Fonctions de plusieurs variables et optimisation

ACADÉMIE MILITAIRE SAINT-CYR COËTQUIDAN

Ex 1 - Fonction deux variables

qGRj

On considère la fonction $f(x,y) = x^3 - 3x^2y + y^3$.

1. Calculer les dérivées partielles de cette fonction.
2. Rechercher alors les points critiques de cette fonction.
3. Calculer la Hessienne : pouvez-vous alors conclure à la nature du ou des points critiques de cette fonction ?
4. En étudiant $f(x,x)$, montrer que f n'admet aucun extremum local.

Ex 2 - Fonction deux variables

o5At

Déterminer les extrémums locaux des applications suivantes définies sur $\mathbb{R}^2$:

1. $f(x,y) = 4x + 2y - x^2 - y^2 - 2x^3$
2. $g(x,y) = xy + x^3y^2$

Ex 3 - Optimisation simple

kzF4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{-x}$$

1. Justifier (rapidement) que cette fonction est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Trouver les points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$.
3. Trouver les extrema locaux de f sur $\mathbb{R}^2$.

Ex 4 - Problème concret

nSSt

On désire fabriquer par une imprimante 3D une boite ayant la forme d'un parallélépipède rectangle, sans couvercle sur le dessus. Le volume de cette boite doit être égal à $0,5m^3$. Pour minimiser la quantité de matière utilisée, on désire que la somme des aires des faces soit minimale. Quelles dimensions doit-on choisir pour fabriquer la boite ?

Indication : Se ramener à un problème d'optimisation d'une fonction de deux variables.

Ex 5 - Un problème d'extrema

ebva

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2/x & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$.
2. Montrer que f admet des dérivées partielles au point $(0;0)$.

Ex 6 - Optimisation sans contrainte

VuTl

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2.$$

1. Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2_+$ (et les déterminer) tels que, pour tout $(x,y) \in R^2$, si $\|.\|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) \geqslant \alpha \|(x,y)\|^2 + \beta$$

2. En déduire que f admet (au moins) un minimum global sur $\mathbb{R}^2$.
3. Calculer la matrice Hessienne de f et l'évaluer au point $(0,0)$. La fonction f est-elle convexe sur $\mathbb{R}^2$?

   Déterminer les points critiques de f et préciser leur nature (minimum ou maximum local, point selle...
4. En déduire le minimum de f sur $\mathbb{R}^2$.

Ex 7 - Optimisation sous contrainte (1)

6xzp

Nous allons ici étudier, pas à pas, la résolution d'une question d'optimisation sous-contraintes. Nous souhaitons déterminer le maximum de la fonction $f : (x,y) \mapsto x^2 + y^2$ sous la contrainte $x^4 + y^4 = 1$.

1. Justifier que la courbe $\Gamma : x^4 + y^4 = 1$ est un compact de $\mathbb{R}^2$.

   Que pouvez-vous en déduire pour la fonction f ?
2. Posons la fonction $g : (x,y) \mapsto x^4 + y^4 - 1$, représentant la contrainte. Ainsi, Γ est l'ensemble des $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $g(x,y) = 0$.

   Soit $(x_0; y_0) \in \Gamma$ un point tel que $f|_\Gamma$ admet un maximum en $(x_0; y_0)$. Que pouvez-vous dire (intuitivement) de la dérivée directionnelle de f en $(x_0; y_0)$ dans n'importe quelle direction tangentielle à Γ en $(x_0; y_0)$?
3. Pour $u \in \mathbb{R}^2$, on désigne par $D_u f(x_0; y_0)$ la dérivée directionnelle de f dans la direction du vecteur u et par ∇f son gradient. On rappelle que

$$D_u f(x_0; y_0) = \nabla f(x_0; y_0) \cdot u$$

   Que pouvez-vous alors dire du gradient de f en $(x_0; y_0)$ par rapport au vecteur u si celui-ci est tangent à Γ en $(x_0; y_0)$?
4. En déduire alors la colinéarité de $\nabla f(x_0; y_0)$ et $\nabla g(x_0 : y_0)$, et exploiter cette condition pour obtenir les couples solutions possibles du système.

