Лекции 1 и 2
Теория случайных процессов
Программа AI360, Университет Иннополис

Сергей МАЙОРГА ТАТАРИН

31 января 2026 г.

1 Вводные понятия

Определение 1.1. *(Случайный процесс) Пусть $(\Omega, \mathscr{F})$ — измеримое пространство, T — любое множество.* Вещественно-значным случайным процессом на T *назовем функцию $\xi = \xi(t, \omega)$ от двух перемен $t \in T$, $\omega \in \Omega$ такая, что для каждого фиксированного t, функция $\omega \mapsto \xi(t, \omega)$ из Ω в $\mathbb{R}$ является случайной величиной.*

Чаще всего переменная t пишется как нижний индекс:

$$\xi(t, \omega) = \xi_t(\omega).$$

Если T состоит только из одной точки, то случайный процесс «вырождается» в одну только случайную величину. Если T, например, равно множеству $\{1, 2, 3\}$ то мы имеем дело с трехмерным случайным вектором. Если $T = I$ где $I \subset \mathbb{R}$ — интервал, то мы имеем дело с процессом «в непрерывном времени»: в большинстве случаев, в самом деле, множество T интерпретируется как «время», и тогда ξ_{t_1}, ξ_{t_2}, и т. д. интерпретируются как (случайные, ибо они еще зависят от ω) значения процесса в моменты времени t_1, t_2 и т. д.

Конкретные и простейшие примеры случайных процессов будут приведены ниже. Одна из первых целей *теории* случайных процессов — их математически строгое построение.

Стоит напомнить о понятии измеримости функции. Если $(\Omega, \mathscr{F})$ и $(Y, \mathcal{Y})$ измеримые пространства (множества X и Y с σ-алгебрами $\mathscr{F}$ и $\mathcal{Y}$ соответственно) и $f : \Omega \to Y$ функция, то она называется измеримой когда для всякого $E \in \mathcal{Y}$,

$$\{\omega \in \Omega \ : \ f(\omega) \in E\} \in \mathscr{F} \tag{1}$$

для всех $E \in \mathcal{Y}$. Случайная величина, напомним, это как раз измеримая функция из Ω в $Y = \mathbb{R}$, где $\mathcal{Y} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Понятие распределения случайного вектора Нам необходимо владеть понятием *образа меры.*

Определение 1.2. *(Образ меры) Пусть $(X, \mathcal{X})$ и $(Y, \mathcal{Y})$ измеримые пространства (множества X и Y с σ-алгебрами $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ соответственно) и $f : X \to Y$ измеримая функция, а μ — мера на $\mathcal{Y}$. Тогда* образом меры μ под функцией f *называется мера на $\mathcal{Y}$, обозначаемая через μ_f, удовлетворяющая:*

$$P_f(E) = \mu(f^{-1}(E)), \qquad E \in \mathcal{Y}.$$

Другие обозначения: $f_{\#}\mu$, $\mu \circ f^{-1}$. В случае, когда $\mu = \mathbb{P}$, обозначают и через P_f.

Символ f^{-1} в этой формуле не обозначает обратную функцию от f, которой может не быть. Символ $f^{-1}(E)$ обозначает прообраз множества E, то есть, множество точек x из X такие, что $f(x) \in E$.

Можно сказать, что путем функции f мы «воспроизводим» меру μ, «перенося» μ, определена на исходном пространстве, на конечное пространство таким образом, что новая мера μ_f на конечном пространстве «отражает» меру μ, принимая такие же значения на тех измеримых подмножествах множества Y, как и мера μ на подмножествах множества X, которые находятся в соответствии с ними через функцию f.

Определение 1.3. *(Распределение случайного вектора) Пусть* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ *— вероятностное пространство и* $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^d$ $(d \geq 1)$ *— случайный вектор. Его* распределением *называется мера* $P_\xi = \xi_\# \mathbb{P}$ *на борелевской* σ*-алгебре* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

У любого случайного вектора ξ есть распределение (как и функция распределения F_ξ).

Пример 1.4. (Распределение вырожденного случайного вектора есть мера Дирака) Пусть $\xi(\omega) = x$ для всех $\omega \in \Omega$, где $x \in \mathbb{R}^d$ — фиксированный. Тогда, если $x \in B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$:

$$P_\xi(B) = \mathbb{P}(\xi^{-1}(B)) = \mathbb{P}(\Omega) = 1,$$

а если $x \notin B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, тогда

$$P_\xi(B) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0.$$

Получается, что $P_\xi = \delta_x$, что называется мерой Дирака сосредоточена в точке x. $\triangle$

Семинарная задача 1.1. Пусть $\Omega = [0,1]$, $\mathscr{F} = \mathcal{B}([0,1])$ (борелевская σ-алгебра на интервале $[0,1]$) и $\mathbb{P} = \mathscr{L}^1_{[0,1]}$ (лебеговская мера на σ-алгебре $\mathcal{B}([0,1])$). Возьмем такую случайную величину:

$$\xi(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{если } 0 \leq \omega < 1/3, \\ 1 & \text{если } 1/3 \leq \omega < 2/3. \end{cases}$$

