

▷ Exercice - Échantillons de pièces usinées

Chaque pièce fabriquée par une certaine machine pèse en moyenne 0.50 g avec un écart type de 0.02 g.

Soient les variables aléatoires X_i représentant le poids d'une pièce. Ces variables sont indépendantes et de même loi, d'espérance $\mathbb{E}(X_i) = 0.5$ et d'écart-type $\sigma(X_i) = 0.02$.

1. Soit \bar{X} la variable aléatoire égale au poids moyen d'une pièce dans un échantillon de n pièces où n est un entier naturel non nul quelconque. En fonction de n , que peut-on dire de la loi de \bar{X} ?

Comme \bar{X} est le poids moyen des pièces sur un échantillon de n pièces, on a $\bar{X} = \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^n X_i$.

Par le théorème central-limite, pour n grand, la variable aléatoire $\sum_{i=1}^n X_i$ suit approximativement une loi Normale de paramètres $\mu = n \times 0.5$ et $\sigma = \sqrt{n} \times 0.02$. Par conséquent, la variable \bar{X} suit approximativement la loi $\mathcal{N}\left(0.50, \sigma = \frac{0.02}{\sqrt{n}}\right)$.

2. On considère deux échantillons de 1000 pièces chacun. Déterminer la probabilité que la différence de poids entre deux lots de 1000 pièces soit supérieure à 2 grammes.

Soit Y_1 et Y_2 deux variables aléatoires indépendantes et de même loi que $\sum_{i=1}^n X_i$, où $n = 1000$.

Comme n est grand, Y_1 et Y_2 suivent approximativement la loi $\mathcal{N}\left(500, \sigma = 0.02\sqrt{1000}\right)$. Donc $Y_1 - Y_2$ suit encore une loi Normale de paramètres $\mu = \mathbb{E}(Y_1) - \mathbb{E}(Y_2) = 0$ et de variance $\sigma^2 = \sigma^2(Y_1 - Y_2) = 2\sigma^2(Y_1) = 0.8$, ce que l'on peut résumer par

$$Y_1 - Y_2 \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma = \sqrt{0.8}\right).$$

On cherche à déterminer la probabilité suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|Y_1 - Y_2| > 2) &= \mathbb{P}\left(\left|\frac{Y_1 - Y_2}{\sqrt{0.8}}\right| > 2\right) \\ &\simeq \mathbb{P}(|Z| > 2.24), \quad \text{où } Z \sim \mathcal{N}(0, 1) \\ &\simeq 1 - \mathbb{P}(|Z| \leq 2.24) \\ &\simeq 1 - (2\mathbb{P}(Z \leq 2.24) - 1) \\ &\simeq 2 - 2 \times 0.9875 \quad \text{par lecture de la table de loi} \\ &\simeq 0.025. \end{aligned}$$

La probabilité que le poids de deux lots de 1000 pièces chacun diffèrent entre eux de plus de 2 grammes est d'environ 2.5%.