

On considère trois variables aléatoires indépendantes X_1, X_2, X_3 suivant chacune une loi de probabilité de même moyenne μ et de variance σ^2 . On pose

$$M_1 = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3} \text{ et } M_2 = \frac{X_1 + 2X_2 + 3X_3}{6}$$

- Démontrer que ce sont deux estimateurs sans biais de la moyenne μ .



$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_1) &= \mathbb{E}\left(\frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}\right) \\ &= \frac{1}{3}\mathbb{E}(X_1 + X_2 + X_3) \\ &= \frac{1}{3}(\mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) + \mathbb{E}(X_3)) \\ &= \frac{1}{3}(3\mu) \\ &= \mu \end{aligned}$$

Donc $B(M_1) = \mathbb{E}(M_1 - \mu) = \mathbb{E}(M_1) - \mu = \mu - \mu = 0$.
Donc M_1 est un estimateur sans biais de la moyenne μ .

De même, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_2) &= \mathbb{E}\left(\frac{X_1 + 2X_2 + 3X_3}{6}\right) \\ &= \frac{1}{6}\mathbb{E}(X_1 + 2X_2 + 3X_3) \\ &= \frac{1}{6}(\mu + 2\mu + 3\mu) \\ &= \frac{6\mu}{6} \\ &= \mu \end{aligned}$$

Donc $B(M_2) = \mathbb{E}(M_2 - \mu) = \mathbb{E}(M_2) - \mu = \mu - \mu = 0$.
Donc M_2 est un estimateur sans biais de la moyenne μ .

- Lequel de ces deux estimateurs est le plus efficace ?



$$\begin{aligned} V(M_1) &= V\left(\frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}\right) \\ &= \frac{1}{9} V(X_1 + X_2 + X_3) \\ &= \frac{1}{9} (V(X_1) + V(X_2) + V(X_3)) \\ &= \frac{1}{9} (3\sigma^2) \\ &= \frac{\sigma^2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(M_2) &= V\left(\frac{X_1 + 2X_2 + 3X_3}{6}\right) \\ &= \frac{1}{36} V(X_1 + 2X_2 + 3X_3) \\ &= \frac{1}{36} (V(X_1) + 4V(X_2) + 9V(X_3)) \\ &= \frac{1}{36} (3\sigma^2 + 4\sigma^2 + 9\sigma^2) \\ &= \frac{16\sigma^2}{36} \\ &= \frac{4\sigma^2}{9} \end{aligned}$$

Donc $V(M_1) = \frac{\sigma^2}{3}$ et $V(M_2) = \frac{4\sigma^2}{9}$.
Donc $V(M_1) < V(M_2)$.
Donc M_1 est plus efficace que M_2 .