wlXF $\trianglerighteq$ **Exercice** - *Limite d'une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$*

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$(x, y) \mapsto \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}$$

1. Donner l'ensemble de définition de f.

La fonction f est définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x^2y^2 + (x-y)^2 \neq 0$. Or $x^2y^2 + (x-y)^2 = 0 \iff xy = 0$ et $x = y \iff x = y = 0$ donc f est définie sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$.

2. Pour x fixé, calculer $g(x) = \lim\limits_{y \to 0} f(x, y)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$: si $x = 0$, $f(0, y) = 0$ et si $x \neq 0$, $f(x, y) \xrightarrow[y \to 0]{} \frac{0}{x^2} = 0$

3. Pour y fixé, calculer $h(y) = \lim\limits_{x \to 0} f(x, y)$.

De même, $h(y) = 0$.

4. Calculer $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$.

On en déduit que $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$

5. Calculer $\lim\limits_{y \to 0} h(y)$.

De même $\lim\limits_{y \to 0} h(y) = 0$

6. La fonction f admet-elle une limite quand $(x, y) \to (0, 0)$?

Non car $f(x, x) = 1 \xrightarrow[x \to 0]{} 1$ et $f(x, 0) = 0 \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \neq 1$: on a deux chemins qui donnent deux limites différentes.