

Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0; 1]$. On rappelle que X admet pour densité :

$$f(x) = \mathbf{1}_{[0;1]}(x)$$

A l'aide d'une fonction de répartition, déterminer la loi de la variable aléatoire $2X$.

Soit $t \in \mathbb{R}$ et F_{2X} la fonction de répartition de la variable aléatoire $2X$: alors

$$\begin{aligned} F_{2X}(t) &= P(2X \leq t) \\ &= P\left(X \leq \frac{t}{2}\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\frac{t}{2}} \mathbf{1}_{[0;1]}(x) dx \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{t}{2} & \text{si } 0 < t \leq 2 \\ 1 & \text{si } t \geq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

La fonction F_{2X} est dérivable presque partout (sauf en 0 et en 2). Sa dérivée coïncide donc presque partout avec une fonction densité g de la variable $2X$. On peut donc poser

$$g(x) = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{[0;2]}(x)$$

et on conclut que $2X$ suit une loi uniforme sur $[0; 2]$.