Equations aux dérivées partielles

El Bouzekraoui Younes — MDAA Saad

Département Sciences du Numérique - Deuxième année
2020-2021

Contents

1 Equations aux dérivées partielles elliptiques

1.1 Partie théorique

• On suppose que $u \in H^1(\Omega)$
pour $w \in H_0^1(\Omega)$ on a :

$$-\int_\Omega \triangle u.w\,dx = \int_\Omega f.w\,dx$$

d'apres la formule de green :

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla w\,dx - \int_{\partial\Omega} \gamma_1(u)\gamma_0(w)\,dx = \int_\Omega f.w\,dx$$

on pose $v = u - u_d \in H_0^1(\Omega)$ on a:

$$\int_\Omega \nabla(v+u_d).\nabla w\,dx = \int_\Omega fw\,dx + \int_{\partial\Omega_d} \gamma_1(u)\gamma_0(w)\,dx + \int_{\partial\Omega_n} \gamma_1(u)\gamma_0(w)\,dx$$

or

$$\gamma_1(u) = \frac{\partial u}{\partial n} = g \text{ sur } \partial\Omega_n$$

et

$$\gamma_0(w) = w = 0 \text{ sur } \partial\Omega_d \text{ car } w \in H_0^1(\Omega)$$

donc

$$\boxed{\int_\Omega \nabla v.\nabla w\,dx = \int_\Omega fw\,dx + \int_{\partial\Omega_n} g\gamma_0(w)\,dx - \int_\Omega \nabla u_d.\nabla w\,dx}$$

• Soit la **forme bilinéaire** sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ définie par

$$a : (u,v) \to \int_\Omega \nabla u.\nabla v\,dx$$

soit la **forme** sur $H_0^1(\Omega)$ définie par

$$l : w \to \int_\Omega fw\,dx + \int_{\partial\Omega_n} g\gamma_0(w)\,dx - \int_\Omega \nabla u_d.\nabla w\,dx$$

en appliquant le théoreme de Lax-Milgram sur a et l on a

$$\boxed{\exists! u \in H_0^1(\Omega) \;\; \forall v \in H_0^1(\Omega) \;\; a(u,v) = l(v)}$$

pour cela il faut vérifier que
→ l **est linéaire** :
soient $w_1,\, w_2 \in H_0^1(\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ on a

$$l(w_1+\lambda w_2) = \int_\Omega f(w_1+\lambda w_2)\,dx + \int_{\partial\Omega_n} g\gamma_0(w_1+\lambda w_2)\,dx - \int_\Omega \nabla u_d.\nabla(w_1+\lambda w_2)\,dx$$

$$= \int_\Omega fw_1\,dx + \int_{\partial\Omega_n} g\gamma_0(w_1)\,dx - \int_\Omega \nabla u_d.\nabla w_1\,dx + \lambda(\int_\Omega fw_2\,dx + \int_{\partial\Omega_n} g\gamma_0(w_2)\,dx - \int_\Omega \nabla u_d.\nabla w_2\,dx)$$

car γ_0 est linéaire

$$l(w_1+\lambda w_2) = l(w_1) + \lambda l(w_2)$$

→ l **est continue** :
soit $w \in H_0^1(\Omega)$ on a

$$|l(w)| = |\int_\Omega fw\,dx + \int_{\partial\Omega_n} g\gamma_0(w)\,dx - \int_\Omega \nabla u_d.\nabla w\,dx|$$

$$\leq |\int_\Omega fw\,dx| + |\int_{\partial\Omega_n} g\gamma_0(w)\,dx| + |\int_\Omega \nabla u_d.\nabla w\,dx|$$

par inégalité de cauchy schwarz car $f \in L^2(\Omega)$ et $w \in H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ on a

$$|\int_\Omega fw\,dx| \leq ||f||_{L^2(\Omega)}||w||_{L^2(\Omega)}$$

par inégalité de Poincaré on a $\exists C_1 \geq 0$ tq (car Ω est un ouvert borné)

$$|\int_\Omega fw\,dx| \leq C_1||f||_{L^2(\Omega)}|w|_{1,\Omega}$$

$g \in L^2(\partial\Omega_n)$ et $\gamma_0(w) \in L^2(\partial\Omega_n)$ donc par inégalité de cauchy schwarz on a

$$|\int_{\partial\Omega_n} g\gamma_0(w)\,dx| \leq ||g||_{L^2(\partial\Omega_n)}||\gamma_0(w)||_{L^2(\partial\Omega_n)}$$

