

Equations aux dérivées partielles

El Bouzekraoui Younes — MDAA Saad

Département Sciences du Numérique - Deuxième année
2020-2021

Contents

1	Equations aux dérivées partielles elliptiques	3
1.1	Partie théorique	3
1.2	Mise en oeuvre pratique	5
1.3	Analyse de l'ordre du schéma de discrétisation dans le cas d'éléments Triangle	7
1.4	Résolution du système linéaire par une méthode directe	8

1 Equations aux dérivées partielles elliptiques

1.1 Partie théorique

• On suppose que $u \in H^1(\Omega)$
pour $w \in H_0^1(\Omega)$ on a :

$$-\int_{\Omega} \Delta u \cdot w \, dx = \int_{\Omega} f \cdot w \, dx$$

d'après la formule de green :

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w \, dx - \int_{\partial\Omega} \gamma_1(u) \gamma_0(w) \, dx = \int_{\Omega} f \cdot w \, dx$$

on pose $v = u - u_d \in H_0^1(\Omega)$ on a :

$$\int_{\Omega} \nabla(v + u_d) \cdot \nabla w \, dx = \int_{\Omega} f w \, dx + \int_{\partial\Omega_d} \gamma_1(u) \gamma_0(w) \, dx + \int_{\partial\Omega_n} \gamma_1(u) \gamma_0(w) \, dx$$

or

$$\gamma_1(u) = \frac{\partial u}{\partial n} = g \text{ sur } \partial\Omega_n$$

et

$$\gamma_0(w) = w = 0 \text{ sur } \partial\Omega_d \text{ car } w \in H_0^1(\Omega)$$

donc

$$\boxed{\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w \, dx = \int_{\Omega} f w \, dx + \int_{\partial\Omega_n} g \gamma_0(w) \, dx - \int_{\Omega} \nabla u_d \cdot \nabla w \, dx}$$

• Soit la **forme bilinéaire** sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ définie par

$$a : (u, v) \rightarrow \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

soit la **forme** sur $H_0^1(\Omega)$ définie par

$$l : w \rightarrow \int_{\Omega} f w \, dx + \int_{\partial\Omega_n} g \gamma_0(w) \, dx - \int_{\Omega} \nabla u_d \cdot \nabla w \, dx$$

en appliquant le théoreme de Lax-Milgram sur a et l on a

$$\boxed{\exists ! u \in H_0^1(\Omega) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad a(u, v) = l(v)}$$

pour cela il faut vérifier que

→ **l est linéaire** :

soient $w_1, w_2 \in H_0^1(\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} l(w_1 + \lambda w_2) &= \int_{\Omega} f(w_1 + \lambda w_2) \, dx + \int_{\partial\Omega_n} g \gamma_0(w_1 + \lambda w_2) \, dx - \int_{\Omega} \nabla u_d \cdot \nabla(w_1 + \lambda w_2) \, dx \\ &= \int_{\Omega} f w_1 \, dx + \int_{\partial\Omega_n} g \gamma_0(w_1) \, dx - \int_{\Omega} \nabla u_d \cdot \nabla w_1 \, dx + \lambda \left(\int_{\Omega} f w_2 \, dx + \int_{\partial\Omega_n} g \gamma_0(w_2) \, dx - \int_{\Omega} \nabla u_d \cdot \nabla w_2 \, dx \right) \end{aligned}$$

car γ_0 est linéaire

$$l(w_1 + \lambda w_2) = l(w_1) + \lambda l(w_2)$$

→ **l est continue** :

soit $w \in H_0^1(\Omega)$ on a

$$\begin{aligned} |l(w)| &= \left| \int_{\Omega} f w \, dx + \int_{\partial\Omega_n} g \gamma_0(w) \, dx - \int_{\Omega} \nabla u_d \cdot \nabla w \, dx \right| \\ &\leq \left| \int_{\Omega} f w \, dx \right| + \left| \int_{\partial\Omega_n} g \gamma_0(w) \, dx \right| + \left| \int_{\Omega} \nabla u_d \cdot \nabla w \, dx \right| \end{aligned}$$

par inégalité de cauchy schwarz car $f \in L^2(\Omega)$ et $w \in H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ on a

