Двойной маятник. Моделирование

Илья Виденеев, M32001

1 Описание

Двойной маятник - это механическая система, состоящая из двух маятников, подвешенных друг к другу на концах. В этой системе есть две оси вращения: одна находится у основания маятника, а другая находится на конце первого маятника.

Каждый маятник в системе движется под воздействием силы тяжести, которая направлена вниз, и силами натяжения, которые возникают в подвесе. Двойной маятник является примером нелинейной динамической системы, то есть системы, которая проявляет сложное поведение, такое как хаотические колебания.

Для описания движения двойного маятника используются углы отклонения каждого маятника от вертикального положения. Эти углы связаны друг с другом и определяют динамику системы. Для анализа движения двойного маятника используются уравнения Лагранжа, которые позволяют определить ускорения каждого маятника в зависимости от его положения и скорости.

2 Математическая модель

2.1 Уравнения Лагранжа

Уравнения Лагранжа - это математический инструмент, который используется для описания движения системы, состоящей из многих частей, например, маятников.

Для того чтобы описать движение маятника, мы можем использовать обобщенные координаты, которые описывают положение системы в пространстве. Для одиночного маятника это может быть угол и длина, а для двойного маятника - два угла и две длины.

Уравнения Лагранжа основаны на функционале действия, который является суммой кинетической и потенциальной энергии системы. Используя обобщенные координаты, мы можем записать функционал действия системы. Затем, мы можем применить уравнения Лагранжа, которые описывают, как изменяется функционал действия системы с течением времени. Решая эти уравнения, мы можем получить уравнения движения системы, которые позволяют нам предсказывать, как будет двигаться маятник.

В нашем конкретном случае, мы используем уравнения Лагранжа для описания движения двойного маятника. Мы определяем кинетическую и потенциальную энергию для каждого маятника в системе, затем используем уравнения Лагранжа, чтобы найти уравнения движения для каждого маятника. Решая эти уравнения, мы можем определить, как движется каждый маятник в системе в зависимости от начальных условий.

Для системы с n степенями свободы, в которой действуют только потенциальные силы, уравнения Лагранжа записываются следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n$$

где q_i - обобщенная координата, L - *лагранжиан*, разность между кинетической энергией T и потенциальной энергией U:

$$L = T - U$$

Найдем кинетическую энергию системы, то есть кинетическую энергию двух маятников. Для каждого маятника кинетическая энергия будет выражаться следующим образом:

$$T_i = \frac{1}{2} m_i \left(\dot{x_i}^2 + \dot{y_i}^2\right)$$

где m_i - масса маятника, $\dot{x_i}$ и $\dot{y_i}$ - проекции скорости маятника на оси x и y соответственно.

Потенциальная энергия системы находится просто:

$$U_i = m_i g y_i$$

где g - ускорение свободного падения, y_i - высота маятника.
Для двойного маятника получаем:

$$T = \frac{1}{2}m_1(\dot{x_1}^2 + \dot{y_1}^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x_2}^2 + \dot{y_2}^2)$$

$$U = m_1 g y_1 + m_2 g y_2$$

Здесь x_1, y_1, x_2 и y_2 - это декартовы координаты каждого маятника. Мы можем выразить эти координаты через полярные координаты, которые зависят от угла отклонения от вертикального положения θ_1, θ_2 и длины ℓ_1, ℓ_2:

$$x_1 = \ell_1 \sin\theta_1, \quad y_1 = -\ell_1 \cos\theta_1$$

$$x_2 = \ell_1 \sin\theta_1 + \ell_2 \sin\theta_2, \quad y_2 = -\ell_1 \cos\theta_1 - \ell_2 \cos\theta_2$$

Заменяя координаты маятников на выражения через углы θ_1, θ_2 и длины ℓ_1, ℓ_2 в выражениях для кинетической и потенциальной энергии, мы получим:

$$T = \frac{1}{2}m_1(\ell_1^2 \dot{\theta_1}^2) + \frac{1}{2}m_2(\ell_1^2 \dot{\theta_1}^2 + \ell_2^2 \dot{\theta_2}^2 + 2\ell_1\ell_2\dot{\theta_1}\dot{\theta_2}\cos(\theta_1 - \theta_2))$$

$$U = m_1 g \ell_1 \cos\theta_1 + m_2 g(\ell_1 \cos\theta_1 + \ell_2 \cos\theta_2)$$

Для двойного маятника обощенными коррдинатами являются углы θ_1 и θ_2, а лагранжиан системы можно записать в виде:

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\ell_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\ell_2^2\dot{\theta}_2^2 + m_2\ell_1\ell_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) - \\ - (m_1 + m_2)g\ell_1\cos(\theta_1) - m_2 g\ell_2\cos(\theta_2)$$

