RESOLUTIONS D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES AVEC LES SERIES ENTIERES

Rappels : Pour résoudre les équations différentielles nous avons besoin des propriétés sur les sommes($\sum$) est la propriété sur les variables muettes (n=p=k ; ∀ n, p, k∈ IN).

Cette résolution d'équations différentielles interpelle sur la capacité à calculer les rayons de convergences de séries entières.

Notamment sur le calcul des rayons de convergences nous disposons des méthodes suivantes :

a) Le théorème d'ABEL

b) Le théorème de D'ALEMBERT

c) La Formule de HADAMART

La résolution nécessite aussi une connaissance sur le Développement en Séries Entières (D.S.E). Et pour cela nous avons quelques applications.

Applications 1 :

Dans tous les cas suivants, donnez le (D.S.E) au voisinage de 0 de la fonction f(x) et préciser le rayon de convergence (R).

1°) f(x)=$(x+1)\ln(1+x)$; 2°) f(x)=$\frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$; 3°) f(x)=$(\arctan(x))^2$;

4°) f(x)=$ln\sqrt{x^2-2xcosx+1}$; 5°) f(x)=$ln(x^2-5x+6)$; 6°) f(x)=$\frac{2x^2+1}{(x-1)(2x-1)}$

7°) f(x)=$\frac{x^3+1}{(x-1)(x+2)}$; 8°) f(x)=$-\frac{\ln(1-x)}{1-x}$; 9°) f(x)=$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

Solution App 01 :

1°) f(x)=$(x+1)\ln(1+x)$ → f(x)=$x\ln(1+x)+\ln(1+x)$.

Si | x |< 1 ; le (D.S.E) de $\ln(1+x)$ =$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ .Alors on a :

f(x)= $x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$

f(x)= $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n+1}}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$. Posons p=n+1 →n=p−1 avec n−1 $=p-2$.

$$\rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n+1}}{n}=\sum_{p=2}^{\infty}(-1)^{p-2}\frac{x^p}{p-1}=\sum_{p=2}^{\infty}(-1)^{p}\frac{x^p}{p-1}$$

→ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n+1}}{n}=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^n}{n-1}$; car la variable est muette.

Ainsi : f(x)= $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^n}{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$

f(x)= $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^n}{n-1}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+x$

= $\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n-1}+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right]x^n+x$

= $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right]x^n+x$

D'où f(x) = $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}x^n+x$. Avec $a_n=\frac{(-1)^n}{n(n-1)}$; et $\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\frac{n(n+1)}{n(n-1)}$

→ $\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ =1= R. Alors le rayon de convergence $R=1$

Or f(x)=$(x+1)\ln(1+x)$; →$(x+1)\ln(1+x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}x^n+x$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}x^n=(x+1)\ln(1+x)-x$$

$$Et\ pour\ x=1;\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}=2log2-1$$

2°) f(x)=$\frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$. Soit g la fonction définie sur $]-1;1[$ par g(x)= $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; et g est (D.S.E) dans $]-1;1[$.La fonction $x\rightarrow\arcsin(x)$ est (D.S.E) dans $]-1;1[$ car $\arcsin(x)$ est une primitive de g .Donc f est (D.S.E) dans$]-1;1[$.

La Série Entière obtenue sera de rayon R≥1. On remarque que : $\lim_{x\to 1^-} f(x)$=+∞ et

$\lim_{x\to -1^+} f(x)$=+∞.Ce qui serait pas possible si R>1, car la Série Entière est continue

sur$]-R;R[$.

$$f(x)=\frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} \to f'(x)=\frac{(\arcsin(x))'\sqrt{1-x^2}+\frac{2x\arcsin(x)}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=\frac{\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{x\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$$

$\to f'(x)=\frac{1}{1-x^2}+\frac{x\arcsin(x)}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} \to (1-x^2)\, f'(x)= 1+x\, f(x)$ pour tout x$\in]-1;1[$

Posons f(x) $=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$; puisque f(0)=0 et f'(0)=1, on a nécessairement a_o=0 et a_1=1.