$$|\int_{\Omega} fw \, dx| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{L^2(\Omega)}$$

par inégalité de Poincaré on a $\exists C_1 \geq 0$ tq (car Ω est un ouvert borné)

$$|\int_{\Omega} fw \, dx| \leq C_1 \|f\|_{L^2(\Omega)} |w|_{1,\Omega}$$

$g \in L^2(\partial\Omega_n)$ et $\gamma_0(w) \in L^2(\partial\Omega_n)$ donc par inégalité de cauchy schwarz on a

$$|\int_{\partial\Omega_n} g\gamma_0(w) \, dx| \leq \|g\|_{L^2(\partial\Omega_n)} \|\gamma_0(w)\|_{L^2(\partial\Omega_n)}$$

par continuité de γ_0 on $\exists C_2 \geq 0$ tq

$$\|\gamma_0(w)\|_{L^2(\partial\Omega_n)} \leq C_2 |w|_{1,\Omega}$$

donc

$$|\int_{\partial\Omega_n} g\gamma_0(w) \, dx| \leq C_2 \|g\|_{L^2(\partial\Omega_n)} |w|_{1,\Omega}$$

on a $w \in H_0^1(\Omega)$ et $u_d \in H_0^1(\Omega)$ donc par inégalité de cauchy schwarz on a (car Ω est un ouvert borné)

$$|\int_{\Omega} \nabla u_d \cdot \nabla w \, dx| \leq |u_d|_{1,\Omega} |w|_{1,\Omega}$$

donc

$$|l(w)| \leq C |w|_{1,\Omega}$$

d'où la continuité

→ **a est continue :**

par continuité du produit scalaire

→ **a est bilinéaire :**

par bilinéarité du produit scalaire

→ **a est coercive :**

soit $u \in H_0^1(\Omega)$ on a par inégalité de cauchy schwarz

$$|a(u, u)| = |< u, u >_{1,\Omega}| \geq |u|_{1,\Omega}^2$$

• on note n le nombre de degrés de liberté et η_k les fonctions de base des éléments finis définie par

$$\forall k \in [1, n] \quad \eta_k(x_j, y_j) = \delta_{k,j}$$

on cherche une solution dans l'espace engendré par $(\eta_k)_{[1,n]}$ donc v s'écrit comme

$$v = \sum_{k=1}^n v_k \eta_k$$

on injecte dans l'équation de la question 1 avec $w = \eta_j \quad j \in [1, n]$ et

$$u_d = \sum_{k=1}^n U_k \eta_k$$

avec

$$U_k = \begin{cases} 0 & \text{si } (x_k, y_k) \notin \partial\Omega_n \\ u_d(x_k, y_k) & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\int_{\Omega} \nabla \left(\sum_{k=1}^n v_k \eta_k \right) \cdot \nabla \eta_j \, dx = \int_{\Omega} f \eta_j \, dx + \int_{\partial\Omega_n} g \gamma_0(\eta_j) \, dx - \int_{\Omega} \nabla \left(\sum_{k=1}^n U_k \eta_k \right) \cdot \nabla \eta_j \, dx$$

donc

$$\sum_{k=1}^n v_k \left(\int_{\Omega} \nabla \eta_k \cdot \nabla \eta_j \, dx \right) = \int_{\Omega} f \eta_j \, dx + \int_{\partial \Omega_n} g \eta_j \, dx - \sum_{k=1}^n U_k \left(\int_{\Omega} \nabla \eta_k \cdot \nabla \eta_j \, dx \right)$$

ceci pour $j \in [1, n]$ ce qui est équivalent au système linéaire d'équations $\boxed{Ax = b}$ avec

$$A_{kj} = \int_{\Omega} \nabla \eta_k \cdot \nabla \eta_j \, dx$$

$$b_j = \int_{\Omega} f \eta_j \, dx + \int_{\partial \Omega_n} g \eta_j \, dx - \sum_{k=1}^n U_k \left(\int_{\Omega} \nabla \eta_k \cdot \nabla \eta_j \, dx \right)$$

