7JTd ⊵ **Exercice** - *Simulation et fonction de répartition*

Soit X une variable aléatoire et soit F sa fonction de répartition. On suppose que F est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Soit la variable aléatoire $Y = F(X)$.
Démontrer que Y suit une loi uniforme sur $[0;1]$.

On cherche la fonction de répartition de la variable aléatoire Y. Soit $t \in \mathbb{R}$. Par définition :

$$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leqslant t) = \mathbb{P}(F(X) \leqslant t).$$

Or la fonction de répartition F prend ses valeurs dans $[0;1]$. On en déduit

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases}$$

Soit $t \in [0;1[$. Comme la fonction de répartition F est croissante et supposée continue sur $\mathbb{R}$, il existe au moins un réel t_0 tel que $F(t_0) = t$. Alors on a

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= \mathbb{P}(F(X) \leqslant t) \\ &= \mathbb{P}(F(X) \leqslant F(t_0)) \\ &= \mathbb{P}(X \leqslant t_0) \quad \text{car } F \text{ est croissante sur } \mathbb{R} \\ &= F(t_0) \\ &= t. \end{aligned}$$

On a ainsi obtenu

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t & \text{si } t \in [0;1[\\ 1 & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases}$$

qui correspond à la fonction de répartition de la loi uniforme sur $[0;1]$. Donc $Y \sim \mathcal{U}([0;1])$.