Ex - Loi normale, question de cours

lz1J

Soit X une variable aléatoire dont la loi est déterminée par la fonction densité définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

1. A l'aide d'un changement de variable, calculer $\mathbb{E}(X)$.

✓

On exprime l'intégrale en posant le changement de variable affine $u = \frac{x-\mu}{\sigma} \iff x = \sigma u + \mu$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma u + \mu) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \sigma du \\
&= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u e^{-\frac{u^2}{2}} du + \mu \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\
&= 0 + \mu \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\
&= 0 + \mu \times 1 \\
&= \mu
\end{aligned}$$

2. Calculer la variance de X.

✓

On utilise le même changement de variable :

$$\mathbb{E}\left((X-\mu)^2\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \mathrm{d}x$$

devient, après changement de variables ci-dessus :

$$E\left((X-\mu)^2\right) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \exp\left[-\frac{u^2}{2}\right] \mathrm{d}u.$$

En intégrant par parties, on trouve directement que

$$E\left((X-\mu)^2\right) = \sigma^2.$$

3. Soit $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$. Déterminer la loi de Z.

✓

En effectuant toujours le même changement de variables $u = \frac{x-\mu}{\sigma}$, on a pour tout réel t :

$$\mathrm{P}(Z \leqslant t) = \mathrm{P}(X \leqslant \sigma t + \mu) \int_{-\infty}^{\sigma t+\mu} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{u^2}{2}\right] \mathrm{d}u.$$

La densité de la variable aléatoire Y est donc la fonction

$$f_Y(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{u^2}{2}\right],$$

qui correspond à celle de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.