3kdw **Exercice** - *Lois statistiques et étude d'estimateurs*

On considère un échantillon (X_i) de taille $n = 5$ dans une population suivant une loi normale de paramètres μ et σ^2. On pose

$$T_1 = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} X_i \qquad T_2 = \frac{1}{5}(X_1+X_2)+\frac{1}{4}(X_3+X_4+X_5) \qquad T_3 = \frac{1}{10}(2X_1+3X_2)+\frac{1}{8}(X_3+2X_4+X_5)$$

$$U = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{5}(X_i-\mu)^2 \qquad V = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{5}(X_i-T_1)^2$$

1. Quelle est la loi suivie par la variable $X_1 - X_2$? Justifier.

> D'après le cours, $X_1 - X_2$ suit une loi normale d'espérance $\mathbb{E}(X_1 - X_2) = \mu - \mu = 0$. Par indépendance, $V(X_1 - X_2) = V(X_1) + (-1)^2 V(X_2) = 2\sigma^2$.

2. On cherche à estimer μ à l'aide des estimateurs T_1, T_2, T_3. Étudier leur biais et comparer l'efficacité des estimateurs sans biais.

> Par linéarité de l'espérance, on calcule $\mathbb{E}(T_1) = \frac{5\mu}{5} = \mu$, $\mathbb{E}(T_2) = \frac{2\mu}{5} + \frac{3\mu}{4}$, $\mathbb{E}(T_3) = \mu$. Par conséquent, $B(T_1) = B(T_3) = 0$ et $B(T_2) = \mathbb{E}(T_2) - \mu = \frac{3\mu}{20}$.
> Pour comparer l'efficacité des deux estimateurs sais biais, on calcule leur EQM (ce qui revient à calculer leur variance.) Par indépendance des variables, on a :
> $V(T_1) = \frac{\sigma^2}{5} < V(T_3) = \frac{147\sigma^2}{800}$. Le plus efficace est donc l'estimateur T_1 qui est la moyenne empirique.

3. Quelle est la loi suivie par la variable U ? la variable V ? justifier.

> $U = \sum_{i=1}^{5}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2$; or les X_i sont des variables aléatoires indépendantes et $\frac{X_i-\mu}{\sigma}$ suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$ donc par définition, U suit une loi de $\chi^2(5)$.
> De plus, $T_1 = \overline{X}$ est l'estimateur de moyenne empirique donc d'après le théorème de Fisher, V suit une loi de $\chi^2(5-1) = \chi^2(4)$.

4. Déterminer $x \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{P}(U > x) = 0{,}05$.

> On lit dans la table de loi $\mathrm{P}(U < x) = 0{,}95$ pour $x = 11{,}07$.

5. En utilisant T_1 et U, construire une variable Y qui suive une loi de Student dont on précisera le paramètre.

> On pose $Z = \frac{T_1-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{5}}}$ variable distribuée selon une loi $\mathcal{N}(0,1)$. Soit alors $Y = \frac{Z}{\sqrt{\frac{U}{5}}}$: par définition, Y suit une loi $St(5)$. Après simplification, on peut réécrire $Y = \frac{T_1-\mu}{\frac{\sigma\sqrt{U}}{5}}$.