par continuité de γ_0 on $\exists C_2 \geq 0$ tq

$$||\gamma_0(w)||_{L^2(\partial\Omega_n)} \leq C_2|w|_{1,\Omega}$$

donc

$$|\int_{\partial\Omega_n} g\gamma_0(w)\,dx| \leq C_2||g||_{L^2(\partial\Omega_n)}|w|_{1,\Omega}$$

on a $w \in H_0^1(\Omega)$ et $u_d \in H_0^1(\Omega)$ donc par inégalité de cauchy schwarz on a (car Ω est un ouvert borné)

$$|\int_\Omega \nabla u_d.\nabla w\,dx| \leq |u_d|_{1,\Omega}|w|_{1,\Omega}$$

donc

$$|l(w)| \leq C|w|_{1,\Omega}$$

d'ou la continuité

$\rightarrow$ a **est continue** :
par continuité du produit scalaire

$\rightarrow$ a **est bilinéaire** :
par bilinéairité du produit scalaire

$\rightarrow$ a **est coercive** :
soit $u \in H_0^1(\Omega)$ on a par inégalité de cauchy schwarz

$$|a(u,u)| = |<u,u>_{1,\Omega}| \geq |u|^2_{1,\Omega}$$

• on note n le nombre de degrés de liberté et η_k les fonctions de base des éléments finis définie par

$$\forall k \in [1,n] \;\; \eta_k(x_j,y_j) = \delta_{k,j}$$

on cherche une solution dans l'espace engendré par $(\eta_k)_{[1,n]}$ donc v s'ecrit comme

$$v = \sum_{k=1}^{n} v_k n_k$$

on injecte dans l'équation de la question 1 avec $w = \eta_j \;\; j \in [1,n]$ et

$$u_d = \sum_{k=1}^{n} U_k\eta_k$$

avec

$$U_k = \begin{cases} 0 & \text{si } (x_k,y_k) \notin \partial\Omega_n \\ u_d(x_k,y_k) & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\int_\Omega \nabla(\sum_{k=1}^{n} v_k\eta_k).\nabla\eta_j\,dx = \int_\Omega f\eta_j\,dx + \int_{\partial\Omega_n} g\gamma_0(\eta_j)\,dx - \int_\Omega \nabla(\sum_{k=1}^{n} U_k\eta_k).\nabla\eta_j\,dx$$

donc

$$\sum_{k=1}^{n} v_k(\int_\Omega \nabla\eta_k.\nabla\eta_j\,dx) = \int_\Omega f\eta_j\,dx + \int_{\partial\Omega_n} g\gamma_0(\eta_j)\,dx - \sum_{k=1}^{n} U_k(\int_\Omega \nabla\eta_k.\nabla\eta_j\,dx)$$

ceci pour $j \in [1,n]$ ce qui est équivalent au système linéaire d équations $\boxed{Ax = b}$ avec

$$A_{kj} = \int_\Omega \nabla\eta_k.\nabla\eta_j\,dx$$

$$b_j = \int_\Omega f\eta_j\,dx + \int_{\partial\Omega_n} g\eta_j\,dx - \sum_{k=1}^{n} U_k(\int_\Omega \nabla\eta_k.\nabla\eta_j\,dx)$$

$\rightarrow$ existence de la solution

A est définie postive donc le système admet une unique solution en effet pour $x \in \mathbb{R}^n$

$$x^T Ax = \sum\nolimits_{(i,j)\in[1,n]^2} A_{ij}x_ix_j = \sum\nolimits_{(i,j)\in[1,n]^2} a(\eta_i,\eta_j)x_ix_j$$

par bilinéairité de a on a

$$x^T Ax = a(\sum_{j=1}^{n} x_j\eta_j, \sum_{i=1}^{n} x_i\eta_i) = a(z,z)$$

avec $z = \sum_{i=1}^{n} x_i\eta_i$ or a et continue donc

$$x^T Ax \geq C|z|^2_{(1,\Omega)}$$

or si $|z|_{(1,\Omega)} = 0$ donc $z = 0$ alors $x = 0$

1.2 Mise en oeuvre pratique

• Construction de la matrice de raideur élementaire M_T^A relative a un élément triangle

voir **raideur_triangle.m**

• Assemblage de la matrice A dans le cas d'un maillage constitué uniquement d'éléments triangles + second membre dans le cas de conditions de Dirichlet uniquement

voir **elliptic.m**

• Construction de la matrice de raideur élementaire M_Q^A relative a un élément quadrangle