<u>Cherchons le (D.S.E) de ε(x) :</u> avec $\varepsilon(x) = (1-x^2)\, f'(x) - x\, f(x) - 1$

$$\varepsilon(x) = f'(x) - x^2 f'(x) - x\, f(x) - 1$$

$$\varepsilon(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1} - x^2 \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1} - x \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - 1$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1} - 1$$

$$\varepsilon(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\, a_n x^{n+1} - 1$$

<u>Posons</u> p=n−1 → n=p+1 ; $\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1} = \sum_{p=0}^{\infty} (p+1)\, a_{p+1} x^p$

$\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1} x^n$; Car la variable est muette (n=p).

<u>Posons</u> p=n+1 →n =p−1 ; $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\, a_n x^{n+1} = \sum_{p=2}^{\infty} p a_{p-1}\, x^p$

$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\, a_n x^{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} n a_{n-1}\, x^n}$; Car la variable est muette (n=p).

Ainsi: $\varepsilon(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\, a_{n+1}x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n a_{n-1}\, x^n - 1$

$$\varepsilon(x) = \sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)a_{n+1} - na_{n-1}]x^n - 1$$

$\varepsilon(x)=\sum_{n=1}^{\infty}[(n+1)a_{n+1} - na_{n-1}]x^n + a_1 - 1$; puisque a_1=1 $\rightarrow a_1 - 1$=0

$\varepsilon(x)=\sum_{n=1}^{\infty}[(n+1)a_{n+1} - na_{n-1}]x^n$. Comme ε(x) est la Série nulle, alors

∀n≥1 ; $(n+1)a_{n+1} - na_{n-1}$ $\rightarrow a_{n+1} = \frac{n}{n+1}a_{n-1}$

Comme a_o=0 ; alors tous les coefficients pairs sont nuls (ce qui vient du fait que f est impaire). Ainsi : $a_{n+1} = \frac{n}{n+1}a_{n-1}$ et puis on a :

$$\left.\begin{array}{l} a_3 = \frac{2}{3}a_1 \\ a_5 = \frac{4}{5}a_3 \\ a_7 = \frac{6}{7}a_5 \\ \vdots \qquad \vdots \\ \vdots \qquad \vdots \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_n = \frac{n-1}{n}a_{n-2} \end{array}\right\} \rightarrow a_n = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \times \ldots \times \frac{n-1}{n} a_1 \text{ .Comme } a_1 = 1$$

$$\rightarrow a_n = \frac{2^{n-1}\left(\frac{n!}{2n}\right)^2}{n!} \rightarrow \boxed{a_n = \frac{(n!)2^{n-1}}{(2n)^2}}$$

$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{(n!)2^{n-1}}{(2n)^2} \times \frac{2^2(n+1)^2}{2^n(n+1)!} \rightarrow \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{1}{2n^2} \times \frac{(n+1)^2}{(n+1)}$. Ainsi : $\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ =0

Alors le rayon de convergence R=0

Et $f(x)= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)2^{n-1}}{(2n)^2} x^n$.

3°) f(x)=(arctan(x))^2 . Pour $x \in]-1;1[$; on a : $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

$$\rightarrow\ [\arctan(x)]^2\ = \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n+1} x^{2n+1}.$$

La fonction f est donc le produit de deux séries de rayon 1 et l'on a : R≥1.

La fonction f est paire et s'annule en 0.On a donc : f (x)= $\sum_{n=2}^{\infty} a_{2n} x^{2n}$

Le coefficient a_{2n} est la somme des produits $b_{2p+1} b_{2q+1}$ tels que :

$(2p+1)+(2q+1)=2n\ \rightarrow\ p+q+1=n\ \ \rightarrow q=n-p-1$

Ainsi : $a_{2n}= \sum_{p=0}^{n-1} b_{2p+1} b_{2n-2p-1} = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(-1)^p}{2p+1} x \frac{(-1)^{n-p-1}}{2n-2p-1}$

Or : $\frac{1}{(2p+1)(2n-2p-1)} = \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{2p+1} + \frac{1}{2n-2p-1}\right)$

$$a_{2n} = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-1}}{2n}\left[\frac{1}{2p+1} + \frac{1}{2n-2p-1}\right]$$

$$a_{2n} = \frac{(-1)^{n-1}}{2n}\left[\sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{2p+1} + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{2n-2p-1}\right]$$

Comme $\sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{2p+1} = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{2n-2p-1}$; car la variable est muette.

