

Un système électronique est constitué de n composants disposés en série. Cela implique que la panne d'un composant entraîne la panne de tout le système. Chacun des composants a une durée de vie T_k qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$. On admet que les variables aléatoires T_1, \dots, T_n sont indépendantes. On note S la durée de vie du système et on note $t \geq 0$ la variable de temps.

1. Soit $t \geq 0$. Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on note $R_k(t) = P(T_k > t)$ la fiabilité du composant k à l'instant t . C'est la probabilité que le composant k fonctionne encore après un temps d'utilisation t . Déterminer $R_k(t)$.



$$R_k(t) = \int_t^{+\infty} e^{-x} dx = e^{-t} \text{ pour tout } t \geq 0.$$

2. Calculer $\mathbb{E}(T_k)$ et déterminer la probabilité que le composant k fonctionne après un temps d'utilisation égal à $\mathbb{E}(T_k)$.



$$\mathbb{E}(T_k) = \frac{1}{\lambda} = 1 \text{ et } R_k(\mathbb{E}(T_k)) = e^{-\mathbb{E}(T_k)} = e^{-1} \approx 0,37.$$

3. On note $R(t) = P(S > t)$ la fiabilité du système à l'instant t . C'est la probabilité que le système fonctionne encore après un temps d'utilisation t . Exprimer $R(t)$ en fonction de $R_1(t), \dots, R_n(t)$ et en déduire que S suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.



$$R(t) = P(S > t) = P(T_1 > t, \dots, T_n > t) = \prod_{k=1}^n P(T_k > t) = \prod_{k=1}^n R_k(t) = e^{-nt} \text{ pour tout } t \geq 0. \text{ Donc } S \text{ suit une loi exponentielle de paramètre } n.$$

4. Déterminer le temps moyen de bon fonctionnement du système.



$$\mathbb{E}(S) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{n}.$$