Equations aux dérivées partielles

El Bouzekraoui Younes — MDAA Saad

Département Sciences du Numérique - Deuxième année
2020-2021

Contents

1 Equations aux dérivées partielles elliptiques

1.1 Partie théorique

• On suppose que $u \in H^1(\Omega)$
pour $w \in H_0^1(\Omega)$ on a :

$$-\int_\Omega \triangle u.w\,dx = \int_\Omega f.w\,dx$$

d'apres la formule de green :

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla w\,dx - \int_{\partial\Omega} \gamma_1(u)\gamma_0(w)\,dx = \int_\Omega f.w\,dx$$

on pose $v = u - u_d \in H_0^1(\Omega)$ on a:

$$\int_\Omega \nabla(v + u_d).\nabla w\,dx = \int_\Omega fw\,dx + \int_{\partial\Omega_d} \gamma_1(u)\gamma_0(w)\,dx + \int_{\partial\Omega_n} \gamma_1(u)\gamma_0(w)\,dx$$

or

$$\gamma_1(u) = \frac{\partial u}{\partial n} = g \text{ sur } \partial\Omega_n$$

et

$$\gamma_0(w) = w = 0 \text{ sur } \partial\Omega_d \text{ car } w \in H_0^1(\Omega)$$

donc

$$\boxed{\int_\Omega \nabla v.\nabla w\,dx = \int_\Omega fw\,dx + \int_{\partial\Omega_n} g\gamma_0(w)\,dx - \int_\Omega \nabla u_d.\nabla w\,dx}$$

• Soit la forme bilinéaire sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ définie par

$$a : (u, v) \to < u, v >_{1,\Omega} = \int_\Omega \nabla u.\nabla v\,dx$$

soit la forme linéaire sur $H_0^1(\Omega)$ définie par

$$l : w \to \int_\Omega fw\,dx + \int_{\partial\Omega_n} g\gamma_0(w)\,dx - \int_\Omega \nabla u_d.\nabla w\,dx$$

on a pour $w \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned}|l(w)| &= |\int_\Omega fw\,dx + \int_{\partial\Omega_n} g\gamma_0(w)\,dx - \int_\Omega \nabla u_d.\nabla w\,dx| \\ &\le |\int_\Omega fw\,dx| + |\int_{\partial\Omega_n} g\gamma_0(w)\,dx| + |\int_\Omega \nabla u_d.\nabla w\,dx|\end{aligned}$$

par inégalité de cauchy schwarz on a

$$|l(w)| \le ||f||_{L^2(\Omega)}.||w||_{L^2(\Omega)} + ||g||_{L^2(\partial\Omega}.||w||_{L^2(\partial\Omega)}$$