Ex 8 - Optimisation sous contrainte (2)

PI1u

Soient a et b deux réels strictement positifs. En réutilisant la méthode précédente, déterminer le maximum de la fonction $f : (x, y) \mapsto xy$ sous la contrainte $\Gamma : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Ex 9 - Optimisation sous contrainte (3)

wlig

A présent, nous allons introduire un outil permettant d'aller plus vite dans la résolution de ces problèmes : le Lagrangien. Si l'on souhaite étudier les extremums de la fonction f soumise à la contrainte $g(x, y) = 0$, on introduit le Lagrangien $L(x, y, \lambda)$ défini par :

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

Donnons un exemple d'étude pour étudier les extremas de la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4xy$ sous la contrainte $x^2 + y^2 = 8$.

1. Ecrire le Lagrangien associé à ce problème d'optimisation sous contrainte.
2. Déterminer ses points stationnaires (ie. vérifiant $\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$.
3. Donner l'équation de l'espace vectoriel tangent T à la courbe de contrainte en chacun des points critiques.
4. On désigne par $H_L(x, y)$ la hessienne de la fonction L, vue comme fonction de deux variables. On définit alors la forme quadratique $Q(u, v)$ associé au Lagrangien par

$$Q(u, v) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \cdot H_L \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad H_L(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

   Donner une expression de $Q(u, v)$.
5. Pour chacun des points critiques obtenus précédemment, déterminer sa nature en étudiant la forme quadratique $Q(u, v)$, pour $(u, v) \in T$ un vecteur tangent à la contrainte en ce point. On utilisera le fait que si $Q(u, v) > 0$, ce point est un minimum alors que si $Q(u, v) < 0$, ce point est un maximum.

Ex 10 - Optimisation sous contrainte (4)

eAky

En vous aidant de la méthode développée à l'exercice précédent, trouver les extremums de la fonction $f(x, y) = x^3 + y^3$ sous la contrainte $x^2 + y^2 = 4$.

Ex 11 - Regression linéaire

ycEr

On dispose d'observations $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$. On cherche les "meilleurs" coefficients a et b tels que pour chaque observation, on ait $y_i \approx ax_i + b$. Ce problème est appelé régression linéaire simple.

Pour mesurer la qualité des paramètres (a, b), on souhaite que l'écart entre y_i et $ax_i + b$ soit faible pour chaque observation. Pour quantifier l'erreur, on utilise le risque quadratique :

$$R(a,b) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - (ax_i + b))^2.$$

Le problème est de minimiser la fonction $R(a,b)$.

1. Montrer que :

$$R(a,b) = a^2\sum_{i=1}^{n}x_i^2 + 2ab\sum_{i=1}^{n}x_i + b^2n - 2a\sum_{i=1}^{n}x_iy_i - 2b\sum_{i=1}^{n}y_i + \sum_{i=1}^{n}y_i^2.$$

2. Montrer que le gradient de R s'écrit :

$$(\nabla R)(a,b) = \begin{pmatrix} 2a\sum_{i=1}^{n}x_i^2 + 2b\sum_{i=1}^{n}x_i - 2\sum_{i=1}^{n}x_iy_i \\ 2a\sum_{i=1}^{n}x_i + 2bn - 2\sum_{i=1}^{n}y_i \end{pmatrix}. \tag{1}$$

3. Montrer que R possède un unique point critique (a^*, b^*) que l'on exprimera à l'aide des x_i et des y_i.
4. Montrer que la hessienne de R s'écrit :

$$\mathrm{Hess}_R(a,b) = \begin{pmatrix} 2\sum_{i=1}^{n}x_i^2 & 2\sum_{i=1}^{n}x_i \\ 2\sum_{i=1}^{n}x_i & 2n \end{pmatrix}.$$

5. À l'aide de la question précédente et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que la fonction R est convexe.

