On considère X_1, X_2 et X_3 trois variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur l'intervalle $[0, 2a]$, dont la densité est donc

$$f_{X_i}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & \text{si } 0 \leqslant t < 2a, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note F_X la fonction de répartition de X_i pour $i \in \{1, 2, 3\}$.

1. Calculer $\mathbb{E}(X_i)$ et $\mathrm{V}(X_i)$, pour $i \in \{1, 2, 3\}$. On considère la variable aléatoire $Y = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)$. Exprimer $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathrm{V}(Y)$ sans déterminer la loi de Y.

✓ Espérance de X_i :

$$\mathbb{E}(X_i) = \int_0^{2a} \frac{t}{2a}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{4a}t^2\right]_0^{2a} = \frac{4a}{(2a)^2} = a$$

Variance de X_i :

$$\mathbb{E}(X_i^2) = \int_0^{2a} \frac{t^2}{2a}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{6a}\right]_0^{2a} = \frac{6a}{(2a)^3} = \frac{4}{3}a^2$$
$$\mathrm{V}(X_i) = \mathbb{E}(X_i^2) - \mathbb{E}(X_i)^2 = \frac{4}{3}a^2 - a^2 = \frac{1}{3}a^2$$

Espérance de Y :

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{3}(\mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) + \mathbb{E}(X_3)) = a$$

Variance de Y :

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(Y) &= \frac{1}{9}\mathrm{V}(X_1 + X_2 + X_3) \\ &= \frac{1}{9}(\mathrm{V}(X_1) + \mathrm{V}(X_2) + \mathrm{V}(X_3)) \quad \text{car les va } X_i \text{ sont indépendantes} \\ &= \frac{a^2}{9}\end{aligned}$$

2. On pose $Z = \max(X_1, X_2, X_3)$. Justifier que la fonction de répartition F_Z de Z vérifie : $F_Z(t) = \prod_{i=1}^{3} F_{X_i}(t)$. En déduire qu'une densité de Z est :

$$f_Z(t) = \begin{cases} \frac{3}{(2a)^3}t^2 & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 2a, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

✓ Fonction de répartition de Z :

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_Z(t) &= \mathbb{P}(Z \leqslant t) \\ &= \mathbb{P}(\max(X_1, X_2, X_3) \leqslant t) \\ &= \mathbb{P}(\{X_1 \leqslant t\} \cap \{X_2 \leqslant t\} \cap \{X_3 \leqslant t\}) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \leqslant t)\mathbb{P}(X_2 \leqslant t)\mathbb{P}(X_3 \leqslant t) \quad \text{car les va } X_i \text{ sont indépendantes} \\ &= \prod_{i=1}^{3} F_{X_i}(t)\end{aligned}$$

Densité de Z :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_Z(t) = F_Z'(t) = 3F_{X_1}(t) \times f_{X_1}(t)$$

or

$$F_{X_1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{t}{2a} & \text{si } t \in [0; 2a] \\ 1 & \text{si } t > 2a \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} f_Z(t) &= \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \text{ ou } t > 2a \\ 3\left(\frac{t}{2a}\right)^2 \times \frac{1}{2a} & \text{si } t \in [0; 2a] \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \text{ ou } t > 2a \\ \frac{3}{(2a)^3}t^2 & \text{si } t \in [0; 2a] \end{cases}\end{aligned}$$

3. Calculer $\mathbb{E}(Z)$ et $\mathrm{V}(Z)$. Soit la variable aléatoire $T = \alpha Z$. Déterminer α de sorte que $\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(Y)$.

✓ Espérance de Z :

$$\mathbb{E}(Z) = \int_0^{2a} \frac{3}{(2a)^3}t^3\,\mathrm{d}t = \left[\frac{3}{4}\frac{1}{(2a)^3}t^4\right]_0^{2a} = \frac{3a}{2}$$

Variance de Z :

$$\mathbb{E}(Z^2) = \int_0^{2a} \frac{3}{(2a)^3}t^4\,\mathrm{d}t = \left[\frac{3}{5}\frac{1}{(2a)^3}t^5\right]_0^{2a} = \frac{12}{5}a^2$$
$$\mathrm{V}(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - \mathbb{E}(Z)^2 = \frac{12}{5}a^2 - \frac{9}{4}a^2 = \frac{3}{20}a^2$$

Détermination de α :

$$\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(Y) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha\mathbb{E}(Z) = a \quad \Leftrightarrow \quad \alpha\frac{3a}{2} = a \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{2}{3}$$

4. Comparer $\mathrm{V}(T)$ et $\mathrm{V}(Y)$.

✓ On a

$$\mathrm{V}(T) = \sigma^2\left(\frac{2}{3}Z\right) = \frac{4}{9}\mathrm{V}(Z) = \frac{4}{9} \times \frac{3}{20}a^2 = \frac{a^2}{15}.$$

Comme $\mathrm{V}(Y) = \frac{a^2}{9}$, on a $\mathrm{V}(T) < \mathrm{V}(Y)$.