Ex

Produit matriciel et inverse

Soient $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A \times B$ et $B \times A$. Que remarque-t-on ?

$\checkmark$

On remarque que $AB = BA = \begin{pmatrix} ad & 0 & 0 \\ 0 & be & 0 \\ 0 & 0 & cf \end{pmatrix}$

2. Déterminer A^k pour tout entier $k \geqslant 1$.

$\checkmark$

On déduit de la question précédente que $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$ puis par récurrence que :

$$A^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 & 0 \\ 0 & b^k & 0 \\ 0 & 0 & c^k \end{pmatrix}.$$

3. À quelles conditions sur $a, b, c \in \mathbb{R}$ la matrice A est-elle inversible ? Déterminer dans ce cas A^{-1}.

$\checkmark$

Si $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $c \neq 0$ alors la matrice A est inversible et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & b^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & c^{-1} \end{pmatrix}$$