<u>Ainsi :</u> $a_{2n} = \frac{(-1)^{n-1}}{2n}\left[\sum_{p=0}^{n-1} \frac{2}{2p+1}\right] \rightarrow \boxed{a_{2n} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left[\sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{2p+1}\right]}$

Or : $|a_{2n}| \geq \frac{1}{n}$ et l'on en déduit que le rayon de la série de coefficient a_{2n} est inférieure à 1 et par comparaison à la série de coefficient $\frac{1}{n}$. Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1$; $\boxed{R = 1}$

On peut encadrer la suite $(Sn)_{n\geq 0}$ définie par : $S_n = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{2p+1}$

On a : $\frac{1}{2}\sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{p+1} \leq S_n \leq 1 + \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{p}$. Et puisque $\sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{p} \backsimeq \ln n$

$\rightarrow\ S_n \backsimeq \frac{\ln n}{2}$ et $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. Avec (a_{2n}) converge vers 0.

Alors : $|a_{2n}| - |a_{2n+1}| = \frac{S_n}{n} - \frac{S_{n+1}}{n+1} = \frac{S_{n+1}}{n} - \frac{1}{n(2n+1)} - \frac{S_{n+1}}{n+1}$

$$\left|a_{2n}\right| - \left|a_{2n+1}\right| = \frac{S_{n+1}}{n(n+1)} - \frac{1}{n(2n+1)} = \frac{S_{n+1}}{n(n+1)}\left[1 - \frac{n+1}{2n+1}\frac{1}{S_n}\right]$$

$\boxed{\left|a_{2n}\right| - \left|a_{2n+1}\right| \backsimeq \frac{S_{n+1}}{n(n+1)}}$; $\left|a_{2n}\right| - \left|a_{2n+1}\right| > 0$ à partir d'un certain rang.

Alors la Série de terme général a_{2n} est alternée à partir d'un certain rang. Et donc la Série Entière converge si x=± 1.

$$\boxed{\text{Donc : } f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left[\sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{2p+1}\right] x^{2n}}$$

4°) f(x)=$ln\sqrt{x^2 - 2xcos\alpha + 1}$; avec $\alpha \in]0;\pi[$.

On a : $x^2 - 2xcos\alpha + 1 = (x - cos\alpha)^2 + sin\alpha^2$.Puisque $sin\alpha \ddagger 0$, on en déduit que :

$x^2 - 2xcos\alpha + 1 > 0$ .Alors f est définie et dérivable sur IR comme composé de fonctions dérivables .On obtient :

$$\forall x \in \mathrm{IR} ;\ f'(x) = \frac{1}{2}\frac{2(x - cos\alpha)}{x^2 - 2xcos\alpha + 1} = \frac{x - cos\alpha}{x^2 - 2xcos\alpha + 1} = \frac{x - cos\alpha}{(x - e^{i\alpha})(x - e^{-i\alpha})}$$

$$f'(x) = \frac{a}{x - e^{i\alpha}} + \frac{b}{x - e^{-i\alpha}} = \frac{(a+b)x - (ae^{-i\alpha} + be^{i\alpha})}{(x - e^{i\alpha})(x - e^{-i\alpha})}.$$ Ainsi par identification :

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ -a + b = 0 \end{cases} \rightarrow b = a = \frac{1}{2} \quad \text{et par suite : } \quad f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x - e^{i\alpha}} + \frac{1}{x - e^{-i\alpha}}\right).$$

On a donc : $\forall x \in \mathrm{IR}$; $f'(x) = Re\left(\frac{1}{x - e^{-i\alpha}}\right) = -Re\left(\frac{e^{i\alpha}}{1 - xe^{i\alpha}}\right)$.

Si $x \in]-1\,;1[$;on a : $\left|xe^{i\alpha}\right| < 1$ et donc on peut utiliser la série géométrique pour obtenir : $\frac{e^{i\alpha}}{1 - xe^{i\alpha}} = e^{i\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} e^{ni\alpha} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} e^{i(n+1)\alpha} x^n$

$$\rightarrow f'(x) = -Re\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{i(n+1)\alpha} x^n\right) = -\sum_{n=0}^{\infty} Re\left(e^{i(n+1)\alpha}\right) x^n$$

$\rightarrow f'(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} (\cos(n+1)\alpha)\, x^n$. La série de terme général (cos (n+1)α) est de rayon au moins 1, puisque : $\cos 2(n+1)\,\alpha = 2[\cos(n+1)\alpha]^2 - 1$. On en déduit que : $(\cos(n+1)\,\alpha)$ ne peut pas converger vers 0. $\boxed{\text{Donc le rayon } R = 1}$

En prenant la primitive nulle en 0 ; $\boxed{\text{Donc : } \forall\, x \in]-1\,;1[\ ;\ f(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\alpha)}{n} x^n}$

5°) f(x)=$ln(x^2 - 5x + 6)$. $\forall x \in \mathrm{IR}$; $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$.

