EZfx **Ex 1** - *Lois pour les statistiques*

La bestiole est un animal dont le poids est distribué selon une loi normale de moyenne 100 g et d'écart-type 5 g.
On prélève un échantillon aléatoire de 16 bestioles. On note X_i le poids de la bestiole numéro i ($1 \leqslant i \leqslant 16$).

1. Déterminer la loi suivie par

$$\overline{X} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{16} X_i}{16}$$

> Par propriétés de somme de lois normales, on obtient que $\overline{X}$ suit une loi normale. Il reste à calculer $\mathbb{E}(\overline{X}) = \frac{1}{16} \times 16 \times 100 = 100$ et $V(\overline{X}) = \frac{1}{16^2} \times 16 \times 5^2 = \frac{5^2}{16}$. On en déduit que $\overline{X}$ suit une loi normale $\mathcal{N}(100, \sigma = \frac{5}{4})$.

2. Déterminer la loi suivie par

$$Q = \frac{\sum\limits_{i=1}^{16} (X_i - 100)^2}{25}$$

Déterminer le réel q tel que $\mathrm{P}(Q > q) = 0.05$.

> On réécrit $Q = \sum\limits_{i=1}^{16} \left(\frac{X_i - 100}{5}\right)^2$ or $\frac{X_i - 100}{5}$ suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$ et les variables X_i sont indépendantes donc par définition, Q suit une loi $\chi^2(16)$. On cherche maintenant q tel que $\mathrm{P}(Q \leqslant q) = 0.95$ dans la table de valeurs soit $q = 26.296$.

3. Déterminer la loi suivie par

$$V = \frac{\sum\limits_{i=1}^{16} (X_i - \overline{X})^2}{25}$$

puis déterminer le réel v tel que $\mathrm{P}(V > v) = 0.05$.

> D'après le théorème de Fisher, V suit une loi $\chi^2(15)$. Par lecture de table, on trouve $\mathrm{P}(V \leqslant v) = 0.95$ pour $v = 24.996$.

4. Déterminer la loi suivie par

$$W = \frac{(\overline{X} - 100) 4\sqrt{15}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{16} (X_i - \overline{X})^2}}$$

Déterminer le réel w tel que $\mathrm{P}(W > w) = 0.05$.

> D'après la question 1, la variable $\frac{\overline{X} - 100}{\frac{5}{4}}$ suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$. On réécrit maintenant :
>
> $$W = \frac{\frac{\overline{X}-100}{\frac{5}{4}} \times \frac{5}{4} \times 4\sqrt{15}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{16} (X_i - \overline{X})^2}} = \frac{\frac{\overline{X}-100}{\frac{5}{4}}}{\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{16} (X_i - \overline{X})^2}}{5\sqrt{15}}} = \frac{\frac{\overline{X}-100}{\frac{5}{4}}}{\frac{\sqrt{V}}{\sqrt{15}}}$$
>
> Or V suit une $\chi^2(15)$ d'après la question précédente. Donc par définition, W suit une loi de Student $St(15)$.