Ex

Modélisation avec des estimateurs

Lors d'une élection, un candidat a obtenu 65% des voix. On considère deux échantillons de votants. Déterminer la probabilité pour que deux échantillons de 200 votants chacun indiquent plus de 10 points de différence entre les fréquences de gens qui ont voté pour ce candidat.

✓

On note respectivement F_1 et F_2 la proportion de votants pour ce candidat dans chaque échantillon de taille 200. En notant $(X_1, ..., X_n)$ le premier échantillon, on sait que $n = 200$ et que chaque X_i suit une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ où $p = 0{,}65$. Ainsi, d'après le Théorème Central Limite, $F_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ suit approximativement une loi normale de moyenne p et de variance $\frac{p(1-p)}{n}$. Il est clair que F_2 suit la même loi de probabilité que F_1.
Ainsi, on peut s'intéresser à la différence des résultats pour chaque échantillon $D = F_1 - F_2$. Par somme de lois normales, cette variable D suit une loi normale centrée (moyenne $p - p = 0$) de variance $\frac{p(1-p)}{n} + \frac{p(1-p)}{n} = \frac{2p(1-p)}{n}$.

Il reste donc à calculer $\mathrm{P}(|D| > 0.10) = 2 \times \mathrm{P}(D > 0.10) = \mathrm{P}\left(\frac{D}{\sqrt{\frac{2p(1-p)}{n}}} > 2.1\right) = 2 \times 0.00179 =$ 0.036