8mM7 **Ex 1** - *Lancers de dé*

On lance 720 fois un dé équilibré.

Soit X le nombre de fois où le nombre 6 est apparu sur les 720 lancers. La variable aléatoire X suit donc la loi $\mathcal{B}(720, \frac{1}{6})$. En particulier, $\mathbb{E}(X) = 720 \times \frac{1}{6} = 120$ et $\mathbb{V}(X) = 720 \times \frac{1}{6} \times (1 - \frac{1}{6}) = 100$.

1. (a) En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev, que peut-on dire de la probabilité que le nombre 6 soit apparu entre 100 et 140 fois ?

   En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev, on a

   $$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant 20) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{20^2} = \frac{100}{400} = \frac{1}{4}.$$

   On en conclut

   $$\mathbb{P}(100 \leqslant X \leqslant 140) = \mathbb{P}(|X - 120| \leqslant 20) = 1 - \mathbb{P}(|X - 120| > 20) \geqslant 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

   (b) Que peut-on dire de cette même probabilité en utilisant une approximation par la loi Normale ?

   On approxime la loi de X par la loi $\mathcal{N}(120, \sigma^2 = 10^2)$. Alors

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(100 \leqslant X \leqslant 140) &= \mathbb{P}(-2 \leqslant \frac{X - 120}{10} \leqslant 2)\\ &\simeq \mathbb{P}(-2 \leqslant Z \leqslant 2), \quad \text{où } Z \sim \mathcal{N}(0,1)\\ &\simeq 2\mathbb{P}(Z \leqslant 2) - 1\\ &\simeq 2 * 0.9772 - 1, \quad \text{par lecture de la table de loi } \mathcal{N}(0,1)\\ &\simeq 0.9544.\end{aligned}$$

2. Déterminer le plus petit entier n tel que $\mathbb{P}(|X - 120| \leqslant n) \geqslant 0.9$, où X est la variable aléatoire égale au nombre d'apparition du 6 sur 720 lancers, que l'on puisse obtenir :

   (a) par l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev,

   (b) par le théorème central-limite.

   (a) Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev, on a

   $$\mathbb{P}(|X - 120| \geqslant n) \leqslant \frac{100}{n^2}.$$

   Si on impose $\frac{100}{n^2} < 0.1$, alors on a bien l'inégalité recherchée, à savoir $\mathbb{P}(|X - 120| \leqslant n) \geqslant 0.9$. Or

   $$\frac{100}{n^2} < 0.1 \Leftrightarrow n > \sqrt{1000} \simeq 31.62.$$

   La valeur minimale de n obtenue est donc $n = 32$.

   (b) $\mathbb{P}(|X - 120| \leqslant n) = \mathbb{P}(|\frac{X-120}{10}| \leqslant \frac{n}{10}) \simeq \mathbb{P}(Z \leqslant \frac{n}{10}) - 1$, où $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Ainsi la condition $\mathbb{P}(|X - 120| \leqslant n) \geqslant 0.9$ devient $\mathbb{P}(Z \leqslant \frac{n}{10}) \leqslant 0.95$, c'est-à-dire $\frac{n}{10} \geqslant 1.64$. La valeur minimale de n obtenue est donc $n = 17$.

3. Commenter les résultats.

   Le théorème central-limite est plus efficace que l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev.