Ex

1. Exprimer sous forme d'une série entière la solution de l'équation différentielle (E) :

$$x^2y''(x) + x(x+1)y'(x) - y(x) = 0 \qquad y'(0) = 1.$$

✓

Soit y une solution développable en série entière, de rayon de convergence R : on note $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et on a

$$\forall x \in]-R;R[, \qquad y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{et} \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}.$$

On a les équivalences suivantes :

$$y \text{ solution de } (E) \Leftrightarrow \forall x \in]-R;R[,\ -a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} [(n-1)(n+1)a_n - (n-1)a_{n-1}]x^n = 0$$

$$\Leftrightarrow a_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 2,\ a_n = \frac{-1}{n+1}a_{n-1}$$

La condition initiale donne : $y'(0) = a_1 = 1$. On en conclut que $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et pour tout $n \geqslant 2$, $a_n = 2\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$ et donc

$$y(x) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}x^n,$$

définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$. On peut également déterminer la fonction somme, ce qui donne

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad y(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}x^n.$$

2. Déterminer l'intervalle de convergence I de la série entière solution de l'équation différentielle ci-dessus.

✓

Fait ci-dessus : $D = \mathbb{R}$.

3. Déterminer la fonction somme de cette série entière.

✓

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad xy(x) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}x^{n+1} = 2\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = 2\left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} - (1-x)\right]$$

d'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad y(x) = \frac{2}{x}(e^{-x} - 1 + x).$$