

Études de chaînes de transmission en bande de base

Mdaa Saad

Département Sciences du Numérique - Première année
2019-2020

Contents

1	Introduction	4
1.1	Schéma général des chaines à étudier (canal AWGN)	4
1.1.1	Génération de l'information binaire à transmettre	4
1.1.2	Mapping	4
1.1.3	Suréchantillonnage	4
1.1.4	Filtrage de mise en forme	4
1.1.5	Canal de transmission AWGN	4
1.1.6	Filtrage de réception	5
1.1.7	Echantillonnage	5
1.1.8	Décisions	5
1.1.9	Demapping	5
2	Première chaine à étudier : "chaîne de référence"	5
2.1	Étude théorique	5
2.2	Implantation sous Matlab (cette chaîne servira de chaîne de référence pour la suite)	9
3	Deuxième chaine à étudier : impact du choix du filtre de réception	12
3.1	Etude théorique	12
3.2	Implantation sous Matlab	15
4	Troisième chaine à étudier : impact du choix du filtre de mise en forme et d'un canal de propagation à bande limitée	18
4.1	Etude théorique	18
4.2	Implantation sous Matlab	19
5	Quatrième chaine à étudier : impact du choix du mapping	25
5.1	Etude théorique	25
5.2	Implantation sous Matlab	26

List of Figures

1	Chaîne de transmission en bande de base	4
2	Produit de convolution entre $h(t)$ et $h_r(t)$.	5
3	Densité spectrale de puissance du signal transmis (chaîne 1)	9
4	Signal en sortie du filtre de réception (chaîne 1)	10
5	Diagramme de l'oeil en sortie du filtre de réception (chaîne 1)	10
6	tracé du TEB en fonction de E_b/N_0 (chaîne 1)	11
7	Comparaison du TEB théorique et TEB calculé (chaîne 1)	12
8	Réponses impulsionnelles des filtres d'émission et de réception.	12
9	Produit de convolution entre $h(t)$ et $h_r(t)$.	12
10	le signal en sortie du filtre de réception (chaîne 2)	15
11	diagramme de l'oeil en sortie du filtre de réception (chaîne 2)	16
12	tracé du TEB en fonction de E_b/N_0 (chaîne 2)	17
13	Comparaison du TEB théorique et TEB calculé (chaîne 2)	17
14	Comparaison du TEB calculé (chaîne 2) avec TEB calculé (chaîne 1)	18
15	le signal en sortie du filtre de réception (chaîne 3)	20
16	diagramme de l'oeil en sortie du filtre de réception (chaîne 3)	20
17	tracé du TEB en fonction de E_b/N_0 (chaîne 3)	21
18	Comparaison du TEB théorique et TEB calculé (chaîne 3)	22
19	Comparaison du TEB calculé (chaîne 3) avec TEB théorique (chaîne 1)	22
20	Comparaison du DSP (chaîne 3) avec DSP (chaîne 1)	23
21	diagramme de l'oeil - (chaîne 3) avec filtrage canal BW = 1500	24
22	diagramme de l'oeil - (chaîne 3) avec filtrage canal BW = 3000	24
23	le signal en sortie du filtre de réception (chaîne 4)	27
24	la densité spectrale de puissance du signal transmis (chaîne 4)	27
25	la densité spectrale de puissance du signal transmis (chaîne 1) vs (chaîne 4)	28

26	diagramme de l'oeil - (chaîne 4)	29
27	tracé du TES calculé (chaîne 4)	30
28	Comparaison du TES théorique et TES calculé (chaîne 4)	30
29	tracé du TEB calculé (chaîne 4)	31
30	Comparaison du TEB théorique et TEB calculé (chaîne 4)	32

1 Introduction

1.1 Schéma général des chaines à étudier (canal AWGN)

La figure 7 présente le schéma général des chaines à étudier.

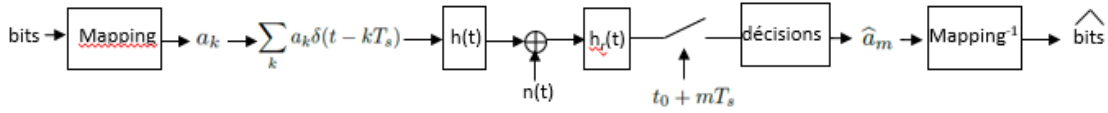


Figure 1: Chaîne de transmission en bande de base

1.1.1 Génération de l'information binaire à transmettre

La génération de l'information binaire à transmettre (bits 0 et 1 équiprobables et indépendants) pourra être réalisée grâce à la fonction *randi* de Matlab.

1.1.2 Mapping

Un mapping devra être réalisé afin de passer de l'information binaire aux symboles a_k . Le mapping est un des éléments qui pourra différer selon les chaines de transmission à étudier et implanter.

1.1.3 Suréchantillonnage

La suite d'impulsions de Dirac espacées de la durée symbole T_s et pondérées par les symboles a_k issus du mapping sera générée, en numérique, en insérant $N_s - 1$ zéros entre deux symboles a_k , si N_s représente le nombre d'échantillons utilisés par symbole (ou facteur de suréchantillonnage : $T_s = N_s T_e$, T_e étant la période d'échantillonnage). N_s devra être déterminé pour que le signal numérique généré respecte la condition d'échantillonnage de Shannon.

1.1.4 Filtrage de mise en forme

La réponse impulsionnelle, $h(t)$, du filtre de mise en forme est un des éléments qui pourra différer selon les chaines de transmission à étudier et implanter. Ne seront implantés que des filtres de type RIF (à réponse impulsionnelle finie). Une fois la réponse impulsionnelle numérique générée ($h = [h(0)h(1)...h(N-1)]$, si N représente l'ordre du filtre), le filtrage pourra être réalisé en utilisant la fonction *filter* de matlab : *signal_filtre=filter(h,1,signal_a_filtre)* (attention alors au retard dû à la causalité du filtre) ou bien en utilisant la fonction *conv.m*, comme lors des TPs de traitement du signal.

1.1.5 Canal de transmission AWGN

Le canal de transmission est supposé à bruit, $n(t)$, additif blanc et Gaussien, de densité spectrale de puissance égale à $\frac{N_0}{2}$ quelle que soit la fréquence. Pour les simulations, ce bruit sera généré sur la bande F_e (fréquence d'échantillonnage), grâce à la fonction *randn* de matlab, avec plusieurs puissances différentes, notées σ_n^2 : *bruit = $\sigma_n * randn(1, length(r))$* ; si r représente le vecteur d'échantillons de signal à l'entrée du récepteur. On calculera la puissance du bruit σ_n^2 , en fonction des rapports signal à bruit par bit souhaités à l'entrée du récepteur $\frac{E_b}{N_0}$, de la manière suivante (voir démonstration en annexe):

$$\sigma_n^2 = \frac{P_r N_s}{2 \log_2(M) \frac{E_b}{N_0}},$$

où N_s représente le facteur de suréchantillonnage, M l'ordre de la modulation et P_r la puissance du signal r qui peut être obtenue sous matlab de la manière suivante : $P_r = mean(abs(r).^2)$.

1.1.6 Filtrage de réception

La réponse impulsionnelle, $h_r(t)$, du filtre de mise de réception est un des éléments qui pourra différer selon les chaînes de transmission à étudier et implanter. Ne seront implantés que des filtres de type RIF (à réponse impulsionnelle finie). Une fois la réponse impulsionnelle numérique générée ($hr = [hr(0)hr(1)...hr(N-1)]$, si N représente l'ordre du filtre), le filtrage pourra être réalisé en utilisant la fonction *filter* de matlab : `signal_filtre=filter(hr,1,signal_a_filtre)` (attention alors au retard dû à la causalité du filtre) ou bien en utilisant la fonction *conv.m*, comme lors des TPs de traitement du signal.

1.1.7 Echantillonnage

Le signal filtré devra être échantillonné à $t_0 + mT_s$ pour revenir au rythme symbole. L'instant d'échantillonnage optimal t_0 pourra être déterminé dans l'étude théorique de la chaîne à implanter et retrouvé grâce au tracé d'un diagramme de l'oeil sans bruit en sortie du filtre de réception.

1.1.8 Décisions

Un détecteur à seuil permettra de prendre les décisions sur les symboles à partir du signal échantillonné. Le seuil optimal devra être déterminé dans l'étude théorique de la chaîne à implanter et retrouvé grâce au tracé d'un diagramme de l'oeil sans bruit en sortie du filtre de réception.

1.1.9 Demapping

Un demapping devra être réalisé en vue de comparer les bits reçus aux bits émis dans l'objectif de calculer le taux d'erreur binaire simulé de la transmission, TEB simulé qui devra être comparé au TEB théorique déterminé dans l'étude théorique de la chaîne en question.

2 Première chaîne à étudier : "chaîne de référence"

On considérera un mapping binaire à moyenne nulle (symboles $a_k \in \{-1, 1\}$) et des réponses impulsionnelles des filtres de mise en forme et de réception, $h(t)$ et $h_r(t)$, rectangulaires de durée T_s . Le résultat du produit de convolution entre $h(t)$ et $h_r(t)$ est donné dans la figure 2.

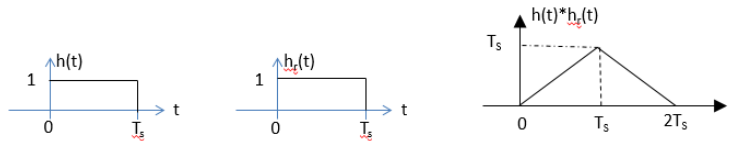


Figure 2: Produit de convolution entre $h(t)$ et $h_r(t)$.

2.1 Étude théorique

1. Calculer la densité spectrale de puissance (DSP) du signal transmis. Quelle est, en théorie, la bande nécessaire à la transmission d'un tel signal ?

Réponse :

on a

$$x(t) = \sum_k a_k h(t - kT_s)$$

et

$$S_x(f) = \frac{\sigma_a^2}{T_s} |H(f)|^2 + 2 \frac{\sigma_a^2}{T_s} |H(f)|^2 \sum_{k=1}^{\infty} \text{Re}[R_a(k) e^{j2\pi f k T_s}] + \frac{|m_a|^2}{T_s^2} \sum_k |H(\frac{k}{T_s})|^2 \delta(f - \frac{k}{T_s})$$

avec

$$\sigma_a^2 = E[|a_k - m_a|^2] = 1$$

et

$$m_a = E[a_k] = 0$$

et

$$R_a(k) = \frac{E[a_m^* a_{m-k}] - |m_a|^2}{\sigma_a^2}$$

Donc

$$S_x(f) = T_s \frac{(\sin(\pi f T_s))^2}{(\pi f T_s)^2}$$

En théorie la bande nécessaire à la transmission du signal au delà de laquelle l'atténuation minimale est de -13 dB est

$$\frac{1}{T_s}$$

2. La chaîne de communication peut-elle vérifier le critère de Nyquist ? Justifiez votre réponse.

Réponse :

La chaîne de communication vérifie le critère de Nyquist car pour $t_0 = T_s$ On a

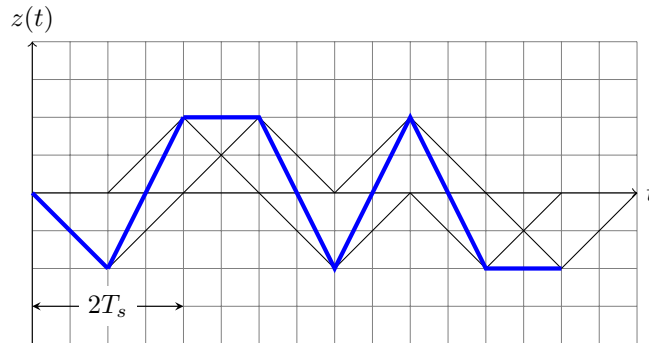
$$g(t_0) = h(t_0) * h_r(t_0) = T_s \neq 0$$

et

$$g(t_0 + kT_s) = 0 \forall k \in \mathbb{Z}.$$

3. Sans bruit, tracer le signal $z(t)$ en sortie du filtre de réception $h_r(t)$ pour la suite de bits émise suivante : 0110100. Retrouve-t-on sur ce signal le fait que la chaîne de transmission puisse respecter le critère de Nyquist ?

