56tw ⊳ **Exercice** - *Etude de points critiques et d'ue ligne de niveau*

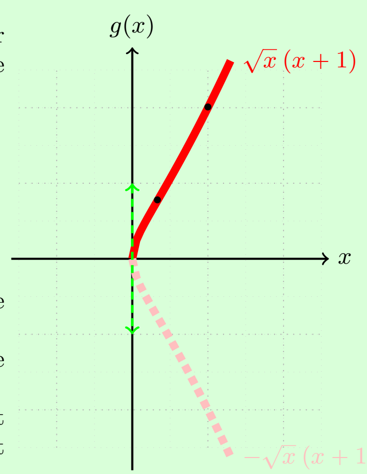
On pose
$$f(x,y) = x\,(x+1)^2 - y^2$$

1. Déterminer les points stationnaires de la fonction f et préciser la nature de chacun d'eux.

On a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y$ et $\frac{\partial f}{\partial x} = (x+1)(3x+1)$
On a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \iff y = 0$
et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \iff x \in \{-1;-1/3\}$.
Donc les points stationnaires de f sont les points $(-1,0)$ et $(-1/3,0)$.
Pour étudier la nature de ces points stationnaires, on utilise les conditions d'ordre 2 en donnant la matrice hessienne :
$$\mathrm{Hess}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x+4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$
d'où $\mathrm{Hess}_f(-1,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Hess}_f(-1/3,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.
On a $(-2)\times(-2) > 0$ et $-2 < 0$ donc la fonction f présente un maximum local en $(-1,0)$.
De même, $2 \times (-2) < 0$ donc la fonction f présente un point selle en $(-1/3,0)$..

2. Tracer la courbe constituée des points tels que $f(x,y) = 0$ et $x \geqslant 0$ en faisant apparaître des éléments qualitatifs (tangente, inflexion de la courbe).

On cherche l'ensemble des points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x,y) = 0 \iff y^2 = x(x+1)^2$.
Si on se restreint aux $x \geqslant 0$, $f(x,y) = 0 \iff y = \sqrt{x}\,(x+1)$.
Pour étudier la courbe d'équation $y = \sqrt{x}\,(x+1)$ pour $x \geqslant 0$ dans le plan, on pose $g(x) = \sqrt{x}\,(x+1)$: c'est une fonction continue sur $[0;+\infty[$ et dérivable sur $]0;+\infty[$.
Pour tout $x > 0$, on a :
$$g'(x) = \tfrac{3}{2}\sqrt{x} + \tfrac{1}{2}(\sqrt{x})^{-1} > 0$$
et
$$g''(x) = \tfrac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$$
De l'expression de $g(x)$, on déduit que la courbe passe par les points $(0,0)$, $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\sqrt{3})$, $(1,2)$, et $(2, 3\sqrt{2})$;
De l'expression de $g'(x)$, on déduit que la courbe a une tangente verticale à l'origine.
De la résolution de $g''(x) = 0$, on déduit que le point $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\sqrt{3})$ est un point d'inflexion, la pente en ce point vaut $g'(\frac{1}{3}) = \sqrt{3}$, et c'est la pente minimale de la courbe.
La courbe constituée des points tels que $f(x,y) = 0$ et $x \geqslant 0$ s'obtient par réflexion de la courbe $y = \sqrt{x}\,(x+1)$ pour $x \geqslant 0$ par rapport à l'axe des x.



3. Montrer que le point $(-1,0)$ est un point isolé de la partie $\mathcal{C} = \{(x,y); f(x,y) = 0\}$ du plan, c'est-à-dire, le point $(-1,0)$ appartient à cette partie et il existe un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que $D_\varepsilon \cap \mathcal{C} = \{(-1,0)\}$ où D_ε est le disque ouvert centré en $(-1,0)$ et de rayon ε.

Dans la boule ouverte $\{(x,y,z); (x+1)^2 + y^2 + x^2 < 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$, on est notamment dans le demi espace $\{x < 0\}$. Or si $x < 0$ et $f(x,y) = 0$ alors nécessairement $y^2 = x(x+1)^2 \geqslant 0$ ce qui ne laisse d'autre choix que d'avoir $(x+1)^2 = 0$.
Par conséquent, le graphe $z = f(x,y)$ de la fonction f ne rencontre le plan des x et y qu'au point $(-1,0)$. Par conséquent, l'intersection $D \cap \mathcal{C}$ du disque
$$D = \{(x,y); (x+1)^2 + y^2 < 1\}$$
avec $\mathcal{C}$ ne consiste qu'au point $(-1,0)$.