On étudie la fonction de deux variables

$$f\colon (x,y) \mapsto x\ln(y) - y\ln(x)$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f$ et vérifier que $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur son ensemble de définition.

✓

L'ensemble de définition de $f$ est $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,,\, x > 0, y > 0\}$

2. On pose $h(t) = t - \ln(t) - \frac{1}{t}$ : déterminer l'ensemble de définition de $h$ et étudier ses variations.

✓

L'ensemble de définition de $h$ est $D_h = \{t \in \mathbb{R}\,,\, t > 0\} = \mathbb{R}_+^*$. La fonction $h$ est dérivable sur son ensemble de définition et $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$ :

$$h'(t) = 1 - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} = \frac{t^2 - t + 1}{t^2} = \frac{(t+1)^2 + t}{t^2} > 0$$

Par conséquent, $h$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

3. Démontrer que $\mathrm{grad}_f(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} h\left(\frac{x}{y}\right) = 0 \\ \frac{x}{y} - \ln(x) = 0 \end{cases}$

✓

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(y) - \frac{y}{x} = 0 \\ \frac{x}{y} - \ln(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(y) - \ln(x) + \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = 0 \\ \frac{x}{y} - \ln(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h\left(\frac{x}{y}\right) = 0 \\ \frac{x}{y} - \ln(x) = 0 \end{cases}$$

4. En déduire l'ensemble des points stationnaires de $f$.

✓

La fonction $h$ s'annule une et une seule fois sur son ensemble définition en $t = 1$ donc $(x,y)$ est un point stationnaire si et seulement si $x = y = e$. Il existe un unique point stationnaire qui est le point $(e,e)$.

5. Déterminer l'ensemble des points extrémaux (locaux et globaux) de $f$.

✓

Il est clair que $f$ n'admet pas d'extremum global. En effet, on peut voir par exemple que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x,1) = -\infty$ et $\lim\limits_{y\to+\infty} f(1,y) = +\infty$.
De plus, au voisinage du point stationnaire $(e,e)$, on peut étudier les conditions du second ordre en formant la matrice hessienne :

$$Hess_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 1/x^2 & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 1/y - 1/x \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 1/y - 1/x & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -1/y^2 \end{pmatrix}$$

d'où

$$Hess_f(e,e) = \begin{pmatrix} 1/e^2 & 0 \\ 0 & -1/e^2 \end{pmatrix}$$

On a un déterminant négatif, donc le point $(e,e)$ est un point selle.