Equations aux dérivées partielles

El Bouzekraoui Younes — MDAA Saad

Département Sciences du Numérique - Deuxième année
2020-2021

Contents

1 Equations aux dérivées partielles elliptiques

1.1 Partie théorique

• On suppose que $u \in H^1(\Omega)$
pour $w \in H_0^1(\Omega)$ on a :

$$-\int_\Omega \triangle u.w \, dx = \int_\Omega f.w \, dx$$

d'apres la formule de green :

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla w \, dx - \int_{\partial\Omega} \gamma_1(u)\gamma_0(w) \, dx = \int_\Omega f.w \, dx$$

on pose $v = u - u_d \in H_0^1(\Omega)$ on a:

$$\int_\Omega \nabla(v + u_d).\nabla w \, dx = \int_\Omega fw \, dx + \int_{\partial\Omega_d} \gamma_1(u)\gamma_0(w) \, dx + \int_{\partial\Omega_n} \gamma_1(u)\gamma_0(w) \, dx$$

or

$$\gamma_1(u) = \frac{\partial u}{\partial n} = g \text{ sur } \partial\Omega_n$$

et

$$\gamma_0(w) = w = 0 \text{ sur } \partial\Omega_d \text{ car } w \in H_0^1(\Omega)$$

donc

$$\boxed{\int_\Omega \nabla v.\nabla w \, dx = \int_\Omega fw \, dx + \int_{\partial\Omega_n} g\gamma_0(w) \, dx - \int_\Omega \nabla u_d.\nabla w \, dx}$$

• Soit la **forme bilinéaire** sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ définie par

$$a : (u, v) \to \int_\Omega \nabla u.\nabla v \, dx$$

soit la **forme** sur $H_0^1(\Omega)$ définie par

$$l : w \to \int_\Omega fw \, dx + \int_{\partial\Omega_n} g\gamma_0(w) \, dx - \int_\Omega \nabla u_d.\nabla w \, dx$$

en appliquant le théoreme de Lax-Milgram sur a et l on a

$$\boxed{\exists! u \in H_0^1(\Omega) \;\; \forall v \in H_0^1(\Omega) \;\; a(u, v) = l(v)}$$

pour cela il faut vérifier que
→ l **est linéaire** :
soient w_1, $w_2 \in H_0^1(\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ on a

$$l(w_1 + \lambda w_2) = \int_\Omega f(w_1 + \lambda w_2) \, dx + \int_{\partial\Omega_n} g\gamma_0(w_1 + \lambda w_2) \, dx - \int_\Omega \nabla u_d.\nabla(w_1 + \lambda w_2) \, dx$$

$$= \int_\Omega fw_1 \, dx + \int_{\partial\Omega_n} g\gamma_0(w_1) \, dx - \int_\Omega \nabla u_d.\nabla w_1 \, dx + \lambda(\int_\Omega fw_2 \, dx + \int_{\partial\Omega_n} g\gamma_0(w_2) \, dx - \int_\Omega \nabla u_d.\nabla w_2 \, dx)$$

car γ_0 est linéaire

$$l(w_1 + \lambda w_2) = l(w_1) + \lambda l(w_2)$$

→ l **est continue** :
soit $w \in H_0^1(\Omega)$ on a

$$|l(w)| = |\int_\Omega fw \, dx + \int_{\partial\Omega_n} g\gamma_0(w) \, dx - \int_\Omega \nabla u_d.\nabla w \, dx|$$

$$\leq |\int_\Omega fw \, dx| + |\int_{\partial\Omega_n} g\gamma_0(w) \, dx| + |\int_\Omega \nabla u_d.\nabla w \, dx|$$

par inégalité de cauchy schwarz car $f \in L^2(\Omega)$ et $w \in H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ on a

$$|\int_\Omega fw\,dx| \leq ||f||_{L^2(\Omega)}||w||_{L^2(\Omega)}$$

par inégalité de Poincaré on a $\exists C_1 \geq 0$ tq (car Ω est un ouvert borné)

$$|\int_\Omega fw\,dx| \leq C_1||f||_{L^2(\Omega)}|w|_{1,\Omega}$$

$g \in L^2(\partial\Omega_n)$ et $\gamma_0(w) \in L^2(\partial\Omega_n)$ donc par inégalité de cauchy schwarz on a

