Exercice - *Densité et transformation affine*

Soit X une variable aléatoire absolument continue admettant pour densité f. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a > 0$.

Démontrer que $Y = aX+b$ est une variable aléatoire absolument continue et exprimer sa densité en fonction de f.

On utilise le théorème d'identification. La densité f_Y de Y est l'unique fonction telle que pour toute fonction h continue bornée, on ait

$$\mathbb{E}(h(Y)) = \int_{\mathbb{R}} h(y) f_Y(y)\ dy.$$

Or, étant donné h, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(h(Y)) &= \mathbb{E}(h(aX+b)) \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(ax+b) f_X(x)\ dx \quad \text{(par le théorème de transfert)} \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(y) f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \frac{1}{a} dy \quad \text{(par changement de variable } y = ax+b) \end{aligned}$$

d'où son identification

$$f_Y(y) = \frac{1}{a} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right).$$