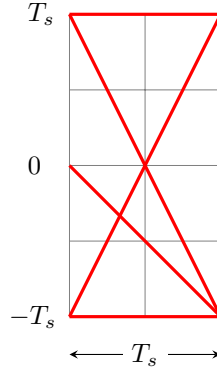
Réponse :



On retrouve le fait que la chaîne de transmission puisse respecter le critère de Nyquist en effet à chaque T_s un symbole ne dépend pas des symboles précédents

4. Toujours sans bruit, tracer le diagramme de l'oeil avec une base de temps de T_s . Retrouve-t-on sur le diagramme de l'oeil le fait que la chaîne de transmission puisse respecter le critère de Nyquist ?

Réponse :



On retrouve le fait que la chaîne de transmission peut respecter le critère de Nyquist en effet à l'instant T_s on peut distinguer les 2 symboles $-T_s$ et T_s

5. En supposant que l'on échantillonne aux instants optimaux (sans ISI), calculer le rapport signal sur bruit aux instants d'échantillonnage (on admettra que la puissance du bruit échantillonné et filtré est identique à celle du bruit filtré et on calculera donc cette puissance en sortie du filtre de réception).

Réponse :

On a

$$SNR = \frac{P_s}{P_b}$$

or

$$P_s = E[|a_k g(t_0)|^2] = |g(t_0)|^2 E[|a_k|^2] = T_s^2$$

et

$$P_b = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} |H_r(f)|^2 df$$

Donc par égalité de Parseval on a

$$P_b = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |h_r(t)|^2 dt = \frac{N_0}{2} \int_0^{T_s} dt = \frac{N_0}{2} T_s$$

alors

$$SNR = \frac{2T_s}{N_0}$$

6. On choisira d'utiliser un détecteur à seuil. Déterminer le seuil optimal à utiliser en expliquant votre choix.

Réponse :

On note $z(t)$ le signal à la sortie du filtre de réception donc puisque le critère de Nyquist est respecté

$$z(t_0 + mT_s) = z_m = a_m g(t_0) + w_m$$

Donc z_m est une variable aléatoire de densité conditionnelle :

$$f_z(x|a_m = i) = f_{w_m}(x - ig(t_0)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x - ig(t_0))^2}{2\sigma^2}\right)$$

On note γ le seuil optimale donc la probabilité d'erreur est la suivante

$$P_b = p(\text{erreur}|a_k = -1)p(a_k = -1) + p(\text{erreur}|a_k = 1)p(a_k = 1)$$

le canal est AWGN donc

$$P_b = p(a_k = -1) \int_{\gamma}^{+\infty} f_z(x|-1) dx + p(a_k = 1) \int_{-\infty}^{\gamma} f_z(x|1) dx$$

γ est le seuil optimale Donc

$$\frac{dP_b}{d\gamma} = -p(a_k = -1)f_z(\gamma| - 1) + p(a_k = 1)f_z(\gamma|1) = 0$$

donc

$$\gamma = \frac{\sigma^2}{2g(t_0)} \ln \frac{p(a_k = -1)}{p(a_k = 1)}$$

or

$$p(a_k = -1) = p(a_k = 1) = \frac{1}{2}$$

donc

$$\boxed{\gamma = 0}$$

7. En supposant que l'on échantillonne aux instants optimaux et que l'on utilise le seuil optimal de décision, donner le taux d'erreur binaire de la transmission en fonction de T_s et σ , σ^2 représentant la puissance du bruit en sortie du filtre de réception $h_r(t)$.

Réponse :

compte tenu de ce qui précède on a

$$P_b = p(\text{erreur} | a_k = 1) = p(\text{erreur} | a_k = -1) = \int_0^\infty f_z(x| - 1) dx$$

En substituant $z = (x + g(t_0))/\sigma$ on

$$P_b = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{g(t_0)}{\sigma}}^\infty \exp -\frac{z^2}{2} dx$$

donc

$$\boxed{TEB = Q\left(\frac{T_s}{\sigma}\right)}$$

8. Calculer la puissance du bruit en sortie du filtre de réception σ^2 en fonction de N_0 et de T_s .

Réponse :

on a

$$\sigma^2 = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^\infty |h_r(t)|^2 dt = \frac{N_0}{2} \int_0^{T_s} dt \Rightarrow \boxed{\sigma^2 = \frac{N_0}{2} T_s}$$

9. Calculer l'énergie des symboles à l'entrée du récepteur, E_s , en fonction de T_s .

Réponse :

on a

$$E_s = \int_0^{T_s} |h(t)|^2 dt \Rightarrow \boxed{E_s = T_s}$$

10. Dédire des questions précédentes l'expression du taux d'erreur binaire (TEB) en fonction de E_b/N_0 pour la chaîne étudiée.

Réponse :

On a

$$TEB = Q\left(\sqrt{\frac{T_s^2}{\sigma^2}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\right)$$

or

$$E_b = \frac{E_s}{\text{nombre de bits par symboles}} = E_s$$

Donc

$$\boxed{TEB = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)}$$

2.2 Implantation sous Matlab (cette chaîne servira de chaîne de référence pour la suite)

1. Générer dans un premier temps le signal à transmettre en tronquant la bande occupée à une fréquence maximale égale à $\frac{4}{T_s}$. En utilisant un périodogramme estimer puis tracer la densité spectrale de puissance du signal transmis. Expliquer le résultat obtenu.

Réponse :

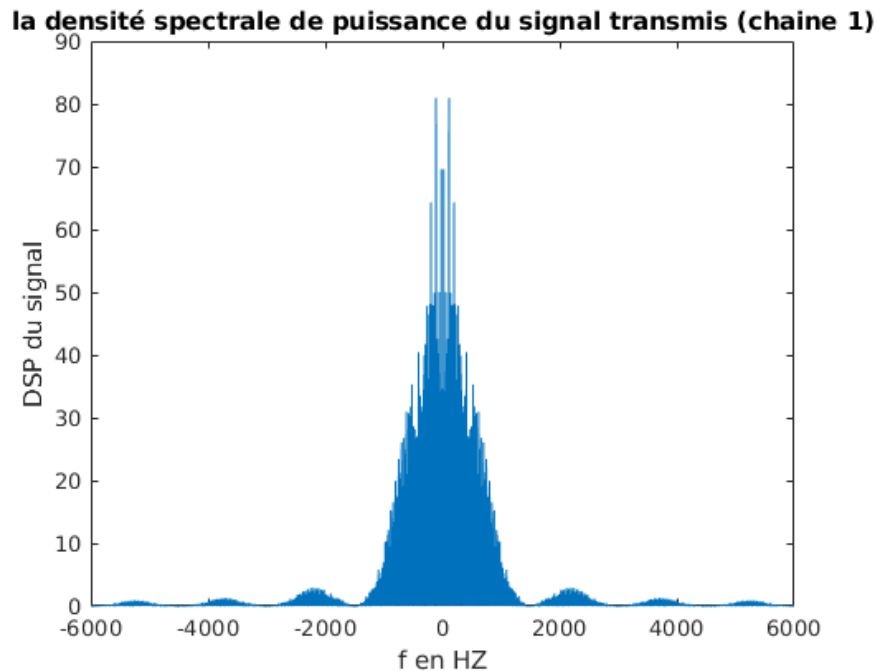


Figure 3: Densité spectrale de puissance du signal transmis (chaîne 1)

On remarque que la DSP est autour de la fréquence $f = 0$ ce qui est consistant car on est en bande de base. et la bande nécessaire à la transmission du signal au delà de laquelle l'atténuation minimale est de -13 dB est $1500\text{Hz} = \frac{1}{T_s}$ conformément à l'étude théorique.

2. Implantation de la chaîne sans bruit :

- (a) Tracer le signal en sortie du filtre de réception. Ce tracé est-il conforme à ce que vous attendiez (voir étude théorique) ?

Réponse :

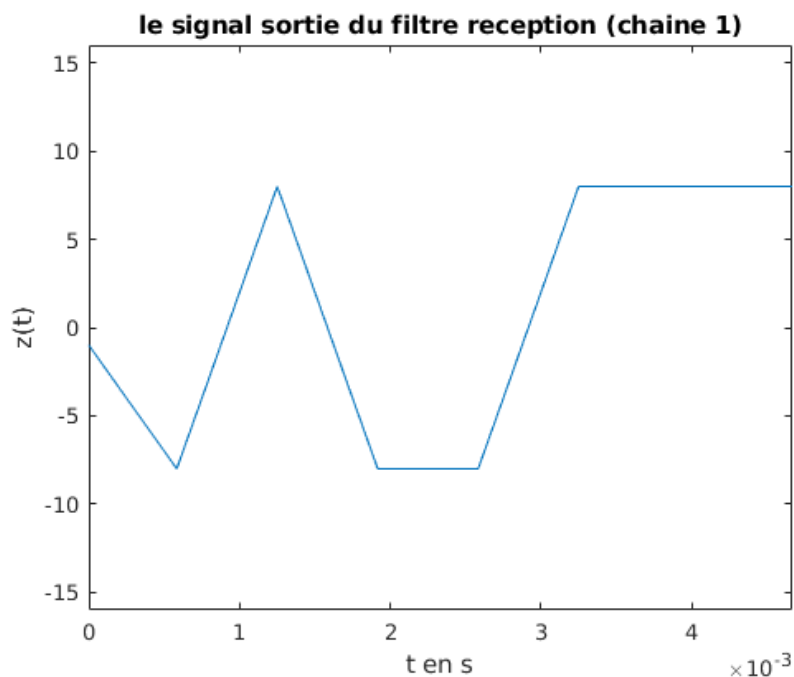


Figure 4: Signal en sortie du filtre de réception (chaîne 1)

Ce tracé est bien conforme à la partie théorique on remarque une valeur maximale de $N_s = 8$.

- (b) Tracer un diagramme de l'oeil en sortie du filtre de réception afin de déterminer les instants optimaux d'échantillonnage. Les résultats obtenus sont-ils conformes à la théorie ? Expliquez votre réponse.

