Ex

Loi géométrique et estimation par maximum de vraisemblance

On fixe un réel $a > 0$ et on définit une variable aléatoire X sur $\mathbb{N}$ dont la loi de probabilité est définie par

$$\mathrm{P}(X = k) = \frac{a^k}{(1+a)^{k+1}}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Á l'aide de la méthode du maximum de vraisemblance, définir un estimateur de a et déterminer son biais.

✓

On définit un échantillon $X_1, \dots, X_n$ et on considère la probabilité que cet échantillon réalise un ensemble de valeurs $V = \{x_1, \dots, x_n\}$. La fonction de vraisemblance s'écrit alors

$$L(x_1, \dots, x_n, a) = \mathrm{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{P}(X = x_k) = \prod_{k=1}^{n} \frac{a^{x_k}}{(1+a)^{x_k+1}} = \frac{a^{\sum x_k}}{(1+a)^{\sum x_k + 1}}$$

On dérive ce quotient par rapport à a, on factorise par $a^{\sum x_k - 1}(1+a)^{n+\sum x_k - 1}$ et on trouve que

$$\frac{\partial L}{\partial a}(x_1, \dots, x_n, a) = 0 \iff \sum_{k=0}^{n} x_k(1+a) - a(n + \sum_{k=0}^{n} x_k) = 0 \iff a = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} x_k$$

On a donc trouvé un meilleur estimateur du paramètre a selon la méthode du maximum de vraisemblance : il s'agit de l'estimateur $T = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} X_k$.
Reste à calculer le biais de cet estimateur, autrement dit à calculer $B(T) = \mathbb{E}(T - a)$. Or pour tout entier i, X_i suit la loi définie ci-dessus et on espérance se calcule de la manière suivante :

$$\mathbb{E}(X_i) = \sum_{k=0}^{n} k\mathrm{P}(X_i = k) = \sum_{k=0}^{n} k\left(\frac{a}{1+a}\right)^{k-1} \frac{a}{(1+a)^2} = \frac{1}{\left(1 - \frac{a}{1+a}\right)^2} \times \frac{a}{(1+a)^2} = a$$

Donc $B(T) = \frac{1}{n} \times n \times a - a = 0$: la variable T est donc un estimateur sans biais du paramètre a.