Dans chacun des cas, dire si la série est absolument convergente, semi-convergente, divergente ou grossièrement divergente.

1. $\sum(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

✓

Soit $u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ pour $n\in\mathbb{N}$. La série $\sum u_n$ est à termes positifs. Il s'agit d'une série télescopique : pour $n\geqslant 1$,

$$\begin{aligned}S_n=\sum_{k=0}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})&=\sum_{k=0}^{n}\sqrt{k+1}-\sum_{k=0}^{n}\sqrt{k}=\sum_{k=1}^{n+1}\sqrt{k}-\sum_{k=0}^{n}\sqrt{k}\\&=(1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}+\sqrt{n+1})-(0+1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n})\\&=\sqrt{n+1}.\end{aligned}$$

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient que la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$ tend vers l'infini. Par conséquent, la série $\sum(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ est une **série divergente**.

2. $\sum\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)$

✓

Soit $u_n=1-\cos(\frac{\pi}{n})$. La série $\sum u_n$ est une série à termes positifs. Quand n tend vers l'infini, on a l'équivalence suivante :

$$1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\sim\frac{\pi^2}{n^2}.$$

Or $\sum\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente donc $\sum\frac{\pi^2}{n^2}$ est également convergente. Par le théorème d'équivalence, on en déduit que la série $\sum u_n$ est convergente. Comme cette série est à termes positifs, cela revient à dire que la série $\sum u_n$ est une **série absolument convergente**.

3. $\sum\frac{2^n+100}{3^n+1}$

✓

Soit $u_n=\frac{2^n+100}{3^n+1}$ pour $n\in\mathbb{N}$. La série $\sum u_n$ est à termes positifs. On a :

$$\frac{2^n+100}{3^n+1}\sim\frac{2^n}{3^n}=\left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

qui est le terme général d'une série géométrique de raison $\frac{2}{3}<1$ donc convergente. Par équivalence, on en déduit que la série $\sum u_n$ est convergente. Comme $u_n\geqslant 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, la série $\sum u_n$ est **absolument convergente**.

4. $\sum\left(1-(1-\frac{1}{\sqrt{n}})^n\right)$

✓

Soit $u_n=1-(1-\frac{1}{\sqrt{n}})^n$ pour $n\geqslant 1$. La série $\sum u_n$ est à termes positifs. On a :

$$1-\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n=1-e^{n\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$$

On utilise ensuite un développement limité (car l'utilisation d'équivalent n'est pas possible dans l'exponentielle) :

$$1-\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n=1-e^{n\left(\frac{-1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})\right)}=1-e^{\frac{-n}{\sqrt{n}}-\frac{n}{2n}+o(\frac{n}{n})}=1-e^{-\sqrt{n}-\frac{1}{2}+o(1)},$$

qui a pour limite 1 quand n vers plus l'infini.
Le terme général de la série $\sum u_n$ ne tend donc pas vers 0. Par conséquent, cette série **diverge grossièrement**.

5. $\sum\left(\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$

✓

Soit $u_n=\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})$ pour $n\geqslant 1$. La série $\sum u_n$ est à termes positifs. On utilise un développement limité (car on ne peut pas sommer des équivalents) :

$$u_n=\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})\right)=\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})$$

ce qui donne l'équivalence :

$$u_n\sim_{+\infty}\frac{1}{2n^2},$$

qui est le terme d'une série de Riemann convergente. On en déduit que la série $\sum u_n$ converge. De plus, cette série étant à termes positifs, elle **converge absolument**.

6. $\sum\frac{1}{\sqrt{n}}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^2$

✓

Soit $u_n=\frac{1}{\sqrt{n}}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^2$ pour $n\geqslant 1$. La série $\sum u_n$ est à termes positifs. On a :

$$\begin{aligned}u_n&=\frac{1}{\sqrt{n}}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^2\\&=\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\right)^2\\&=\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{\sqrt{n+1}^2-\sqrt{n}^2}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\right)^2\\&=\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\right)^2\end{aligned}$$

ce qui nous donne l'équivalence suivante :

$$u_n\sim_{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)^2=\frac{1}{4n\sqrt{n}}=\frac{1}{4n^{\frac{3}{2}}}.$$

Or la série $\sum\frac{1}{4n^{\frac{3}{2}}}$ est une série de Riemann convergente. Par le théorème d'équivalence, on en déduit que la série $\sum u_n$ converge.
Comme cette série est à termes positifs, cette série **converge absolument**.

7. $\sum\cos(\pi n)\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$

✓

Soit $u_n=\cos(\pi n)\sin(\frac{\pi}{n})$ pour $n\geqslant 1$. On a

$$u_n=(-1)^n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Il s'agit d'une série alternée car pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\sin(\frac{\pi}{n})\geqslant 0$.
On étudie d'abord la convergence absolue de la série $\sum u_n$:

$$|u_n|=\left|(-1)^n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right|=\left|\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right|\sim_{+\infty}\frac{\pi}{n}.$$

Or la série $\sum\frac{\pi}{n}$ est une série de Riemann divergente donc la série $\sum|u_n|$ diverge, ce qui revient à dire que la série $\sum u_n$ ne converge pas absolument.
Il nous reste donc à étudier la convergence de la série $\sum u_n$. On utilise le critère des séries alternées : soit $v_n=\sin(\frac{\pi}{n})$. La suite (v_n) est décroissante pour $n\geqslant 2$ et sa limite vaut $\sin(0)=0$. Par le théorème des séries alternées, on en conclut que la série $\sum u_n$ converge.
Finalement, la série $\sum u_n$ converge mais ne converge pas absolument ; elle est donc **semi-convergente**.

8. $\sum\frac{n!}{n^n}$

✓

Soit $u_n=\frac{n!}{n^n}$ pour $n\geqslant 1$. La série $\sum u_n$ est à termes positifs. Appliquons la règle de D'Alembert :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n}&=\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\times\frac{n^n}{n!}=\frac{(n+1)\times n^n}{(n+1)^{n+1}}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n\\&=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n=e^{n\ln(1-\frac{1}{n+1})}=e^{n(\frac{-1}{n+1}+o(\frac{1}{n}))}=e^{\frac{-n}{n+1}+o(1))}\\&\longrightarrow_{n\to+\infty}e^{-1}.\end{aligned}$$

Or $e^{-1}<1$ donc par la règle de D'Alembert, la série $\sum u_n$ converge. Elle est également **absolument convergente** (en tant que série à terme général positif).