Soit X une variable aléatoire réelle de densité f_θ définie par

$$f_\theta(x) = (1-\theta)1_{[-\frac{1}{2};0]}(x) + (1+\theta)1_{]0;\frac{1}{2}]}(x)$$

où θ est un paramètre réel tel que $|\theta| \neq 1$.

1. A quelles conditions sur θ la fonction f_θ est bien une densité de probabilité ?

✓ La fonction f_θ est une densité de probabilité si elle est intégrable, positive sur $\mathbb{R}$ et d'intégrale égale à 1.
— La positivité impose $-1 \leqslant \theta \leqslant 1$.
— $\int_{\mathbb{R}} f_\theta(x)\ dx = \int_{-1/2}^{0}(1-\theta)\ dx + \int_0^{1/2}(1+\theta)\ dx = \frac{1}{2}(1-\theta) + \frac{1}{2}(1+\theta) = 1$ donc ne fournit pas de condition spécifique sur θ.
En synthèse, f_θ est une densité si et seulement si $|\theta| \leqslant 1$.

2. Calculer l'espérance de X.

✓ C'est une simple application de la définition

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \int_{\mathbb{R}} x\ f_\theta(x)\ dx \\ &= \int_{-1/2}^{0} x(1-\theta)\ dx + \int_0^{1/2} x(1+\theta)\ dx \\ &= \left[(1-\theta)\frac{x^2}{2}\right]_{-1/2}^{0} + \left[(1+\theta)\frac{x^2}{2}\right]_0^{1/2} \\ &= \frac{\theta}{4}\end{aligned}$$

3. Soient n variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ indépendantes et identiquement distribuées selon la loi de X. On définit les variables aléatoires :

$$U_n = \sum_{i=1}^{n} 1_{]-\infty;0]}(X_i) \qquad V_n = \sum_{i=1}^{n} 1_{]0;+\infty[}(X_i)$$

(a) Vérifier que si $1 \leqslant i \leqslant n$ alors la variable aléatoire $1_{]0;+\infty[}(X_i)$ suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre.

✓ La variable aléatoire

$$p = \mathrm{P}(1_{]0;+\infty[}(X_i) = 1) = \mathrm{P}(X_i \in]0;+\infty[) = \int_0^{+\infty} f_\theta(x)dx = \int_0^{1/2}(1+\theta)\ dx = \frac{1+\theta}{2}$$

d'où $1_{]0;+\infty[}(X_i) \sim \mathcal{B}\left(\frac{1+\theta}{2}\right)$.

(b) En déduire que V_n suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

✓ Les variables aléatoires $(X_i)_{i\in\{1,\cdots,n\}}$ étant indépendantes, il en est de même des variables aléatoires $(1_{]0;+\infty[}(X_i))_{i\in\{1,\cdots,n\}}$, qui sont telles que $1_{]0;+\infty[}(X_i) \sim \mathcal{B}\left(\frac{1+\theta}{2}\right)$ pour $i \in \{1, \cdots, n\}$.
Donc V_n est une somme de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1+\theta}{2}$. On en conclut que $V_n \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{1+\theta}{2}\right)$.

(c) Vérifier que la variable aléatoire $U_n + V_n$ est constante.

✓
$$U_n + V_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\mathbf{1}_{]-\infty;0]}(X_i) + \mathbf{1}_{]0;+\infty[}(X_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\mathbb{R}}(X_i) = \sum_{i=1}^{n} 1 = n$$

(d) Calculer l'espérance de la variable aléatoire $\dfrac{V_n - U_n}{n}$.

✓
$$\mathbb{E}\left(\frac{V_n - U_n}{n}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{V_n - (n - V_n)}{n}\right) = \frac{2}{n}\mathbb{E}(V_n) - 1 = \frac{2}{n} \times n \times \frac{1+\theta}{2} - 1 = \theta$$

(e) Vérifier que $\mathbb{E}(U_nV_n) = (n^2 - n)\frac{1-\theta^2}{4}$ et en déduire $\mathrm{cov}(U_n, V_n)$.

✓
$$\mathbb{E}(U_nV_n) = \mathbb{E}((n - V_n)V_n) = n\mathbb{E}(V_n) - \mathbb{E}(V_n^2)$$

or $V_n \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{1+\theta}{2}\right)$ donc
— $\mathbb{E}(V_n) = n \times \frac{1+\theta}{2}$
— $\mathrm{V}(V_n) = n \times \frac{1+\theta}{2} \times \left(1 - \frac{1+\theta}{2}\right) = \frac{n}{4}(1-\theta^2)$, or $\mathrm{V}(V_n) = \mathbb{E}(V_n^2) - \mathbb{E}(V_n)^2$ donc

$$\mathbb{E}(V_n^2) = \frac{n}{4}(1-\theta^2) + \frac{n^2}{4}(1+\theta)^2$$

d'où

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(U_nV_n) &= \frac{n^2}{2}(1+\theta) - \left(\frac{n}{4}(1-\theta^2) + \frac{n^2}{4}(1+\theta)^2\right) \\ &= \frac{n^2}{4}(1+\theta)(2 - (1+\theta)) - \frac{n}{4}(1-\theta^2) \\ &= \frac{n^2}{4}(1-\theta^2) - \frac{n}{4}(1-\theta^2) \\ &= (n^2 - n)\frac{1-\theta^2}{4}\end{aligned}$$

On en déduit la covariance :

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(U_n, V_n) &= \mathbb{E}(U_nV_n) - \mathbb{E}(U_n)\mathbb{E}(V_n) \\ &= \frac{n^2-n}{4}(1-\theta^2) - \mathbb{E}(n - V_n)\mathbb{E}(V_n) \\ &= \frac{n^2-n}{4}(1-\theta^2) - \left(n - \frac{n}{2}(1+\theta)\right)\frac{n}{2}(1+\theta) \\ &= \frac{n^2-n}{4}(1-\theta^2) - \frac{n^2}{4}(1-\theta^2) \\ &= \frac{-n}{4}(1-\theta^2)\end{aligned}$$

(f) Montrer que la variance de $\dfrac{V_n - U_n}{n}$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

✓
$$\begin{aligned}\mathrm{V}\left(\frac{V_n - U_n}{n}\right) &= \frac{1}{n^2}\left(\mathrm{V}(U_n) + \mathrm{V}(V_n) - 2\mathrm{cov}(U_n, V_n)\right) \\ &= \frac{1}{n^2}\left(2\mathrm{V}(V_n) - 2\mathrm{cov}(U_n, V_n)\right) \qquad \text{car} \quad \mathrm{V}(U_n) = \mathrm{V}(n - V_n) = \mathrm{V}(V_n) \\ &= \frac{1}{n^2}\left(\frac{n}{2}(1-\theta^2) + \frac{n}{2}(1-\theta^2)\right) \\ &= \frac{1-\theta^2}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.\end{aligned}$$