Ex

Règle de Raabe-Duhamel

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes réels strictement positifs.

1. On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n \geqslant N, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$
Monter que si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

✓ Soit $n > N$. Alors
$$\frac{u_n}{u_{n-1}} \leqslant \frac{v_n}{v_{n-1}} \implies u_n \leqslant \frac{v_n}{v_{n-1}} u_{n-1}.$$
Or on a :
$$\frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \leqslant \frac{v_{n-1}}{v_{n-2}}, \quad \dots, \quad \frac{u_{N+1}}{u_N} \leqslant \frac{v_{N+1}}{v_N}.$$
Donc on a les inégalités successives :
$$u_n \leqslant \frac{v_n}{v_{n-1}} u_{n-1} \leqslant \frac{v_n}{v_{n-1}} \frac{v_{n-1}}{v_{n-2}} u_{n-2} \leqslant \dots \leqslant \frac{v_n}{v_{n-1}} \frac{v_{n-1}}{v_{n-2}} \cdots \frac{v_{N+1}}{v_N} u_N,$$
ce qui nous donne :
$$u_n \leqslant \frac{v_n}{v_N} u_N = \frac{u_N}{v_N} v_n.$$
Comme $\frac{u_N}{v_N}$ est une constante et que les suites (u_n) et (v_n) sont positives, par comparaison, si la série $\sum v_n$ converge, la série $\sum u_n$ converge également.

2. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o(\frac{1}{n}) \quad \text{lorsque } n \to +\infty.$$

(a) Montrer que si $\alpha > 1$, alors $\sum u_n$ converge ;

✓ Si $\alpha > 1$, alors on peut prendre β tel que $\alpha > \beta > 1$. Dans ce cas, $\sum v_n$ est une série de Riemann convergente et $\frac{v_{n+1}}{v_n} \geqslant \frac{u_{n+1}}{u_n}$. Par la première question, on en déduit qu'alors la série $\sum u_n$ converge.

(b) Montrer que si $\alpha < 1$, alors $\sum u_n$ diverge.

✓ Si $\alpha < 1$, alors on peut choisir β tel que $\alpha < \beta < 1$. Dans ce cas, $\sum v_n$ est une série de Riemann divergente et $\frac{v_{n+1}}{v_n} \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_n}$. Par la première question, on en conclut que la série $\sum u_n$ diverge.

3. Application : on pose $u_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}$. Étudier la nature de la série $\sum u_n$.

✓ On cherche un développement asymptotique du quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$:
$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k}{2k+1}}{\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}} \\ &= \frac{2(n+1)}{2(n+1)+1} \\ &= \frac{2n+2}{2n+3}\end{aligned}$$
Il est intéressant de voir que la règle de d'Alembert ne permet pas de conclure car $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$).
En revanche, on peut faire apparaître un développement asymptotique en factorisant :
$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{2n(1+1/n)}{2n(1+3/2n)} \\ &= \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{2n}} \\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{1+\frac{3}{2n}}\end{aligned}$$
Or $\frac{1}{1+\frac{3}{2n}} = 1 - \frac{3}{2n} + o(\frac{1}{n})$ donc par produit :
$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{3}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= 1+\frac{1}{n}-\frac{3}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= 1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$
On peut donc appliquer le critère de Raabe-Duhamel avec $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ pour conclure que la série de terme général u_n diverge.