Найти P_ξ (распределение случайной величины ξ). $\triangleleft$

Примечание 1.5. Из теории вероятности известно, что знание функции распределения $F_{(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_d)}$ случайного вектора $(\xi_1, \ldots, \xi_d)$ однозначно определяет его распределение, и, наоборот, знание распределения $P_{\xi_1,\ldots,\xi_n}$ определяет функцию вероятности $F_{\xi_1,\ldots,\xi_d}$ (см. [Шир21, II-3-Теорема 2]) $\diamond$

Замена переменных в интеграле Лебега Важное свойство образа $f_\# \mu$ меры μ под измеримой функцией $f : \Omega \to X$ относится к интеграции функции g из множества X в $\mathbb{R}$, являющейся интегрируемой относительно $f_\# \mu$, потому, что в таком случае, имеет место формула

$$\int_X g(x)(f_\# \mu)(dx) = \int_\Omega g \circ f(\omega) \mu(d\omega). \tag{2}$$

(см. [Шир21, II-6-Теорема 7]). Справедливо задаться вопросом — а как понять, что функция $g : X \to \mathbb{R}$ интегрируема по мере $f_\# \mu$, но ответ находится в самом этом только что озвученном факте, потому, что если g — f_μ-интегрируема, то (2) верно, и можно тогда проверить значения интегралов, скажем, положительной g^+ и отрицательной g^- частей функции g по $f_\# \mu$ через правую часть уравнения (2); если оба значения получаться конечными, тогда это значит, что g является $f_\# \mu$-измеримой.

Из формулы (2) следует, например, что для случайной величины $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$,

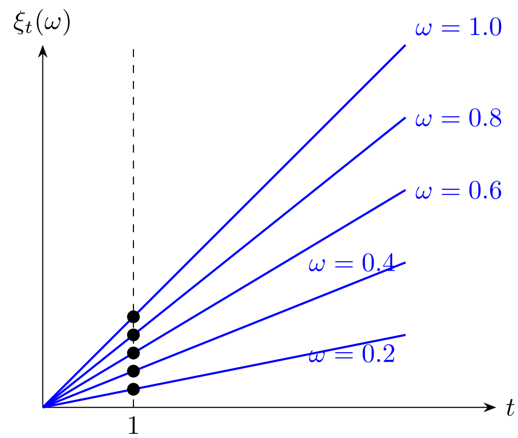
$$\mathbb{E}\xi = \int_{\mathbb{R}} x P_\xi(dx), \qquad \mathrm{Var}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} (x - \mathbb{E}\xi)^2 P_\xi(dx),$$

в случае, конечно, когда $\mathbb{E}\xi$ и $\mathbb{E}\xi^2$, соответственно, существуют, что зависит от конечности интегралов $\int_\Omega |\xi(\omega)| \mathbb{P}(d\omega)$ и $\int_\Omega \xi^2(\omega) \mathbb{P}(d\omega)$. Однако, как известно, если конечно значение второго интеграла, то конечно значение и первого.

Определение 1.6. *(Сечения и выборочные траектории) Пусть* $(\xi_t)_{t\in T}$ *случайно процесс, задан на* $(\Omega, \mathscr{F})$. *Если* $t \in T$ *фиксируется, то* сечением *в момент времени* t *есть случайная величина* ξ_t. *Если* $\omega \in \Omega$ *фиксируется, то функция* $t \mapsto \xi_t$ *называется* выборочной траекторией *или просто траекторией.*

Множество Ω содержит, как это принято истолковывать, все возможные элементарные события. В этом смысле, исходу $\omega \in \Omega$ соответствует целая функция (траектория) $t \mapsto \xi_t(\omega)$. Поэтому случайный процесс можно понимать как случайную функцию из T в Ω, ведь каждая траектория — случайная, зависит от ω. А можно понимать случайный процесс и как семейство (индексировано точками $t \in T$) случайных величин. Обозначение процесса через $(\xi_t)_{t\in T}$ наводит мысль на эту, вторую интерпретацию, нежели интерпретации в терминах выборочных траекторий.

Пример 1.7. Рассмотрим процесс $\xi_t(\omega) = t\omega$, $t \in T = [0,\infty)$, $\omega \in \Omega = [0,1]$. В качестве вероятностного пространства здесь рассматриваем тройку $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, где пространство исходов $\Omega = [0,1]$, σ-алгебра $\mathscr{F}$ является борелевской: $\mathscr{F} = \mathcal{B}([0,1])$, а вероятностная мера совпадает с мерой Лебега на отрезке $[0,1]$, которую обозначаем через $\mathscr{L}^1_{[0,1]}$. Тогда при фиксированном $\omega_0 \in [0,1]$ траектория представляет собой линейную функцию $\xi_t(\omega_0) = \omega_0 t$, принимающую значение ноль в момент $t = 0$ и значение ω_0 в момент $t = 1$. Если же зафиксировать $t_0 \in (0,1]$, то получится случайная величина $\xi_{t_0}(\omega) = t_0\omega$, равномерно распределенная на отрезке $[0, t_0]$, т.е. $\xi_{t_0} \sim \mathrm{Uni}(0, t_0)$. При $t_0 = 0$ получается вырожденная случайная величина: $\xi_0(\omega) = 0$ при всех $\omega \in [0,1]$. △



Траектории процесса $\xi_t(\omega) = t\omega$ для различных $\omega \in [0,1]$.
При фиксированном ω траектория — линейная функция.
При фиксированном t сечение — случайная величина,
равномерно распределенная на $[0,t]$.

