

Étudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

$$1. \quad u_n = \frac{n}{n^3+1}$$

$$2. \quad u_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$$

$$3. \quad u_n = n \sin \left(\frac{1}{n} \right)$$

$$4. \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

$$5. \quad u_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$$

$$6. \quad u_n = \frac{(-1)^n+n}{n^2+1}$$

$$7. \quad u_n = \frac{1}{n!}$$

$$8. \quad u_n = \ln \left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1} \right)$$

Indications : Pour la question 5., utiliser la quantité conjuguée, i.e. multiplier le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$. Pour la question 7., utiliser l'inégalité $n! \geq 2^{n-1}$. Pour la question 8., utiliser un équivalent de $\ln(1+x)$ en 0.