K9R8 $\trianglerighteq$ **Exercice** - *Loi d'une somme de variables aléatoires, question de cours*

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi $\mathcal{N}(0,1)$.
Déterminer la loi de $S = X + Y$.

Si X et Y suivent chacune une loi $\mathcal{N}(0,1)$, alors $S = X + Y$ admet une densité h définie par

$$h(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(s-x)^2}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx$$

Or $-(s-x)^2 - x^2 = -\frac{s^2}{2} - 2(x - \frac{s}{2})^2$ donc

$$h(s) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{s^2}{4}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x-\frac{s}{2})^2} dx = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{s^2}{4}} \times \sqrt{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2\sqrt{2}^2}}$$

Donc S suit une loi normale de moyenne $\mu = 0$ et d'écart-type $\sigma = \sqrt{2}$.