

Soit X une variable aléatoire et soit F sa fonction de répartition. On suppose que F est continue sur \mathbb{R} . Soit la variable aléatoire $Y = F(X)$. Démontrer que Y suit une loi uniforme sur $[0; 1]$.

On cherche la fonction de répartition de la variable aléatoire Y . Soit $t \in \mathbb{R}$. Par définition :

$$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(F(X) \leq t).$$

Or la fonction de répartition F prend ses valeurs dans $[0; 1]$. On en déduit

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

Soit $t \in [0; 1[$. Comme la fonction de répartition F est croissante et supposée continue sur \mathbb{R} , il existe au moins un réel t_0 tel que $F(t_0) = t$. Alors on a

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= \mathbb{P}(F(X) \leq t) \\ &= \mathbb{P}(F(X) \leq F(t_0)) \\ &= \mathbb{P}(X \leq t_0) \quad \text{car } F \text{ est croissante sur } \mathbb{R} \\ &= F(t_0) \\ &= t. \end{aligned}$$

On a ainsi obtenu

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t & \text{si } t \in [0; 1[\\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

qui correspond à la fonction de répartition de la loi uniforme sur $[0; 1]$. Donc $Y \sim \mathcal{U}([0; 1])$.