Réponse :

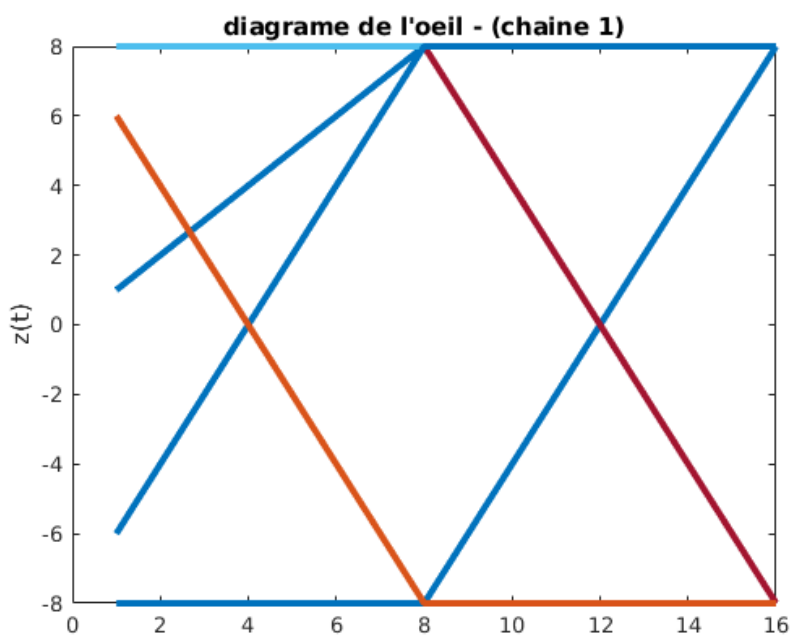


Figure 5: Diagramme de l'oeil en sortie du filtre de réception (chaîne 1)

Ce tracé est bien conforme à la partie théorique en effet on remarque qu'au bit N_s on peut distinguer les 2 symboles $-N_s$ et N_s .

- (c) En utilisant les instants optimaux d'échantillonnage puis un détecteur à seuil, avec seuil optimal, vérifier que le TEB obtenu est bien nul.

Réponse : voir code .

3. Implantation de la chaîne avec bruit : rajouter le bruit et tracer le taux d'erreur binaire obtenu en fonction du rapport signal à bruit par bit à l'entrée du récepteur (E_b/N_0) en décibels¹. On prendra des valeurs de $(E_b/N_0)_{dB}$ allant de 0 à 6 dB.

Réponse :

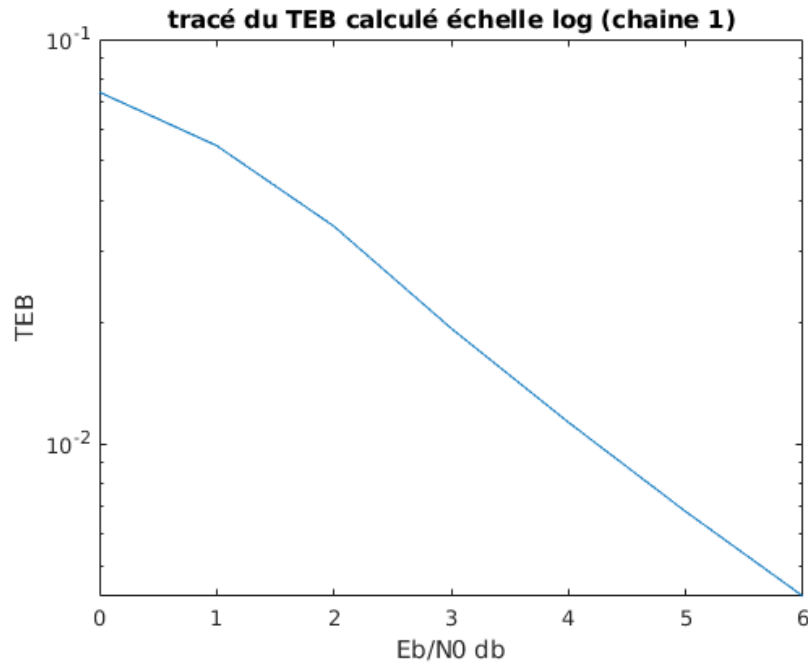


Figure 6: tracé du TEB en fonction de E_b/N_0 (chaîne 1)

4. Comparer le TEB simulé au TEB théorique de la chaîne étudiée (tracé superposés sur une même figure). Ce tracé doit permettre de valider le bon fonctionnement de votre chaîne de transmission. La fonction $Q(x)$ peut-être obtenue sous Matlab en utilisant *qfunc.m*.

Réponse :

¹Attention les TEBs devront être tracés en échelle log et on fera attention à la précision des mesures réalisées (voir en annexe)

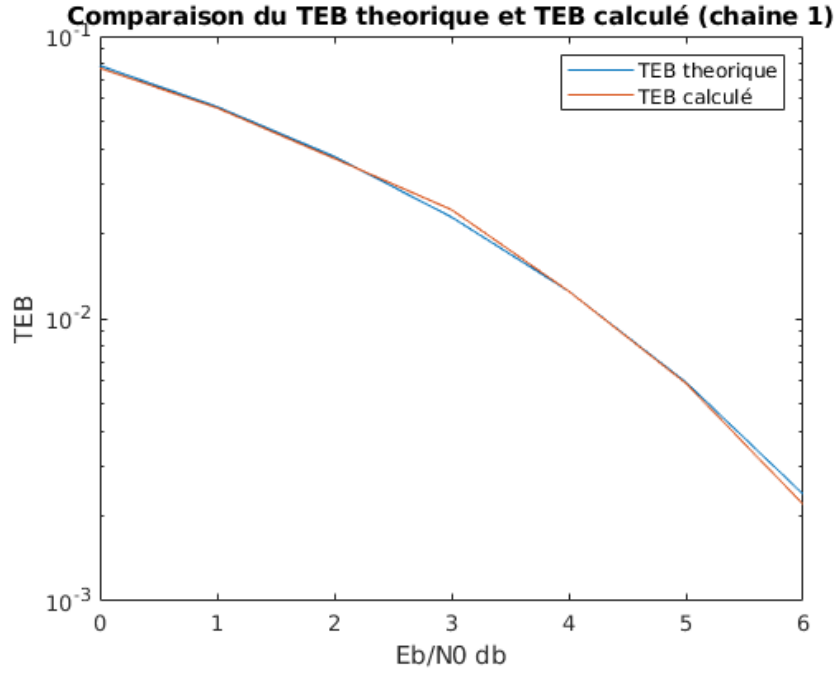


Figure 7: Comparaison du TEB théorique et TEB calculé (chaîne 1)

3 Deuxième chaîne à étudier : impact du choix du filtre de réception

On considérera un mapping binaire à moyenne nulle (symboles $a_k \in \{-1, 1\}$) et les réponses impulsionnelles des filtres de mise en forme et de réception, $h(t)$ et $h_r(t)$, données par la figure 8. Le résultat du produit de convolution entre $h(t)$ et $h_r(t)$ est donné dans la figure 9.

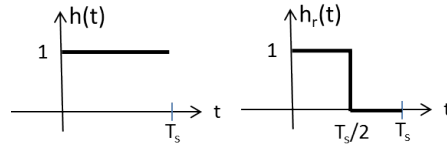


Figure 8: Réponses impulsionnelles des filtres d'émission et de réception.

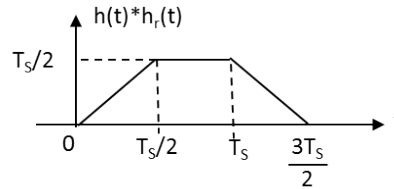


Figure 9: Produit de convolution entre $h(t)$ et $h_r(t)$.

3.1 Etude théorique

1. La chaîne de communication peut-elle vérifier le critère de Nyquist ? Justifiez votre réponse.

Réponse :

La chaîne de communication peut vérifier le critère de Nyquist si on prend $t_0 \in \left[\frac{T_s}{2}, T_s\right]$

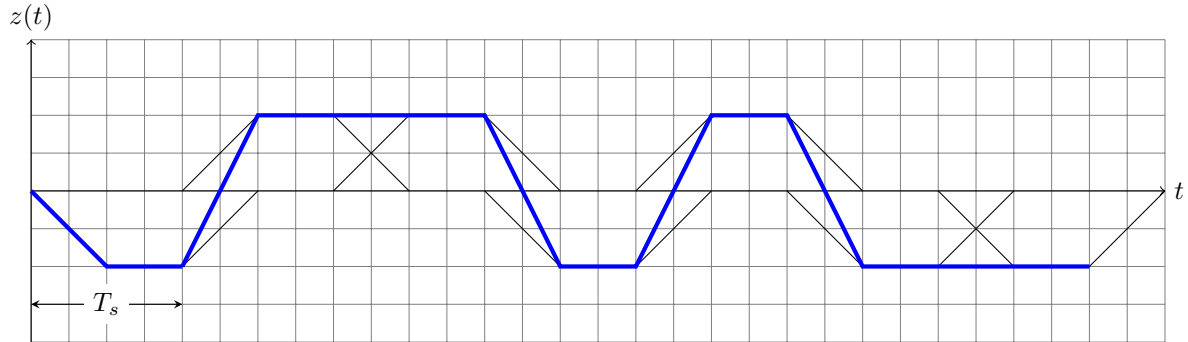
car pour $t \in [\frac{T_s}{2}, T_s]$ on a

$$g(t) = h(t) * h_r(t) = \frac{T_s}{2} \neq 0$$

$$g(t + kT_s) = 0, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

2. Sans bruit, tracer le signal $z(t)$ en sortie du filtre de réception $h_r(t)$ pour la suite de bits émise suivante : 0110100. Retrouve-t-on sur ce signal le fait que la chaîne de transmission puisse respecter le critère de Nyquist ? Expliquez votre réponse.

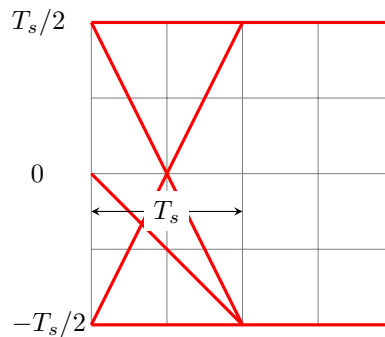
Réponse :



On retrouve le fait que la chaîne de transmission puisse respecter le critère de Nyquist en effet chaque symbole ne dépend pas des symboles précédents

3. Toujours sans bruit, tracer le diagramme de l'oeil avec une base de temps de T_s . Retrouve-t-on sur le diagramme de l'oeil le fait que la chaîne de transmission puisse respecter le critère de Nyquist ? Justifiez votre réponse.

Réponse :



On retrouve le fait que la chaîne de transmission peut respecter le critère de Nyquist en effet à l'instant $t \in [T_s/2, T_s]$ on peut distinguer les 2 symboles $-T_s/2$ et $T_s/2$

4. En supposant que l'on échantillonne aux instants optimaux (sans ISI), calculer le rapport signal sur bruit aux instants d'échantillonnage (on admettra que la puissance du bruit échantillonné et filtré est identique à celle du bruit filtré et on calculera donc cette puissance en sortie du filtre de réception). Comparer le rapport signal sur bruit obtenu ici avec celui obtenu dans la chaîne de référence. Que peut-on supposer sur la comparaison des TEBs des deux chaînes de transmission ?

