

Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Dans l'affirmative, déterminer la matrice inverse.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & -5 & 0 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det A = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (-2) \times 3 - 5 \times 1 = -11 \neq 0$, donc A inversible. Pour $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ avec $a.d-b.c \neq 0$, $M^{-1} = \frac{1}{a.d-b.c} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$.

$$A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{\ell_1}{\ell_3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, donc B inversible. Calcul des cofacteurs :

$$\begin{aligned} B_{11} &= (+1) \times \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 & B_{12} &= (-1) \times \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 & B_{13} &= (+1) \times \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \\ B_{21} &= (-1) \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 & B_{22} &= (+1) \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 & B_{23} &= (-1) \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \\ B_{31} &= (+1) \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2 & B_{32} &= (-1) \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -7 & B_{33} &= (+1) \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \end{aligned}$$

On en déduit la comatrice :

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Et la matrice inverse :

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 7 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

inversible. Calcul des cofacteurs :

$$\begin{aligned} C_{11} &= (+1) \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} = 5 & C_{12} &= (-1) \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -2 & C_{13} &= (+1) \times \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = 4 \\ C_{21} &= (-1) \times \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} = -10 & C_{22} &= (+1) \times \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 4 & C_{23} &= (-1) \times \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = -5 \\ C_{31} &= (+1) \times \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4 & C_{32} &= (-1) \times \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 & C_{33} &= (+1) \times \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \end{aligned}$$

On en déduit la comatrice :

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -10 & 4 & -5 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Et la matrice inverse :

$$C^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & -10 & -4 \\ -2 & 4 & 1 \\ 4 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$