voir **raideur_quadrangle.m**

en effet on a

$$[M_Q^A]_{ij} = \int_Q \nabla\eta_i(x,y)^T\nabla\eta_j(x,y)\,dxdy$$

Une manière simple de déterminer l'expression de ces fonctions pour tout couple $(x,y) \in Q$ est de se ramener au carré de référence U, de sommets $(u_1,v_1) = (0,0)$, $(u_2,v_2) = (1,0)$, $(u_3,v_3) = (0,1)$ et $(u_4,v_4) = (1,1)$
En effet sur ce carré, les fonctions de base correspondant à ces sommets sont définies pour tout couple $(\xi,\zeta) \in [0,1]^2$ par :

$$\phi_1(\xi,\zeta) = (1-\xi)(1-\zeta)$$
$$\phi_2(\xi,\zeta) = \xi(1-\zeta)$$
$$\phi_3(\xi,\zeta) = \xi\zeta$$
$$\phi_4(\xi,\zeta) = (1-\xi)\zeta$$

En utilisant ce qui précède, on passe des fonctions de base sur U aux fonctions de base sur Q grace à une formule de composition pour $j \in \{1,2,3,4\}$

$$\forall(x,y) \in Q\ \eta_j(x,y) = \phi_j(\Phi_Q^{-1}(x,y))$$

donc

$$[M_Q^A]_{ij} = \int_Q \nabla\phi_i(\Phi_Q^{-1}(x,y))^T \nabla\phi_j(\Phi_Q^{-1}(x,y))\, dxdy$$

On utilise la formule de changement de variables donné en annexe on a

$$[M_Q^A]_{ij} = \int_U \nabla\phi_i(\xi,\zeta)^T (J_\Phi^T J_\Phi)^{-1} \nabla\phi_j(\xi,\zeta) |J_\Phi|\, d\xi d\zeta$$

on a $(J_\Phi^T J_\Phi)^{-1}$ est symétrique alors on pose

$$(J_\Phi^T J_\Phi)^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

donc

$$[M_Q^A]_{ij} = |J_\Phi| \int_U \nabla\phi_i(\xi,\zeta)^T \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \nabla\phi_j(\xi,\zeta)\, d\xi d\zeta$$

avec

$$\nabla\phi_1(\xi,\zeta) = \begin{bmatrix} \zeta - 1 \\ \xi - 1 \end{bmatrix}$$
$$\nabla\phi_2(\xi,\zeta) = \begin{bmatrix} 1 - \zeta \\ -\xi \end{bmatrix}$$
$$\nabla\phi_3(\xi,\zeta) = \begin{bmatrix} \zeta \\ \xi \end{bmatrix}$$
$$\nabla\phi_4(\xi,\zeta) = \begin{bmatrix} -\zeta \\ 1 - \xi \end{bmatrix}$$

et

$$J_\Phi = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_4 - y_1 \end{bmatrix}$$

en effet on a

$$x = (x_2 - x_1)\xi + (x_4 - x_1)\zeta + x_1$$
$$y = (y_2 - y_1)\xi + (y_4 - y_1)\zeta + y_1$$

L'inversion de ce système permet d'obtenir pour tout couple (x, y)

$$\xi = \frac{(y_4 - y_1)(x - x_1) - (x_4 - x_1)(y - y_1)}{(y_4 - y_1)(x_2 - x_1) - (x_4 - x_1)(y_2 - y_1)}$$

$$\zeta = \frac{(y_2 - y_1)(x - x_1) - (x_2 - x_1)(y - y_1)}{(y_2 - y_1)(x_4 - x_1) - (x_2 - x_1)(y_4 - y_1)}$$

on pose $U = [\xi\ \zeta]^T$, $X = [x\ y]^T$, $X_1 = [x_1\ y_1]^T$ et

$$J_\Phi = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_4 - y_1 \end{bmatrix}$$

on a

$$X = \Phi_Q(U) = J_\Phi U + X_1$$

ce qui nous donne

$$[M_Q^A] = \frac{det(J_\Phi)}{6} \begin{bmatrix} 2a + 3b + 2c & -2a + c & -a - 3b - c & a - 2c \\ -2a + c & 2a - 3b + 2c & a - 2c & -a + 3b - c \\ -a - 3b - c & a - 2c & 2a + 3b + 2c & -2a + c \\ a - 2c & -a + 3b - c & -2a + c & 2a - 3b + 2c \end{bmatrix}$$

- Inclusion du traitement de tels éléments de type Q1 et des conditions de Neumann voir **elliptic.m**

