e7W3 **Exercice** - *Loi exponentielle et loi géométrique*

Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On définit $Y = \lfloor X \rfloor$ la partie entière de X. On pose $Z = X - \lfloor X \rfloor$.

1. Déterminer la loi de probabilité de Y.

On peut remarquer que $Y(\Omega) = \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$,

$$\mathbb{P}(Y = n) = \mathbb{P}(n \leqslant X < n+1) = \int_n^{n+1} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \Big[-e^{-\lambda x}\Big]_n^{n+1} = e^{-\lambda n}(1 - e^{-\lambda}),$$

ce qui détermine entièrement la loi de Y : $Y+1$ suit une loi géométrique de paramètre $(1-e^{-\lambda})$.

2. Calculer $\mathrm{P}(n \leqslant X < n+t)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in]0;1[$. En déduire la fonction de répartition de Z.

$$\mathbb{P}(n \leqslant X \leqslant n+t) = \int_n^{n+t} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \Big[-e^{-\lambda x}\Big]_n^{n+t} = e^{-\lambda n} - e^{-\lambda(n+t)}.$$

On a $\{Z \in [0;t[\} = \cup_{n\in\mathbb{N}}\{n \leqslant X \leqslant n+t]$, la réunion étant disjointe. Ainsi, pour $t \in [0;1[$,

$$\mathbb{P}(0 \leqslant Z \leqslant t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(n \leqslant X \leqslant n+t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-\lambda n}(1 - e^{-\lambda t}) = \frac{1 - e^{-\lambda t}}{1 - e^{-\lambda}}.$$

Comme Z est à valeurs dans $[0;1[$, on a $F_Z(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ \frac{1-e^{-\lambda t}}{1-e^{-\lambda}} \text{ si } 0 \leqslant t < 1 \\ 1 \text{ si } t \geqslant 1 \end{cases}$.

3. Calculer l'espérance de Y et de Z.

Pour la variable aléatoire Y, on a

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\mathbb{P}(Y=n) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(e^{-\lambda n} - e^{-\lambda(n+1)}) = (1 - e^{-\lambda}) \sum_{n=0}^{+\infty} n e^{-\lambda n}.$$

On utilise la formule

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n t^n = t \sum_{n=0}^{+\infty} n t^{n-1} = t\left[\sum_{n=0}^{+\infty} t^n\right]' = t\left[\frac{1}{1-t}\right]' = \frac{t}{(1-t)^2}.$$

Il vient

$$\mathbb{E}(Y) = (1 - e^{-\lambda})\frac{e^{-\lambda}}{(1-e^{-\lambda})^2} = \frac{1}{e^{\lambda} - 1}.$$

Ce résultat était prévisible puisque $Y+1$ suit une loi géométrique $\mathcal{G}(1-e^{-\lambda})$, donc il est acquis que $\mathbb{E}(Y+1) = \frac{1}{1-e^{-\lambda}}$, d'où par linéarité $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{1-e^{-\lambda}} - 1 = \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}$.

Pour la variable aléatoire Z, on procède par linéarité : on sait que $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$ donc $\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}} = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{e^{\lambda}-1}$.
Par ailleurs, comme $\lambda < e^{\lambda} - 1$ pour $\lambda > 0$, on a $\frac{1}{\lambda} > \frac{1}{e^{\lambda}-1}$ et donc $\mathbb{E}(Z) > 0$, ce qui est cohérent car Z est à valeurs dans $[0;1]$.