

### Exercice - Densité, fonction de répartition

On considère la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}(1-x)^{\frac{1}{3}} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que  $f$  est une densité d'une variable aléatoire  $Y$ .

Il faut et il suffit de vérifier que  $f$  est positive intégrable et  $\int_{\mathbb{R}} f = 1$ . Le premier point est immédiat. La fonction  $f$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$  car elle est continue par morceaux à support compact. Enfin, on a

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_0^1 \frac{4}{3}(1-x)^{1/3}dx = \left[ -(1-x)^{4/3} \right]_0^1 = 1.$$

2. Déterminer la fonction de répartition  $F$  de la variable  $Y$ .

Par définition, pour tout  $y \in \mathbb{R}$ , on a  $F_Y(y) = \int_{-\infty}^y f(t)dt$ . Alors

- si  $y < 0$ ,  $F_Y(y) = 0$ ,
- si  $0 \leq y \leq 1$ ,  $F_Y(y) = \int_0^y \frac{4}{3}(1-x)^{1/3}dx = \left[ -(1-x)^{4/3} \right]_0^y = 1 - (1-y)^{4/3}$
- si  $y > 1$ ,  $F_Y(y) = 1$ .

3. Calculer l'espérance de la variable  $Y$ .

L'espérance de  $Y$  se calcule de la manière suivante:

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{\mathbb{R}} yf(y)dy = \int_0^1 \frac{4}{3}y(1-y)^{1/3}dy,$$

et par intégration par parties,

$$\mathbb{E}(Y) = \left[ -y(1-y)^{4/3} \right]_0^1 + \int_0^1 (1-y)^{4/3}dy = \left[ \frac{-3}{7}(1-y)^{7/3} \right]_0^1 = \frac{3}{7}.$$

4. Calculer la probabilité de l'événement  $[0.488 < Y \leq 1.2]$ .

Méthode 1:

$$\begin{aligned} P(0.488 < Y < 1.2) &= \int_{0.488}^{1.2} f(y)dy = \int_{0.488}^{1.2} \frac{4}{3}(1-y)^{1/3}dy = \left[ -(1-y)^{4/3} \right]_{0.488}^1 \\ &= (1 - 0.488)^{1/3} = 0.8 \end{aligned}$$

Méthode 2:

$$\begin{aligned} P(0.488 < Y < 1.2) &= F_Y(1.2) - F_Y(0.488) \\ &= 1 - [1 - (1 - 0.488)^{1/3}] \\ &= (1 - 0.488)^{1/3} \\ &= 0.8 \end{aligned}$$