

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$.

1. Décomposer $\frac{1}{n^2 - 1}$ en éléments simples, c'est-à-dire chercher des réels a et b tels que :

$$\frac{1}{n^2 - 1} = \frac{a}{n - 1} + \frac{b}{n + 1}.$$

On remarque que

$$\frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1}{2(n - 1)} - \frac{1}{2(n + 1)}$$

2. En déduire que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2 - 1}$ converge et calculer sa somme.

On écrit la somme partielle :

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^2 - 1} &= \sum_{n=2}^N \frac{1}{2(n - 1)} - \frac{1}{2(n + 1)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=2}^N \frac{1}{n - 1} - \frac{1}{2} \sum_{n=2}^N \frac{1}{n + 1} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{N+1} \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \sum_{n=3}^{N-1} \frac{1}{n} - \left(\sum_{n=3}^{N-1} \frac{1}{n} + \frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} \right) \\ &\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Donc la série converge et sa somme vaut $\frac{3}{4}$.