Ex

Convergence d'une suite de variables aléatoires

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires i.i.d. selon une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On définit la suite de variables aléatoires (Y_n) par

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}X_k$$

Etudier le comportement asymptotique en loi de la suite (Y_n).

✓

Les variables $\sqrt{k}X_k$ ne sont pas identiquement distribuées ! on se lance donc dans un calcul de limite « à la main ».
Par indépendance, Y_n suit une loi normale d'espérance 0 et de variance $\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}^2 \times 1 = \frac{1}{n^2} \times \frac{n(n+1)}{2}$. On peut donc écrire $Y_n = \sqrt{\frac{n(n+1)}{2n^2}}Z_n$ où Z_n suit une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.
Soit $\varphi_{Y_n}(t)$ la fonction caractéristique de Y_n. On sait que $\varphi_{Z_n}(t) = e^{\frac{-t^2}{2}}$ donc

$$\varphi_{Y_n}(t) = \varphi_{Z_n}\left(\sqrt{\frac{n(n+1)}{2n^2}}t\right) = e^{-\frac{-n(n+1)}{2n^2}t^2}$$

.
En passant à la limite, $\varphi_{Y_n}(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\frac{t^2}{4}}$. On reconnait la fonction caractéristique de $\frac{1}{\sqrt{2}}Z_n$ qui suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2 = \frac{1}{2})$.
On a ainsi démontré que la suite (Y_n) converge en loi vers une loi normale $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2 = \frac{1}{2})$.