Soit X une variable aléatoire réelle telle que $\mathbb{E}(X) = 30$ et $\mathrm{V}(X) = 25$ et $Y = 2X - 5$.

1. Déterminer l'espérance et la variance de Y.

✓

Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(X) = 2\mathbb{E}(X) - 5 = 2 \times 30 - 5 = 55$. Par propriétés de la variance, $\mathrm{V}(Y) = 2^2\,\mathrm{V}(X) + 0 = 4 \times 25 = 100$.

2. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer une valeur $a > 0$ telle que $\mathrm{P}\left(20 < X < 40\right) \geqslant a$.

✓

On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(20 < X < 40\right) &= \mathrm{P}\left(-10 < X - 30 < 10\right) \\
&= \mathrm{P}\left(|X - 30| < 10\right) \\
&= \mathrm{P}\left(|X - \mathbb{E}(X)| < 10\right) \\
&\geqslant 1 - \frac{\mathrm{V}(X)}{10^2} \text{ par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev} \\
&= 1 - \frac{25}{100} \\
&= \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

On a donc $a = \frac{3}{4}$.

3. On suppose maintenant que X suit une loi normale.

(a) Donner la valeur de $\mathrm{P}\left(20 \leqslant X \leqslant 40\right)$ avec une précision de 10^{-4}.

✓

On centre et on réduit la variable X pour utiliser la table de loi normale centrée réduite. On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(20 \leqslant X \leqslant 40\right) &= \mathrm{P}\left(\frac{20 - 30}{5} \leqslant \frac{X - 30}{5} \leqslant \frac{40 - 30}{5}\right) \\
&= \mathrm{P}\left(-2 \leqslant \frac{X - 30}{5} \leqslant 2\right) \\
&= \Phi(2) - \Phi(-2) \\
&= \Phi(2) - (1 - \Phi(2)) \text{ par symétrie} \\
&\approx 2 \times 0{,}9772 - 1 \text{ par lecture de table de loi} \\
&\approx 0{,}9544.
\end{aligned}$$

(b) Déterminer la loi de Y.

✓

Par propriété de stabilité de la loi normale par combinaison linéaire, Y suit une loi normale. On a déjà calculé que $\mathbb{E}(Y) = 55$ et $\mathrm{V}(Y) = 100$. On a donc $Y \sim \mathcal{N}(55, 10)$.

(c) Déterminer, avec une précision de 10^{-4}, la probabilité que Y prenne une valeur dans l'intervalle $[45\,;\,55]$.

✓

On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(45 \leqslant Y \leqslant 55\right) &= \mathrm{P}\left(\frac{45 - 55}{10} \leqslant \frac{Y - 55}{10} \leqslant \frac{55 - 55}{10}\right) \\
&= \mathrm{P}\left(-1 \leqslant \frac{Y - 55}{10} \leqslant 0\right) \\
&= \Phi(0) - \Phi(-1) \\
&= \Phi(0) - (1 - \Phi(1)) \text{ par symétrie} \\
&\approx 0{,}5 - (1 - 0{,}8413) \text{ par lecture de table de loi} \\
&\approx 0{,}3413.
\end{aligned}$$