Рис. 1: Выборочные траектории процесса из примера 1.7

Обращаем внимание читателя на то, что в данном примере траектория процесса однозначно восстанавливается по ее части: достаточно узнать наклон траектории на любом интервале времени. На практике же более типичная ситуация – это когда предыстория не позволяет однозначно восстановить траекторию процесса и узнать ее будущее. В таких случаях различным исходам ω_1 и ω_2 может соответствовать одна и та же наблюдаемая до текущего момента времени предыстория, но будущее этих траекторий может отличаться.

Пример 1.8. Пусть $T = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) = ([0,1], \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathscr{L}^1_{[0,1]})$. Определим процесс в явном виде $\{\xi_j\}_{j=1}^{\infty}$ так:

$$\xi_1(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{если } \omega \in [0, 1/2), \\ 0 & \text{если } \omega \in [1/2, 1]; \end{cases} \qquad \xi_2(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{если } \omega \in [0, 1/4) \cup (3/4, 1], \\ 0 & \text{если } \omega \in [1/4, 3/4], \end{cases}$$
$$\xi_3 = \xi_1, \xi_4 = \xi_2, \ldots$$

Ясно, что каждое сечение, то есть, в этом примере, каждая случайная величина ξ_j имеет распределение Bernoulli(1/2). Допустим, что начинаем наблюдать процесс, и выясняется, что

$$\xi_1(\omega) = 1.$$

Можем ли мы из этого найти ω, и, таким образом знать все будущие значения $\xi_2, \xi_3, \ldots$? Нет: при, например, $\omega_1 = 1/10$ мы получаем $\xi_1(\omega_1) = 1, \xi_2(\omega_2) = 1$, но при $\omega_2 = 3/8$ получаем $\xi_1(\omega_2) = 1, \xi_2(\omega_2) = 0$. Из информации о том, что $\xi_1(\omega) = 1$ мы не можем найти исход ω и, следовательно, не можем узнать всю траекторию.

Заметим, что ξ_1 и ξ_2 можно интерпретировать как результаты бросков честной монеты, и нетрудно проверить, что ξ_1 и ξ_2 — независимы. Одна из четырех проверок, которые нужно провести для подтверждения независимости такова:

$$\mathbb{P}(\xi_1 = 1, \xi_2 = 1) = \mathscr{L}^1_{[0,1]}([0, 1/2) \cap [0, 1/4)) = \mathscr{L}^1_{[0,1]}([0, 1/4)) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(\xi_1 = 1)\mathbb{P}(\xi_2 = 1).$$

Но, конечно, вся последовательность $\{\xi_j\}_{j=1}^{\infty}$ не является последовательностью независимых случайных величин, потому что испытания с четными номерами всегда дадут одинаковые исходы, и аналогично с испытаниями с нечетными номерами.

Вопрос для более любопытного студента: можете задать случайный процесс как-то по другому, так, чтобы ξ_1, ξ_2 и ξ_3 оказались независимыми в совокупности (но все же бернуллиевскими)? А чтобы также ξ_1, ξ_2, ξ_3 и ξ_4? $\triangle$

Семинарная задача 1.2. Либо решая вопрос, задан в конце предыдущего примера, либо другим способом, придумать пример случайного процесса (задав его *явно* как функцию из $T \times \Omega$ в $\mathbb{R}$), в котором знание значения ξ_1 и ξ_2 *не* позволяло предсказать значения ξ_j для $j = 3, 4, \ldots$. $\triangleleft$

Конечномерные распределения случайного процесса Многие случайные процессы, как мы увидим, задаются через семейство так называемых конечномерных распределений.

Определение 1.9. *(Конечномерные распределения случайного процесса) Пусть $(\xi_t)_{t \in T}$ — случайный процесс. Его* конечномерными распределениями *называются распределения $P_{\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_n}}$ случайных векторов $\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_n}$ при любых $n \in \mathbb{N}$ и всяческих наборах различных точек $t_1, t_2, \ldots$ из T.*

Напомним, что распределение $P_{\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_n}}$ — это мера на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, характеризуема равенствами

$$P_{\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_n}}(A) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \ : \ (\xi_{t_1}(\omega), \ldots, \xi_{t_n}(\omega)) \in B\})$$

для всех $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Другими словами, $P_{\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_n}} = (\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_n})_\# \mathbb{P}$, образ меры $\mathbb{P}$ под случайным вектором $(\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_n})$.

Наряду с понятием конечномерных распределений случайного процесса, не менее важны понятия среднего процесса и ковариационной функции процесса.

