Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto \sqrt[5]{2x^3 + y^2}$. On note $\mathcal{S}_f$ sa surface représentative.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?

✓

La fonction $\sqrt[5]{\ }$ est définie sur $\mathbb{R}$, car c'est la bijection réciproque de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^5$. Une étude classique montre qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable (et même C^∞) sur $\mathbb{R}^*$, et non dérivable (avec tangente verticale) en 0. Ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2$.

2. Étudier la continuité de f.

✓

f est continue sur $\mathbb{R}^2$ comme composée de fonctions continues.

3. Étudier la différentiabilité de f

✓

f est C^∞, donc différentiable, en tout point (x, y) où $2x^3 + y^2$ ne s'annule pas. Soit maintenant un point (x_0, y_0) tel que $2x_0^3 + y_0^2 = 0$. On suit la méthode du poly, chap.2, §II.6.

— f est continue.

— On calcule, si elles existent, le dérivées partielles de f en (x_0, y_0). Pour ce faire, on va utiliser le théorème 2.2 du poly, appliqué à la fonction partielle $x \mapsto f(x, y_0)$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R} - \{x_0\}$ et sa dérivée vaut

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0) = \frac{1}{5}(6x^2)(2x^3 + y_0^2)^{1/5-1} = \frac{6x^2}{5(2x^3 + y_0^2)^{4/5}}$$

Or quand $x \to x_0+$, $2x^3 + y_0^2 \to 0_+$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y_0) \to +\infty$. Le théorème 2.2 assure alors que le taux d'accroissement

$$\frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

tend aussi vers $+\infty$ quand $x \to x_0+$. Et donc f n'admet pas de dérivée partielle par rapport à x en (x_0, y_0). Ceci permet dès à présent de conclure que f n'est pas différentiable en (x_0, y_0). Mais on pourrait prouver, en bonus et de manière analogue, que f n'admet pas non plus de dérivée partielle par rapport à y en (x_0, y_0).

En synthèse, nous avons montré que

$$\boxed{f \text{ est différentiable en } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ si et seulement si } 2x^3 + y^2 \neq 0}$$