H0fC ▷ **Exercice** - *Etude de points critiques et d'ue ligne de niveau*

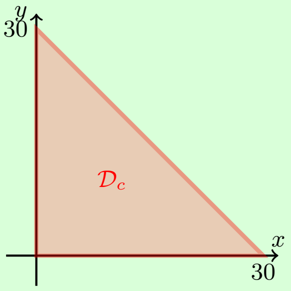
Une usine produit deux types de matériaux, que l'on note respectivement A et B. Si elle produit x kg de type A et y de type B sur une semaine, le coût total hebdomadaire de production est

$$c(x,y) = 600 + 200x + 200y - 2x^2y$$

En pleine capacité, la production totale sur une semaine peut atteindre au maximum 30 kg. Dans cette modélisation, le coût peut être négatif.

1. Décrire et représenter graphiquement le domaine de définition de la fonction c.

D'après les informations données ici, on travaille sous la condition que $x + y \leqslant 30$ et $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Ces trois conditions définissent un triangle dans $\mathbb{R}^2$:



2. Faire une recherche de minimum local à l'intérieur du domaine du définition.

La fonction c est polynomiale donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$. On fait une recherche de points stationnaires $(x,y) \in \mathcal{D}_c$:

$$\begin{cases} \frac{\partial c}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial c}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 200 - 4xy = 0 \\ 200 - 2x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 5 \end{cases}$$

Un unique point stationnaire (point critique) est trouvé, il reste à étudier sa nature en regardant les conditions d'ordre 2.

$$Hess_c(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(x,y) = -4y & \frac{\partial^2 c}{\partial x \partial y}(x,y) = -4x \\ \frac{\partial^2 c}{\partial y \partial x}(x,y) = -4x & \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}(x,y) = 0 \end{pmatrix}$$

Son déterminant est $0 - 16x^2$ donc pour le point stationnaire, $x = 10$ et le déterminant vaut $-1600 < 0$. D'après le cours, cette fonction présente un point selle en $(10,5)$. C'est le seul point stationnaire, il n'y a donc pas de minimum local pour la fonction c à l'intérieur de $\mathcal{D}_c$.

3. En substituant une variable en fonction d'une autre, étudier la fonction c au bord du domaine.

On travaille sur le bord :

— $x = 0$: on ne produit que du type B, le coût total est $c(0,y) = 600 + 200y$, cette quantité est maximale pour $y = 30$ et vaut $c(0,30) = 6600$, cette quantité est minimale pour $y = 0$ et vaut $c(0,0) = 600$.

— $y = 0$: on ne produit que du type A, le coût total est $c(x,0) = 600 + 200x$, cette quantité est maximale pour $x = 30$ et vaut $c(300,0) = 6600$, cette quantité est minimale pour $x = 0$ et vaut $c(0,0) = 600$.

— $x + y = 300$:

  — **Méthode par substitution** : on remplace y par $30 - x$ et on étudie la fonction d'une variable $f(x) = c(x, 30-x) = 6600 - 60x^2 + 2x^3$ définie et dérivable sur $[0;30]$. On dérive : $f'(x) = 6x(x-20)$, on voit que f' s'annule à l'intérieur du domaine en un seul point : $x_0 = 20$. On étudie la nature de ce point critique avec la dérivée seconde : $f''(x_0) = 120 > 0$, en déduit qu'il s'agit d'un minimum.
  Pour minimiser le coût, l'usine doit produire 20 kg de type A et 10 kg de de type B pour un coût hebdomadaire de $c(20,10) = -1400$.
  Méthode du Lagrangien : le lagrangien s'écrit ici $L(x,y,\lambda) = c(x,y) - \lambda(x+y-30) = 600 + 200x + 200y - 2x^2y - \lambda(x+y-30)$. On cherche son maximum par recherche de points critiques sur l'ensemble $]0;30[\times]0;30[\times\mathbb{R}$. On résout :

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 200 - 4xy - \lambda = 0 \\ 200 - 2x^2 - \lambda = 0 \\ 30 - x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 200 - 4x(30-x) - (200 - 2x^2) = 0 \\ \lambda = 200 - 2x^2 \\ y = 30 - x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 \\ \lambda = -1600 \\ y = 10 \end{cases}$$

  Reste à vérifier que ce point réalise le maximum du lagrangien en étudiant les conditions de second ordre : on évalue $\Delta(x,y,\lambda) = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x,y,\lambda)\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,y,\lambda) - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x,y,\lambda)\right)^2 = -16x^2 < 0$. D'après le cours, on ne peut pas conclure directement. On doit donc étudier le signe de $c(x,y) - c(20,10)$ au voisinage de $(20,10)$ le long de la ligne d'équation $x + y = 300$: on étudie donc $d(h,k) = c(20+h, 10+k) - c(20,10)$ compte tenu de la contrainte que $10 + h + 20 + k = 30 \iff h = -k$. On étudie donc $d(h,-h) = 2h^2(30+h) \geqslant 0$. Cela garantit que $c(20,10)$ est bien un minimum de la fonction c.