Определение 1.10. *(Среднее, ковариационная функция) Пусть $(\xi_t)_{t \in T}$ — случайный процесс, задан на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.*

- *Если для каждого t, существует $\mathbb{E}\xi_t$, то функция $t \mapsto \mathbb{E}\xi_t$ называется функция среднего процесса, обозначают ее часто через $m(t)$;*

- *если еще существует, для каждой пары $(s,t) \in T \times T$, ковариация $Cov(\xi_s, \xi_t)$, то функция $K(s,t) = Cov(\xi_s, \xi_t)$ из $T \times T$ в $\mathbb{R}$ называется ковариационной функцией случайного процесса.*

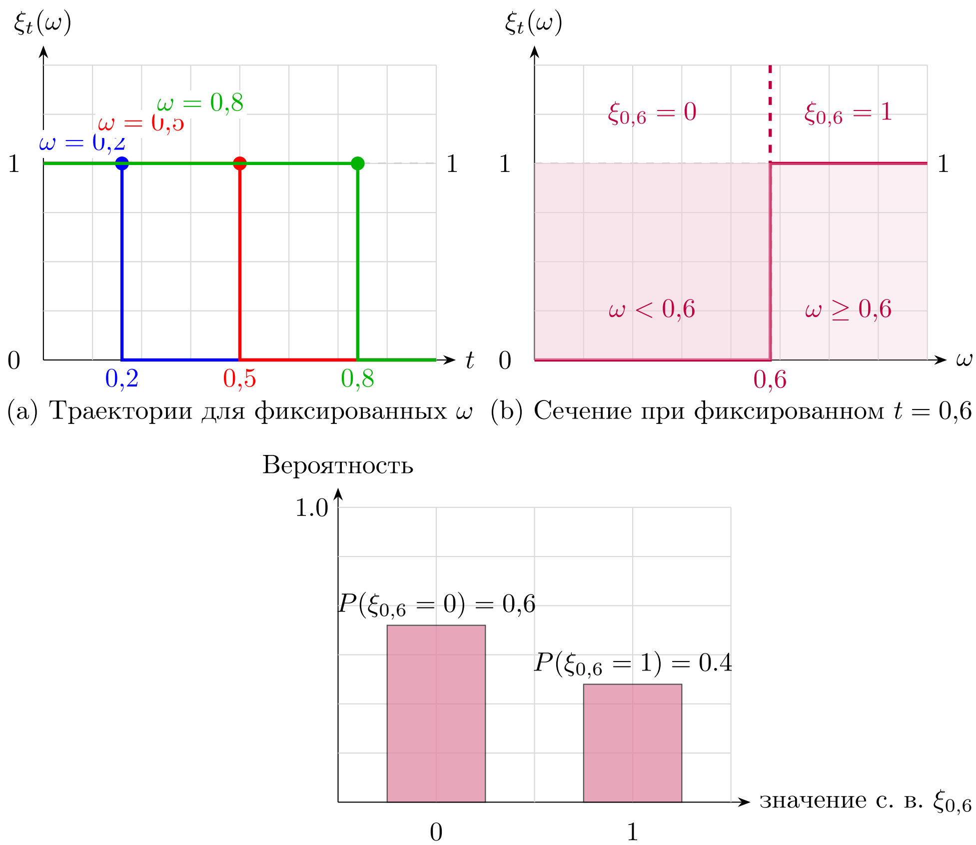
Предупреждение. В некоторых текстах эту функцию называют *корреляционной*, в то время как ковариационной называют функцию $(s,t) \mapsto \mathbb{E}\xi_s\xi_t$.

Семинарная задача 1.3. Для процессов из примеров 1.7 и 1.8, найти $m(t)$ и $K(t,s)$. $\triangleleft$

Семинарная задача 1.4. Пусть $T = [0,1]$, $\Omega = [0,1]$, $\mathscr{F} = \mathcal{B}([0,1])$, $\mathbb{P} = \mathscr{L}^1_{[0,1]}$, $\xi_t(\omega) = I(t \leq \omega)$.

1. Найти траектории, сечения и двумерные распределения процесса.
2. Исследовать сечения на попарную независимость.
3. Найти функцию среднего и ковариационной функции этого процесса.
4. Допустим, что мы наблюдаем за этим процессом и видим, что для всех $t \in [0, t_0]$, $\xi_t \equiv 1$ (это значит, $\xi_t(\omega) = 1$ для всех $\omega \in \Omega$). С какой вероятностью скачок до нуля произойдет на интервале времени $[t_0, t_0 + \Delta t]$? (Разумеется, $\Delta t < 1 - t_0$.)

$\triangleleft$



(a) Траектории для фиксированных ω (b) Сечение при фиксированном $t = 0{,}6$

(c) Распределение с. в. $\xi_{0{,}6}$: Bernoulli(0,4)

Рис. 2: рисунок к задаче 1.4: траектории и сечения процесса $\xi_t(\omega) = I(t \leq \omega)$

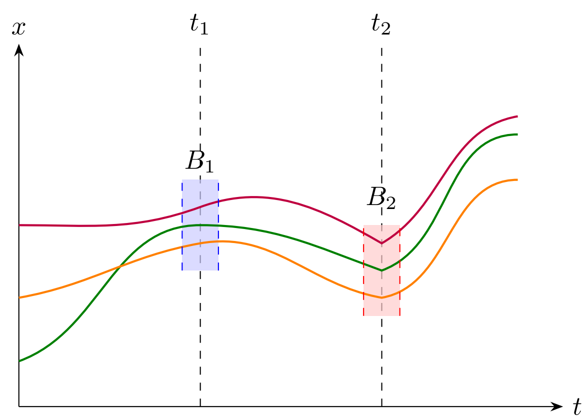
В связи с интерпретацией процесса как случайные траектории, полезно ввести понятия ***случайного элемента***. Любую измеримую функцию $f : \Omega \to E$ из измеримого пространства Ω с σ-алгеброй $\mathscr{F}$ в измеримое пространство E с σ-алгеброй $\mathcal{E}$ называют *случайным элементом* множества E. Идея понятна: «случайность» заключается в том, что элемент $e \in E$ который мы видим, зависит от ω (если $e = f(\omega)$ для какого-то $\omega \in \Omega$). Еще раз, напомним что измеримость функции при этих обозначениях означает выполнение условия (1) для всех $E \in \mathcal{E}$.

