|x_k - l| \leqslant \frac{\varepsilon}{1-C}$. Quelle valeur de ε faut-il choisir pour approcher l à 10^{-3} près ?
Rappel : $|a-c| - |c-b| \leqslant |a-c| + |c-b|$, pour tout $a, b, c \in \mathbb{R}$

> On a
>
> $$\begin{aligned} |x_k - l| - |x_{k+1} - x_k| &\leqslant |x_k - l + x_{k+1} - x_k| = |x_{k+1} - l| \\ &\leqslant C|x_k - l| \end{aligned}$$
>
> d'où $|x_k - l| - C|x_k - l| \leqslant |x_{k+1} - x_k|$ qui implique
>
> $$|x_k - l| \leqslant \frac{1}{1-C}|x_{k+1} - x_k| \leqslant \frac{\varepsilon}{1-C}.$$
>
> Il faut choisir ε tel que $\frac{\varepsilon}{1-C} < 10^{-3}$ pour approcher l à 10^{-3} près.