- Résultats

voir **main.m**

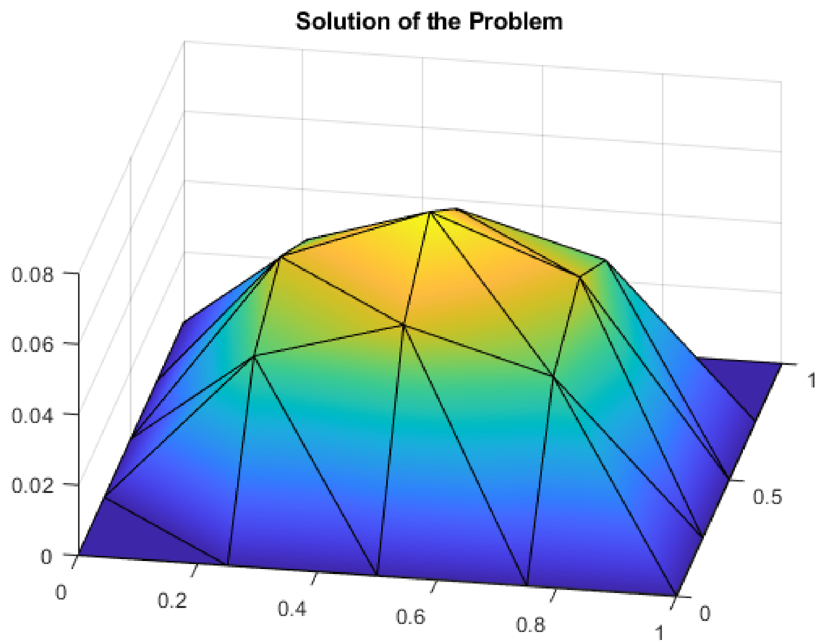

Figure 1: Solution sur le maillage P1 + conditions de Dirichlet uniquement avec n=5