→ existence de la solution

A est définie positive donc le système admet une unique solution en effet pour $x \in \mathbb{R}^n$

$$x^T A x = \sum_{(i,j) \in [1,n]^2} A_{ij} x_i x_j = \sum_{(i,j) \in [1,n]^2} a(\eta_i, \eta_j) x_i x_j$$

par bilinéarité de a on a

$$x^T A x = a \left(\sum_{j=1}^n x_j \eta_j, \sum_{i=1}^n x_i \eta_i \right) = a(z, z)$$

avec $z = \sum_{i=1}^n x_i \eta_i$ or a est continue donc

$$x^T A x \geq C |z|_{(1,\Omega)}^2$$

or si $|z|_{(1,\Omega)} = 0$ donc $z = 0$ alors $x = 0$

1.2 Mise en oeuvre pratique

- Construction de la matrice de raideur élémentaire M_T^A relative à un élément triangle

voir **raideur_triangle.m**

- Assemblage de la matrice A dans le cas d'un maillage constitué uniquement d'éléments triangles + second membre dans le cas de conditions de Dirichlet uniquement

voir **elliptic.m**

- Construction de la matrice de raideur élémentaire M_Q^A relative à un élément quadrangle

voir **raideur_quadrangle.m**

en effet on a

$$[M_Q^A]_{ij} = \int_Q \nabla \eta_i(x, y)^T \nabla \eta_j(x, y) \, dx dy$$

Une manière simple de déterminer l'expression de ces fonctions pour tout couple $(x, y) \in Q$ est de se ramener au carré de référence U , de sommets $(u_1, v_1) = (0, 0)$, $(u_2, v_2) = (1, 0)$, $(u_3, v_3) = (0, 1)$ et $(u_4, v_4) = (1, 1)$. En effet sur ce carré, les fonctions de base correspondant à ces sommets sont définies pour tout couple $(\xi, \zeta) \in [0, 1]^2$ par :

$$\begin{aligned} \phi_1(\xi, \zeta) &= (1 - \xi)(1 - \zeta) \\ \phi_2(\xi, \zeta) &= \xi(1 - \zeta) \\ \phi_3(\xi, \zeta) &= \xi\zeta \\ \phi_4(\xi, \zeta) &= (1 - \xi)\zeta \end{aligned}$$

En utilisant ce qui précède, on passe des fonctions de base sur U aux fonctions de base sur Q grâce à une formule de composition pour $j \in \{1, 2, 3, 4\}$

$$\forall (x, y) \in Q \quad \eta_j(x, y) = \phi_j(\Phi_Q^{-1}(x, y))$$

donc

$$[M_Q^A]_{ij} = \int_Q \nabla \phi_i(\Phi_Q^{-1}(x, y))^T \nabla \phi_j(\Phi_Q^{-1}(x, y)) dx dy$$

On utilise la formule de changement de variables donné en annexe on a

$$[M_Q^A]_{ij} = \int_U \nabla \phi_i(\xi, \zeta)^T (J_\Phi^T J_\Phi)^{-1} \nabla \phi_j(\xi, \zeta) |J_\Phi| d\xi d\zeta$$

on a $(J_\Phi^T J_\Phi)^{-1}$ est symétrique alors on pose

$$(J_\Phi^T J_\Phi)^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

donc

$$[M_Q^A]_{ij} = |J_\Phi| \int_U \nabla \phi_i(\xi, \zeta)^T \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \nabla \phi_j(\xi, \zeta) d\xi d\zeta$$

avec

$$\nabla \phi_1(\xi, \zeta) = \begin{bmatrix} \zeta - 1 \\ \xi - 1 \end{bmatrix}$$

$$\nabla \phi_2(\xi, \zeta) = \begin{bmatrix} 1 - \zeta \\ -\xi \end{bmatrix}$$

$$\nabla \phi_3(\xi, \zeta) = \begin{bmatrix} \zeta \\ \xi \end{bmatrix}$$

$$\nabla \phi_4(\xi, \zeta) = \begin{bmatrix} -\zeta \\ 1 - \xi \end{bmatrix}$$

et

$$J_\Phi = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_4 - y_1 \end{bmatrix}$$

ce qui nous donne

$$[M_Q^A] = \frac{\det(J_\Phi)}{6} \begin{bmatrix} 2a + 3b + 2c & -2a + c & -a - 3b - c & a - 2c \\ -2a + c & 2a - 3b + 2c & a - 2c & -a + 3b - c \\ -a - 3b - c & a - 2c & 2a + 3b + 2c & -2a + c \\ a - 2c & -a + 3b - c & -2a + c & 2a - 3b + 2c \end{bmatrix}$$

