Ex

Produit matriciel

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. A-t-on $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$? Justifier.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour obtenir l'égalité.

✓

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A+B) \cdot (A-B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$A^2 - B^2 \neq (A+B)(A-B)$$

Justification :

$$(A+B)(A-B) = A^2 \underbrace{-AB + BA}_{\neq 0} - B^2$$

car $BA \neq AB$. Pour avoir l'égalité, il faut et il suffit que A et B commutent : $BA = AB$.