dC7P ⊵ **Exercice** - *Calcul d'une somme de série entière*

1. Déterminer le domaine de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(n+2)2^n}{(n+1)!} z^n$ à variable complexe.

    $R = +\infty$ et $D = \mathbb{C}$.

2. Rappeler ce que vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$. En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}$, puis $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+2)2^n}{(n+1)!} z^n$.

    $$\forall z \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z.$$

    Pour la première somme :

    $$\forall z \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+1)!} = \begin{cases} \frac{e^z - 1}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

    Pour la deuxième somme :

    $$\forall z \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+2)2^n}{(n+1)!} z^n = \begin{cases} \frac{e^{2z} - 1}{2z} + e^{2z} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$