$$|\int_{\partial\Omega_n} g\gamma_0(w)\,dx| \leq ||g||_{L^2(\partial\Omega_n)}||\gamma_0(w)||_{L^2(\partial\Omega_n)}$$

par continuité de γ_0 on $\exists C_2 \geq 0$ tq

$$||\gamma_0(w)||_{L^2(\partial\Omega_n)} \leq C_2|w|_{1,\Omega}$$

donc

$$|\int_{\partial\Omega_n} g\gamma_0(w)\,dx| \leq C_2||g||_{L^2(\partial\Omega_n)}|w|_{1,\Omega}$$

on a $w \in H_0^1(\Omega)$ et $u_d \in H_0^1(\Omega)$ donc par inégalité de cauchy schwarz on a (car Ω est un ouvert borné)

$$|\int_\Omega \nabla u_d.\nabla w\,dx| \leq |u_d|_{1,\Omega}|w|_{1,\Omega}$$

donc

$$|l(w)| \leq C|w|_{1,\Omega}$$

d'ou la continuité

$\rightarrow$ a **est continue** :
par continuité du produit scalaire

$\rightarrow$ a **est bilinéaire** :
par bilinéairité du produit scalaire

$\rightarrow$ a **est coercive** :
soit $u \in H_0^1(\Omega)$ on a par inégalité de cauchy schwarz

$$|a(u,u)| = |<u,u>_{1,\Omega}| \geq |u|^2_{1,\Omega}$$

• on note n le nombre de degrés de liberté et η_k les fonctions de base des éléments finis définie par

$$\forall k \in [1,n] \;\; \eta_k(x_j,y_j) = \delta_{k,j}$$

on cherche une solution dans l'espace engendré par $(\eta_k)_{[1,n]}$ donc v s'ecrit comme

$$v = \sum_{k=1}^n v_k n_k$$

on injecte dans l'équation de la question 1 avec $w = \eta_j \;\; j \in [1,n]$ et

$$u_d = \sum_{k=1}^n U_k \eta_k$$

avec

$$U_k = \begin{cases} 0 & \text{si } (x_k,y_k) \notin \partial\Omega_n \\ u_d(x_k,y_k) & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\int_\Omega \nabla(\sum_{k=1}^n v_k\eta_k).\nabla\eta_j\,dx = \int_\Omega f\eta_j\,dx + \int_{\partial\Omega_n} g\gamma_0(\eta_j)\,dx - \int_\Omega \nabla(\sum_{k=1}^n U_k\eta_k).\nabla\eta_j\,dx$$

donc

$$\sum_{k=1}^{n} v_k(\int_{\Omega} \nabla\eta_k.\nabla\eta_j\,dx) = \int_{\Omega} f\eta_j\,dx + \int_{\partial\Omega_n} g\gamma_0(\eta_j)\,dx - \sum_{k=1}^{n} U_k(\int_{\Omega} \nabla\eta_k.\nabla\eta_j\,dx)$$

ceci pour $j \in [1,n]$ ce qui est équivalent au système linéaire d équations $\boxed{Ax = b}$ avec

$$A_{kj} = \int_{\Omega} \nabla\eta_k.\nabla\eta_j\,dx$$

$$b_j = \int_{\Omega} f\eta_j\,dx + \int_{\partial\Omega_n} g\eta_j\,dx - \sum_{k=1}^{n} U_k(\int_{\Omega} \nabla\eta_k.\nabla\eta_j\,dx)$$

$\rightarrow$ existence de la solution

A est définie postive donc le système admet une unique solution en effet pour $x \in \mathbb{R}^n$

$$x^T Ax = \sum\nolimits_{(i,j)\in[1,n]^2} A_{ij}x_i x_j = \sum\nolimits_{(i,j)\in[1,n]^2} a(\eta_i,\eta_j)x_i x_j$$

par bilinéairité de a on a

$$x^T Ax = a(\sum_{j=1}^{n} x_j\eta_j, \sum_{i=1}^{n} x_i\eta_i) = a(z,z)$$

avec $z = \sum_{i=1}^{n} x_i\eta_i$ or a et continue donc

$$x^T Ax \geq C|z|^2_{(1,\Omega)}$$

or si $|z|_{(1,\Omega)} = 0$ donc $z = 0$ alors $x = 0$

1.2 Mise en oeuvre pratique

• Construction de la matrice de raideur élementaire M_T^A relative a un élément triangle

