

Exercice - Approximation d'une loi binomiale par une loi normale.

Un restaurant universitaire qui est visité par 600 étudiants pour le repas de midi offre un choix de deux plats principaux : risotto ou quiche. Dans le passé, on a observé que 40% des étudiants prennent du risotto.

Combien de plats de risotto faut-il prévoir pour que la probabilité qu'il en manque soit inférieure à 10% ?

Soit X le nombre d'étudiants souhaitant un plat de risotto. D'après les données de l'énoncé, X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(600, 0.4)$.

On cherche donc un entier n tel que $P(X \geq n) \leq 0.1$. Pour ce faire, on approche la loi de X par une loi normale. L'effectif n est supérieur à 30 donc d'après le théorème central limite, X suit approximativement une loi normale de paramètres $\mu = 600 \times 0.4 = 240$ et de variance $\sigma^2 = 600 \times 0.4 \times 0.6 = 144 = 12^2$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} P(X \geq n) \leq 0.1 &\iff P\left(\frac{X - 240}{12} \geq \frac{n - 240}{12}\right) \leq 0.1 \\ &\iff P\left(\frac{X - 240}{12} \leq \frac{n - 240}{12}\right) \geq 0.9 && \iff \frac{n - 240}{12} \geq 1.28 \\ &\iff n \geq 12 \times 1.28 + 240 = 255.36 \\ &\iff n \geq 256 \end{aligned}$$

Il faut donc prévoir au moins 256 plats de risotto pour que le risque qu'il en manque soit inférieur à 10%.