Моделирование полёта баллистической ракеты

Илья Виденеев, M3100

1 Постановка задачи

Провести моделирование полёта баллистической ракеты с заданной общей и конструкционной массой и площадью поперечного сечения, рассчитать траекторию полета.

2 Построение математической модели

Математическую модель будем строить допуская, что ускорение свободного падения и плотность среды не меняются при изменении высоты. Полёт баллистической ракеты является движением тела с переменной массой. В общем случае такое движение при вертикальном взлёте описывается следующим уравнением:

$$m(t)\frac{dv}{dt} = \alpha u - F_{\text{сопр}} - g,$$

$$\frac{dh}{dt} = v$$

Здесь α - расход топлива, обычно для баллистических ракет он равен примерно 1 т/с, u - скорость истечения газов, она не превышает $\frac{2}{3}$ км/с.

$$F_{\text{сопр}} = kv^2,\ k = 0.5cS\rho,$$

где c - коэффициент лобового сопротивления, S - площадь поперечного сечения ракеты, ρ - плотность воздуха.
Масса ракеты изменяется согласно закону

$$m(t) = \begin{cases} m_0 - \alpha t, \text{ если } m(t) \geq m_{\text{конс}} \\ m_{\text{конс}}, \text{ если } m(t) = m_{\text{конс}} \end{cases}$$

Первоначально ракету направляют вертикально, а затем при достижении определённой скорости (обычно скорости звука), траекторию меняют, добавляя горизонтальную составляющую скорости.

$$m(t)\frac{d\vec{v}}{dt} = \alpha\vec{u} + \vec{F}_{\text{сопр}} + \vec{g}\cdot m(t)$$

Распишем это уравнение по проекциям:

$$m(t)\frac{dv_y}{dt} = \alpha u_y - F_{\text{y сопр}} - g\cdot m(t)$$

$$m(t)\frac{dv_x}{dt} = \alpha u_x - F_{\text{x сопр}}$$

Для точного описания движения в каждый момент времени нужно ввести угол θ, под которым направлен вектор скорости. θ зависит от t, что сильно усложнит расчеты, поэтому перейдём к следующему упрощению: будем считать, что вектор скорости будет направлен вертикально вверх до достижения скорости звука, а затем вся скорость (имеется в виду скорость, полученная за счёт реактивной тяги) моментально переходит в горизонтальную составляющую. То есть полёт ракеты можно разделить на два этапа: вертикальный взлёт и горизонтальное движение.

При вертикальном взлёте необходимо выполнение условия $m_0 - \alpha t \geq m_{\text{конс}}$, иначе топлива не хватит для достижения скорости звука. Высоту, набранную при вертикальном взлёте обозначим h_0. После перехода ко второму этапу ракета перестанет сжигать топливо, а её горизонтальная скорость, начиная со скорости звука, будет убывать за счёт сопротивления воздуха. Масса ракеты будет оставаться постоянной и равной $m_0 - \alpha t_1$, где t_1 - это время, за которое ракета достигла скорости звука при вертикальном взлете. Движение ракеты закончится, когда высота станет равной нулю.

Построим математическую модель для этих двух этапов полета.

1 Вертикальный взлет

На данном этапе ракета набирает высоту до достижения скорости звука. Вектор скорости направлен вертикально вверх, поэтому движение описывается следующим уравнением:

$$m(t)\frac{dv}{dt} = \alpha u - F_{\text{сопр}} - g \cdot m(t)$$

$$F_{\text{сопр}} = kv^2 = 0.5cS\rho v^2$$

Подставим это в исходное уравнение, и разделим обе части на $m(t)$,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\alpha u}{m(t)} - \frac{0.5cS\rho v^2}{m(t)} - g$$

Правая часть этого уравнения - функция $f(v(t), t)$, при этом известно, что $v(0) = 0$, значит скорость, а следовательно и высоту ракеты в момент времени t можно найти методом Эйлера. Соответственно, высота $h(t)$ находится по следующей формуле:

$$h(t) = \frac{\frac{dv}{dt}t^2}{2} = \frac{(\alpha u - 0.5cS\rho v^2)t^2}{2m(t)} - \frac{gt^2}{2}$$

2 Горизонтальное движение

На данном этапе реактивная тяга направлена горизонтально, а вертикальная составляющая скорости направлена вниз с некоторым ускорением a.