Si $x < 2$; alors f(x)=$\ln[(x - 2)(x - 3)] = \ln[(2 - x)(3 - x)] = \ln(2 - x) + \ln(3 - x)$

f est dérivable sur$I =]-\infty; 2[$. Alors on a :

$\forall x \in]-\infty; 2[$; $f'(x) = -\frac{1}{2-x} - \frac{1}{3-x} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}} - \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x}{3}}$

Si $x \in]-2; 2[$; on peut utiliser la série géométrique : $\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$ et si $x \in]-3; 3[$;

on a : $\frac{1}{1-\frac{x}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$. Ainsi si $x \in]-2; 2[$;

$$f'(x) = -\left(\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}\right) = -\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^{n+1}}\right)$$

$f'(x) = -\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}}\right)x^n$. On en déduit alors que :

$f(x) = f(0) - \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}$; avec $f(0) = ln6$

En posant $p = n + 1 \rightarrow n = p - 1$, on a :

$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right)\frac{x^p}{p}$; Comme la variable est muette

$$f(x) = ln6 - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)\frac{x^n}{n}$$

Et le rayon de convergence R=min (2 ; 3)=2

6°) $f(x)=\frac{2x^2+1}{(x-1)(2x-1)}$; On a : $f(x)= a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{2x-1} = \frac{a(x-1)(2x-1)+b(2x-1)+c(x-1)}{(x-1)(2x-1)}$

$$f(x) = \frac{a(2x^2-3x+1)+b(2x-1)+c(x-1)}{(x-1)(2x-1)} = \frac{2ax^2+(2b-3a+c)x+a-b-c}{(x-1)(2x-1)}$$

Par identification, $\begin{cases} 2a = 2 \\ 2b - 3a + c = 0 \\ a - b - c = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 2b + c = 3 \\ b = -c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = -3 \end{cases}$.

On peut faire aussi $b = \lim_{x\to 1}(x-1)f(x) = \left.\frac{2x^2+1}{2x-1}\right]_{x=1} = 3$ et $c = \lim_{x\to\frac{1}{2}}(2x-1)f(x) = \left.\frac{2x^2+1}{x-1}\right]_{x=\frac{1}{2}} = -3$

Et le rapport des termes de plus haut degré vaut $a = 1$.

Par suite : $f(x)= 1 + \frac{3}{x-1} - \frac{3}{2x-1} = 1 - \frac{3}{1-x} + \frac{3}{1-2x}$

$$f(x) = 1 - 3\sum_{n=0}^{\infty} x^n + 3\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n = 1 - 3\sum_{n=0}^{\infty} x^n + 3\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$$

La série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ est de rayon 1 et la série $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$ est de rayon de $\frac{1}{2}$.

Donc le rayon *R=min* $(1,\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$ ET Donc : $f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 3(2^n - 1)x^n$

7°) $f(x)=\frac{x^3+1}{(x-1)(x+2)}$; On a : $f(x)= ax + b + \frac{c}{x-1} + \frac{d}{x+2}$.

$c = \lim_{x\to 1}(x-1)f(x) = \left.\frac{x^3+1}{x+2}\right]_{x=1} = \frac{2}{3}$; $\quad$ $d = \lim_{x\to -2}(x+1)f(x) = \left.\frac{x^3+1}{x+2}\right]_{x=-2} = \frac{-7}{-3}$

Comme $a = 1$; alors $a + b = 0 \to b = -1$. Par suite : $f(x)= x - 1 + \frac{2}{3}\frac{1}{x-1} + \frac{7}{3}\frac{1}{x+2}$

$\to f(x)=-1 + x - \frac{2}{3}\frac{1}{1-x} + \frac{7}{6}\frac{1}{1+\frac{x}{2}} = -1 + x - \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty} x^n + \frac{7}{6}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{2^n}$

La série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ est de rayon 1 et la série $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{2^n}$ est de rayon 2.

