

Soit Z une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.
Justifier que $P(Z > 0) = \frac{1}{2}$ et que pour tout réel $a \in \mathbb{R}$, $P(Z < -a) = P(Z > a)$.



On sait que $P(Z > 0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ par parité de la fonction intégrée. Or $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ d'où le premier résultat.

De même, on a par changement de variable $u = -x$ et parité :

$$P(Z < -a) = \int_{-\infty}^{-a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = - \int_{+\infty}^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \int_a^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = P(Z > a)$$