Ex 12 - Optimisation quadratique, moindres carrés

rsjs

Soit $N \in \mathbb{N}^*$, et $\{(t_i, x_i)\}_{1\leqslant i\leqslant N}$ un nuage de points. On cherche à déterminer les coefficients a, b et c de la parabole P d'équation $y = at^2 + bt + c$ qui minimise la somme des carrés des distances des points (t_i, x_i) à cette parabole.

1. Écrire ce problème comme un problème de minimisation quadratique, c'est-à-dire un problème de la forme

$$\inf_{X\in\mathbb{R}^n} J(X) \quad \text{avec} \quad J(X) = \frac{1}{2}\langle AX, X\rangle - \langle b, X\rangle,$$

avec $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$. On devra donc expliciter n, A, et b. On utilisera la notation $S_k = \sum_{i=1}^{N} t_i^k$.
2. Discuter de l'existence des solutions d'un tel problème.
3. On suppose que la matrice A est définie positive. Démontrer que ce problème possède une unique solution.

Ex 13 - Optimisation quadratique, moindres carrés

YUNF

On considère la fonction f définie sur $[-1,1]$ par $f(x) = x^3$. L'espace $\mathcal{C}^0([-1,1])$ est muni du produit scalaire $\langle h, g\rangle = \int_{-1}^{1} h(x)g(x)dx$ et on note $\|h\|^2 = \int_{-1}^{1} h(x)^2dx$ la norme associée.
On cherche à déterminer le polynôme P de degré inférieur ou égal à 1 qui approche le mieux la

fonction f sur l'intervalle $[-1, 1]$, au sens des moindres carrés. Autrement dit, on veut minimiser l'erreur $\|f - P\|^2$.

1. Mettre ce problème sous la forme d'un problème de moindres carrés de dimension finie. Quelle est cette dimension ?
2. Étudier l'existence/l'unicité des solutions de ce problème.
3. Résoudre ce problème.

Ex 14 - Convergence de la descente de gradient

FH8I

On va prouver le théorème suivant :

Théorème : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle qu'il existe deux constantes $K, c > 0$ vérifiant $c < f''(x) \leqslant K$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On considère la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $x_0 \in \mathbb{R}$ et par $x_{n+1} = x_n - \gamma f'(x_n)$, où le pas γ vérifie $0 < \gamma < 2/K$. Alors :

— La suite $(f(x_n))_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

— La suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers l'unique point critique de f.

1. Pour $n \geqslant 0$ fixé, on pose $\phi(t) = f(x_n - tf'(x_n))$.
   (a) Montrer qu'il existe $\theta \in]0, t[$ tel que $\phi(t) = \phi(0) + t\phi'(0) + \frac{t^2}{2}\phi''(\theta)$.
   (b) Montrer que $\phi'(0) = -f'(x_n)^2$ et $\phi''(\theta) \leqslant f'(x_n)^2 K$.
   (c) Montrer que $\phi(t) \leqslant \phi(0)$ pour tout $0 \leqslant t < 2/K$.
   (d) En déduire que $f(x_{n+1}) \leqslant f(x_n)$.
2. On introduit la fonction $g(x) = x - \gamma f'(x)$.
   (a) On pose $M = \sup_{x\in\mathbb{R}} |g'(x)|$. Montrer que $M \leqslant \max(|1 - \gamma c|, |1 - \gamma K|)$, puis que $M < 1$.
   (b) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a $|x_{n+1} - x_n| = |g(x_n) - g(x_{n-1})| < M|x_n - x_{n-1}|$.
   (c) Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente (on pourra considérer la série $\sum x_{n+1} - x_n$).
   (d) Montrer que la limite l de la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$. Montrer que $f'(l) = 0$.
   (e) Montrer que f ne possède qu'un seul point critique.