rvC6 ⊵ **Exercice** - *Calcul de racine carrée*

La méthode de la corde pour résoudre une équation du type $f(x) = 0$ consiste à construire la suite (x_k) définie par

$$\forall k \in \mathbb{N} : \quad x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)}$$

1. (a) Sur un graphique, construire les premières itérations de cette méthode en prenant $f(x) = x^2$ et $x_0 = 1$.
   (b) De quelle méthode générale la méthode de la corde est-elle un cas particulier ? Justifier.
   (c) En déduire l'ordre minimal de convergence de la méthode de la corde, quand celle-ci converge.

On souhaite trouver une méthode efficace pour trouver une approximation de la racine carrée d'un nombre positif A donné. Considérons tout d'abord l'algorithme suivant : étant donné une valeur x_0, on calcule

$$x_{k+1} = x_k + \frac{A - x_k^2}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

2. Vérifier que si $x_0 = 1$, alors l'algorithme proposé coïncide avec la méthode de la corde pour résoudre $x^2 - A = 0$.
3. (a) Montrer que si la suite (x_n) converge, alors sa limite est soit $\sqrt{A}$, soit $-\sqrt{A}$.
   (b) On considère le cas où $A \in]0; 4[$. Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que, si $|x_0 - \sqrt{A}| \leqslant \epsilon$, alors la suite (x_n) converge vers $\sqrt{A}$.
   (c) Vérifier graphiquement que si x_0 est proche de $-\sqrt{A}$ mais différent de $-\sqrt{A}$, alors la suite (x_n) ne converge pas vers $-\sqrt{A}$.
   (d) Quel est l'ordre de convergence de la méthode de la corde dans ce cas-là ?
4. Proposer un algorithme plus efficace pour calculer la racine carrée d'un nombre positif A.