

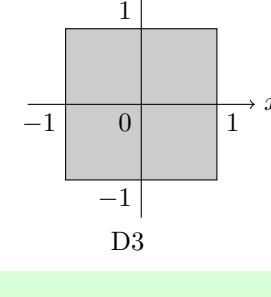
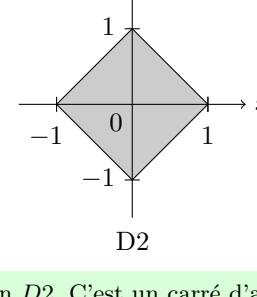
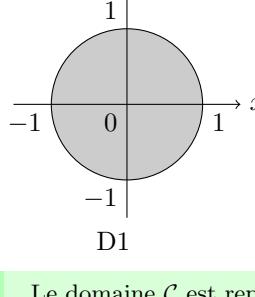
bOga Exercice - Loi d'un couple de variables aléatoires

Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires admettant pour densité la fonction  $f$  définie par

$$f(x, y) = k \cdot \mathbf{1}_{\mathcal{C}}(x, y)$$

où  $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$  et  $k \in \mathbb{R}$ .

1. Dire lequel de ces trois domaines de  $\mathbb{R}^2$  représentés ci-dessous est le domaine  $\mathcal{C}$ .



Le domaine  $\mathcal{C}$  est représenté en  $D2$ . C'est un carré d'aire = 2

2. Déterminer la valeur de  $k \in \mathbb{R}$  telle que  $f$  définit une fonction densité.

On choisit  $k$  de telle sorte que  $f \geq 0$  et  $\iint_{\mathcal{C}} f(x, y) dx dy = 1$ . Or  $\iint_{\mathcal{C}} f(x, y) dx dy = k \iint_{\mathcal{C}} dx dy = k \times \text{aire}(\mathcal{C}) = 2k$ . Donc il faut prendre  $k = \frac{1}{2}$ .

On peut aussi faire calcul de manière analytique en utilisant la relation de Chasles (on distingue selon le signe de  $x$  et on encadre  $y$ ) et le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{C}} dx dy &= \int_{-1}^0 \left( \int_{-1-x}^{1+x} dy \right) dx + \int_0^1 \left( \int_{-1+x}^{1-x} dy \right) dx \\ &= \int_{-1}^0 (2 + 2x) dx + \int_0^1 (2 - 2x) dx \\ &= 2 \end{aligned}$$

3. Déterminer les lois marginales du couple  $(X, Y)$ .

On calcule les densités marginales : pour tout  $x \in \mathbb{R}$  : Si  $x > 1$  ou si  $x < -1$  :  $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy = \int_{\mathbb{R}} 0 = 0$  ; Si  $x \in [0; 1]$  :

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1+x}^{1-x} dy \\ &= 1 - x \end{aligned}$$

Si  $x \in [-1; 0]$  :

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1-x}^{1+x} dy \\ &= 1 + x \end{aligned}$$

Avec des fonctions indicatrices, cela se réécrit pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$f_X(x) = \mathbf{1}_{[-1;0]}(x)(1+x) + \mathbf{1}_{[0;1]}(x)(1-x) = \mathbf{1}_{[-1;1]}(x)(1-|x|)$$

Les rôles étant symétriques en  $x$  et en  $y$ , on obtient de manière similaire que pour tout  $y \in \mathbb{R}$  :

$$f_Y(y) = \mathbf{1}_{[-1;0]}(y)(1+y) + \mathbf{1}_{[0;1]}(y)(1-y) = \mathbf{1}_{[-1;1]}(y)(1-|y|)$$

4. Déterminer  $\text{cov}(X, Y)$ .

On utilise la formule de Huygens :  $\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ . Ainsi, on calcule :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx \\ &= \int_{-1}^0 x(1+x) dx + \int_0^1 x(1-x) dx \\ &= -\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Du fait que  $X$  et  $Y$  suivent la même loi, on déduit que  $\mathbb{E}(Y) = 0$ .

Il reste à calculer :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(XY) &= \iint_{\mathbb{R}^2} xy f(x, y) dx dy \\ &= \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{C}} dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^0 \left( \int_{-1-x}^{1+x} xy dy \right) dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \int_{-1+x}^{1-x} xy dy \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^0 x \left[ \frac{y^2}{2} \right]_{-1-x}^{1+x} dx + \frac{1}{2} \int_0^1 x \left[ \frac{y^2}{2} \right]_{-1+x}^{1-x} dy dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^0 (x \times 0) dx + \frac{1}{2} \int_0^1 (x \times 0) dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit que  $\text{cov}(X, Y) = 0$ .

5. Étudier l'indépendance des variables  $X$  et  $Y$ .

On pourrait penser que les variables sont indépendantes car leur covariance est nulle. Cependant, ce n'est pas une condition suffisante et on observe que  $f_X(x)f_Y(y) \neq f(x, y)$ . La conclusion est que  $X$  et  $Y$  ne sont pas indépendantes.