Réponse :

On a

$$SNR = \frac{P_s}{P_b}$$

avec

$$P_s = E[|a_k g(t_0)|^2] = |g(t_0)|^2 E[|a_k|^2] = \frac{T_s^2}{4}$$

et

$$P_b = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |h_r(t)|^2 dt = \frac{N_0}{2} \int_0^{\frac{T_s}{2}} dt = \frac{N_0}{4} T_s$$

alors

$$\boxed{SNR = \frac{T_s}{N_0}}$$

On remarque que le rapport SNR de la chaîne 1 est supérieur au rapport SNR de la chaîne 2 à cause du filtre h_r qui n'est pas adapté.

5. On choisira d'utiliser un détecteur à seuil. Déterminer le seuil optimal à utiliser en expliquant votre choix.

Réponse :

par un calcul analogue avec la chaîne 1 on prend un seuil

$$\boxed{\gamma = 0}$$

6. En supposant que l'on échantillonne aux instants optimaux et que l'on utilise le seuil optimal de décision, donner le taux d'erreur binaire de la transmission en fonction de T_s et σ , σ^2 représentant la puissance du bruit en sortie du filtre de réception $h_r(t)$.

Réponse :

par un calcul analogue avec la chaîne 1 on a

$$\boxed{TEB = Q\left(\frac{T_s}{2\sigma}\right)}$$

7. Calculer la puissance du bruit en sortie du filtre de réception σ^2 en fonction de N_0 et de T_s .

Réponse :

On a

$$\sigma^2 = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |h_r(t)|^2 dt = \frac{N_0}{2} \int_0^{T_s/2} dt \Rightarrow \boxed{\sigma^2 = \frac{N_0}{4} T_s}$$

8. Calculer l'énergie des symboles à l'entrée du récepteur, E_s , en fonction de T_s .

Réponse :

On a

$$E_s = \int_0^{T_s} |h(t)|^2 dt \Rightarrow \boxed{E_s = T_s}$$

9. Dédire des questions précédentes l'expression du taux d'erreur binaire en fonction de E_b/N_0 pour la chaîne étudiée.

Réponse :

$$TEB = Q\left(\sqrt{\frac{T_s^2}{4\sigma^2}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)$$

or

$$E_b = E_s$$

Donc

$$\boxed{TEB = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)}$$

Rq : ce n'est pas le TEB minimum car le filtre $h_r(t)$ n'est pas adapté.

3.2 Implantation sous Matlab

1. Implantation de la chaine sans bruit (le signal à transmettre sera généré en tronquant la bande occupée à une fréquence maximale égale à $\frac{4}{T_s}$)

- (a) Tracer le signal en sortie du filtre de réception. Ce tracé est-il conforme à ce que vous attendiez (voir étude théorique) ?

Réponse :

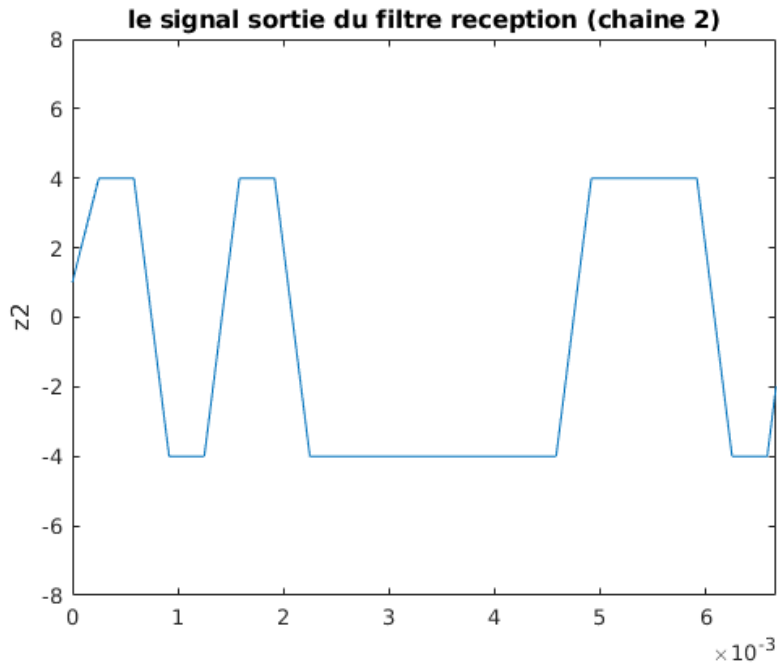


Figure 10: le signal en sortie du filtre de réception (chaine 2)

Ce tracé est bien conforme à l'étude théorique on remarque une valeur maximale de $\frac{N_s}{2}$.

- (b) Tracer un diagramme de l'oeil en sortie du filtre de réception afin de déterminer les instants optimaux d'échantillonnage. Les résultats obtenus sont-ils conformes à la théorie ? Expliquez votre réponse.

Réponse :

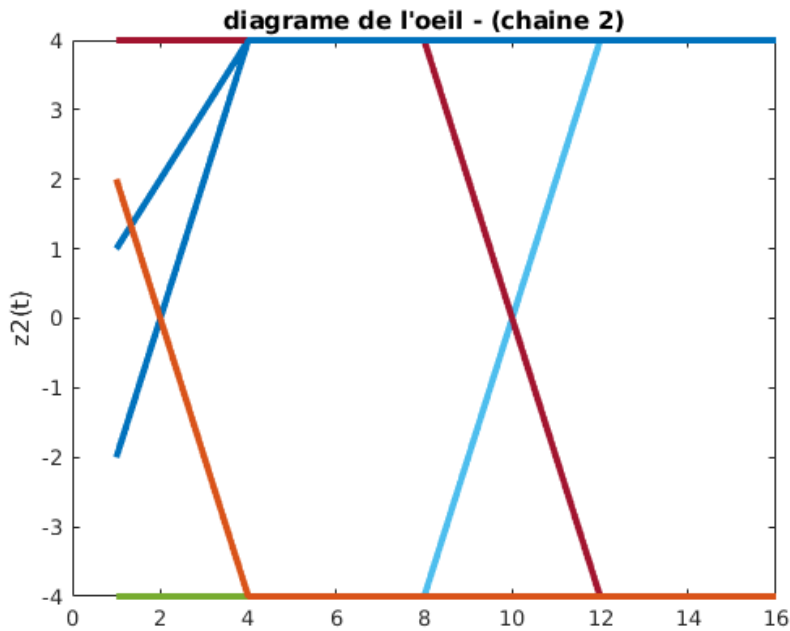


Figure 11: diagramme de l'oeil en sortie du filtre de réception (chaîne 2)

Ce tracé est bien conforme à l'étude théorique en effet on peut respecter le critère de Nyquist si on échantillonne à partir du bit N avec $N \in [N_s/2, N_s]$ par la suite on prend $N = N_s$

- (c) En utilisant les instants optimaux d'échantillonnage puis un détecteur à seuil, avec seuil optimal, vérifier que le TEB obtenu est bien nul.

Réponse : voir code.

2. Implantation de la chaîne avec bruit : rajouter le bruit et tracer le taux d'erreur binaire obtenu en fonction du rapport signal à bruit par bit à l'entrée du récepteur (E_b/N_0) en décibels. On prendra des valeurs de $(E_b/N_0)_{dB}$ allant de 0 à 6 dB.

Réponse :

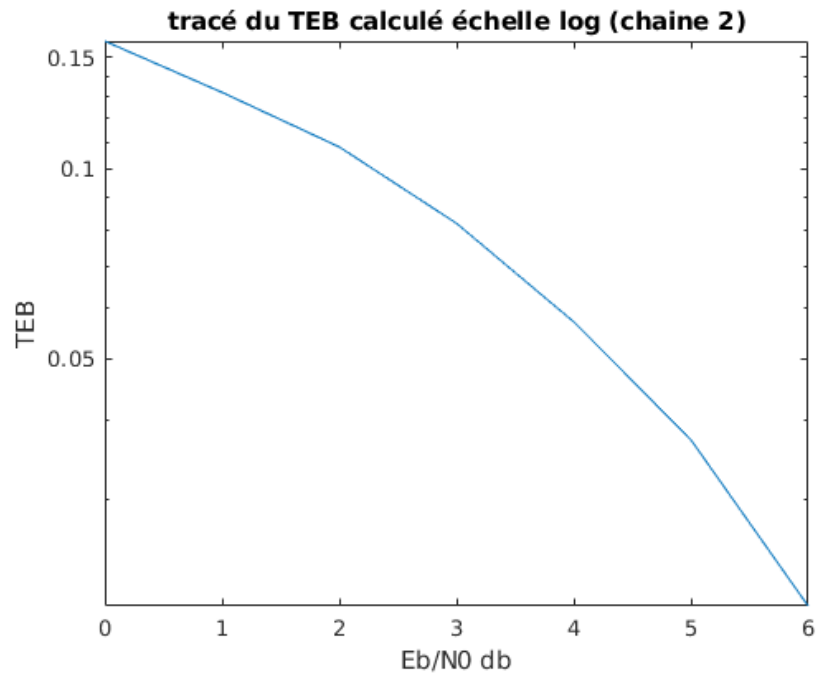


Figure 12: tracé du TEB en fonction de E_b/N_0 (chaîne 2)

3. Comparer le TEB simulé au TEB théorique de la chaîne étudiée (tracé superposés sur une même figure). Ce tracé doit permettre de valider le bon fonctionnement de votre chaîne de transmission.

Réponse :

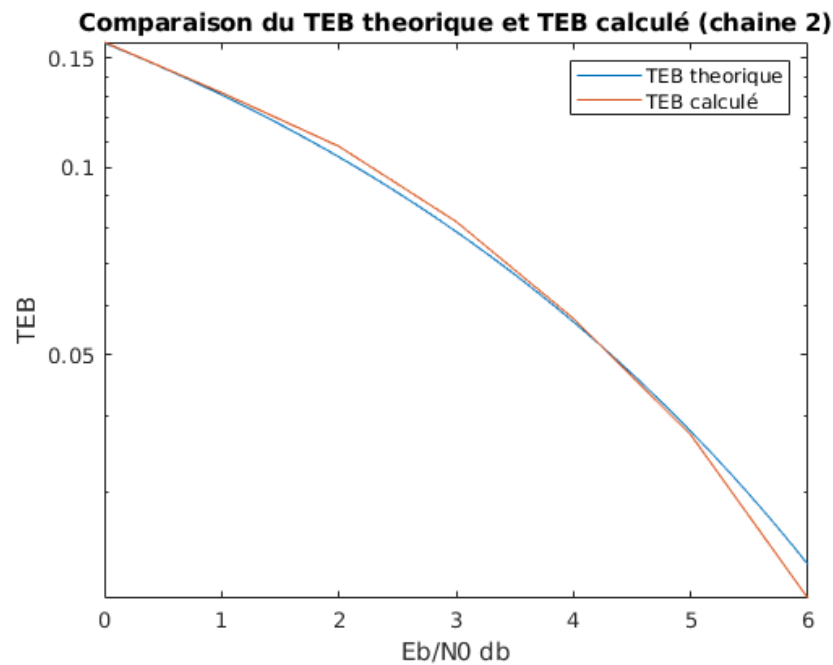


Figure 13: Comparaison du TEB théorique et TEB calculé (chaîne 2)

4. Comparer le TEB obtenu par simulation pour la chaîne de transmission étudiée au TEB obtenu par simulation (ou au TEB théorique) de la chaîne de référence (comparaison en termes d'efficacité en

puissance). La similitude ou différence obtenue devra être expliquée. La chaîne éventuellement la plus efficace en puissance devra être identifiée, en expliquant pourquoi.

