

Donner le développement limité de $\ln(1+x)$ au voisinage de 0 à l'ordre 3. En déduire le développement limité de $(\ln(1+x))^2$ à l'ordre 3.

$$\ln(1+x) = \underbrace{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}}_{P_1(x)} + x^3 \cdot \varepsilon(x)$$

$$\begin{aligned}(P_3(x))^2 &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)^2 \\&= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) \times \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) \\&= x \times \left(x - \frac{x^2}{2}\right) - \frac{x^2}{2} \times x + o(x^3) \\&= x^2 - x^3 + o(x^3)\end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } (\ln(1+x))^2 = x^2 - x^3 + x^3 \cdot \varepsilon(x) = x^2 - x^3 + o(x^3)$$