Ex **Durée de vie et temps d'attente**

On considère n lampes, $n \in \mathbb{N}^*$. La durée de vie (en années) d'une lampe est une variable aléatoire absolument continue dont la densité f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f : t \mapsto \frac{1}{16} t e^{-\frac{t}{4}} 1_{[0;+\infty[}(t)$$

On suppose que les lampes évoluent de manière indépendante.
Pour tout entier $i \in \{1, \dots, n\}$, on note X_i la variable aléatoire égale à la durée de vie de la i-ème lampe.

1. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X_1.

On note F_{X_1} la fonction de répartition de la variable aléatoire X_1. Par définition,

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}, F_{X_1}(t) &= \int_{-\infty}^{t} f(x)dx \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \int_0^t \frac{1}{16} x e^{-\frac{x}{4}} dx & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}\end{aligned}$$

c'est-à-dire pour $t \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned}F_{X_1}(t) &= \left[\frac{-1}{4} x e^{-\frac{x}{4}}\right]_0^t + \int_0^t \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{4}} dx \quad \text{par une I.P.P.} \\ &= \frac{-1}{4} t e^{-\frac{t}{4}} + \left[-e^{-\frac{x}{4}}\right]_0^t \\ &= 1 - e^{-\frac{t}{4}} \left(\frac{t}{4} + 1\right)\end{aligned}$$

Finalement on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_{X_1}(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{4}} \left(\frac{t}{4} + 1\right)\right) \mathbf{1}_{[0;+\infty[}(t)$$

2. Un appareil de type A comporte 6 lampes, toutes nécessaires à son fonctionement. On note $T = \min\limits_{i \in \{1,\dots,6\}} (X_i)$.

(a) Que modélise la variable aléatoire T ?

La variable aléatoire T modélise la durée de fonctionnement de l'appareil de type A.

(b) Déterminer la loi de T.

On détermine la fonction de répartition de T :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_T(t) = \mathbb{P}(T \leqslant t).$$

Si $t \leqslant 0$, $F(t) = 0$. Soit $t \in \mathbb{R}^+$. Alors

$$\begin{aligned}F_T(t) &= \mathbb{P}(\min_{i \in \{1,\dots,6\}} (X_i) \leqslant t) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\min_{i \in \{1,\dots,6\}} (X_i) > t) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\{X_1 > t\} \cap \dots \cap \{X_6 > t\}) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{6} \mathbb{P}(X_i > t) \quad \text{par indépendance des } (X_i)_{i \in \{1,\cdots,6\}} \\ &= 1 - \mathbb{P}(X_1 > t)^6 \quad \text{car les } (X_i)_{i \in \{1,\cdots,6\}} \text{ sont de même loi} \\ &= 1 - (1 - F_{X_1}(t))^6.\end{aligned}$$

En utilisant la question 1, on en déduit que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_T(t) = \left(1 - e^{-\frac{3t}{2}} \left(1 + \frac{t}{4}\right)^6\right) \mathbf{1}_{[0;+\infty[}(t).$$

(c) Calculer la probabilité que l'appareil de type A fonctionne de manière continue pendant au moins 4 ans à partir de sa mise en marche, sans changer de lampe.

On cherche à déterminer la probabilité $\mathrm{P}(T \geqslant 4)$:

$$\mathrm{P}(T \geqslant 4) = 1 - \mathbb{P}(T < 4) = 1 - F_T(4) = 2^6 e^{-6} \simeq 0.1586.$$

La probabilité que l'appareil de type A fonctionne de manière continue pendant au moins 4 ans à partir de sa mise en marche est d'environ 15.86%.

3. Un appareil de type B fonctionne avec une lampe seulement. On dispose cette fois d'une lampe de remplacement. Lorsque l'appareil fonctionne et que la lampe tombe en panne, celle-ci est immédiatement remplacée par la lampe de remplacement. Soit U la variable aléatoire donnant la durée de fonctionnement d'un appareil de type B avec une lampe de remplacement.

(a) Exprimer U en fonction de X_1 et X_2.

D'après l'énoncé, $U = X_1 + X_2$.

(b) Déterminer la loi de U.

Comme U est une somme de deux variables aléatoires indépendantes de densité f, une densité de U se calcule à l'aide du produit de convolution : pour $s \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}f_U(s) &= f * f(s) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(s-x) f(x) dx \\ &= \frac{1}{16^2} e^{-\frac{s}{4}} \mathbf{1}_{[0;+\infty[}(s) \int_0^s x(s-x) dx \\ &= \frac{1}{16^2} e^{-\frac{s}{4}} \mathbf{1}_{[0;+\infty[}(s) \left[\frac{1}{2} x^2 s - \frac{1}{3} x^3\right]_{x=0}^{x=s} \\ &= \frac{1}{16^2} e^{-\frac{s}{4}} \mathbf{1}_{[0;+\infty[}(s) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) s^3 \\ &= \frac{1}{16^2 \times 6} s^3 e^{-\frac{s}{4}} \mathbf{1}_{[0;+\infty[}(s) \\ &= \frac{1}{1536} s^3 e^{-\frac{s}{4}} \mathbf{1}_{[0;+\infty[}(s),\end{aligned}$$

ce qui détermine la loi de U.

4. On dispose de 4 appareils de type B, sans aucune lampe de remplacement. On met en marche ces 4 appareils simultanément. On note V le temps durant lequel au moins un des 4 appareils fonctionne.

(a) Exprimer V en fonction de X_1, X_2, X_3, X_4.

D'après l'énoncé, $V = \max\limits_{i \in \{1,\dots,4\}} (X_i)$.

(b) En déduire la loi de V.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}F_V(t) &= \mathbb{P}(\max_{i \in \{1,\dots,4\}} (X_i) \leqslant t) \\ &= \mathbb{P}(\{X_1 \leqslant t\} \cap \dots \cap \{X_4 \leqslant t\}) \\ &= \prod_{i=1}^{4} \mathbb{P}(X_i \leqslant t) \quad \text{par indépendance des } (X_i)_{i \in \{1,\cdots,4\}} \\ &= F_{X_1}(t)^4 \quad \text{car les } (X_i)_{i \in \{1,\cdots,4\}} \text{ sont de même loi} \\ &= \left(1 - e^{-\frac{t}{4}} \left(1 + \frac{t}{4}\right)\right)^4 \mathbf{1}_{[0;+\infty[}(t)\end{aligned}$$