Réponse :

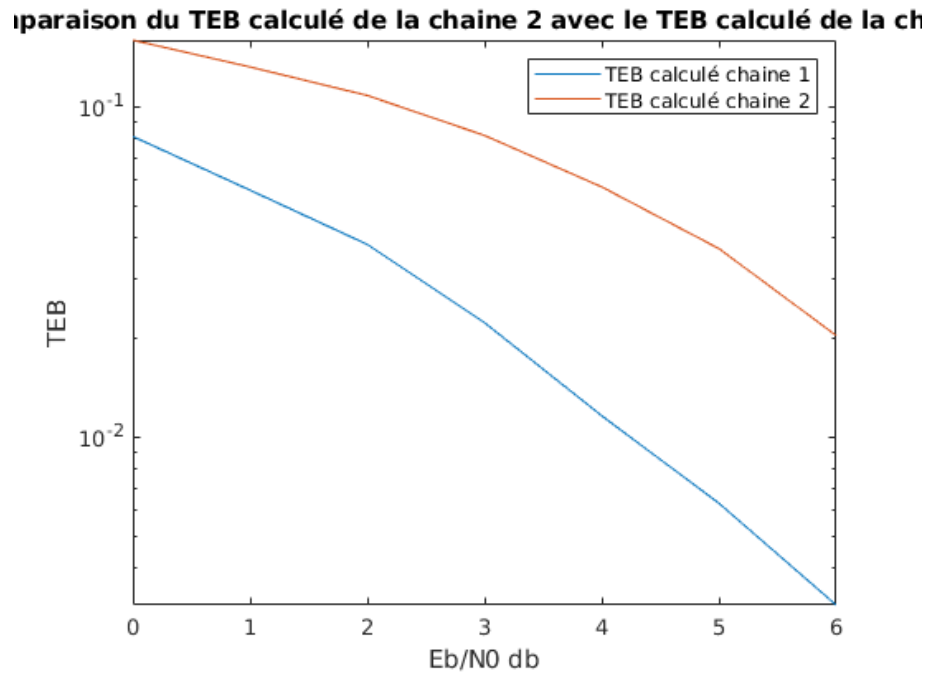


Figure 14: Comparaison du TEB calculé (chaîne 2) avec TEB calculé (chaîne 1)

le TEB obtenu lors de la chaîne 2 est bien supérieur au TEB obtenu lors de la chaîne 1 ce qui est constant car le filtre h_r de la chaîne 2 n'est pas adapté, donc la chaîne la plus efficace en puissance est la chaîne 1.

5. Comparer l'efficacité spectrale de la chaîne étudiée avec celle de la chaîne de référence (en traçant, par exemple, les DSPs des signaux transmis dans les deux cas pour un même débit binaire). La similitude ou différence obtenue devra être expliquée. La chaîne éventuellement la plus efficace spectralement devra être identifiée, en expliquant pourquoi.

Réponse :

les DSPs des signaux transmis dans les deux cas sont identiques car on utilise le même filtre de mise en forme h .

Donc il n'y a aucune différence entre les 2 chaînes vis-à-vis de l'efficacité spectrale.

4 Troisième chaîne à étudier : impact du choix du filtre de mise en forme et d'un canal de propagation à bande limitée

On considérera un mapping binaire à moyenne nulle (symboles $a_k \in \{-1, 1\}$) et des réponses impulsionnelles des filtres de mise en forme et de réception, $h(t)$ et $h_r(t)$, en racine de cosinus surélevé de même roll off $\alpha = 0.5$. Le résultat du produit de convolution entre $h(t)$ et $h_r(t)$ est donc un cosinus surélevé de roll off 0.5.

4.1 Etude théorique

1. La chaîne de communication peut-elle vérifier le critère de Nyquist ? Justifiez votre réponse.

Réponse :

On a la réponse impulsionnelle d'un filtre en cosinus surélevé est

$$g(t) = h(t) * h_r(t) = \text{sinc}\left(\pi \frac{t}{T_s}\right) \frac{\cos\left(\pi \frac{0.5t}{T_s}\right)}{1 - \left(\frac{\pi 0.5t}{T_s}\right)^2}$$

donc il peut vérifier le critère de Nyquist si on prend $t_0 = 0$

2. La chaîne de communication vérifie t-elle le critère de filtrage adapté ? Justifiez votre réponse.

Réponse :

la chaîne de transmission vérifie le critère du filtre adapté car

$$h_r(t) = h(t) = h(-t)$$

3. Donner (sans le calculer) le taux d'erreur binaire théorique de la transmission, en justifiant votre choix de formule.

Réponse :

puisque le filtre récepteur vérifie le critère du filtre adapté et le critère de Nyquist peut être vérifié on a ($M=2$)

$$TEB = TEB_{min} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

4. A quelle condition, sur le rythme symbole R_s , pourrait-on transmettre le signal généré par le modulateur proposé dans un canal de transmission idéal de bande $BW = 1500$ Hz, tout en continuant de respecter le critère de Nyquist ?

Réponse :

il faut que

$$\frac{1 + \alpha}{2} R_s < BW$$

donc

$$R_s < 2000 \text{ Hz}$$

5. Afin d'implanter la chaîne de transmission en numérique, quelle est la fréquence d'échantillonnage minimum à utiliser ? En déduire le facteur de suréchantillonnage minimal à utiliser.

Réponse :

4.2 Implantation sous Matlab

- On utilisera les paramètres suivants : fréquence d'échantillonnage $F_e = 12000$ Hz, rythme symbole $R_s = 3000$ symboles par seconde, roll off du filtre de mise en forme et du filtre de réception $\alpha = 0.5$.
- Implantation de la chaîne sans bruit :

- (a) Le facteur de sur échantillonnage utilisé ici permet-il de respecter la condition d'échantillonnage de Shannon ? Justifiez votre réponse.

Réponse :

on a

$$N_s = \frac{F_e}{R_s} = 4$$

- (b) Tracer le signal en sortie du filtre de réception. Ce tracé est-il conforme à ce que vous attendiez (voir étude théorique) ? Expliquez votre réponse.

Réponse :

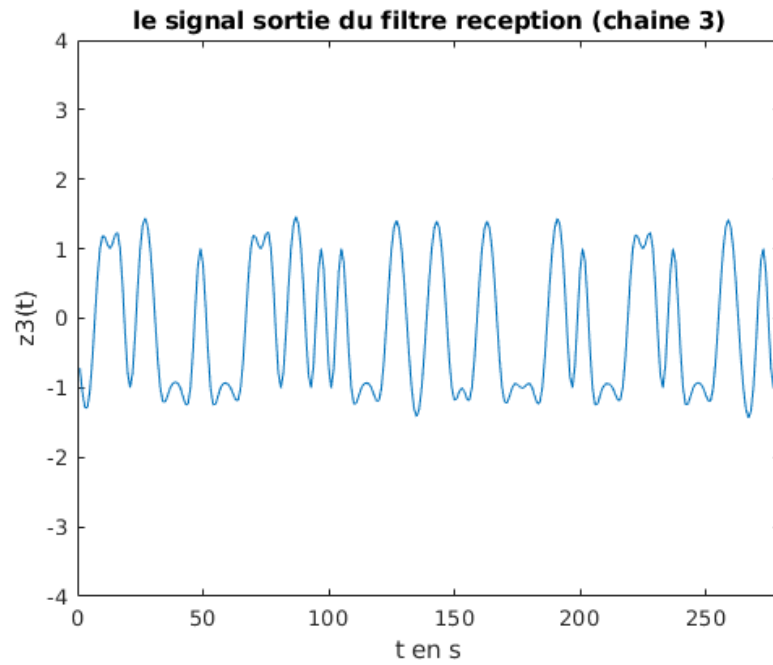


Figure 15: le signal en sortie du filtre de réception (chaîne 3)

Ce tracé est bien conforme à l'étude théorique.

- (c) Tracer un diagramme de l'oeil en sortie du filtre de réception afin de déterminer les instants optimaux d'échantillonnage. Les résultats obtenus sont-ils conformes à la théorie ? Justifiez votre réponse.

Réponse :

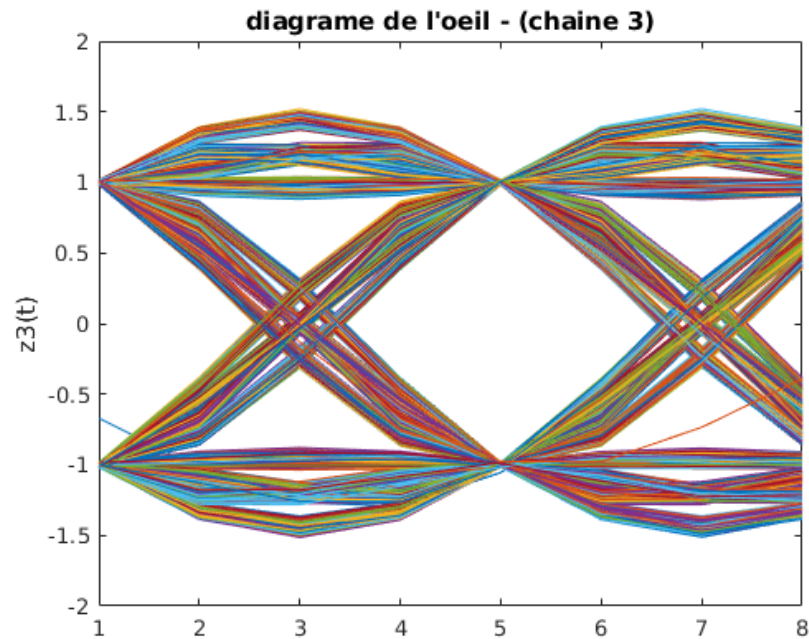


Figure 16: diagramme de l'oeil en sortie du filtre de réception (chaîne 3)

Ce tracé est bien conforme à l'étude théorique en effet on peut respecter le critère de Nyquist si

on échantillonne à partir du premier bit.

- (d) En utilisant les instants optimaux d'échantillonnage puis un détecteur à seuil, avec seuil optimal, vérifier que le TEB obtenu est bien nul. Attention ici aux retards introduits par les filtres de la chaîne de transmission qui excèdent la durée d'un symbole.

Réponse : voir code.

3. Implantation de la chaîne avec bruit : rajouter le bruit et tracer le taux d'erreur binaire (TEB) obtenu en fonction du rapport signal à bruit par bit à l'entrée du récepteur (E_b/N_0) en décibels. On prendra des valeurs de $(E_b/N_0)_{dB}$ allant de 0 à 6 dB.

