LBLK ⊳ **Exercice** - *Différentiabilité*

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-3x^3+5y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?

Notons tout d'abord que f est une fraction rationnelle sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ donc elle y est définie et C^∞. Comme f est par ailleurs définie en $(0,0)$, on a $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2$.
Pour étudier la continuité en $(0,0)$, on étudie la différence $f(x,y) - f(0,0)$ et on passe comme souvent en coordonnées polaires.

$$\begin{aligned} f(r\cos\theta, r\sin\theta) - f(0,0) &= \frac{-3(r\cos\theta)^3 + 5(r\sin\theta)^3}{(r\cos\theta)^+(r\sin\theta)^2} \\ &= \frac{r^3(-3\cos^3\theta + 5\sin^3\theta)}{r^2} \\ &= r(-3\cos^3\theta + 5\sin^3\theta) \end{aligned}$$

On obtient la majoration

$$\begin{aligned} |f(r\cos\theta, r\sin\theta) - f(0,0)| &\leqslant r(|-3\cos^3\theta| + 5|\sin^3\theta)|) \\ &\leqslant (3+5)r \\ &\underset{r\to 0_+}{\longrightarrow} 0 \text{ indépendamment de } \theta \end{aligned}$$

Ainsi $f(x,y) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} f(0,0)$, ce qui prouve que $\boxed{f \text{ est continue en } (0,0).}$

2. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$.

Pour $(x,y) \neq (0,0)$, on est dans le cas d'un point sans problème. Les dérivées partielles existent et se calculent en appliquant les formules classiques de dérivation

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\dfrac{\partial}{\partial x}\left[-3x^3+5y^3\right](x^2+y^2) - (-3x^3+5y^3)\dfrac{\partial}{\partial x}\left[x^2+y^2\right]}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{(-9x^2)(x^2+y^2) - (-3x^3+5y^3)(2x)}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{-3x^4 - 9x^2y^2 - 10xy^3}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{\dfrac{\partial}{\partial y}\left[-3x^3+5y^3\right](x^2+y^2) - (-3x^3+5y^3)\dfrac{\partial}{\partial y}\left[x^2+y^2\right]}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{(15y^2)(x^2+y^2) - (-3x^3+5y^3)(2y)}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{6x^3y + 15x^2y^2 + 5y^4}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

3. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

Le point $(0,0)$ est un point à problème. Comme précédemment, hors de question d'utiliser la question 2 et de remplacer x et y par 0, ou de les faire tendre vers 0. Cette méthode serait pertinente si on savait **a priori** que les dérivées partielles sont prolongeables par continuité, mais ce n'est pas le cas et cela fait d'ailleurs l'bjet de la question suivante.
On retiendra qu'en général ce n'est pas un très bon réflexe de se lancer dans cette voie.
Le plus propre et le plus sur est de revenir à la définition en étudiant les taux d'accroissement.

$$\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \frac{-3h^3/h^2 - 0}{h} = -3 \underset{h\to 0}{\longrightarrow} -3, \text{ donc } \boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -3}$$

et

$$\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \frac{5k^3/k^2}{h} = 5 \underset{k\to 0}{\longrightarrow} 5 \text{ donc } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 5$$

4. La fonction f est-elle de classe C^1 en $(0,0)$?

Pour établir si f est C^1 en $(0,0)$, nous devons étudier

— si $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ (resp. $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$) admet une limite quand $(x,y) \to (0,0)$ puis

— si cette limite est égale à $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -3$ (resp. à $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 5$)

Regardons les limites de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ quand $(x,y) \to (0,0)$ selon 3 chemins : la droite $y = 0$, la droite $x = 0$, la droite $x = y$. Nous avons :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) \to -3, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,y) \to 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,x) \to -\frac{11}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) \to 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,y) \to 5, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,x) \to -\frac{13}{2}$$

Ainsi ni $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ ni $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ n'admettent de limites quand $(x,y) \to (0,0)$. A fortiori elles ne sont pas continues en $(0,0)$ donc $\boxed{f \text{ n'est pas } C^1 \text{ en } (0,0)}$

5. La fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$?

On suit la méthode du poly, chap. 2, § II.6. Comme f admet des dérivées partielles en $(0,0)$, f peut être différentiable en $(0,0)$ et si elle l'est sa différentielle $\mathrm{d}f(0,0)$ sera nécessairement égale à $-3\mathrm{d}x + 5\mathrm{d}y$. Puisque f n'est pas C^1, on ne peut pas conclure directement à la différentiabilité et il faut étudier la limite de

$$\frac{f(h,k) - f(0,0) - [(-3)h + 5k]}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

quand $(h,k) \to (0,0)$. Or

$$\begin{aligned} \frac{f(h,k) - f(0,0) - (-3h+5k)}{\sqrt{h^2+k^2}} &= (\text{passage en polaires } h = r\cos\theta, k = r\sin\theta) \\ &= \frac{r(-3\cos^3\theta + 5\sin^3\theta) + 3r\cos\theta - 5r\sin\theta}{r} \\ &= -3\cos^3\theta + 5\sin^3\theta + 3\cos\theta - 5\sin\theta \end{aligned}$$

Cette quantité n'a pas de limite quand $r \to 0_+$ puisqu'elle dépend de θ. A fortiori, elle ne tend pas vers 0, ce qui signifie par définition que $\boxed{f \text{ n'est pas différentiable en } (0,0).}$