rVaz ⊵ **Exercice** - *Critère de D'Alembert*

On définit les deux suites suivantes pour tout n entier naturel non nul :

$$u_n = \frac{(n+1)(n+2)...(2n)}{(2n)^n} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}.$$

On s'intéresse à la nature de la série de terme général u_n et de la série de terme général v_n.

1. Appliquer le critère de d'Alembert à ces deux séries. Que peut-on conclure sur la nature des séries de terme général u_n et v_n ?

On a $u_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+2)(n+3)...(2n+2)}{(2n+2)^{n+1}} \times \frac{(2n)^n}{(n+1)(n+2)...(2n)}\\ &= \frac{2n+1}{n+1} \times \left(\frac{2n}{2n+2}\right)^n\\ &= \frac{2n+1}{n+1} \times \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n\\ &\underset{+\infty}{\sim} \frac{2n+1}{n+1} \times \frac{1}{e} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{e} < 1\end{aligned}$$

donc par le critère de d'Alembert, la série $\sum u_n$ converge.

Pour la deuxième série, on a $v_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\sqrt{n(n+1)}}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}(\sqrt{1+\frac{2}{n}})} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}} \underset{+\infty}{\sim} 1$ donc par le critère de d'Alembert, la série $\sum v_n$ est indéterminée.

2. En comparant la série de terme général v_n à une série usuelle, déterminer sa nature.

On a $v_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ donc par comparaison à une série de Riemann divergente, la série $\sum v_n$ diverge.