Donc le rayon *R=min (1,2)=* 1 . On a : $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$f(x)= -1 + x + \left(-\frac{2}{3} + \frac{7}{6}\right) - \frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty} x^n + \frac{7}{6}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{2^n}$

Donc: $f(x) = -\frac{1}{2} + x + \sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{2}{3} + \frac{7}{6}\frac{(-1)^n}{2^n}\right]x^n$

8°) $f(x)=-\frac{\ln(1-x)}{1-x}$; La fonction s'obtient par produit de deux Séries Entières de rayons chacun 1. *R=min (1,1)=1 et* comme $f(x) \to \infty$ lorsque $x \to 1^-$; alors *R=1* exactement.

$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \; et \; -\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$. En appliquant le produit de Cauchy, on obtient : $\frac{-\ln(1-x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \; x \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^n$.

Donc : $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^n$

9°) f(x)=$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$; $D_f = [-1;1[$. On a $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = (1+x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = (1+x)\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1x2x3x....x(2n-1)}{2^n n!}x^{2n}\right]$$

$$f(x) = 1 + x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1x2x3x....x(2n-1)}{2^n n!}x^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1x2x3x....x(2n-1)}{2^n n!}x^{2n+1}$$

$Comme\ a_{2n} = a_{2n+1} = \frac{1x2x3x....x(2n-1)}{2^n n!}$. Ainsi : $f(x) = 1 + x + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$

Après une connaissance sur le Développement en Séries Entières (D.S.E) et la détermination du rayon de convergence, nous pouvons passer à la Résolution Equations Différentielles proprement dites. Et pour cela nous avons quelques applications :

Applications 2 :

Dans tous les cas suivants chercher la fonction *y* développable Série Entière au voisinage de 0 ou non, solution des équations différentielles.

1°) $(x^2-2)y' + xy + 2 = 0\ avec\ y(0) = 0$.

2°)$x^2y'' + 4xy' + 2y = e^x$.

3°) $y'' - 2xy' - 2y$ =0, $vérifiant\ y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

4°)$y'' + xy' + y = 0,\ vérifiant\ y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

5°) $(1+x^2)y'' + 2xy' - 2y = 2$; 6°) $xy'' + (x-1)y' - y = 0$.

7°)$x^2y'' - x(x+6)y' + 3(x+4)y = 0$.

8°)$x^2(1+x)y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0$.

9°) $(x^2+x)y'' + (x-2)y' - 4y = 0$; 10°) $(x^2+x)y'' + (3x+1)y' + y = \frac{1+x}{(1-x)^3}$

Solution App 2 :

1°) $(x^2-2)y'+xy+2=0 \; avec \; y(0)=0.$ On a : $y=\sum_{n\geq 0} a_n x^n$; $y'=\sum_{n\geq 0} n a_n x^{n-1}$

$$(x^2-2)y'+xy+2=(x^2-2)\sum_{n\geq 0} n a_n x^{n-1}+x\sum_{n\geq 0} a_n x^n+2$$

$$=\sum_{n\geq 0} n a_n x^{n+1}-\sum_{n\geq 0} 2n a_n x^{n-1}+\sum_{n\geq 0} a_n x^{n+1}+2$$

$$=\sum_{n\geq 0}(n+1)a_n x^{n+1}-\sum_{n\geq 2} 2n a_n x^{n-1}+2-2a_1 \quad .$$

Posons : $m+1=n-1 \rightarrow m=n-2 \; et \; n=m+2.$

$$\boxed{\sum_{n\geq 2} 2n a_n x^{n-1}=\sum_{m\geq 0} 2(m+2)a_{m+2}x^{m+1}}$$

.Comme la variable est muette, alors :

$$(x^2-2)y'+xy+2=\sum_{n\geq 0}(n+1)a_n x^{n+1}-\sum_{n\geq 0} 2(n+2)a_{n+2}x^{n+1}+2-2a_1$$

$=\sum_{n\geq 0}[(n+1)a_n-2(n+2)a_{n+2}]x^{n+1}+2-2a_1$. Comme cette série est égale à la série nulle dont tous les coefficients sont nuls, alors :$\rightarrow$

$$\begin{cases} 2-2a_1=0 \\ (n+1)a_n-2(n+2)a_{n+2}=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_1=1 \\ (n+1)a_n=2(n+2)a_{n+2} \end{cases} \quad \begin{cases} a_1=1 \\ \dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\dfrac{n+1}{2(n+2)} \end{cases}$$

