Ex

Soient $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant 9}$ des variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, suivant chacune une loi normale de moyenne $\mu = 2$ et de variance $\sigma^2 = 9$.

1. Déterminer la probabilité de l'événement $\{X_1 \geqslant 1\}$.

✓

X_1 suit une loi $\mathcal{N}(2,3^2)$ donc $\mathrm{P}(X_1 \geqslant 1) = \mathrm{P}(\frac{X_1-2}{3} \geqslant \frac{1-2}{3}) = \mathrm{P}(U \geqslant -0.3333)$ où U suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$. Or par symétrie, $\mathrm{P}(U \geqslant -0.3333) = \mathrm{P}(U \leqslant 0.3333)$ et d'après la table, $\mathrm{P}(U \leqslant 0.3333) = 0.6293$

Donc $\boxed{\mathrm{P}(X_1 \geqslant 1) = 0.6293}$

2. Soit Y la variable aléatoire définie par

$$Y = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} X_i$$

Déterminer la loi de Y et calculer $\mathrm{P}(Y \geqslant 1)$.

✓

On sait que $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}\mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{9}\times 9\times 2 = 2$.

On sait que par indépendance des variables, $\sigma^2(Y) = \frac{1}{9^2}\sum_{i=1}^{9}\sigma^2(X_i) = \frac{1}{9^2}\times 9\times 3^2 = 1$.

Donc $\boxed{Y \text{ suit une loi } \mathcal{N}(2,1)}$.

3. Soit Z la variable aléatoire définie par

$$Z = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 - X_6 - X_7 - X_8 - X_9$$

Déterminer la loi de Z et calculer $\mathrm{P}(Z \geqslant 1)$.

✓

De même, $\mathbb{E}(Z) = 2+2+2+2+2-2-2-2-2 = 2$ et, puisque toutes ces variables sont indépendantes,

$\sigma^2(Z) = 3^2+3^2+3^2+3^2+3^2+(-3)^2+(-3)^2+(-3)^2+(-3)^2 = 5\times 3^2 + 4\times 3^2 = 81 = 9^2$

Donc Z suit une loi $\mathcal{N}(2,9^2)$.

Puis on calcule $\mathrm{P}(Z \geqslant 1) = \mathrm{P}(U \geqslant \frac{1-2}{9}) = \mathrm{P}(U \geqslant -\frac{1}{9}) = \mathrm{P}(U \leqslant \frac{1}{9})$. D'après la table,

$\boxed{\mathrm{P}(Z \geqslant 1) = 0.5438}$.