11An ▷ **Exercice** - *Calcul de dérivées partielles*

Une étude des glaciers a montré que la température T à l'instant t (mesuré en jours) à la profondeur x (mesurée en pied) peut être modélisée par la fonction

$$T(x,t) = T_0 + T_1 e^{-\lambda x}\sin(\omega t - \lambda x)$$

où T_0, T_1, $\omega = \frac{2\pi}{365}$ et λ sont des constantes réelles.

1. Exprimer les deux dérivées partielles de T.

> Les dérivées partielles sont définies pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$:
>
> $$\frac{\partial T}{\partial x}(x,t) = -\lambda T_1 e^{-\lambda x}\left(\sin(\omega t - \lambda x) + \cos(\omega t - \lambda x)\right)$$
> $$\frac{\partial T}{\partial t}(x,t) = \omega T_1 e^{-\lambda x}\cos(\omega t - \lambda x)$$

2. Montrer que T vérifie l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x,t) = k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t)$$

pour une certaine constante k à déterminer.

> Il suffit de dériver une seconde fois par rapport à x l'expression de $\frac{\partial T}{\partial x}(x,t)$: on trouve
>
> $$\begin{aligned}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t) &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x}(x,t)\\ &= (-\lambda)^2 T_1 e^{-\lambda x}\left(\sin(\omega t - \lambda x) + \cos(\omega t - \lambda x)\right) + (-\lambda)^2 T_1 e^{-\lambda x}\left(\cos(\omega t - \lambda x) - \sin(\omega t -\right.\\ &= 2\lambda^2 T_1 e^{-\lambda x}\cos(\omega t - \lambda x)\end{aligned}$$
>
> La constante attendue est donc $k = \frac{\omega}{2\lambda^2}$.