Puisque $a_o=0$ et les coefficients pairs sont tous nuls, alors on peut poser $n=2p+1$

$\dfrac{a_{2p+3}}{a_{2p+1}}=\dfrac{2p+2}{2(2p+3)} \rightarrow \dfrac{a_{2p+3}}{a_{2p+1}}=\dfrac{p+1}{2p+3}$. Ainsi : $\dfrac{a_3}{a_1}=\dfrac{1}{3}$; $\dfrac{a_5}{a_3}=\dfrac{2}{5}$; $\dfrac{a_7}{a_5}=\dfrac{3}{7}$; $\dfrac{a_9}{a_7}=\dfrac{4}{9}$.

Par suite: $\dfrac{a_3}{a_1} x \dfrac{a_5}{a_3} x \dfrac{a_7}{a_5} x \dfrac{a_9}{a_7} x \cdots\cdots\cdots x \dfrac{a_{2p+3}}{a_{2p+1}}=\dfrac{1}{3} x \dfrac{2}{5} x \dfrac{3}{7} x \dfrac{4}{9} x \cdots\cdots\cdots x \dfrac{p+1}{2p+3}$

$\rightarrow \dfrac{a_{2p+3}}{a_1}=\dfrac{1}{3} x \dfrac{2}{5} x \dfrac{3}{7} x \dfrac{4}{9} x \cdots\cdots\cdots x \dfrac{p+1}{2p+3} \rightarrow a_{2p+3}=\dfrac{p!}{1x3x5x7x\cdots x(2p+3)}$

Comme$y=\sum_{n\geq 0} a_n x^n=\sum_{n\geq 0} a_{2n+1}x^{2n+1}$.

$$\boxed{\text{Donc:}\, y(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{n!}{1x3x5x7x\cdots x(2n+1)}x^{2n+1}}$$

2°) $x^2y'' + 4xy' + 2y = e^x$. On a : $y = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$; $y' = \sum_{n\geq 0} n a_n x^{n-1}$

et $y'' = \sum_{n\geq 0} n(n-1)a_n x^{n-2}$. Posons $\boldsymbol{\varepsilon}(x) = x^2y'' + 4xy' + 2y$, alors

$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = \sum_{n\geq 0} n(n-1)a_n x^n + 4\sum_{n\geq 0} n a_n x^n + 2\sum_{n\geq 0} a_n x^n$

$= \sum_{n\geq 0}[n(n-1) + 4n + 2]a_n x^n = \sum_{n\geq 0}[n^2 + 3n + 2]a_n x^n$

$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = \sum_{n\geq 0}(n+1)(n+2)a_n x^n$. Et comme $\boldsymbol{\varepsilon}(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n\,!}$ alors tous les

coefficients sont égaux. Par suite : $(n+1)(n+2)a_n = \frac{1}{n\,!} \to a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)n\,!}$

$\to a_n = \frac{1}{(n+2)\,!}$ .Puisque $\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{(n+3)\,!}{(n+2)\,!} = n+3$ alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = +\infty$. Le rayon de

convergence $\boxed{R = +\infty}$. Ainsi on obtient : $y = \sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2)\,!}$

$y(x) = \frac{1}{x^2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}$ .En posant $p = n+2$ alors $y(x) = \frac{1}{x^2}\sum_{p=2}^{\infty} \frac{x^p}{p!}$, et comme la

variable est muette $y(x) = \frac{1}{x^2}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{x^2}(e^x - 1 - x)$.

$$\boxed{Donc: y(x) = \frac{1}{x^2}(e^x - 1 - x)}$$

3°) $y'' - 2xy' - 2y = 0$, *vérifiant* $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$. On a : $y = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$;

$y' = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$ et $y'' = \sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n-2}$. Posons $\boldsymbol{\varepsilon}(x) = y'' - 2xy' - 2y = 0$;
alors : $\boldsymbol{\varepsilon}(x) = \sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n\geq 0} 2n a_n x^n - \sum_{n\geq 0} 2a_n x^n$

Posons $p = n-2 \to n = p+2$; alors $\sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{p=0}^{\infty}(p+2)(p+1)a_{p+2}x^p$

et comme la variable est muette : $\boxed{\sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n}$

$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n\geq 0} 2n a_n x^n - \sum_{n\geq 0} 2a_n x^n$

$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2(n+1)a_n]x^n$.Puisque la série $\boldsymbol{\varepsilon}(x)$ est nulle, alors

tous ses coefficients sont nuls : ∀ n≥0 ; $(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2(n+1)a_n = 0$

$\rightarrow (n+2)(n+1)a_{n+2} = 2(n+1)a_n \ \rightarrow (n+2)a_{n+2} = 2a_n \ \rightarrow a_{n+2} = \frac{2}{n+2}a_n$

Or $a_0 = y(0) = 1$ et $a_1 = y'(0) = 0$ alors tous les coefficients impairs sont nuls.