Réponse :

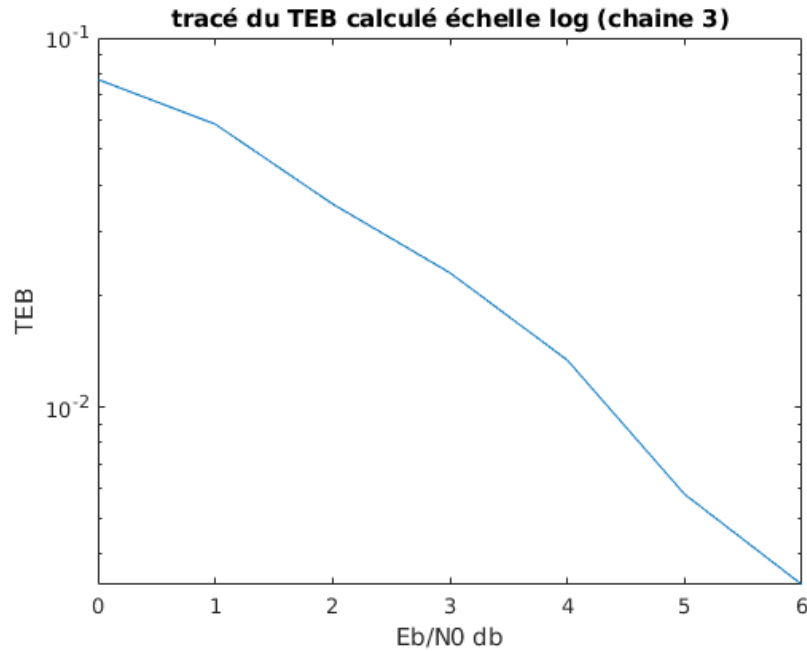


Figure 17: tracé du TEB en fonction de E_b/N_0 (chaîne 3)

4. Comparer le TEB simulé au TEB théorique de la chaîne étudiée (tracé superposés sur une même figure). Ce tracé doit permettre de valider le bon fonctionnement de votre chaîne de transmission.

Réponse :

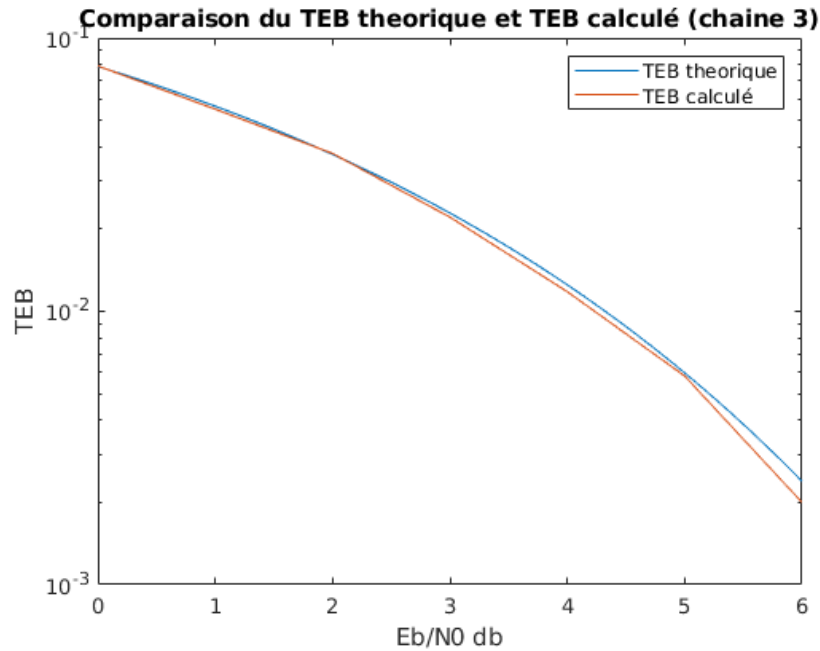


Figure 18: Comparaison du TEB théorique et TEB calculé (chaîne 3)

5. Comparer le TEB obtenu par simulation pour la chaîne de transmission étudiée au TEB obtenu par simulation (ou au TEB théorique) de la chaîne de référence (comparaison en termes d'efficacité en puissance). La similitude ou différence obtenue devra être expliquée. La chaîne éventuellement la plus efficace en puissance devra être identifiée, en expliquant pourquoi.

Réponse :

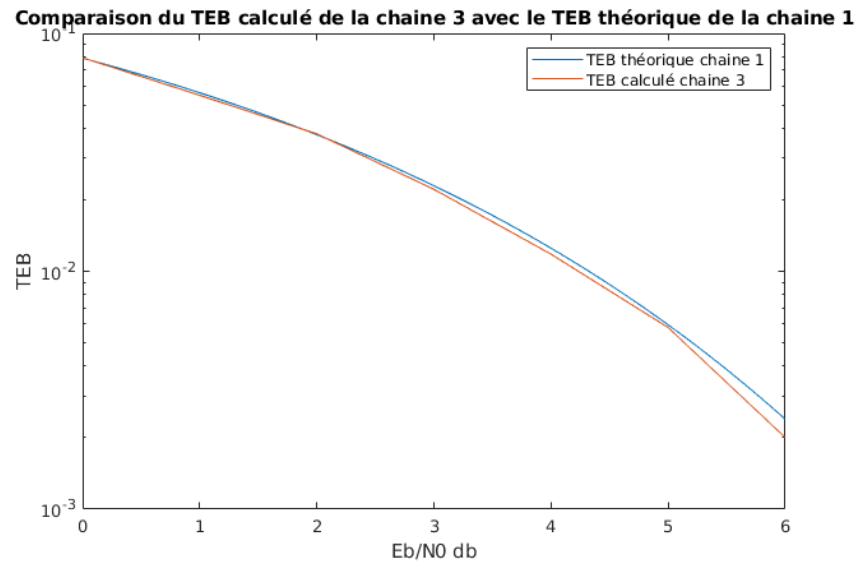


Figure 19: Comparaison du TEB calculé (chaîne 3) avec TEB théorique (chaîne 1)

l'efficacité en puissance est identique pour les 2 chaînes.

6. Comparer l'efficacité spectrale de la chaîne étudiée avec celle de la chaîne de référence (en traçant les DSPs des signaux transmis dans les deux cas pour un même débit binaire). La similitude ou différence obtenue devra être expliquée. La chaîne éventuellement la plus efficace spectralement devra

être identifiée, en expliquant pourquoi.

Réponse :

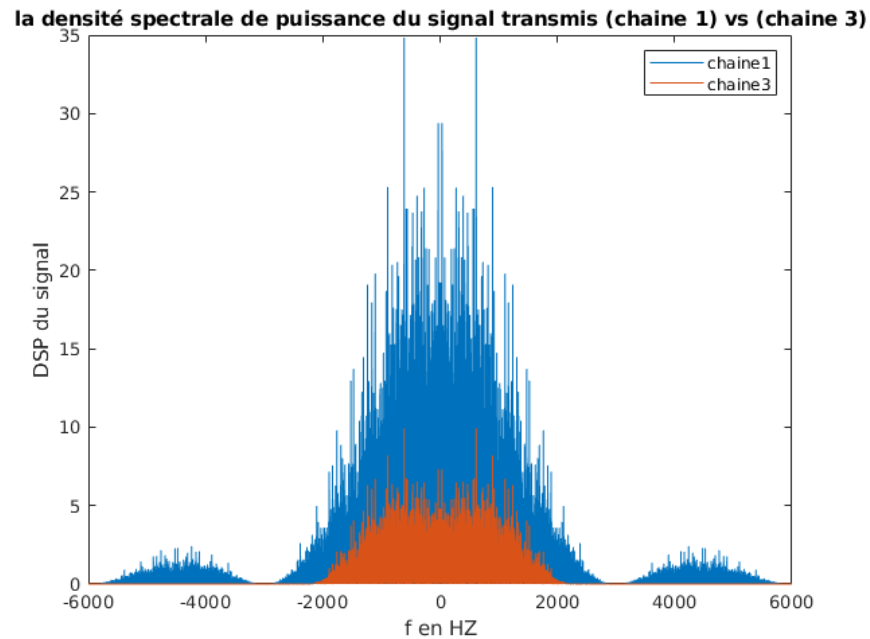


Figure 20: Comparaison du DSP (chaîne 3) avec DSP (chaîne 1)

la chaîne la plus efficace spectralement est la chaîne 3 en effet la bande de fréquence nécessaire est inférieure.

$$\frac{1}{T_s} v s \frac{1 + \alpha}{2T_s}$$

7. Reprendre à la chaîne de transmission sans bruit et introduire un passage dans un canal de transmission

- (a) de bande $BW = 1500$ Hz (implanté comme un filtre passe bas de fréquence de coupure 1500 Hz : voir TPs et projet de traitement du signal).

Réponse :

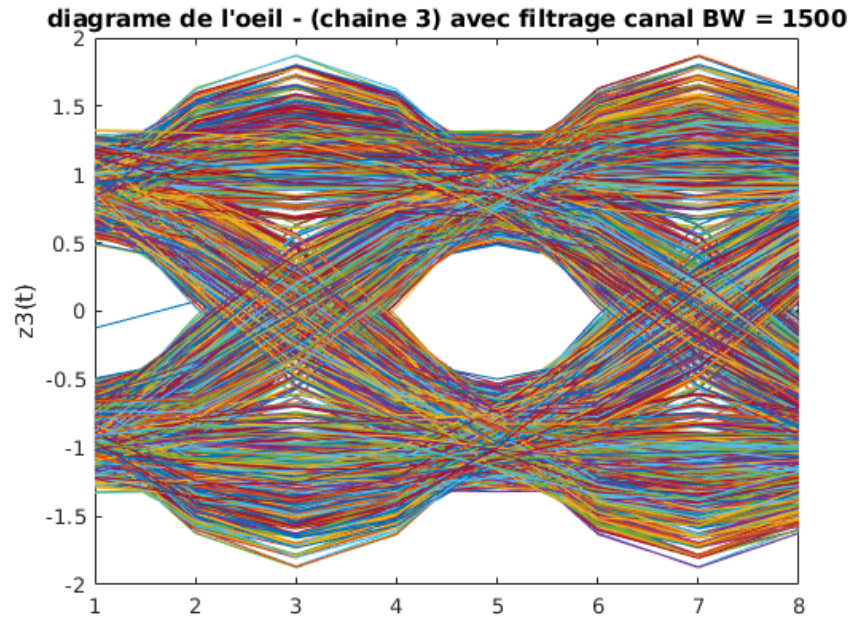


Figure 21: diagramme de l'oeil - (chaîne 3) avec filtrage canal BW = 1500

On remarque que dans ce cas on ne respecte plus la condition

$$\frac{1 + \alpha}{2} R_s < BW$$

donc on ne respecte plus le critère de Nyquist.

- (b) de bande $BW = 3000$ Hz (implanté comme un filtre passe bas de fréquence de coupure 3000 Hz : voir TPs et projet de traitement du signal).

Réponse :

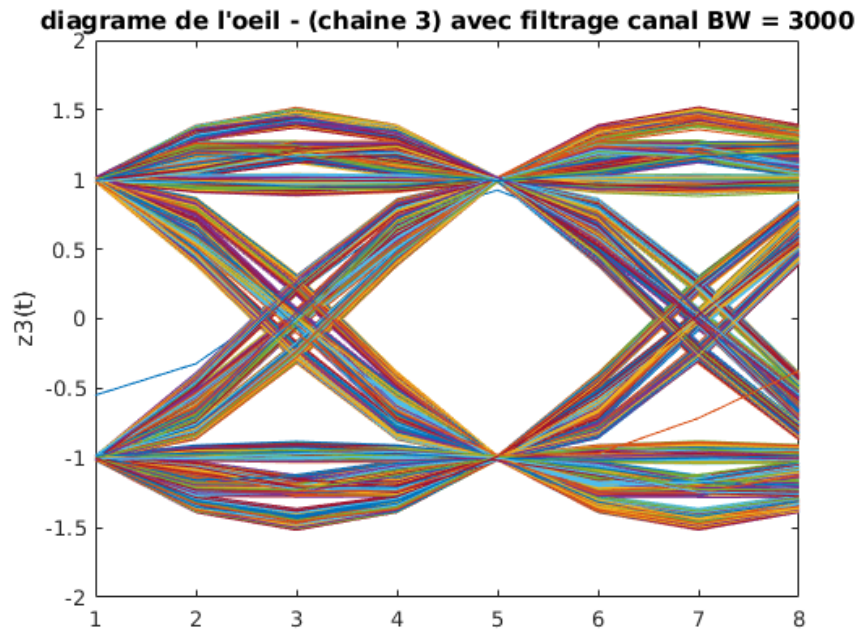


Figure 22: diagramme de l'oeil - (chaîne 3) avec filtrage canal BW = 3000

On remarque que dans ce cas on respecte la condition

$$\frac{1+\alpha}{2}Rs < BW$$

donc on a le critère de Nyquist.

