

Soit la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \frac{x + y}{x^2 + y^2}$$

1. Donner l'ensemble de définition de f .

La fonction f est définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x^2 + y^2 \neq 0$, c'est-à-dire $(x, y) \neq (0, 0)$.
L'ensemble de définition est donc $\mathcal{D}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) \neq (0, 0)\}$.

2. Montrer que la courbe de niveau $k = 0$ est une droite dont on précisera l'équation.

$f(x, y) = 0 \iff y = -x$, la courbe de niveau 0 est donc la droite d'équation $y = -x$.

3. Quelle est la forme des courbes de niveau $k \neq 0$?

Soit $k \neq 0$: $f(x, y) = k \iff x + y = k(x^2 + y^2) \iff x^2 + y^2 - \frac{1}{k}x - \frac{1}{k}y = 0$, la courbe de niveau k est donc un cercle.

4. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0)$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, -x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \begin{cases} +\infty & \text{si } x > 0 \\ -\infty & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

$$\text{De même, } \lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{2x^2} = \begin{cases} +\infty & \text{si } x > 0 \\ -\infty & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

$$\text{Enfin, } \lim_{x \rightarrow 0} f(x, -x) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0.$$

5. Peut-on prolonger la fonction f en $(0, 0)$ afin qu'elle soit continue en $(0, 0)$? Justifier.

Pour pouvoir prolonger la fonction f en $(0, 0)$ afin qu'elle soit continue en $(0, 0)$, il faudrait que f admette une limite quand $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. D'après la question précédente, ce n'est pas le cas.