

Exercice - Simulation d'une loi normale

On tire sur une cible munie d'un repère orthonormé centrée sur son origine O . On note (X, Y) les coordonnées cartésienne d'un tir. On remarque que lorsque le tireur vise le centre de la cible, la loi suivie par (X, Y) admet une densité

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{\frac{-x^2-y^2}{2}}$$

On note R la distance entre le point d'impact et le point visé.

1. Calculer les lois marginales du couple (X, Y) . Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

La densité marginale pour X est exprimée par

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi} e^{\frac{-x^2}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} \end{aligned}$$

De même, on calcule $f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-y^2}{2}}$. On a ainsi $f(x, y) = f_X(x) \times f_Y(y)$ ce qui permet de conclure que X et Y sont deux variables indépendantes suivant chacune une loi normale centrée réduite.

2. Ecrire la fonction de répartition de R sous la forme d'une intégrale double, puis effectuer le changement de variables en coordonnées polaires pour simplifier l'expression.

On note $D_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq t^2\}$. Si $t \geq 0$, $F_R(t) = \mathbb{P}(R \leq t) = \mathbb{P}((X, Y) \in D_t)$ donc

$$F_R(t) = \iint_{D_t} \frac{1}{2\pi} e^{\frac{-x^2-y^2}{2}} dx dy$$

On effectue dans l'intégrale double un changement de variables en coordonnées polaires : on a $dx dy = r dr d\theta$ d'où

$$F_R(t) = \int_0^{2\pi} \int_0^t e^{-r^2/2} r dr \frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^t r e^{-r^2/2} dr$$

et $F_R(t) = 0$ si $t < 0$.

3. En déduire une densité de R . La loi obtenue s'appelle la loi de Rayleigh .

On en déduit que la fonction $f_R(r) = r e^{-r^2/2} 1_{\mathbb{R}_+}$

4. Montrer que R^2 suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(1/2)$.

Soit h une fonction continue bornée quelconque :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(h(R^2)) &= \int_0^{+\infty} h(r) r e^{-r^2/2} dr \\ &= \int_0^{+\infty} h(u) \frac{1}{2} e^{-\frac{u}{2}} du \end{aligned}$$

Par identification, on en déduit une densité de R^2 définie par $f_{R^2}(u) = \frac{1}{2} e^{-\frac{u}{2}} 1_{\mathbb{R}_+}(u)$, on reconnaît une loi exponentielle $\mathcal{E}(\frac{1}{2})$.

5. Montrer que si Θ est la variable aléatoire telle que $X = R \cos(\Theta)$, $Y = R \sin(\Theta)$, alors Θ suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.

Soit h une fonction continue bornée quelconque :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(h(R, \Theta)) &= \iint \frac{1}{2\pi} h(r(x, y), \theta(x, y)) e^{\frac{-x^2-y^2}{2}} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} h(r, \theta) \frac{1}{2\pi} e^{-r^2} r dr d\theta \end{aligned}$$

Par identification, on en déduit une densité du couple (R, Θ) et par indépendance, on identifie la densité de Θ : $f_\Theta(\theta) = \frac{1}{2\pi} 1_{[0; 2\pi]}(\theta)$

6. En déduire une simulation de la loi du couple (X, Y) .

```
def Normale2(): theta = 2*pi*rand() r = sqrt(-2*log(rand())) return r*cos(theta), r*sin(theta)
```