voir **raideur_triangle.m**

• Assemblage de la matrice A dans le cas d'un maillage constitué uniquement d'éléments triangles + second membre dans le cas de conditions de Dirichlet uniquement

voir **elliptic.m**

• Construction de la matrice de raideur élementaire M_Q^A relative a un élément quadrangle

voir **raideur_quadrangle.m**

Insert calcul here

• Inclusion du traitement de tels éléments de type Q1 et des conditions de Neumann

voir **elliptic.m**

• Résultats

voir **main.m**

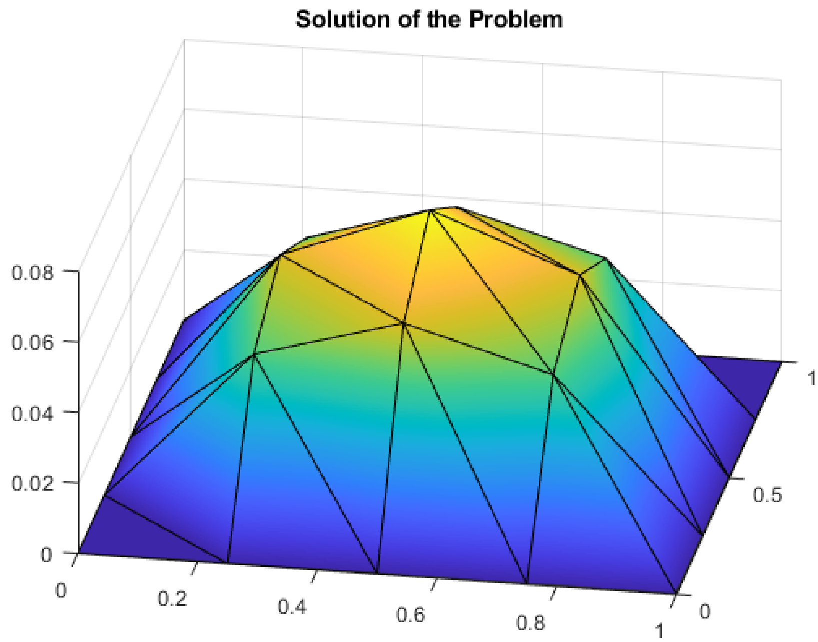

Figure 1: Solution sur le maillage P1 + conditions de Dirichlet uniquement avec n=5