Posons $n = 2p \rightarrow a_{2p+2} = \frac{2}{2p+2}a_{2p} \rightarrow a_{2(p+1)} = \frac{1}{(p+1)}a_{2p}$ et on a : ∀ p≥0

$$\begin{cases} a_2 = a_0 \\ a_4 = \frac{a_2}{2} \\ a_6 = \frac{a_4}{3} \\ a_8 = \frac{a_6}{4} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{2(p+1)} = \frac{a_{2p}}{(p+1)} \end{cases} \rightarrow a_{2(p+1)} = \frac{1}{1\times2\times3\times\cdots\times(p+1)} = \frac{1}{(p+1)\,!} \ \rightarrow a_{2p} = \frac{1}{p\,!}$$

$\rightarrow a_n = \frac{2}{n!}$ $avec$ $\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = n+1 \rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = +\infty$. $\boxed{\text{Alors R=+∞}}$ .Puisque n=2p

y $(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{p=0}^{\infty} a_{2p}x^{2p} = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{(x^2)^p}{p!} = e^{x^2}$. $\boxed{\text{Donc : y } (x) = e^{x^2}}$

4°)$y'' + xy' + y = 0,$ $vérifiant$ $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$. On a : $y = \sum_{n\geq0} a_n x^n$;

$y' = \sum_{n\geq0} na_n x^{n-1}$ et $y'' = \sum_{n\geq0} n(n-1)a_n x^{n-2}$. Posons $\boldsymbol{\varepsilon}$ (x)= $y'' + xy' + y$, alors

$\boldsymbol{\varepsilon}$ (x)= $\sum_{n\geq2} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n\geq0} na_n x^n + \sum_{n\geq0} a_n x^n$. Posons $p = n-2 \rightarrow n = p+2$

$\boxed{\sum_{n\geq2} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n}$ Car la variable est muette (p devient égale à n)

$\boldsymbol{\varepsilon}$ (x)= $\sum_{n\geq0}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n\geq0}(n+1)a_n x^n$

$\boldsymbol{\varepsilon}$ (x)=$\sum_{n\geq0}[(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_n]\,x^n$. Comme la série $\boldsymbol{\varepsilon}$ (x) est nulle, alors

ses coefficients sont tous nuls : $(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_n = 0$

$\rightarrow (n+2)a_{n+2} = -a_n \rightarrow a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+2}$. Or $a_0 = y(0) = 1$ et $a_1 = y'(0) = 0$, ce qui

entraine que les coefficients de rang impair sont nuls. Posons :$n = 2p$ alors ∀p≥0

$a_{2p+2} = -\frac{a_{2p}}{2p+2} \leftrightarrow a_{2(p+1)} = -\frac{a_{2p}}{2(p+1)}$. Avec $\lim\limits_{p\to\infty} \frac{|a_{2p}|}{|a_{2(p+1)}|} = \lim\limits_{p\to\infty} 2(p+1) = +\infty$; $\boxed{R=+\infty}$

On a : $\begin{cases} a_2 = \frac{-1}{2} a_0 \\ a_4 = \frac{-1}{4} a_2 \\ a_6 = \frac{-1}{6} a_4 \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_{2(p+1)} = \frac{-1}{2(p+1)} a_{2p} \end{cases}$ $\rightarrow a_{2(p+1)} = \frac{(-1)^p a_0}{1\times2\times4\times\cdots\times2(p+1)} \rightarrow a_{2(p+1)} = \frac{(-1)^p}{2^{p+1}} \frac{1}{1\times2\times3\times\cdots\times(p+1)}$

