Ex **Construction de la loi du χ^2**

On appelle loi Gamma $\Gamma(\alpha, \lambda)$ où $\alpha > 0$, $\lambda > 0$ la loi dont la densité est définie par

$$f(t) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\lambda t} \mathbf{1}_{[0;+\infty[}(t)$$

où

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite. On pose $Y = X^2$.

1. En étudiant sa fonction de répartition, montrer que Y suit une loi $\Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

✓

Soit F_Y la fonction de répartition de Y. Puisque Y ne prend que des valeurs positives, $F_Y(t) = 0$ pour tout $t < 0$. Soit $t \geqslant 0$: alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Y < t) &= \mathrm{P}(|X_1| < \sqrt{t}) \\
&= 2\,\mathrm{P}(0 < X_1 < \sqrt{t}) \text{ par symétrie de la variable } X_1 \\
&= 2 \int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du \\
&= 2 \int_0^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x}{2}} \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx \\
&= \int_0^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2}}\, dx
\end{aligned}$$

La variable Y admet donc pour densité $f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2}}$ pour tout $x > 0$: en remarquant que $f_Y(x) = \frac{1}{\Gamma(1/2)2^{1/2}} x^{1/2-1} e^{-x/2}$, on voit qu'il s'agit d'une loi $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

2. Soit un entier $n \geqslant 1$ et soit U_n une variable aléatoire suivant une loi $\Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$. Déterminer la fonction génératrice de U_1 puis celle de U_n pour $n \geqslant 1$.

✓

On calcule directement :

$$\begin{aligned}
m_Y(t) &= \mathbb{E}(e^{tY}) \\
&= \int_0^{+\infty} e^{xt} \frac{1}{\Gamma(1/2)2^{1/2}} x^{1/2-1} e^{-x/2} dx \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(1/2)2^{1/2}} x^{1/2-1} e^{-\frac{x}{2}(1-2t)} dx \text{ (l'intégrale converge ssi } 1-2t > 0) \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(1/2)2^{1/2}} y^{1/2-1} e^{-\frac{y}{2}} (1-2t)^{-1/2} dy \\
&= (1-2t)^{-1/2}
\end{aligned}$$

3. Soient $(Z_1, ..., Z_n)$ des variables i.i.d selon une loi normale centrée réduite. Déterminer

   la loi de probabilité de la variable aléatoire

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i^2$$

✓

Par somme de variables indépendantes, la fonction génératrice de χ^2 est $m_{\chi^2}(t) = (1 - 2t)^{-n/2}$. En refaisant le même calcul que précédemment, on reconnaît la fonction génératrice d'une variable admettant pour densité $\frac{1}{\Gamma(n/2)2^{n/2}} x^{n/2-1} e^{-x/2}$, donc une variable suivant une loi $\Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$.