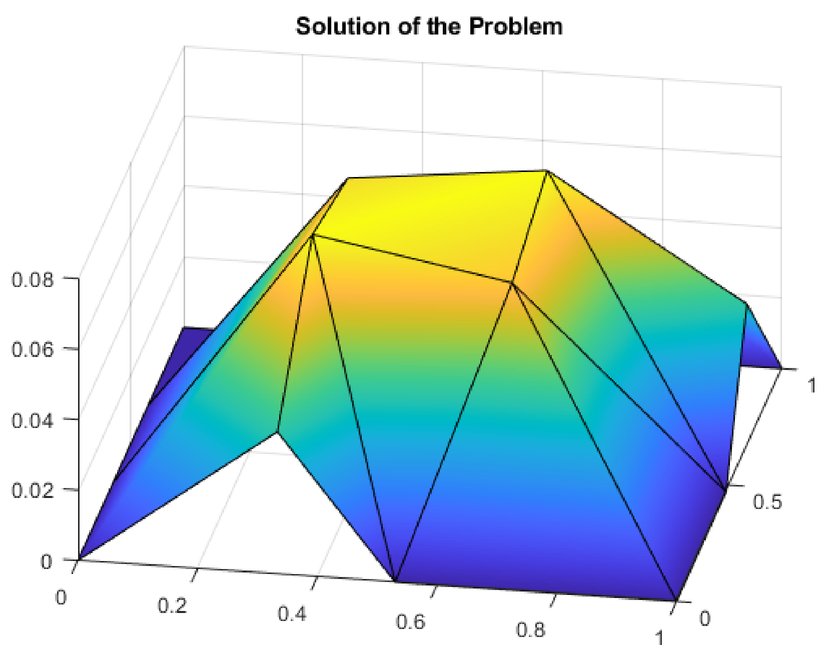

Figure 2: Solution sur le maillage Q1 + conditions de Dirichlet et Neumann

1.3 Analyse de l'ordre du schéma de discrétisation dans le cas d'éléments Triangle

voir **main.m**

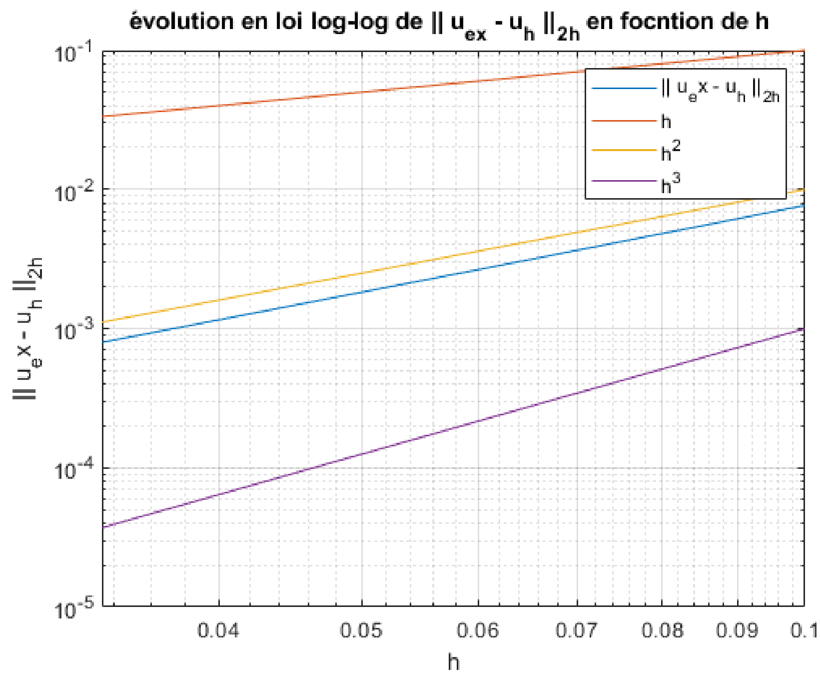

Figure 3: évolution en loi log-log de $||u_{ex} - u_h||_{2h}$ en fonction de h

On obtient un ordre de discrétisation de 2.

1.4 Résolution du système linéaire par une méthode directe

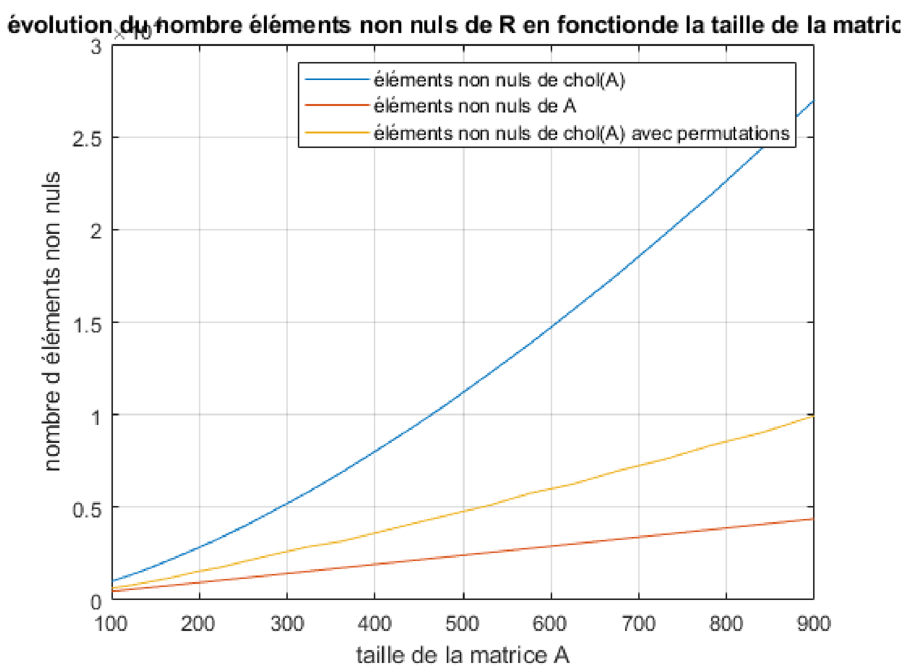

Figure 4: évolution du nombre éléments non nuls de R en fonction de la taille de la matrice

• On remarque que le nombre des éléments non nuls de R est beaucoup plus élevé par rapport au nombre des éléments non nuls de A et cela aura un effet sur le temps et le coût mémoire nécessaire pour le calcul de la solution

• La factorisation Cholesky d'une matrice creuse ne donne pas nécessairement un matrice creuse (le produit de deux matrices creuse n'est pas nécessairement une matrice creuse)

• On peut suggérer une approche qui consiste à faire un pré-traitement sur la matrice A en la permutant d'une certaine façon qui nous permettra d'obtenir une bonne décomposition de Chloseky (Matrice chol(A) creuse)

La fonction symamd de Matlab [symamd p = symamd(S)] permet pour une matrice définie positive S de trouver le vecteur de permutation p tel que S(p,p) tend à avoir la meilleure factorisation de Chloseky (Matrice de Chloseky chol(A) la plus Creuse possible)

https://fr.mathworks.com/help/matlab/math/sparse-matrix-reordering.html

On peut remarquer dans la figure précédente un différence significative entre le nombre des éléments non nuls de chol(A) dans le cas où on n'a pas fait de pré-traitement sur la matrice A et dans le cas où on a fait des permutions avant la décomposition.