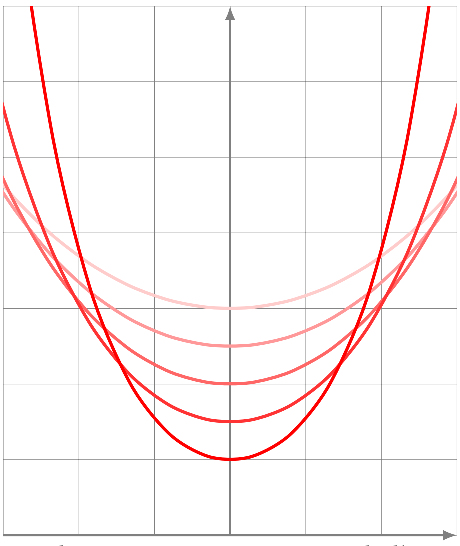
⊳ **Exercice** - *Courbes paramétrées et chaînette*

La chaînette est le nom que porte la courbe obtenue en tenant une corde (ou un collier, un fil,...) par deux extrémités. Voici l'équation cartésienne d'une chaînette :

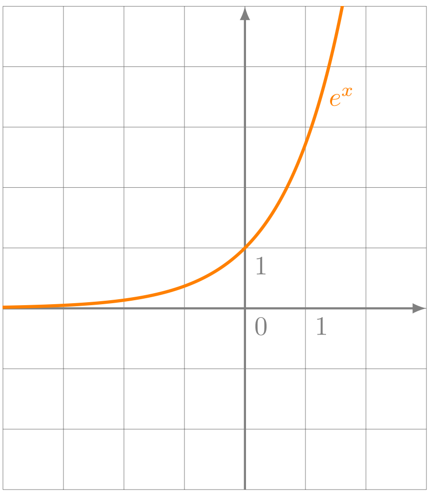
$$y = a\,\mathrm{ch}\left(\frac{x}{a}\right)$$

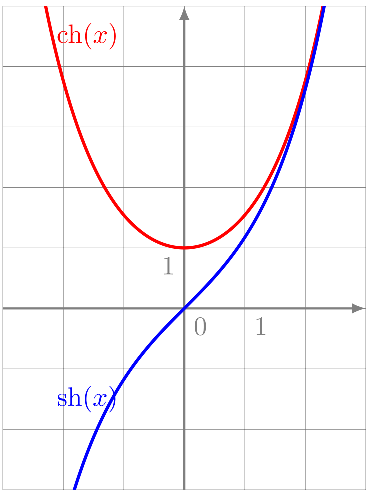
Le paramètre $a > 0$ dépend de la chaînette : on peut écarter plus ou moins les mains. Ou, ce qui revient au même, si l'on garde les mains fixes, on peut prendre des cordes de différentes longueurs.



Le cosinus hyperbolique et le sinus hyperbolique sont la partie paire et impaire de l'exponentielle :

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$





1. Démontrer les propriété suivante :
   (a) $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (b) $\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x)$ et $\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x)$.
2. Les fonctions trigonométriques cos et sin sont dites « circulaires ». On rappelle les formules d'Euler :
$$\cos(x) = \frac{e^{\mathrm{i}x} + e^{-\mathrm{i}x}}{2}, \qquad \sin(x) = \frac{e^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}.$$
   L'analogie avec la définition de $\mathrm{ch}(x)$ et $\mathrm{sh}(x)$ justifie les termes « cosinus » et « sinus ». Reste à justifier le terme « hyperbolique » :
   On considère les courbes paramétrées $C_1 : \left\{\begin{array}{l} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{array}\right.$ et $C_2 : \left\{\begin{array}{l} x(t) = \mathrm{ch}(t) \\ y(t) = \mathrm{sh}(t) \end{array}\right.$
   Tracer des représentations graphiques de chacune de ces courbes paramétrées et commenter les calculs de $x(t)^2 + y(t)^2$ et $x(t)^2 - y(t)^2$.
3. Étant donné un arc paramétré $\mathcal{C} : \begin{array}{ccc}]a;b[& \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (x(t), y(t)) \end{array}$, sa longueur dans une base orthonormale est donnée par la quantité
$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$
   On considère une chaînette dont le point le plus bas est $(0, a)$ et dont les extrémités ont pour coordonnées $(\pm x_0, y_0)$. On s'intéresse à la longueur ℓ de la courbe entre le point le plus bas et une des extrémités.
   (a) En utilisant l'équation cartésienne, écrire sous forme de courbe paramétrée la chaînette décrite ci-dessus.
   (b) Montrer que la demi longueur de la chaînette ℓ vaut $\ell = a\,\mathrm{sh}\left(\frac{x_0}{a}\right)$.
4. On peut démontrer les propriétés suivantes des fonctions hyperboliques :
   (a) La fonction $x \mapsto \mathrm{ch}\,x$ est une bijection de $[0, +\infty[$ dans $[1, +\infty[$. Sa bijection réciproque est notée $\mathrm{Argch}\,x$. Donc :
$$\mathrm{ch}\left(\mathrm{Argch}(x)\right) = x \quad \forall x \in [1, +\infty[\qquad\qquad \mathrm{Argch}\left(\mathrm{ch}(x)\right) = x \quad \forall x \in [0, +\infty[$$
   (b) La fonction $x \mapsto \mathrm{sh}\,x$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Sa bijection réciproque est notée $\mathrm{Argsh}\,x$. Donc :
$$\mathrm{sh}\left(\mathrm{Argsh}(x)\right) = x \qquad\qquad \mathrm{Argsh}\left(\mathrm{sh}(x)\right) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
   (c) Les fonctions $x \mapsto \mathrm{Argch}(x)$ et $x \mapsto \mathrm{Argsh}(x)$ sont dérivables et
$$\mathrm{Argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \qquad\qquad \mathrm{Argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$
   (d) Pour tout $x \geqslant 1$: $\mathrm{Argch}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$.
   (e) Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\mathrm{Argsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$.

   En utilisant les propriétés des fonctions hyperboliques et l'équation cartésienne d'une chaînette, démontrer qu'une équation paramétrique de la chaînette est :
$$\forall t > 0 : \left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & a \ln t \\ y(t) & = & \frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right) \end{array}\right.$$