- Inclusion du traitement de tels éléments de type Q1 et des conditions de Neumann

voir **elliptic.m**

- Résultats

voir **main.m**

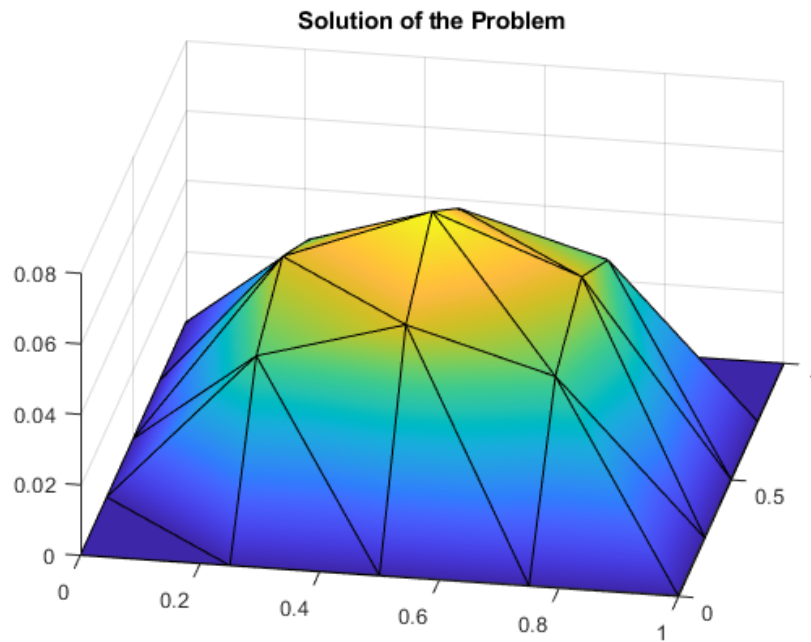


Figure 1: Solution sur le maillage P1 + conditions de Dirichlet uniquement avec $n=5$

