7J6y ⊳ **Exercice** - *Etude de séries numériques*

Dans chacun des cas, dire si la série de terme général u_n est absolument convergente, semi-convergente, divergente, grossièrement divergente.
Attention, pour pouvoir répondre, certaines séries demandent deux démonstrations : par exemple, pour montrer que $\sum u_n$ est semi-convergente, il faut démontrer que $\sum u_n$ est convergente et que $\sum |u_n|$ est divergente.

1. $u_n = \frac{\sin(n^2)}{n^2}$

   La série converge car elle est absolument convergente (le terme général est dominé par $1/n^2$).

2. $u_n = \frac{(-1)^n \ln(n)}{n}$

   On a $|u_n| \geqslant \frac{1}{n}$, qui est le terme général d'une série de Riemann divergente. Par comparaison, la série $\sum u_n$ ne converge pas absolument.
   Par le critère des séries alternées, comme la suite $\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)_n$ est décroissante et tend vers 0, la série $\sum u_n$ converge.
   Donc la série $\sum u_n$ est **semi-convergente**.

3. $u_n = \frac{\cos(n^2\pi)}{n\ln(n)}$

   La série diverge car le terme général ne tend pas vers 0.

4. $u_n = \frac{(2n+1)^4}{(7n^2+1)^3}$

   La série converge car le terme général est équivalent à $1/n^2$ qui est une série de Riemann convergente de paramètre 2.

5. $u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

   La série diverge car le terme général tend vers $1/e$ et ne tend donc pas vers 0.

6. $u_n = \ln(1 + e^{-n})$

   La série converge car le terme général tend vers 0 et est dominé par $1/n^2$.

7. $u_n = \frac{1}{n\cos^2(n)}$

   La série diverge car le terme général est comparable à $1/n$ qui est une série de Riemann divergente de paramètre 1.

8. $u_n = \sin\left(\frac{n^2+1}{n}\pi\right)$

   La série diverge car le terme général ne tend pas vers 0.

9. $u_n = \frac{n}{2^n}$

   La série converge car elle est dominée par une série géométrique convergente.

10. $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

    La série diverge car le terme général tend vers e et ne tend donc pas vers 0.

11. $u_n = \frac{n^{10000}}{n!}$

    La série converge. C'est un cas particulier du ratio test, où n^{10000} est dominé par $n!$ pour les grandes valeurs de n.

12. $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$

    La série converge car elle est une série alternée dont les termes décroissent vers 0.

13. $u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

    La série converge car le terme général est dominé par $1/n^3$ qui est une série de Riemann convergente de paramètre 3.

14. $u_n = \frac{1}{(\ln(n))^n}$

    La série converge car le terme général tend rapidement vers 0.

15. $u_n = 1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)$

    La série converge car le terme général est dominé par $1/n^2$ qui est une série de Riemann convergente de paramètre 2.

16. $u_n = \left(\frac{4n+1}{3n+2}\right)^n$

    La série diverge car le terme général tend vers $(4/3)^n$ qui ne tend pas vers 0.

17. $u_n = \frac{\ln(n)}{n}$

    La série converge car le terme général est dominé par $1/n$ qui est une série de Riemann convergente de paramètre 1.