C5Fq ⊳ **Exercice** - *Simulation d'une loi normale*

On tire sur une cible munie d'un repère orthonormé centrée sur son origine O. On note (X,Y) les coordonnées cartésienne d'un tir. On remarque que lorsque le tireur vise le centre de la cible, la loi suivie par (X,Y) admet une densité

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{\frac{-x^2-y^2}{2}}$$

On note R la distance entre le point d'impact et le point visé.

1. Calculer les lois marginales du couple (X,Y). Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

La densité marginale pour X est exprimée par

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi}e^{\frac{-x^2}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}} \end{aligned}$$

De même, on calcule $f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-y^2}{2}}$. On a ainsi $f(x,y)=f_X(x)\times f_Y(y)$ ce qui permet de conclure que X et Y sont deux variables indépendantes suivant chacune une loi normale centrée réduite.

2. Ecrire la fonction de répartition de R sous la forme d'une intégrale double, puis effectuer le changement de variables en coordonnées polaires pour simplifier l'expression.

On note $D_t=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,,\,x^2+y^2\leqslant t^2\}$. Si $t\geqslant 0$, $F_R(t)=\mathbb{P}(R\leqslant t)=\mathbb{P}((X,Y)\in D_t)$ donc

$$F_R(t)=\iint_{D_t}\frac{1}{2\pi}e^{\frac{-x^2-y^2}{2}}dxdy$$

On effectue dans l'intégrale double un changement de variables en coordonnées polaires : on a $dxdy=rdrd\theta$ d'où

$$F_R(t)=\int_0^{2\pi}\int_0^t e^{-r^2/2}rdr\frac{d\theta}{2\pi}=\int_0^t re^{-r^2/2}dr$$

et $F_R(t)=0$ si $t<0$.

3. En déduire une densité de R. La loi obtenue s'appelle la loi de Rayleigh .

On en déduit que la fonction $f_R(r)=re^{-r^2/2}1_{\mathbb{R}_+}$

4. Montrer que R^2 suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(1/2)$.

Soit h une fonction continue bornée quelconque :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(h(R^2)) &= \int_0^{+\infty} h(r)re^{-r^2/2}dr \\ &= \int_0^{+\infty} h(u)\frac{1}{2}e^{-\frac{u}{2}}du \end{aligned}$$

Par identification, on en déduit une densité de R^2 définie par $f_{R^2}(u)=\frac{1}{2}e^{-\frac{u}{2}}1_{\mathbb{R}_+}(u)$, on reconnait une loi exponentielle $\mathcal{E}(\frac{1}{2})$.

5. Montrer que si Θ est la variable aléatoire telle que $X=R\cos(\Theta)$, $Y=R\sin(\Theta)$, alors Θ suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0;2\pi]$.

Soit h une fonction continue bornée quelconque :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(h(R,\Theta)) &= \iint \frac{1}{2\pi}h(r(x,y),\theta(x,y))e^{\frac{-x^2-y^2}{2}}dxdy \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} h(r,\theta)\frac{1}{2\pi}e^{-r^2}rdrd\theta \end{aligned}$$

Par identification, on en déduit qu'une densité du couple (R,Θ) est définie pour tout $(r,\theta)\in\mathbb{R}^2$ par :

$$g(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}re^{-r^2}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+\times[0;2\pi[}(r,\theta)$$

Pour obtenir la loi de Θ, il suffit de calculer pour tout $\theta\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f_\Theta(\theta) &= \int_{\mathbb{R}} g(r,\theta)dr \\ &= \frac{1}{2\pi}\mathbf{1}_{\times[0;2\pi[}(r,\theta) \end{aligned}$$

On en déduit que (R,Θ) est un couple de variables aléatoires indépendantes et que Θ suit une loi uniforme sur $[0;2\pi[$.

6. En déduire une simulation de la loi du couple (X,Y).

def Normale2() : theta = 2*pi*rand() r = sqrt(-2*log(rand())) return r*cos(theta),r*sin(theta)