

▷ **Exercice - Inversibilité de matrices**

On considère les matrices :  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer les produits  $AB$  et  $AC$ . Que constate-t-on ?
2. La matrice  $A$  est-elle inversible ?

On a :

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

On remarque que :

$$A \cdot B = A \cdot C$$

Montrons que la matrice  $A$  n'est pas inversible. (Démonstration par l'absurde.) Supposons que  $A$  soit inversible, notons  $A^{-1}$  son inverse. On aurait :

$$A^{-1} \cdot A \cdot B = A^{-1} \cdot A \cdot C \Leftrightarrow B = C$$

Or  $B \neq C$ . Donc  $A$  n'est pas inversible.