eTDu ⊳ **Exercice** - *Calcul approché de $\frac{\pi}{4}$.*

On construit différentes méthodes de Monte Carlo afin de donner une valeur approchée de $\frac{\pi}{4}$. Afin de les comparer, on donnera la variance de l'estimation sous la forme $\frac{C}{n}$ où n est la taille de l'échantillon. On souhaite avoir la variance la plus faible possible.

Partie 1 : Technique du Hit or Miss.

On considère le carré $[0;1]^2$ et on note D le quart de disque centré en 0 et de rayon 1 :

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \,,\, x^2 + y^2 \leqslant 1\}$$

L'aire de D vaut $\frac{\pi}{4}$.
Soit (X_i, Y_i) une suite de couples variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées selon une loi uniforme sur $[0;1]^2$. Pour tout entier $i \geqslant 1$, on pose

$$Z_i = \mathbf{1}_{(X_i,Y_i)\in D}$$

Ainsi, les variables $(Z_i)_{i\geqslant 1}$ sont indépendantes.

1. Déterminer la loi de Z_1 et en déduire que $\mathbb{E}(Z_1) = \frac{\pi}{4}$.

   On remarque que Z_1 prend se valeurs dans $\{0,1\}$ donc Z_1 suit une loi de Bernoulli. Or
   $$\begin{aligned} \mathrm{P}(Z_1 = 1) &= \mathrm{P}((X_1,Y_1) \in D) \\ &= \iint_D dxdy \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$
   Donc Z_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{\pi}{4}$ et son espérance vaut $\mathbb{E}(Z_1) = \frac{\pi}{4}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :
   $$T_n^{(1)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i$$
   Justifier que $T_n^{(1)}$ est un estimateur sans biais de $\frac{\pi}{4}$.

   On remarque que $\mathbb{E}(T_n^{(1)}) = \mathbb{E}(Z_1) = \frac{\pi}{4}$ donc par linéarité, $B(T_n^{(1)}) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0$.

3. Justifier que la suite de variables aléatoires $\left(T_n^{(1)}\right)_{n\geqslant 1}$ converge presque sûrement vers $\frac{\pi}{4}$ lorsque n tend vers l'infini.

   Les variables aléatoires (Z_i) sont indépendantes, identiquement distribuées, admettent une espérance donc par application directe de la loi forte des grands nombres, la suite $\left(T_n^{(1)}\right)_{n\geqslant 1}$ converge presque sûrement vers $\frac{\pi}{4}$.

4. Montrer qu'il existe $C^{(1)} \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{V}\left(T_n^{(1)}\right) = \frac{C^{(1)}}{n}$ et donner une valeur numérique approchée de $C^{(1)}$ à 10^{-4}.

   Par indépendance, $\mathbb{V}\left(T_n^{(1)}\right) = \frac{\mathbb{V}(Z_1)}{n}$ or $V(Z_1) = \frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \approx 0{,}1685$.

Partie 2 : Technique de la moyenne empirique.

On définit une fonction $g \colon [0;1] \to [0;+\infty[$ par :

$$g(x) = \sqrt{1-x^2}$$

Soit (U_i) une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées selon une loi uniforme sur $[0;1]$.

1. Justifier que $\mathbb{E}(g(U_1)) = \frac{\pi}{4}$.

   Par application du théorème de transfert,
   $$\mathbb{E}(g(U_1)) = \int g(x)\mathbf{1}_{[0,1]}(x)dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{4}$$

2. En déduire une suite de variables aléatoires convergeant presque sûrement vers $\frac{\pi}{4}$.

   En posant $T_n^{(2)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(U_i)$ alors d'après la loi forte des grands nombres, la suite $\left(T_n^{(2)}\right)$ converge presque sûrement vers $\mathbb{E}(g(U_1)) = \frac{\pi}{4}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :
   $$T_n^{(2)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(U_i)$$
   Montrer qu'il existe $C^{(2)} \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{V}\left(T_n^{(2)}\right) = \frac{C^{(2)}}{n}$ et donner une valeur numérique approchée de $C^{(2)}$ à 10^{-4}.

   Il s'agit comme en partie 1 de calculer $\mathbb{V}(g(U_1)) = \mathbb{E}(g(U_1)^2) - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2$. Or :
   $$\begin{aligned} \mathbb{E}(g(U_1)^2) &= \int_0^1 g(x)^2 dx \\ &= \int_0^1 (1-x^2)dx \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$
   On a donc $\mathbb{V}\left(T_n^{(2)}\right) = \frac{C^{(2)}}{n}$ avec $C^{(2)} = \frac{2}{3} - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \approx 0.0498$.

4. Comparer les deux techniques d'approximation présentées ici.

   Des deux estimateurs de $\frac{\pi}{4}$ présentés ici, le plus efficace est celui qui a la plus petite variance, c'est $T_n^{(2)}$.