Ex - Inégalités et loi de Poisson 4Idt

Soit X une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. En utilisant l'inégalité de Markov, montrer que : $\mathrm{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \frac{1}{2}$.

✓

Par l'inégalité de Markov, on a :

$$\mathrm{P}(|X| \geqslant 2\lambda) \leqslant \frac{\mathbb{E}(|X|)}{2\lambda}$$

or $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ donc $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et on a

$$\mathrm{P}(X \leqslant 2\lambda) \geqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{2\lambda} = \frac{\lambda}{2\lambda} = \frac{1}{2}.$$

2. Montrer que $\mathrm{P}(|X-\lambda| \geqslant \lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda}$ et en déduire que $\mathrm{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda}$.

✓

Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a

$$\mathrm{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \lambda) \leqslant \frac{\sigma^2(X)}{\lambda^2} = \frac{\lambda}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}$$

donc

$$\mathrm{P}(|X-\lambda|) \geqslant \frac{1}{\lambda}.$$

Or

$$\mathrm{P}(X \geqslant 2\lambda) = \mathrm{P}(X - \lambda \geqslant \lambda) \leqslant \mathrm{P}(|X-\lambda| \geqslant \lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda},$$

d'où

$$\mathrm{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda}.$$

3. Pour λ assez grand, laquelle des deux inégalités est la meilleure ?

✓

Pour $\lambda \geqslant 2$, $\frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{1}{2}$ donc l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est meilleure que celle de Markov.