

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sqrt{x+5y}$.

- Donner le domaine de définition de f .



La fonction f est définie sur le demi plan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+5y \geq 0\}$

- Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ pour les points (x, y) où c'est possible.



La fonction racine étant dérivable sur $]0; +\infty[$, on peut calculer avec les règles usuelles les dérivées partielles de f sur le demi plan ouvert $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+5y > 0\}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{x+5y}} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{5}{2\sqrt{x+5y}}$$

- Étudier l'existence des dérivées partielles en $(x, y) = (0, 0)$.



Il faut ici revenir à la définition en étudiant le taux d'accroissement des fonctions partielles en 0.

Pour étudier l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$, on pose pour tout $x > 0$: $\frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$. On conclut que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ n'existe pas.

De même, on pose pour tout $y > 0$: $\frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \frac{\sqrt{5y}}{y} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{y}} \xrightarrow{y \rightarrow 0} +\infty$. On conclut que $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ n'existe pas.

- Même question en $(x, y) = (5, -1)$.



C'est exactement le même problème qu'en $(0, 0)$ translaté en $(5, -1)$:

on pose $x = 5 + h$ et on étudie le taux d'accroissement quand x tend vers 5, soit $h \rightarrow 0$: $\frac{f(5+h, -1) - f(5, -1)}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}} \xrightarrow{h \rightarrow 0} +\infty$

on pose $y = -1 + h$ et on étudie le taux d'accroissement quand y tend vers -1, soit $h \rightarrow 0$: $\frac{f(5, -1+h) - f(5, -1)}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}} \xrightarrow{h \rightarrow 0} +\infty$

On conclut que les dérivées partielles n'existent pas en $(0, 0)$.