Теперь понятно, что для развития интерпретации случайного процесса как **случайную траекторию**, то есть как случайный элемент множества $\mathbb{R}^T$ (множество всех функции из T в $\mathbb{R}$) нам не хватает σ-алгебры на этом множестве. Для этого вводится понятие ***цилиндра*** *с основаниями* $B_1, \ldots, B_n$, *привязанными к точкам* $t_1, \ldots, t_n$ *из* T, где n — любое натурально число и B_k — борелевское подмножество вещественной прямой:

$$C_{t_1,\ldots,t_n}(B_1 \times \cdots \times B_n) = \{f \in \mathbb{R}^T \ : \ f(t_1) \in B_1, \ldots, f(t_n) \in B_n\}. \tag{3}$$

То есть цилиндр состоит из функций $f : T \to \mathbb{R}$, которые «в моменты времени $t_1, \ldots, t_n$» должны проходит «через окна» $B_1, \ldots, B_n$ соответственно, а при остальных t они могут принимать любые значения.

Определение 1.11. *Борелевской σ-алгеброй $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$ на множестве $\mathbb{R}^T$ называется наименьшая σ-алгебра, содержащая все цилиндры.*



Цилиндр $C_{t_1,t_2}(B_1 \times B_2)$ состоит из всех функций $f : T \to \mathbb{R}$, таких что $f(t_1) \in B_1$ и $f(t_2) \in B_2$. На рисунке показаны три траектории, принадлежащие этому цилиндру (проходят через «окна» B_1 и B_2 в моменты t_1 и t_2).

Рис. 3: Иллюстрация цилиндра в пространстве траекторий

Если $T = 0, 1, 2, \ldots$ или $T = \{1, 2, \ldots\}$ обозначают $\mathbb{R}^T$ и $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$ через $\mathbb{R}^\infty$ и $\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$ соответственно или же с символом $\mathbb{N}$ вместо ∞. В таком случае, напомним, элемент из $\mathbb{R}^\infty$ понимается как последовательность вещественных чисел.

Семинарная задача 1.5. Доказать, что следующие множества принадлежат σ-алгебре $\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$:

1. $\{x \in \mathbb{R}^\infty \ : \ \sup_{x_n} > a\}$,
2. $\{x \in \mathbb{R}^\infty \ : \ \limsup x_n \le a\}$,
3. $\{x \in \mathbb{R}^\infty \ : \ \lim_{n\to\infty} x_n$ существует и он конечен $\}$,
4. $\{x \in \mathbb{R}^\infty \ : \ \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| > a\}$.

Подсказка. Объединение множеств относится к оператору «существует», а пересечение — к оператору «для всех». ◁

Как было упомянуто выше, многие процессы задаются через задание их конечномерных распределений. Их существование обеспечивается теоремой Колмогорова (Теорема 1.14 ниже), в которой процесс, с желаемыми конечномерными распределениями строится на пространстве $(\Omega, \mathscr{F})$ где $\Omega = \mathbb{R}^T$ и $\mathscr{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$. Но можно сразу сказать, что такая конструкция сама по себе не достаточна если хочется обосновать существование процессов, которые владели бы такими свойствами, как непрерывность, или монотонность, или неотрицательность, и так далее — свойства, широко возникающие в практике. Причиной является следующая теорема [Шир21, II-2-Теорема 5]:

Теорема 1.12. *Любой элемент σ-алгебры определяется «ограничениями», наложенными на функции $(x_t)_{t\in T}$ не более чем в счетном числе точек из множества T, то есть*

$$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^T) \iff \exists \{t_j\}_{j=1}^{\infty} \subset T \text{ и } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\infty}) \text{ такие, что } A = \{x \in \mathbb{R}^T \ : \ (x_{t_1}, x_{t_2}, \ldots) \in B\}.$$

Для понимания недостаточности, упомянутой выше, полезно разобрать следующую задачу, используя эту теорему.

Семинарная задача 1.6. Какие из следующих множеств принадлежит σ-алгебре $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0,1]})$?

1. $\{x \in \mathbb{R}^{[0,1]} \ : \ x_t = 0 \ \forall t \in [0,1]\}$,
2. $\{x \in \mathbb{R}^{[0,1]} \ : \ x_t => c \ \forall t \in [0,1]\}$,
3. $\{x \in \mathbb{R}^{[0,1]} \ : \ x_t = 0$ хотя бы для одного $t \in [0,1]\}$,
4. $\{x \in \mathbb{R}^{[0,1]} \ : \ x$ непрерывна в фиксированной точке $t_0 \in [0,1]\}$.

