VRAI-FAUX - Soit A une matrice carrée. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. Si A est inversible, alors $A.\left({}^tA\right) = \left({}^tA\right) \cdot A$.

   ✓

   FAUX : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible. $A \cdot \left({}^tA\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ alors que $\left({}^tA\right) \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. Si A est inversible, alors $A.\left({}^tA\right)$ est inversible ;

   ✓

   VRAI : Si A est inversible, alors $\left({}^tA\right)$ est aussi inversible avec $\left({}^tA\right)^{-1} = {}^t(A)^{-1}$. Et le produit de deux matrices inversibles est inversible, donc $A.\left({}^tA\right)$ est aussi inversible.

3. Si A est inversible, alors $A + \left({}^tA\right)$ est inversible.

   ✓

   FAUX : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible, alors que $A + \left({}^tA\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne l'est pas.

4. Si A est inversible, alors A est semblable à la matrice identité.

   ✓

   FAUX : A est semblable à la matrice identité signifie qu'il existe une matrice inversible P telle que : $P^{-1}.A.P = Id \Leftrightarrow A = P.Id.P^{-1} = Id$. Donc, si A est inversible et $A \neq Id$, A n'est semblable à la matrice identité. La seule matrice semblable à l'identité est elle-même !