On considère deux files d'attente indépendantes. Deux personnes arrivent simultanément et se présentent respectivement aux deux files d'attente. On note X le temps d'attente de la première personne, Y le temps d'attente de la seconde personne, en minutes. On supposera que X et Y suivent chacune une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 2$.

1. Quel est le temps d'attente moyen pour chaque personne ?

✓

Puisque X et Y suivent chacune une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 2$, on a $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 0.5$ minutes, ce qui donne le temps d'attente moyen pour chaque personne.

2. Quelle est la densité de la variable X^2 ? la variable $-Y$?

✓

Pour obtenir la loi de X^2, on cherche sa densité par identification. Soit h une fonction continue bornée quelconque :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(h(X^2)) &= \int_0^{+\infty} h(x^2)2e^{-2x}dx \\ &= \int_0^{+\infty} 2h(u)e^{-2\sqrt{u}}\frac{1}{2\sqrt{u}}du\end{aligned}$$

Par identification, on en déduit une densité de X^2 définie par $f_{X^2}(x) = \frac{e^{-2\sqrt{u}}}{\sqrt{u}}1_{\mathbb{R}_+}(x)$.
On procède de même pour obtenir la loi de $-Y$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(h(-Y)) &= \int_0^{+\infty} h(-x)2e^{-2x}dx \\ &= \int_0^{-\infty} 2h(u)e^{2u} \times (-du) \\ &= \int_{-\infty}^{0} 2h(u)e^{2u}du\end{aligned}$$

Par identification, on en déduit une densité de $-Y$ définie par $f_{-Y}(y) = 2e^{2y}1_{\mathbb{R}_-}(y) = f_Y(-y)$.

3. Calculer la probabilité que la différence d'attente entre les deux personnes soit inférieure à 1 minute.

✓

On calcule $\mathrm{P}(|X-Y| < 1) = \mathrm{P}(-1 < X - Y < 1)$ en utilisant la loi du couple (X, Y). Par indépendance de X et Y, le couple (X, Y) admet pour densité $g(x, y) = 2e^{-2x} \times 2e^{-2y}1_{\mathbb{R}_+^2}(x, y)$. La probabilité cherchée est

$$\mathrm{P}(|X-Y| < 1) = \iint_D g(x,y)dxdy$$

où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0, -1 < x - y < 1\} = \{y \in [0; 1], x \in [0; 1 + y]\} \cup \{y \in]1; +\infty, x \in [-1 + y; 1 + y]\}$.
On utilise cette décomposition du domaine D pour écrire l'intégrale sous forme d'une somme :

$$\begin{aligned}\iint_D g(x,y)dxdy &= \int_0^1 \int_0^{1+y} 2e^{-2x}dx2e^{-2y}dy &&+ \int_1^{+\infty}\int_{y-1}^{y+1} 2e^{-2x}dx2e^{-2y}dy \\ &= \int_0^1 2e^{-2y}(1-e^{-2(1+y)})dy &&+ \int_1^{+\infty}(e^{-2(y-1)} - e^{-2(y+1)})(1-e^{-2(1+y)}) \\ &= 1 - \frac{3}{2}e^{-2} + \frac{1}{2}e^{-6} &&+ \frac{1}{2}e^{-2} - \frac{1}{2}e^{-6} \\ &= 1 - e^{-2}\end{aligned}$$