5 Quatrième chaine à étudier : impact du choix du mapping

On considérera un mapping 4-aire à moyenne nulle (symboles $a_k \in \{-3, -1, 1, 3\}$) et des réponses impulsionnelles des filtres de mise en forme et de réception, $h(t)$ et $h_r(t)$, rectangulaire de durée T_s .

5.1 Etude théorique

1. Proposer un instant optimal t_0 pour démarrer l'échantillonnage en expliquant votre choix. On échantillonnera alors aux instants optimaux $t_0 + mT_s$, $m = 0, 1, 2, \dots$

Réponse :

l'instant T_s est l'instant optimal qui va nous permettra de respecter le critère de Nyquist.

2. En supposant que l'on utilise un détecteur à seuil pour prendre les décisions, quels sont les seuils optimaux à utiliser ? Justifiez votre réponse.

Réponse :

les seuils optimaux à utiliser Sont :

$$-2T_s, 0, 2T_s$$

en effet par analogie avec le cas ou on envoie 2 symboles les seuils optimaux de décision se trouvent au milieu de chaque intervalle.

3. On suppose que l'on échantillonne aux instants optimaux et que l'on utilise un détecteur à seuil avec seuils optimaux. En utilisant le mapping suivant : 00 : -3, 01 : -1, 11 : +1, 10 : +3 :

- (a) Calculer la probabilité de détecter (en sortie du bloc décision) le symbole -1 alors que l'on a émis -3.

Réponse :

on a

$$P_a = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-2T_s}^0 \exp -\frac{(x+3T_s)^2}{2\sigma^2} dx$$

on pose $z = (x+3T_s)/\sigma$

$$P_a = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{T_s/\sigma}^{3T_s/\sigma} \exp -\frac{z^2}{2} dz$$

donc

$$P_a = Q(T_s/\sigma) - Q(3T_s/\sigma)$$

- (b) Calculer la probabilité de détecter (en sortie du bloc décision) le symbole +1 alors que l'on a émis -3.

Réponse :

on a

$$P_b = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^{2T_s} \exp -\frac{(x+3T_s)^2}{2\sigma^2} dx$$

on pose $z = (x+3T_s)/\sigma$

$$P_b = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{3T_s/\sigma}^{5T_s/\sigma} \exp -\frac{z^2}{2} dz$$

donc

$$P_b = Q(3T_s/\sigma) - Q(5T_s/\sigma)$$

- (c) Calculer la probabilité de détecter (en sortie du bloc décision) le symbole +3 alors que l'on a émis -3.

Réponse :

on a

$$P_c = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{2T_s}^{\infty} \exp -\frac{(x + 3T_s)^2}{2\sigma^2} dx$$

on pose $z = (x + 3T_s)/\sigma$

$$P_c = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{5T_s/\sigma}^{\infty} \exp -\frac{z^2}{2} dz$$

donc

$$P_c = Q(5T_s/\sigma)$$

- (d) AN : $N_0 = 10^{-3} V^2 / Hz$, $R_b = 1$ kbps. on obtient

$$P_a = 0,028$$

$$P_b = 9,8.10^{-10}$$

$$P_c = 7,6^{-24}$$

On remarque que

$$P_c \ll P_b \ll P_a$$

- (e) La règle de codage choisie pour le mapping vous paraît-elle intéressante ? Si oui, quel est son intérêt ?

Réponse :

La règle de codage (codage de gray) choisie pour le mapping est intéressante en effet en passant d'un niveau à l'autre on change un seul bit

- (f) Sachant que le taux d'erreur symbole de la liaison est donné par :

$$TES = \frac{3}{2} Q \left(\sqrt{\frac{4 E_b}{5 N_0}} \right)$$

Avec la règle de codage choisie pour le mapping donnez le taux d'erreur binaire (TEB) de la liaison, en expliquant votre réponse.

Réponse :

on a

$$TEB = \frac{TES}{\log_2(M)} = \frac{3}{4} Q \left(\sqrt{\frac{4 E_b}{5 N_0}} \right)$$

car d'après la règle de codage choisie pour le mapping en passant d'un niveau à l'autre on change un seul bit (Un symbole erroné = 1 bit erroné).

5.2 Implantation sous Matlab

1. Implantation de la chaîne sans bruit : on l'implantera en utilisant le mapping suivant : 00 : -3, 01 : -1, 10 : +1, 11 : +3 (voir en annexe). Attention le mapping est différent de celui proposé dans l'étude théorique précédente.

- (a) Tracer le signal en sortie du filtre d'émission, ainsi que sa densité spectrale de puissance. Ces tracés sont-ils conformes à la théorie ?

Réponse :

le signal a transmettre apres le filtrage mise en forme (chaîne 4)

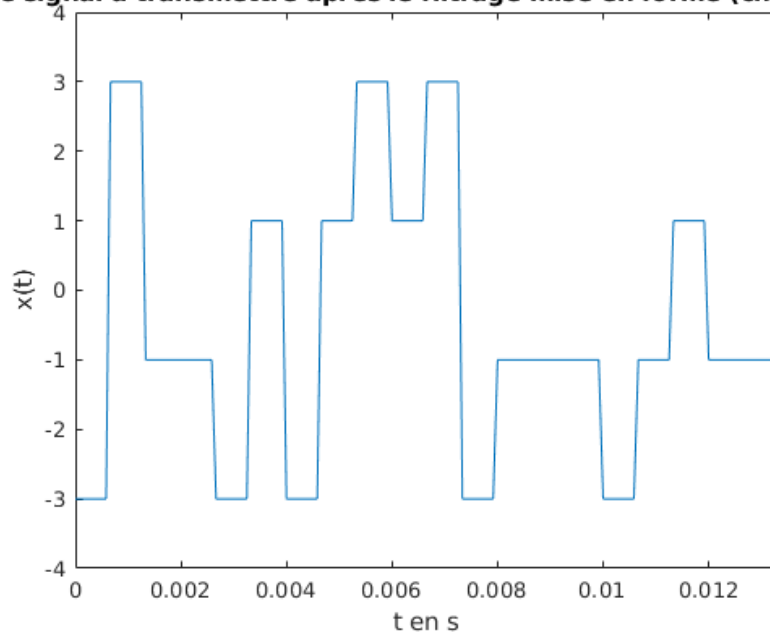


Figure 23: le signal en sortie du filtre de réception (chaîne 4)

la densité spectrale de puissance du signal transmis (chaîne 4)

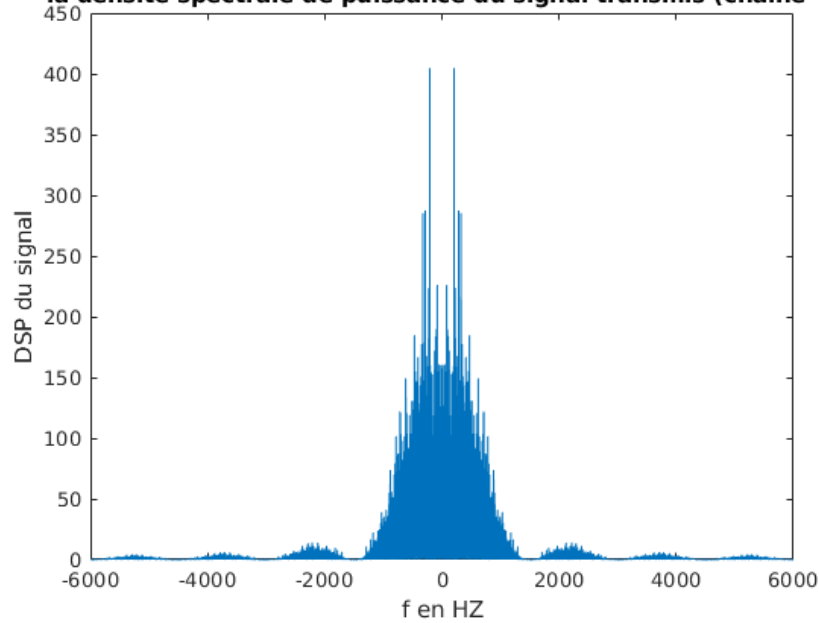


Figure 24: la densité spectrale de puissance du signal transmis (chaîne 4)

- (b) Comparer l'efficacité spectrale de la chaîne étudiée avec celle de la chaîne de référence (en superposant les tracés des DSPs des signaux transmis dans les deux cas pour un même débit binaire). La similitude ou différence obtenue devra être expliquée. La chaîne éventuellement la plus efficace spectralement devra être identifiée, en expliquant pourquoi.

Réponse :

densité spectrale de puissance du signal transmis (chaîne 1) vs (cha

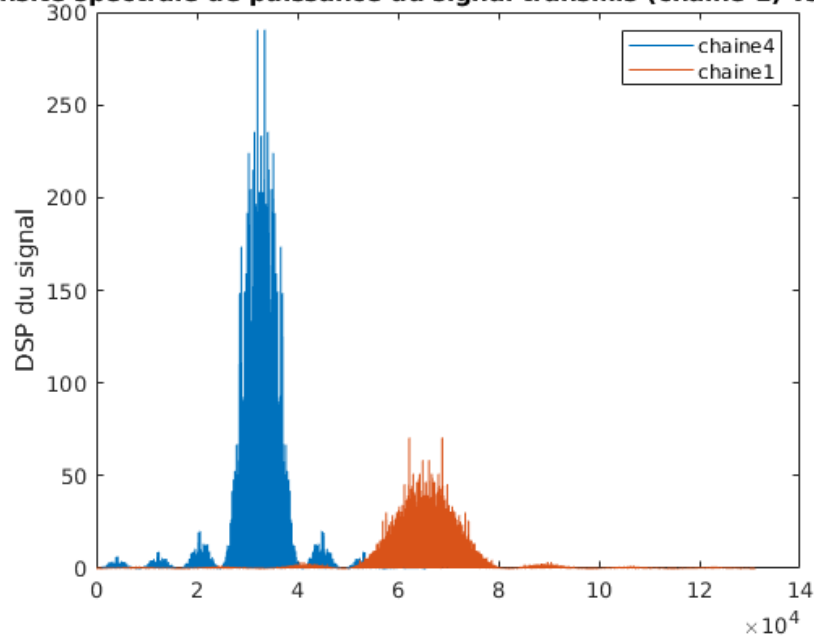


Figure 25: la densité spectrale de puissance du signal transmis (chaîne 1) vs (chaîne 4)

On remarque que la chaîne 4 est plus efficace spectralement que la chaîne 1. ce qui est expliqué par le fait que l'efficacité spectrale est donnée par

$$\mu = \frac{\log_2(M)}{k}$$

- (c) Tracer un diagramme de l'oeil en sortie du filtre de réception afin de déterminer les instants optimaux d'échantillonnage et les seuils optimaux de décision (détecteur à seuil). Les résultats obtenus sont-ils conformes à la théorie ? Expliquez votre réponse.