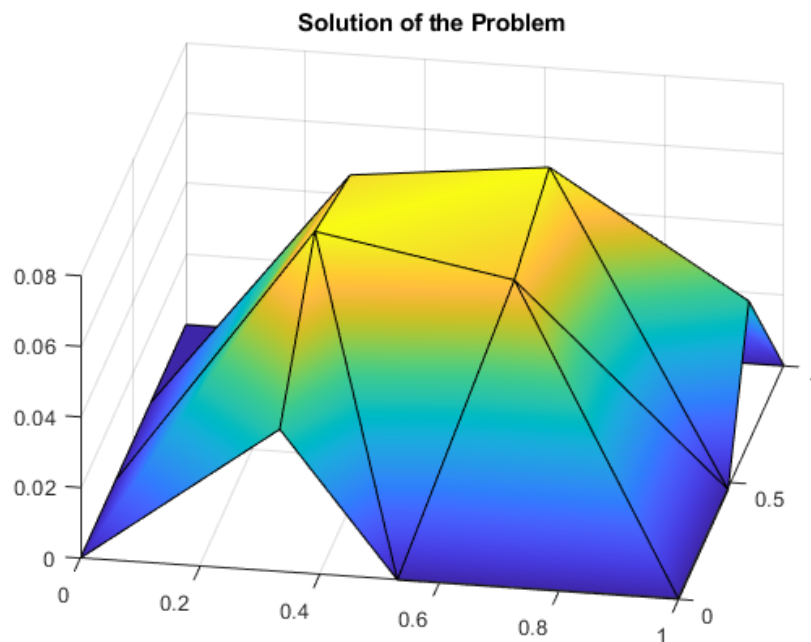


Figure 2: Solution sur le maillage Q1 + conditions de Dirichlet et Neumann

1.3 Analyse de l'ordre du schéma de discrétisation dans le cas d'éléments Tri-angle

voir `main.m`

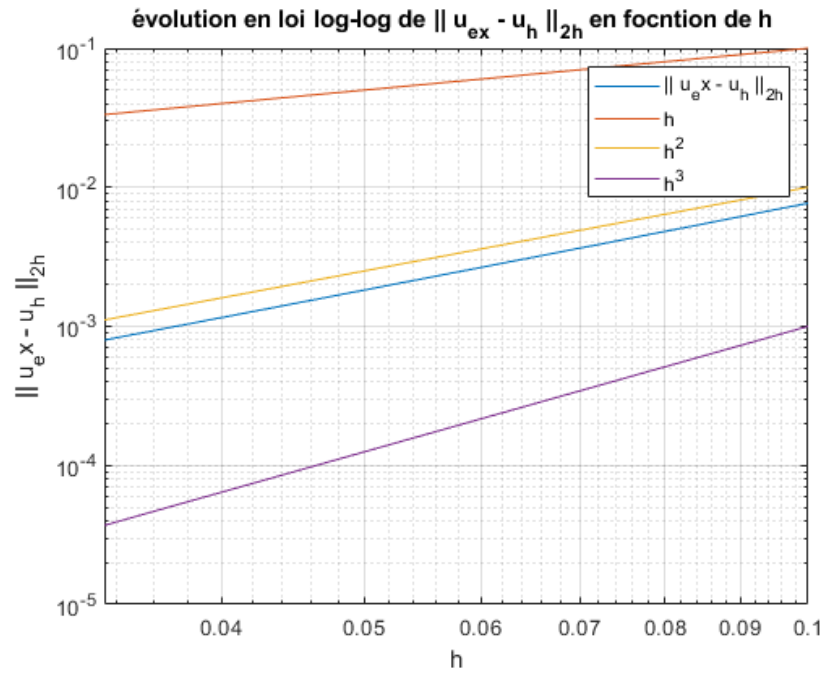


Figure 3: évolution en loi log-log de $\|u_{ex} - u_h\|_{2h}$ en fonction de h

On obtient un ordre de discrétisation de 2.

1.4 Résolution du système linéaire par une méthode directe

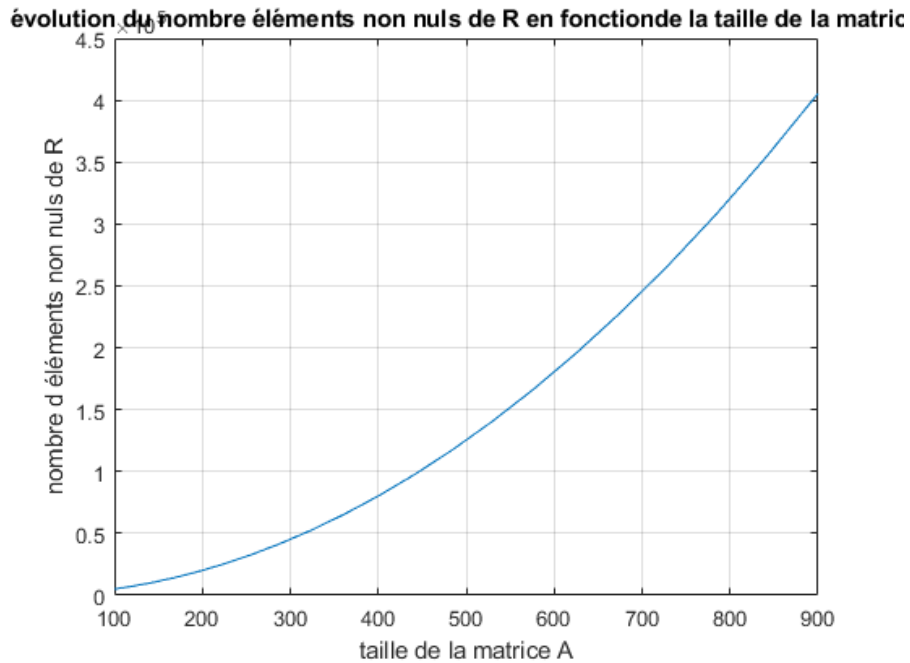


Figure 4: évolution du nombre éléments non nuls de R en fonctionde la taille de la matrice

- On remarque que