Ex

Calcul d'une somme de série entière

Soit la série entière $\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de cette série. Préciser son intervalle de convergence et le comportement de la série aux extrémités de cet intervalle.

   ✓

   $R = 1$ et $D = [-1;1]$

2. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{(n-1)} x^{n-1}$ et de la série $\sum_{n\geqslant 2} (-1)^n x^{n-2}$?
   Étudier le comportement de chacune de ces séries au bord de son intervalle de convergence.

   ✓

   Pour la première, $R = 1$ et $D =]-1;1]$.
   Pour la deuxième, $R = 1$ et $D =]-1;1[$.

3. Calculer la somme de la série $\sum_{n\geqslant 2} (-1)^n x^{n-2}$.

   ✓

   $$\forall x \in]-1;1[, \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n x^{n-2} = \frac{1}{1+x}.$$

4. En déduire la somme de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{(n-1)} x^{n-1}$.

   ✓

   $$\forall x \in]-1;1[, \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)} x^{n-1} = \ln(1+x).$$