Réponse :

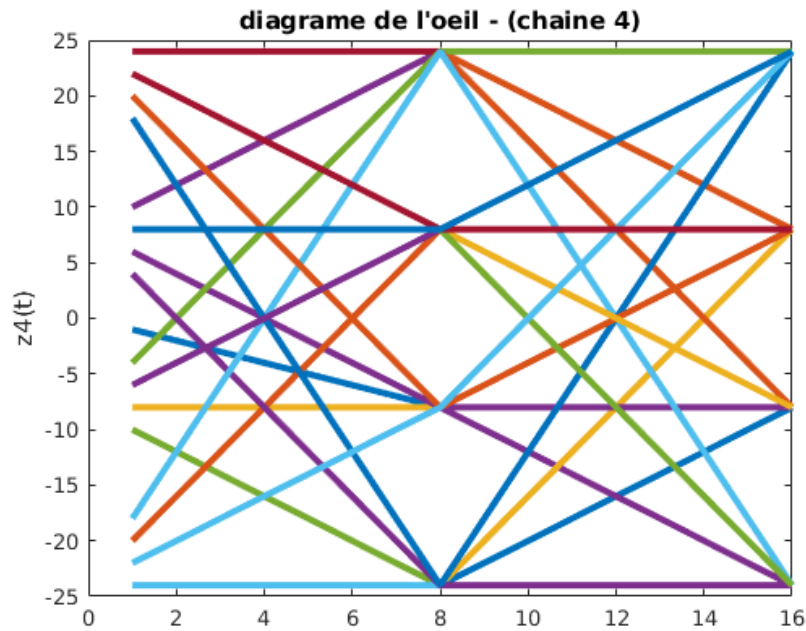


Figure 26: diagramme de l'oeil - (chaîne 4)

Ce tracé est bien conforme à l'étude théorique en effet on peut respecter le critère de Nyquist si on échantillonne à partir du bit N_s car on peut distinguer les 4 symboles.

- (d) En utilisant les instants optimaux d'échantillonnage puis un détecteur à seuil, avec seuils optimaux, vérifier que le TEB obtenu est bien nul.

Réponse : voir code .

2. Rajouter le bruit et tracer le taux d'erreur symbole (TES) obtenu en fonction du rapport signal à bruit par bit à l'entrée du récepteur (E_b/N_0) en décibels. On prendra des valeurs de $(E_b/N_0)_{dB}$ allant de 0 à 6 dB.

Réponse :

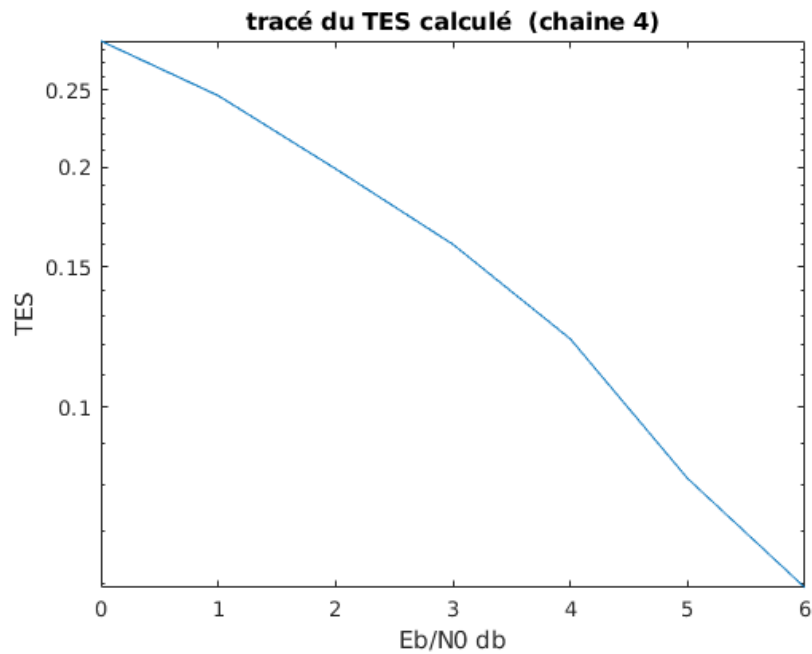


Figure 27: tracé du TES calculé (chaîne 4)

3. Comparer le TES obtenu par simulation sur la chaîne implantée au TES donné pour la chaîne étudiée dans l'étude théorique. La similitude ou différence obtenue devra être expliquée.

Réponse :

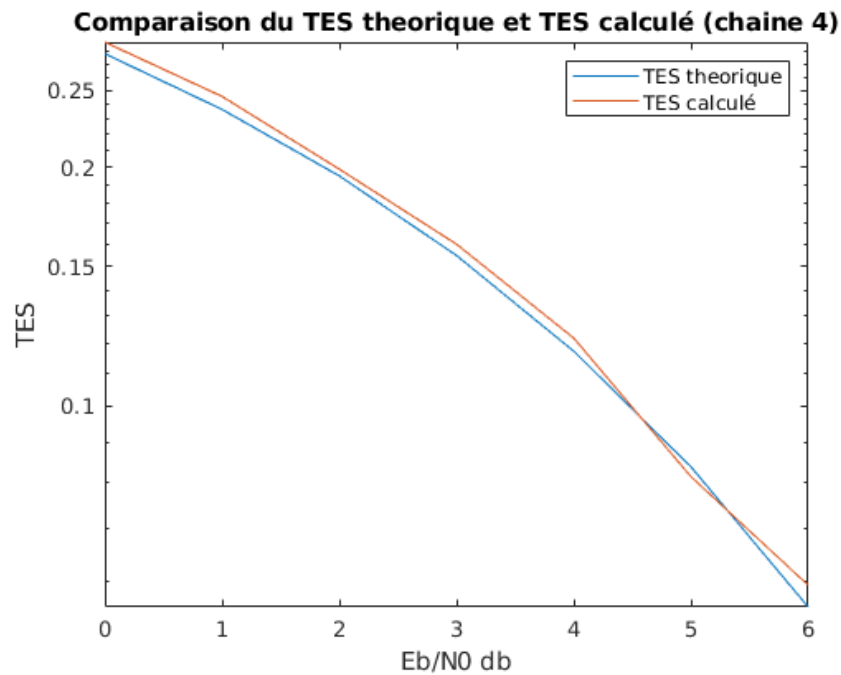


Figure 28: Comparaison du TES théorique et TES calculé (chaîne 4)

On remarque que les deux courbes sont confondues car dans le calcul du TES le mapping n'a pas d'impact, ce qui confirme le bon fonctionnement de la chaîne.

4. Tracer le taux d'erreur binaire (TEB) obtenu en fonction du rapport signal à bruit par bit à l'entrée du récepteur (E_b/N_0) en décibels. On prendra des valeurs de $(E_b/N_0)_{dB}$ allant de 0 à 6 dB.

Réponse :

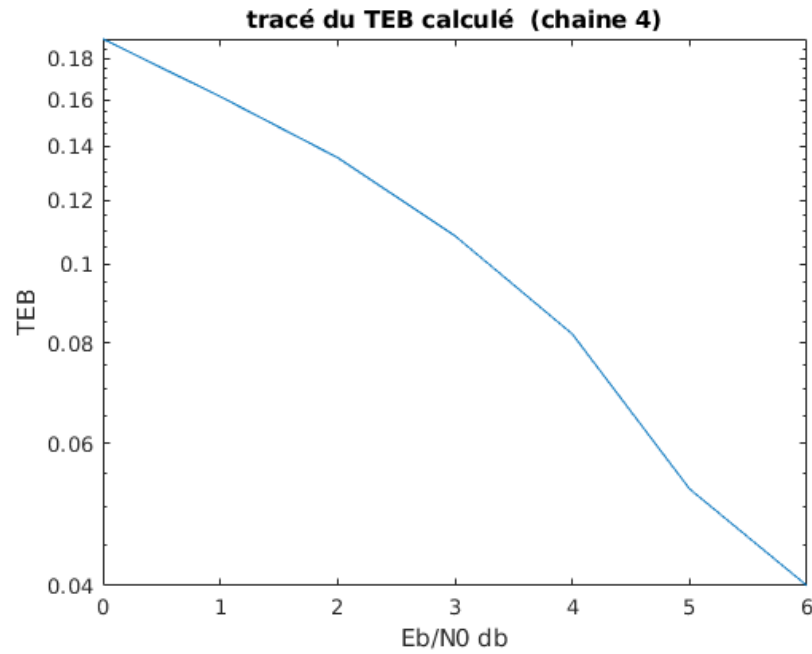


Figure 29: tracé du TEB calculé (chaîne 4)

5. Comparer le TEB obtenu par simulation sur la chaîne implantée au TEB donné pour la chaîne étudiée dans l'étude théorique. La similitude ou différence obtenue devra être expliquée. La chaîne éventuellement la plus efficace en puissance devra être identifiée, en expliquant pourquoi.

Réponse :

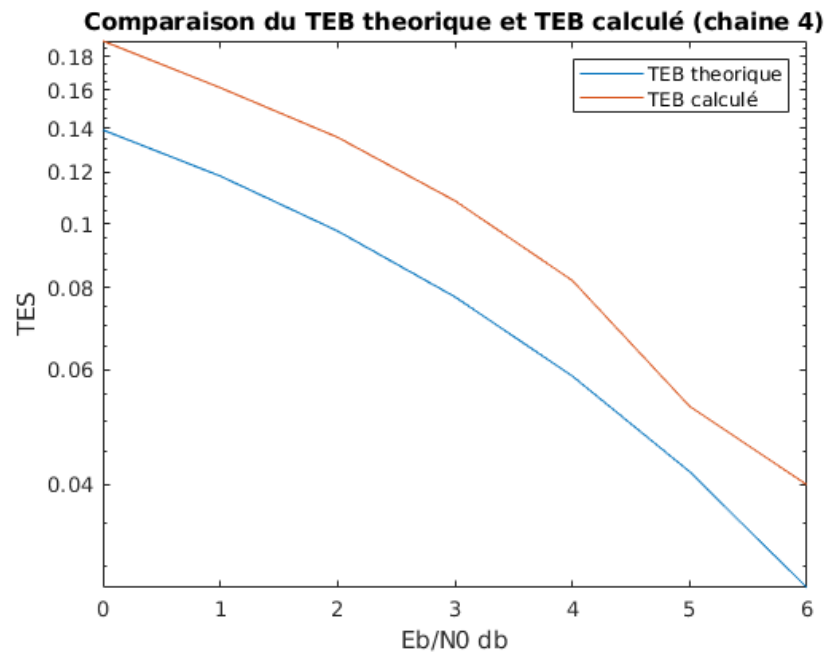


Figure 30: Comparaison du TEB théorique et TEB calculé (chaîne 4)

le TEB théorique est bien inférieur au TEB calculé en effet à la partie théorique on a utilisé le codage de gray contrairement à l'implémentation.