

Exercice - Fonction de répartition, démonstration de cours

Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire X quelconque. Démontrer que F est une fonction croissante et continue à droite sur \mathbb{R} .

Soit X une variable aléatoire : alors si $x \leq y$, on a l'inclusion d'événements $] -\infty; x] \subset] -\infty; y]$ puis par croissance d'une mesure de probabilité, $P(] -\infty; x]) \leq P(] -\infty; y])$ soit $F_X(x) \leq F_X(y)$. Le point 1 est démontré.

Soit $t \in \mathbb{R}$ et une suite (h_n) qui converge vers 0 et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h_n \geq 0$. Quitte à extraire une sous-suite décroissante, on suppose que la suite (h_n) est décroissante. Alors $F_X(t + h_n) - F_X(t) = P(X \in]t; t + h_n]).$ Or la suite d'événements (A_n) définie par $A_n = \{X \in]t; t + h_n]\}$ est décroissante donc d'après le théorème de continuité décroissante, $P(A_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} P(\bigcap A_n) = P(\emptyset) = 0$. Le point 2 est démontré.