

La note obtenue par des étudiants à un examen suit une variable aléatoire X de loi normale de moyenne $\mu = 7$ et d'écart-type $\sigma = 3$.



Soit X la note obtenue par un étudiant : $X \sim \mathcal{N}(7, \sigma^2 = 3^2)$.

1. Calculer le pourcentage d'individus ayant plus de 10 et la note en dessous de laquelle se trouvent 10% des étudiants.



Comme $\frac{X-7}{3} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, on a

$$P(X \geq 10) = P\left(\frac{X-7}{3} \geq 1\right) = 1 - P\left(\frac{X-7}{3} \leq 1\right) \simeq 1 - 0.8413 \simeq 0.1587$$

soit environ 15.87% des étudiants ont plus de 10.

On cherche α la note telle que $P(X \leq \alpha) = 0.10$. On note que

$$\begin{aligned} P(X \leq \alpha) = 0.1 &\Leftrightarrow P\left(\frac{X-7}{3} \leq \frac{\alpha-7}{3}\right) = 0.1 \\ &\Leftrightarrow P\left(\frac{X-7}{3} \geq \frac{-\alpha+7}{3}\right) = 0.1 \\ &\Leftrightarrow P\left(\frac{X-7}{3} \leq \frac{-\alpha+7}{3}\right) = 0.9, \end{aligned}$$

ce qui donne par lecture de table de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, $\frac{-\alpha+7}{3} \simeq 1.3$, soit $\alpha \simeq 3.1$. Donc 10% des étudiants ont en-dessous de 3.1.

2. Compte tenu de ces résultats, on décide de revaloriser l'ensemble des notes par une transformation linéaire $Z = aX + b$. Quelles valeurs doit-on donner à a et b pour que les valeurs précédentes passent respectivement à 50% et 7.

Indication : calculer $\mathbb{E}(Z)$ et $V(Z)$ en fonction de $\mathbb{E}(X)$ et de $V(X)$.



On a $Z = aX + b$ donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z) &= a\mathbb{E}(X) + b = 7a + b \\ V(Z) &= V(aX) = a^2 V(X) = 9a^2. \end{aligned}$$

On souhaite avoir 50% des étudiants ayant plus de 10. Comme la loi normale est symétrique par rapport à sa moyenne, cela revient à prendre $\mathbb{E}(Z) = 10$ donc $10 = 7a + b$.

Ensuite, on souhaite avoir $P(Z \leq 7) = 0.1$. On a

$$P\left(\frac{Z-10}{3a} \leq \frac{7-10}{3a}\right) = 0.1 \Leftrightarrow P\left(\frac{Z-10}{3a} \leq \frac{1}{a}\right) = 0.9 \Leftrightarrow \frac{1}{a} \simeq 1.29 \Leftrightarrow a \simeq 0.775.$$

Par conséquent, $b = 10 - 7a \simeq 4.573$.