64pg ▷ **Exercice** - *Sondage et confidentialité*

Pour préserver la confidentialité des opinions individuelles, un sondage est effectué avec le protocole suivant. Chaque personne sondée doit, avant de répondre «oui» ou «non» à la question posée, réaliser confidentiellement (elle seule connait le résultat) une variable de Bernoulli de paramètre a, $a \in]0;1[$ donné et connu du sondeur. Si le résultat est 1, la personne doit répondre à la question selon son avis. Si le résultat est 0, la personne doit répondre à la question selon le contraire de son avis.
On suppose que les personnes sondées suivent parfaitement ce protocole et l'on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la i-ème personne sondée répond «oui» et 0 si elle répond «non».
On note n le nombre de personnes sondées et p la proportion de personnes dont l'opinion personnelle est «oui» dans la population sondée. Soit q la probabilité qu'une personne sondée réponde «oui». Enfin, on suppose que $a \neq \frac{1}{2}$.

1. Exprimer q en fonction de p et a.
2. Vérifier que $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ est un estimateur de q sans biais et convergent.
3. On pose
$$T_n = \frac{\overline{X} - 1 + a}{2a - 1}$$
Calculer l'espérance et la variance de T_n.
4. Démontrer que T_n est un estimateur de p sans biais et convergent.
5. Justifier que la variable $\frac{T_n - p}{\sigma(T_n)}$ converge en loi vers la loi normale centrée réduite.
6. Donner une estimation de p par intervalle de confiance au niveau de confiance $1-\alpha$ que l'on notera I_α.
7. On fixe $a = \frac{1}{6}$, $n = 1000$ et on considère une réalisation de la variable aléatoire $\overline{X}$ égale à 0,425. Déterminer une réalisation de l'intervalle de confiance utilisé pour l'estimation de p au risque $\alpha = 0{,}05$ (on pourra utiliser la majoration $q(1-q) \leqslant \frac{1}{4}$).