Здесь отсчёт времени снова начнем с 0, а функция $m(t) = m_0 - \alpha t_1$, где t_1 - это время, за которое ракета достигла скорости звука при вертикальном взлете.

$$m(t)\vec{a} = m(t)\vec{g} + \vec{F}_{\text{y сопр}}$$
$$m(t)a = m(t)g - F_{\text{y сопр}}$$
$$a = g - \frac{F_{\text{y сопр}}}{m(t)}$$

Отсюда получаем следующее уравнение для скорости, которое численно решается методом Эйлера:

$$\frac{dv_y}{dt} = g - \frac{0.5cS\rho v_y^2}{m(t)}$$

Для равноускоренного движения высота в момент времени t находится по следующей формуле:

$$h(t) = h_0 - \frac{at^2}{2} = h_0 - \frac{gt^2}{2} + \frac{F_{\text{y сопр}}t^2}{2m(t)} = h_0 - \frac{gt^2}{2} + \frac{0.5cS\rho v_y^2 t^2}{2m(t)}$$

Таким образом, вычислив $v_y(t)$, можно вычислить и $h(t)$.

Перейдем к горизонтальной составляющей, для неё имеем следующее уравнение:

$$m(t)\frac{dv_x}{dt} = -F_{\text{x сопр}}$$

Подставим формулу для $F_{\text{x сопр}}$ и разделим обе части на $m(t)$:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{-cS\rho v_x^2}{2m(t)}$$

Это уравнение тоже решается методом Эйлера.

Обозначим за l горизонтальное расстояние, пройденное ракетой.

$$l(t) = v_0 t - \frac{cS\rho v_x^2 t^2}{4m(t)}, \text{ где } v_0 \text{ - скорость звука}$$

Таким образом, вычислив $v_x(t)$, можно вычислить и $l(t)$.

3 Расчёт траектории

Для расчёта траектории необходимы следующие исходные данные:

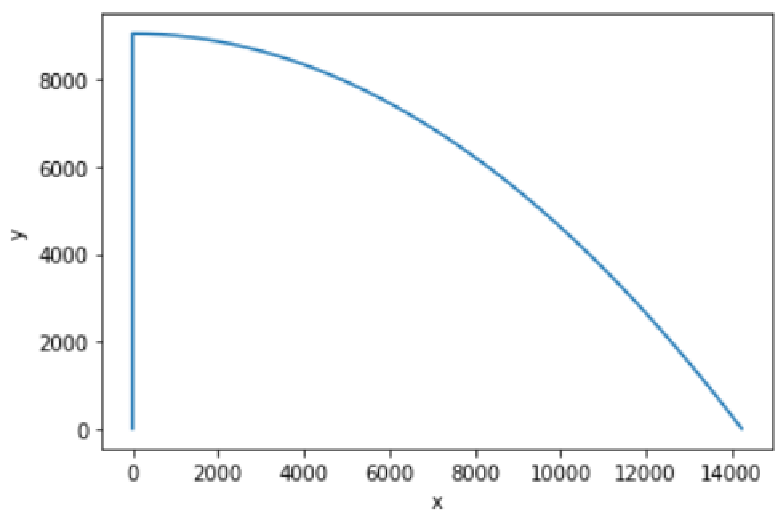
- общая масса
- конструкционная масса или масса топлива
- диаметр или площадь поперечного сечения ракеты

- расход топлива
- скорость истечения газов

Расчёты производятся программой, написанной на языке Python 3.8 с использованием библиотеки matplotlib для построения графиков и среды Jupyter Notebook.
Рассмотрим пример результата работы при следующих исходных данных:

- общая масса - 200 тонн
- конструкционная масса - 10 тонн
- диаметр ракеты - 1.5 метра
- расход топлива - 5 тонн в секунду
- скорость истечения газов - 600 метров в секунду

```
Скорость звука достигается за 25 секунд на высоте 9062 метров.
Длительность всего полёта - 68 секунд.
Горизонтальное расстояние, пройденное ракетой - 14242 метров.
Траектория полёта:
```



Ссылка на github-репозиторий со всеми файлами и инструкциями:
https://github.com/smbdyy/physics_modelling_ballistic