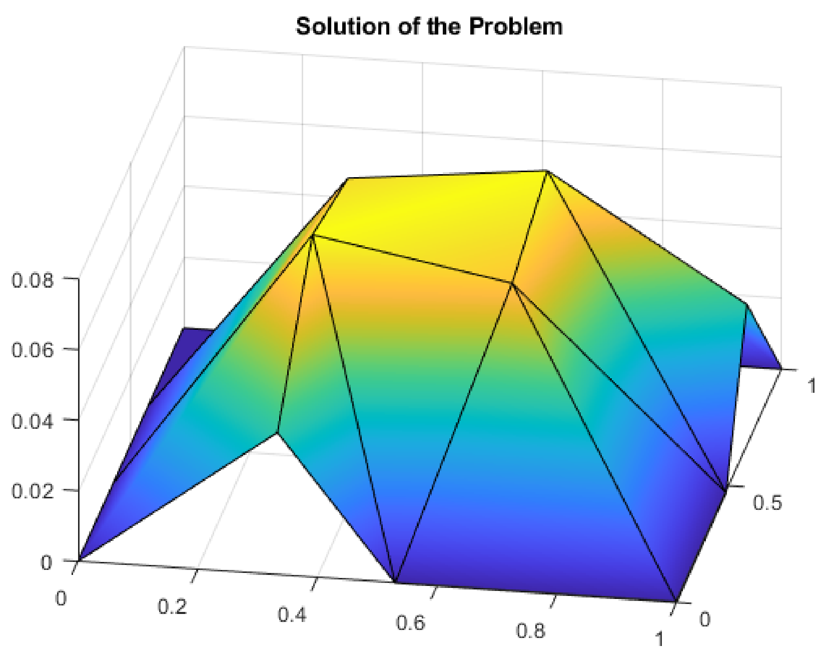

Figure 2: Solution sur le maillage Q1 + conditions de Dirichlet et Neumann

1.3 Analyse de l'ordre du schéma de discrétisation dans le cas d'éléments Triangle

voir **main.m**

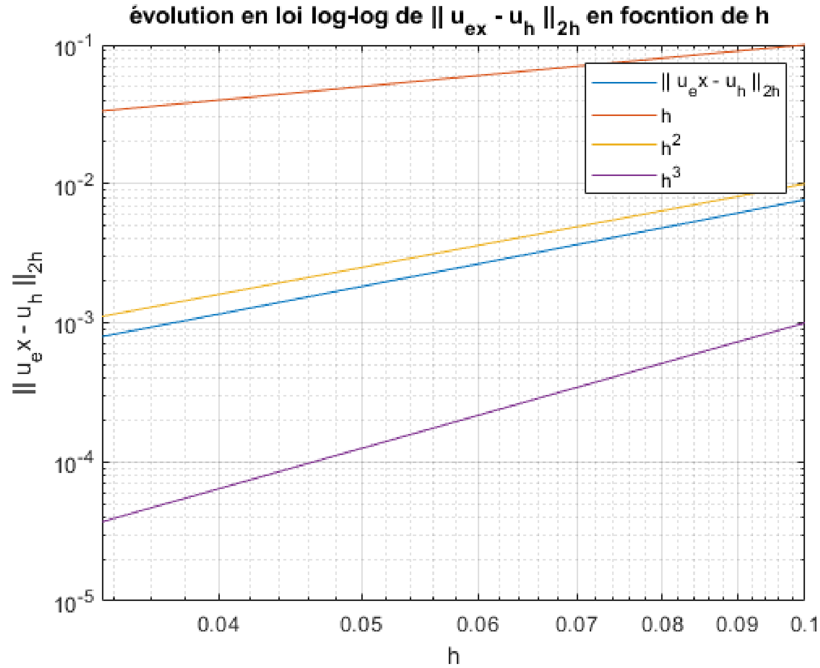

Figure 3: évolution en loi log-log de $||u_{ex} - u_h||_{2h}$ en fonction de h

On obtient un ordre de discrétisation de 2.

1.4 Résolution du système linéaire par une méthode directe

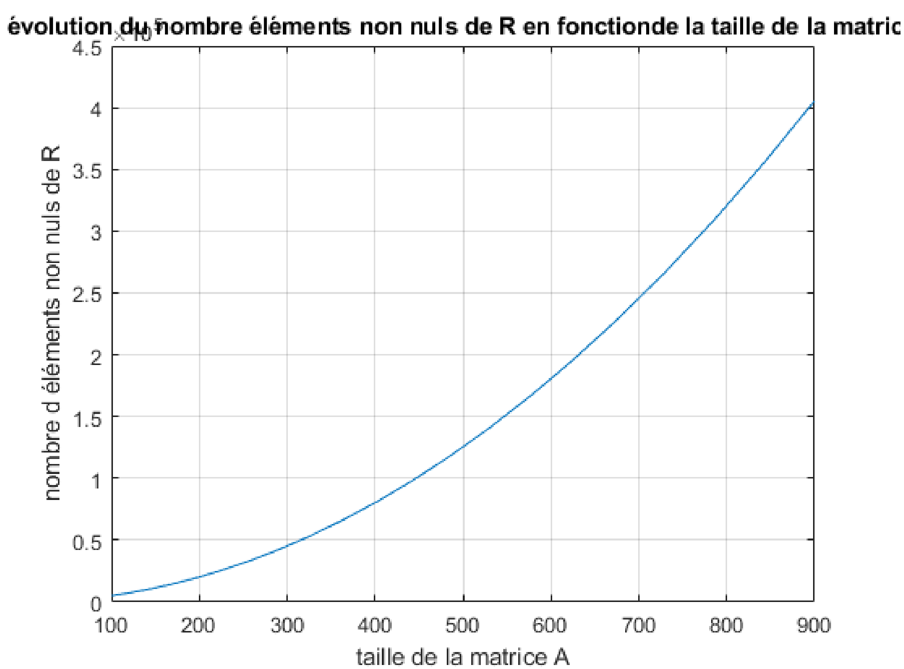

Figure 4: évolution du nombre éléments non nuls de R en fonctionde la taille de la matrice