

Exercice - Simulation de loi : Rademacher, Laplace, Géométrique

La fonction random disponible dans les logiciels de calcul permet de générer des nombres aléatoires sur l'intervalle $[0; 1]$, distribués selon une loi uniforme $\mathcal{U}([0; 1])$. A partir de cette fonction, il est facile de simuler des variables aléatoires suivant d'autres lois. On donne ou on rappelle la définition de quelques lois usuelles :

Définition : Soit $p \in]0; 1[$: une variable X suit une loi de Rademacher $\mathcal{R}(p)$ si :

- $P(X = 1) = p$
- $P(X = -1) = 1 - p$

Définition : Soit $\lambda > 0$: une variable X suit une loi de Laplace $\mathcal{L}(\lambda)$ si elle admet pour densité :

$$f_X(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$$

Définition : Soit $p \in]0; 1[$: une variable X suit une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ si pour tout entier $k \geq 1$:

$$P(Z = k) = p(1 - p)^{k-1}$$

Notations : pour tout événement A , on note $\mathbf{1}_A$ la fonction indicatrice de A ; pour tout x réel, on note $[x]$ la partie entière de x .

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes : X suit une loi Rademacher $\mathcal{R}(1/2)$ et Y suit une loi uniforme sur $[0; 1]$.

1. Soit $\lambda > 0$. On pose $U = \frac{1}{\lambda} X \ln(Y)$.

Soit $\lambda > 0$ et $U = \frac{1}{\lambda} X \ln(Y)$

- (a) Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer $P(\ln(Y) \leq a, X = 1)$ et $P(\ln(Y) \geq a, X = -1)$

Soit $a \in \mathbb{R}$. Par indépendance de X et Y , on a $P(\ln(Y) \leq a, X = 1) = P(\ln(Y) \leq a) \times P(X = 1) = P(Y \leq e^a) \times \frac{1}{2}$. Or $P(Y \leq t) = 1$ si $t > 1$ et $P(Y \leq t) = t$ si $0 < t < 1$ étant donnée la loi suivie par Y . Par conséquent, on a $P(\ln(Y) \leq a, X = 1) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } a > 0 \\ \frac{1}{2}e^a & \text{sinon} \end{cases}$.

De même, $P(\ln(Y) \geq a, X = -1) = \begin{cases} 0 & \text{si } a > 0 \\ \frac{1}{2}(1 - e^a) & \text{sinon} \end{cases}$

- (b) Déterminer la fonction de répartition de la variable U .

Soit F_U la fonction de répartition de la variable U . Par définition, pour tout réel t ,

$$F_U(t) = P\left(\frac{1}{\lambda} X \ln(Y) \leq t\right) = P(X \ln(Y) \leq \lambda t)$$

Par application du théorème des probabilités totales au système d'événements $\{(X = 1), (X = -1)\}$,

$$F_U(t) = P(X = 1, Y \leq e^{\lambda t}) + P(X = -1, Y \geq e^{-\lambda t})$$

D'après le calcul précédent, on obtient

$$F_U(t) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}e^{-\lambda t} & \text{si } t > 0 \\ \frac{1}{2}e^{\lambda t} & \text{sinon} \end{cases}$$

- (c) En déduire que U suit une loi de Laplace $\mathcal{L}(\lambda)$.

On dérive la fonction de répartition pour obtenir la densité : $F'_U(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t > 0 \\ \frac{1}{2}\lambda e^{\lambda t} & \text{sinon} \end{cases} = \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|t|}$. On reconnaît la fonction densité d'une loi de Laplace de paramètre λ .

2. Soit $p \in]0; 1[$. On définit les variables $Z = \frac{\ln(Y)}{\ln(1-p)}$ et $V = 1 + [Z]$.

Soit $p \in]0; 1[$. On définit les variables $Z = \frac{\ln(Y)}{\ln(1-p)}$ et $V = 1 + [Z]$

- (a) Déterminer la loi de Z .

On tente de déterminer la loi de Z en calculant sa fonction de répartition. Par définition (attention aux signes, $\ln(1-p) < 0$),

$$F_Z(t) = P(\ln(Y) \geq t \ln(1-p)) = P(Y \geq (1-p)^t) = 1 - F_Y((1-p)^t)$$

En dérivant, on obtient une densité de Z :

$$f_Z(t) = \begin{cases} -\ln(1-p) \times (1-p)^t & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- (b) Démontrer que V suit une loi géométrique.

La variable V est une variable aléatoire discrète à valeurs dans \mathbb{N}^* . Par conséquent, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on calcule

$$P(V = k) = P(k-1 \leq Z < k) = \int_{k-1}^k f_Z(z) dz = (1-p)^{k-1} - (1-p)^k = p(1-p)^{k-1}$$

On reconnaît bien la loi géométrique de paramètre p .