◁

Перед обсуждением теорем Колмогорова (Теорема 1.14 и Теорема 1.17 ниже) нам понадобятся два весьма естественных понятия: 1) *распределение случайного процесса* и 2) *процесс координатных проекций.*

Распределение случайного процесса Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство и $(\xi_t)_{t\in T}$ случайный процесс на нем. Множество функций $\mathbb{R}^T$ возьмем с σ-алгеброй $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$. *Распределением случайного процесса* $(\xi_t)_{t\in T}$ называется образ $\mathrm{trj}_{\#}\,\mathbb{P}$ меры $\mathbb{P}$ под функцией trj и обозначается P_ξ, где trj определена так:

$$\mathrm{trj} : \ \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^T$$
$$\omega \longmapsto \begin{cases} \mathrm{trj}(\omega) : \ T \longrightarrow \mathbb{R} \\ \qquad\qquad\quad t \longmapsto \xi_t(\omega). \end{cases}$$

То есть, словами, trj это просто функция, которая каждому элементарному событию ω сопоставляет соответствующую выборочную траекторию $t \mapsto \xi_t(\omega)$. Разумеется, нужно сначала проверить, что trj — измеримая функция, иначе, понятие образа меры под этой функцией бессмысленно. Но это легко: если $C = C_{t_1,\ldots,t_n}(B_1 \times \cdots \times B_n)$ — цилиндр, то

$$\begin{aligned} \mathrm{trj}^{-1}(C) &= \{\omega \in \Omega \ : \ \mathrm{trj}(\omega) \in C\} = \{\omega \in \Omega \ : \ \xi_{t_1} \in B_1, \ldots, \xi_{t_n} \in B_n\} \\ &= \xi_{t_1}^{-1}(B_1) \cap \ldots \cap \xi_{t_n}^{-1}(B_n) \in \mathcal{F}, \end{aligned}$$

ибо каждая ξ_{t_j} — случайная величина. Получается, что для каждого подмножества $\mathbb{R}^T$, из класса подмножеств, порождающего σ-алгебру $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$, проверяется условие измеримости (1). Из следующего упражнения, следует и справедливость условия измеримости и для всех элементов σ-алгебры $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$.

Семинарная задача 1.7. Пусть $(\Omega, \mathscr{F})$ и $(Y, \mathcal{Y})$ измеримые пространства (множества X и Y с σ-алгебрами $\mathscr{F}$ и $\mathcal{Y}$ соответственно), причем σ-алгебра $\mathcal{Y}$ на Y порождается каким-то подсемейством $\mathcal{Y}_0$ подмножеств из Y, что обозначается как $\sigma(\mathcal{Y}_0) = \mathcal{Y}$. Пусть $f : \Omega \to Y$ функция. Если

$$\{\omega \in \Omega \ : \ f(\omega) \in E\} \in \mathscr{F}$$

для всех $E \in \mathcal{Y}_0$, то это верно и для всех $E \in \mathcal{Y}$. ◁

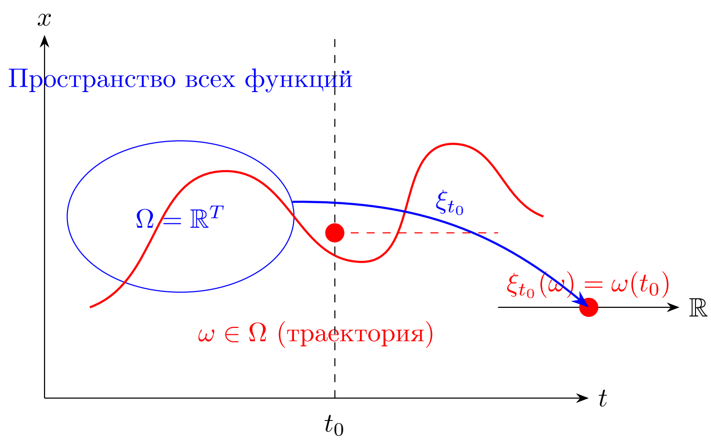
Значит trj измерима и для всякого $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$,

$$P_\xi(E) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \ : \ \text{функция } t \mapsto \xi_t(\omega) \text{ принадлежит к } E\}).$$

Процесс координатных проекций Допустим есть теперь только $\mathbb{R}^T$ с σ-алгеброй $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$. Если $\omega \in \mathbb{R}^T$ — любой элемент, то есть, ω является какой-то *функцией* из T в $\mathbb{R}$, то и для любого $t \in T$, $\omega(t) \in \mathbb{R}$. Обозначим теперь $\mathbb{R}^T$ через Ω и $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$ через $\mathscr{F}$. Только что сделанное наблюдение позволяет определить процесс $(\xi_t)_{t\in T}$ на этом измеримом пространстве $(\Omega, \mathscr{F})$ таким образом:

$$\xi_t(\omega) = \omega(t), \qquad t \in T, \ \omega \in \Omega = \mathbb{R}^T.$$

Легко проверить, что каждая функция ξ_t является случайной величиной (упражнение).



