Ex

Marche aléatoire

On considère un carré ABCD et son centre de gravité O. On note $\mathcal{E} = \{A, B, C, D, O\}$.. Une puce se déplace aléatoirement en sautant d'un point de $\mathcal{E}$ à un autre. La seule contrainte est que si un saut relie deux sommets du carré, ceux-ci doivent être adjacents.
A chaque saut, tous les déplacements possibles sont équiprobables. La puce ne reste pas deux fois de suite au même endroit.
Au départ (c'est-à-dire avant son premier saut) elle se trouve au point A. .
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $K \in \mathcal{E}$, on note K_n l'événement « la puce se trouve au point K après son n-ième saut. On notera $p_n = \mathrm{P}(O_n)$ (de sorte que $p_0 = 0$).

1. Calculer $\mathrm{P}(K_2)$ pour tout $K \in \mathcal{E}$.
2. Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$, $p_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - p_n)$ et en déduire une expression de p_n en fonction de n.
3. En utilisant les symétries du problème, calculer $\mathrm{P}_{B_2}(O_3)$.
4. Sachant que la puce est en O après 3 sauts, quelle est la probabilité qu'elle soit passée par B ?