Equations aux dérivées partielles

El Bouzekraoui Younes — MDAA Saad

Département Sciences du Numérique - Deuxième année
2020-2021

Contents

1 Equations aux dérivées partielles elliptiques

1.1 Partie théorique

• On suppose que $u \in H^1(\Omega)$
pour $w \in H_0^1(\Omega)$ on a :

$$-\int_\Omega \triangle u.w\,dx = \int_\Omega f.w\,dx$$

d'apres la formule de green :

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla w\,dx - \int_{\partial\Omega} \gamma_1(u)\gamma_0(w)\,dx = \int_\Omega f.w\,dx$$

on pose $v = u - u_d \in H_0^1(\Omega)$ on a:

$$\int_\Omega \nabla(v + u_d).\nabla w\,dx = \int_\Omega fw\,dx + \int_{\partial\Omega_d} \gamma_1(u)\gamma_0(w)\,dx + \int_{\partial\Omega_n} \gamma_1(u)\gamma_0(w)\,dx$$

or

$$\gamma_1(u) = \frac{\partial u}{\partial n} = g \text{ sur } \partial\Omega_n$$

et

$$\gamma_0(w) = w = 0 \text{ sur } \partial\Omega_d \text{ car } w \in H_0^1(\Omega)$$

donc

$$\boxed{\int_\Omega \nabla v.\nabla w\,dx = \int_\Omega fw\,dx + \int_{\partial\Omega_n} g\gamma_0(w)\,dx - \int_\Omega \nabla u_d.\nabla w\,dx}$$

• Soit la **forme bilinéaire** sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ définie par

$$a : (u, v) \to \int_\Omega \nabla u.\nabla v\,dx$$

soit la **forme** sur $H_0^1(\Omega)$ définie par

$$l : w \to \int_\Omega fw\,dx + \int_{\partial\Omega_n} g\gamma_0(w)\,dx - \int_\Omega \nabla u_d.\nabla w\,dx$$

en appliquant le théoreme de Lax-Milgram sur a et l on a

$$\boxed{\exists! u \in H_0^1(\Omega)\ \ \forall v \in H_0^1(\Omega)\ \ a(u, v) = l(v)}$$

pour cela il faut vérifier que
$\to$ l **est linéaire** :
soient w_1, $w_2 \in H_0^1(\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ on a

$$l(w_1 + \lambda w_2) = \int_\Omega f(w_1 + \lambda w_2)\,dx + \int_{\partial\Omega_n} g\gamma_0(w_1 + \lambda w_2)\,dx - \int_\Omega \nabla u_d.\nabla(w_1 + \lambda w_2)\,dx$$

$$= \int_\Omega fw_1\,dx + \int_{\partial\Omega_n} g\gamma_0(w_1)\,dx - \int_\Omega \nabla u_d.\nabla w_1\,dx + \lambda(\int_\Omega fw_2\,dx + \int_{\partial\Omega_n} g\gamma_0(w_2)\,dx - \int_\Omega \nabla u_d.\nabla w_2\,dx)$$

$$l(w_1 + \lambda w_2) = l(w_1) + \lambda l(w_2)$$

$\to$ l **est continue** :
soit $w \in H_0^1(\Omega)$ on a

$$|l(w)| = |\int_\Omega fw\,dx + \int_{\partial\Omega_n} g\gamma_0(w)\,dx - \int_\Omega \nabla u_d.\nabla w\,dx|$$

$$\leq |\int_\Omega fw\,dx| + |\int_{\partial\Omega_n} g\gamma_0(w)\,dx| + |\int_\Omega \nabla u_d.\nabla w\,dx|$$

par inégalité de cauchy schwarz car $f \in L^2(\Omega)$ et $w \in H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ on a

$$|\int_\Omega fw\,dx| \leq ||f||_{L^2(\Omega)}||w||_{L^2(\Omega)}$$

par inégalité de Poincaré on a $\exists C_1 \geq 0$ tq

$$|\int_\Omega f w\, dx| \leq C_1 ||f||_{L^2(\Omega)} |w|_{1,\Omega}$$

$g \in L^2(\partial\Omega_n)$ et $\gamma_0(w) \in L^2(\partial\Omega_n)$ donc par inégalité de cauchy schwarz on a

$$|\int_{\partial\Omega_n} g\gamma_0(w)\, dx| \leq ||g||_{L^2(\partial\Omega_n)} ||\gamma_0(w)||_{L^2(\partial\Omega_n)}$$

par inégalité de Poincaré on a $\exists C_2 \geq 0$ tq

$$|\int_{\partial\Omega_n} g\gamma_0(w)\, dx| \leq C_2 ||g||_{L^2(\partial\Omega_n)} |w|_{1,\Omega}$$

$w \in H_0^1(\Omega)$ et $u_d \in H_0^1(\Omega)$ donc par inégalité de cauchy schwarz on a (car Ω est un ouvert borné)

$$|\int_\Omega \nabla u_d . \nabla w\, dx| \leq |u_d|_{1,\Omega} |w|_{1,\Omega}$$

donc

$$|l(w)| \leq C|w|_{1,\Omega}$$

d'ou la continuité

$\rightarrow$ a **est continue** :
par continuité du produit scalaire

$\rightarrow$ a **est coercive** :
soit $u \in H_0^1(\Omega)$ on a par inégalité de cauchy schwarz

$$|a(u,u)| = | < u, u >_{1,\Omega} | \leq |u|_{1,\Omega}^2$$