Процесс координатных проекций: для каждого $t \in T$ отображение $\xi_t : \Omega \to \mathbb{R}$ сопоставляет траектории ω её значение в момент t: $\xi_t(\omega) = \omega(t)$.

Рис. 4: Схематическое изображение процесса координатных проекций

Значит, одно существование $\mathbb{R}^T$ с σ-алгеброй уже зарождает случайный процесс, однако, конечно, интересен только вопрос об его распределении, а без какой-либо меры на $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}(\mathbb{R}^T))$ такой вопрос не стоит. Тогда, пусть P_0 — произвольная вероятностная мера на $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}(\mathbb{R}^T))$, и пусть $(\xi_t)_{t\in T}$ — процесс координатных проекций. Тогда распределение этого процесса совпадает с P_0, что остается как очень простое упражнение:

Семинарная задача 1.8. Пусть P_0 — вероятностная мера на пространстве $(\Omega, \mathscr{F})$, где $\Omega = \mathbb{R}^T$ и $\mathscr{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$. Пусть $(\xi_t)_{t\in T}$ — соответствующий процесс координатных проекции. Доказать, что $P_\xi = P_0$. $\triangleleft$

Настает пора дать теорему Колмогорова о существовании процесса с заданными конечномерными распределениями. Это теорема называется *теоремой Колмогорова о согласованных распределениях.* Для начала, дадим определение — что мы имеем ввиду под «согласованными распределениями».

Впредь, если не оговариваем об обратном, мы будем считать что T — подмножество полупрямой $[0, \infty)$.

Определение 1.13. *Пусть имеется, для каждого $n \in \mathbb{N}$ и каждого набора различных неотрицательных чисел $t_1, \ldots, t_n$ из T, вероятностная мера $Q_{t_1,\ldots,t_n}$ на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Всё семейство этих мер называется* семейством конечномерных распределений*, и это семейство называется* согласованным*, если выполняются эти два условия:*

(i) *для каждого n, каждого набора $(t_1, \dots, t_n)$, любой перестановки $(t_{j_1}, \dots, t_{j_n})$ этих чисел, и любых $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, верно:*

$$Q_{t_1,\dots,t_n}(B_1 \times \cdots \times B_n) = Q_{t_{j_1},\dots,t_{j_n}}(B_{j_1} \times \cdots \times B_{j_n});$$

(ii) *для каждого $n \geq 2$, каждого набора $(t_1, \dots, t_n)$, любого $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1})$, верно:*

$$Q_{t_1,\dots,t_n}(B \times \mathbb{R}) = Q_{t_1,\dots,t_{n-1}}(B).$$

Контрольная задача 1.1. Пусть $(\xi_t)_{t\in T}$ — случайный процесс, где $T \subset [0, \infty)$. Доказать, что семейство его конечномерных распределений образует семейство согласованных конечномерных распределений. ▷

Свойство согласованности для конечномерных распределений уже заданного случайного процесса настолько естественно, что сам факт определения понятия согласованности может вызывать недоумение. Однако нетрудно придумать пример, в котором семейство $\mathcal{Q}$ нарушает условия согласованности. Если, скажем, $1, 2 \in T$ и $\mathcal{Q}$ содержит меры $P_{1,2}$ и $P_{2,1}$ такие: $P_{1,2} = \mathscr{L}^2_{[0,1]^2}$ (мера Лебега ограничена на квадрате, то есть, $\mathscr{L}^2_{[0,1]^2}(B) = \mathscr{L}^2(B \cap [0, 1]^2)$), а $P_{2,1}$ — гауссовская мера[1] на $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$, то, очевидно, $\mathcal{Q}$ уже нарушает первое условие согласованности.

Теорема 1.14. *(Колмогорова о согласованных распределениях) Пусть $T \subset [0, \infty)$ и $\mathcal{Q}$ — семейство согласованных конечномерных распределений. Тогда существует $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ и процесс $(\xi_t)_{t\in T}$ на нем, у которого семейство конечномерных распределений равно семейству $\mathcal{Q}$.*

В самом деле нет никакой тайны по поводу того, какими оказываются Ω и $\mathscr{F}$ в доказательстве этой теоремы: $\mathbb{R}^T$ и $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$. Легко проверить, что определяя функцию P на цилиндрах ровно так, как это «прописано» соответствующей мерой из семейства $\mathcal{Q}$ (то есть, цилиндру $C = C_{t_1,\dots,t_n}(B_1 \times \cdots \times B_n)$ дать значение $P(C) = P_{t_1,\dots,t_n}(B_1 \times B_n)$) получается конечно-аддитивная функция на алгебре всех цилиндров, и далее доказательство занимается расширением этой конечно-аддитивной функции до (вероятностной) меры на всю σ-алгебру $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$.

Эта теорема, хоть и фундаментальная, еще не решает проблему — как построить процесс, с заданными конечномерными распределениями, но с каким-то еще желаемым свойством, например, монотонность, или непрерывность. Если, например, множество $C([0, 1])$ всех непрерывных функций было бы $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0,1]})$-измеримым, то можно было бы: 1) получить, теоремой Колмогорова, процесс $(\xi_t)_{t\in T}$ с требованными конечномерными распределениями, 2) распределение P_ξ этого процесса ограничить на множестве $C([0, 1])$ (возможно, нормировав меру), затем забыть обо $\mathbb{R}^T \setminus C([0, 1])$ и радоваться новому вероятностному пространству непрерывных функции, у которого процесс координатных проекции состоял бы уже целиком из непрерывных траекторий. Но, увы, $C[0, 1]$, и другие полезные для приложений подмножества — не измеримы относительно σ-алгебры $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0,1]})$. Поэтому теоретикам пришлось еще поработать, чтобы добиться оправданного обсуждения таких объектов.