Итак, получаем дифференциальные уравнения для двойного маятника в общем виде:

$$(m_1 + m_2)\ell_1\ddot{\theta_1} + m_2\ell_2\ddot{\theta_2}\cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2\ell_2\dot{\theta_2}^2\sin(\theta_1 - \theta_2)\sin(\theta_1 - \theta_2) + \\ + (m_1 + m_2)g\sin\theta_1 = 0$$

$$m_2\ell_2\ddot{\theta_2} + m_2\ell_1\ddot{\theta_1}\cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2\ell_1\dot{\theta_1}^2\sin(\theta_1 - \theta_2)\sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g\sin\theta_2 = 0$$

Отсюда можно выразить $\ddot{\theta}_1$ и $\ddot{\theta}_2$:

$$\ddot{\theta_1} = \frac{-g(2m_1 + m_2)\sin(\theta_1) - m_2 g\sin(\theta_1 - 2\theta_2) - 2\sin(\theta_1 - \theta_2)m_2(\dot{\theta_2}^2\ell_2 + \dot{\theta_1}^2\ell_1\cos(\theta_1 - \theta_2))}{\ell_1(2m_1 + m_2 - m_2\cos(2\theta_1 - 2\theta_2))}$$

$$\ddot{\theta_2} = \frac{2\sin(\theta_1 - \theta_2)(\dot{\theta_1}^2\ell_1(m_1 + m_2) + g(m_1 + m_2)\cos(\theta_1) + \dot{\theta_2}^2\ell_2 m_2\cos(\theta_1 - \theta_2))}{\ell_2(2m_1 + m_2 - m_2\cos(2\theta_1 - 2\theta_2))}$$

2.2 Метод Рунге-Кутты

Для численного решения этой системы дифференциальных уравнений мы будем применять классический метод Рунге-Кутты 4-го порядка.

Рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (далее $\mathbf{y}$, $\mathbf{f}$, $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^n$, $x, h \in \mathbb{R}$).

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0.$$

Тогда приближенное значение в последующих точках вычисляется по итерационной формуле:

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \tfrac{h}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)$$

Вычисление нового значения проходит в четыре стадии:

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_1 &= \mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n),\\
\mathbf{k}_2 &= \mathbf{f}\left(x_n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_n + \frac{h}{2}\mathbf{k}_1\right),\\
\mathbf{k}_3 &= \mathbf{f}\left(x_n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_n + \frac{h}{2}\mathbf{k}_2\right),\\
\mathbf{k}_4 &= \mathbf{f}(x_n + h, \mathbf{y}_n + h\mathbf{k}_3).
\end{aligned}$$

Для решения системы дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутты 4-го порядка сначала необходимо привести ее к системе уравнений первого порядка, заменив вторые производные первыми производными. Для этого можно ввести новые переменные:

$$\begin{aligned}
\omega_{\theta_1} &= \dot{\theta}_1\\
\omega_{\theta_2} &= \dot{\theta}_2
\end{aligned}$$

Тогда система уравнений примет вид:

$$\begin{aligned}
\dot{\theta}_1 &= \omega_{\theta_1}\\
\dot{\omega_{\theta_1}} &= \frac{-g(2m_1 + m_2)\sin(\theta_1) - m_2 g \sin(\theta_1 - 2\theta_2) - 2\sin(\theta_1 - \theta_2) m_2 (\omega_{\theta_2}^2 \ell_2 + \omega_{\theta_1}^2 \ell_1 \cos(\theta_1 - \theta_2))}{\ell_1(2m_1 + m_2 - m_2\cos(2\theta_1 - 2\theta_2))}\\
\dot{\theta}_2 &= \omega_{\theta_2}\\
\dot{\omega_{\theta_2}} &= \frac{2\sin(\theta_1 - \theta_2)(\omega_{\theta_1}^2 \ell_1 (m_1 + m_2) + g(m_1 + m_2)\cos(\theta_1) + \omega_{\theta_2}^2 \ell_2 m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2))}{\ell_2(2m_1 + m_2 - m_2\cos(2\theta_1 - 2\theta_2))}
\end{aligned}$$

Далее, метод Рунге-Кутты 4-го порядка применяется для решения этой системы уравнений.

3 Визуализация

Движение маятника можно визуализировать с помощью языка Python и библиотек matplotlib, numpy и scipy. В библиотеке scipy реализован метод Рунге-Кутты, который используется для решения полученной системы уравнений, а с помощью библиотеки matplotlib создается анимация движения двойного маятника, который параметризуется длиной подвеса первого и второго маятника и их массами, а также ускорением свободного падения.

Ссылка на GitHub-репозиторий с программой:
`https://github.com/smbdyy/physics_modeling_double_pendulum`