В связи с этим необходимо ввести понятие *модификацией* (также называется *версией*), случайного процесса.

Определение 1.15. *(Стохастическая эквивалентность и неразличимость) Пусть $(\xi_t)_{t\in T}$ — случайный процесс на пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.*

1. *Случайный процесс $(\eta)_{t\in T}$, определен на этом же пространстве, называется* версией *или* модификацией *случайного процесса $(\xi_t)_{t\in T}$ если для каждого $t \in T$, множество*

$$N_t = \{\omega \in \Omega \mid \xi_t(\omega) \neq \eta_t(\omega)\}$$

$\mathscr{F}$-измеримо и $\mathbb{P}(N_t) = 0$. В таком случае еще говорят, что $(\eta)_{t\in T}$ и $(\xi_t)_{t\in T}$ — стохастически эквивалентные.

[1] Это мера, задана плотностью гауссовского вектора. Например, $P_{2,1}(B) = \frac{1}{2\pi} \int_B e^{-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)} dx_1 dx_2$ для всех $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

2. *Если для случайного процесса $(\eta_t)_{t\in T}$, существуем $N \in \mathscr{F}$, такое что $\mathbb{P}(N) = 0$ и для всех $\omega \in \Omega \setminus N$, функции $t \mapsto \xi_t(\omega)$ и $t \mapsto \eta_t(\omega)$ одинаковы, то процессы $(\xi_t)_{t\in T}$ и $(\eta_t)_{t\in T}$ называются* неразличимыми.

Кратко, говорят что $(\eta_t)_{t\in T}$ есть модификация процесса $(\xi_t)_{t\in T}$ если для всех t, $\xi_t = \eta_t$ п. н. —«почти наверное», то есть везде кроме, возможно, на измеримом множества меры нуль. Но в определении этого понятия это множество может меняться для разных t.

А эти два процесса неразличимы если п. н. все их траектории идентичные.

Следующий факты доказываются очень легко:

1. если два процесса неразличимы, то они стохастически эквивалентные;
2. у стохастически эквивалентных процессов одинаковые конечномерные распределения;
3. стохастическая эквивалентность — отношение эквивалентности на множестве всех случайных процессов на $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Также неразличимость.

Но, вообще, стохастическая эквивалентность не влечет неразличимость:

Пример 1.16. Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \mathscr{L}^1_{[0,1]})$, $\xi_t(\omega) := 0$ для всех t и ω, $\eta_t(\omega) := I(\omega = t)$. Эти процессы стохастически эквивалентные:

$$\text{для } t \in T, \quad \{\omega \in \Omega \ : \ \xi_t \neq \eta_t(\omega)\} = \{t\},$$

а $\mathbb{P}(\{t\}) = 0$. Но для каждого $\omega \in \Omega$, есть одна точка (а именно, $t = \omega$) где траектории не совпадают (одна принимает значения 0 там, другая 1). Эти процессы не только неразличимы, они даже «везде различимы».

А еще, у $(\xi_t)_{t\in T}$ все траектории непрерывные, но у $(\eta_t)_{t\in T}$ все траектории разрывные. $\triangle$

Однако бывает, что если рассматривать эти понятия в более узком классе процесс, они совпадают:

Контрольная задача 1.2. Если у процессов $(\xi_t)_{t\in T}$ и $(\eta_t)_{t\in T}$, определенных на одном и том же вероятностном пространстве, п. н. траектории непрерывные справа, и эти процессы стохастически эквивалентные, то они неразличимы. $\triangleright$

Приведем теперь теорему Колмогорова и сделаем несколько комментариев касательно нее.

Теорема 1.17. *(Колмогорова о непрерывной версии процесса) Пусть $T = [0, \infty)$, $(\xi_t)_{t\in T}$ — случайный процесс. Если существуют числа $\alpha, \beta, C > 0$ при которых, для всех $s, t \in T$,*

$$\mathbb{E}|\xi_s - \xi_t|^\alpha \leq C|t - s|^{1+\beta},$$

то существует непрерывная модификация $(\eta)_{t\in T}$ этого процесса, для которого

$$\mathbb{P}\Big(\Big\{\omega \in \Omega \ : \sup_{\substack{0<t-s<h(\omega)\\ s,t\in[0,\infty)}} \frac{|\xi_t(\omega) - \eta_t(\omega)|}{|t-s|^\gamma} \leq \delta\Big\}\Big) = 1$$

для любого $\gamma \in (0, \frac{\beta}{\alpha})$ и для какой-то константы δ и функции h, положительна для $\mathbb{P}$-п.в. ω.

Список литературы

[Шир21] А. Н. Ширяев. *Вероятность.* 7-е изд. Т. I. МЦНМО, 2021.