$\rightarrow a_{2(p+1)} = \frac{(-1)^p}{2^{p+1}} \frac{1}{(p+1)!}$. En posant $n = p+1$, alors $a_{2n} = \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} \frac{1}{n!}$ et la variable est

muette $a_{2p} = \frac{(-1)^{p-1}}{2^p} \frac{1}{p!} = \frac{(-1)^{p+1}}{2^p p!}$. Ainsi : y(x)=$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{p=0}^{\infty} a_{2p} x^{2p}$ car (n=2p)

y (x)=$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{2^p p!} x^{2p} = -\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^p}{2^p p!} = -\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \left(\frac{-x^2}{2}\right)^p$. $\boxed{\text{Donc : } y(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}}$

5°) $(1+x^2)y'' + 2xy' - 2y = 2$; On a : $y = \sum_{n\geq0} a_n x^n$; $y' = \sum_{n\geq0} n a_n x^{n-1}$ et $y'' = \sum_{n\geq0} n(n-1)a_n x^{n-2}$. Posons $\boldsymbol{\varepsilon}(x) = (1+x^2)y'' + 2xy' - 2y$.

$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = (1+x^2) \sum_{n\geq0} n(n-1)a_n x^{n-2} + 2x \sum_{n\geq0} n a_n x^{n-1} - 2\sum_{n\geq0} a_n x^n$

$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = \sum_{n\geq2} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n\geq2} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n\geq1} 2n a_n x^n - \sum_{n\geq0} 2a_n x^n$

$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = \sum_{n\geq2} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n\geq0} [n(n-1) + 2n - 2] a_n x^n$

Posons : $p = n-2 \rightarrow n = p+2$; $\boxed{\sum_{n\geq2} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{p\geq0} (p+2)(p+1)a_{p+2} x^p}$

Comme la variable est muette (n=p), alors :

$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = \sum_{n\geq0} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n + \sum_{n\geq0} (n+2)(n-1)a_n x^n$

$\boldsymbol{\varepsilon}\,(x)=\sum_{n\geq 0}[(n+2)(n+1)a_{n+2}+(n+2)(n-1)a_n]x^n$. Comme la série entière $\boldsymbol{\varepsilon}\,(x)$ est égale à la constante 2, alors : pour n=0 ; $2a_2-2a_0=2 \rightarrow a_2=1+a_0$. Pour n≥0 :

$(n+2)(n+1)a_{n+2}+(n+2)(n-1)a_n=0 \rightarrow a_{n+2}=-\frac{n-1}{n+1}a_n$.

Si n=1 ; $a_3=0$ alors tous les coefficients de rang impair supérieur à 3 également seront nuls. On a donc comme partie impaire de la série $\boxed{y_i(x)=a_1x}$ Et pour les coefficients de rang pair ; on a :(n=2p) si p≥1, $a_{2p+2}=-\frac{2p-1}{2p+1}a_{2p}$. Tous les coefficients se calculent en fonction de a_2 et ils ne sont pas tous nuls si $a_2 \neq 0$. Donc si R est le rayon de convergence de la série de termes de rang pair $\lim_{p\to\infty}\left|\frac{a_{2p}}{a_{2p+2}}\right|=\lim_{p\to\infty}\frac{2p+1}{|2p-1|}=1=R^2$ $\boxed{\text{R=1}}$

Alors la série obtenue est rayon de rayon R=1 et les calculs précédents sont valables dans$]-1;1[$.

$$\left.\begin{aligned} a_4&=-\frac{1}{3}a_2\\ a_6&=-\frac{3}{5}a_4\\ &\vdots\\ &\vdots\\ a_{2(p+1)}&=-\frac{(2p-1)}{2p+1}a_{2p}\end{aligned}\right\}\rightarrow a_{2(p+1)}=(-1)^p\frac{1\times3\times5\times\cdots\cdots\times2(p-1)}{1\times3\times5\times\cdots\cdots\times2p+1}a_2 \ \rightarrow a_{2(p+1)}=(-1)^p\frac{a_2}{2p+1}.$$

Or $a_2=a_0+1$, ainsi :$y_p(x)=\sum_{p=0}^{\infty}a_{2(p+1)}x^{2p+2}+a_0=a_0+\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\frac{a_2}{2p+1}x^{2p+2}$

$y_p(x)=a_0+(a_0+1)x\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\frac{1}{2p+1}x^{2p+1}\rightarrow \boxed{y_p(x)=a_0+(a_0+1)x(Arctan\ x)}$

Ainsi : y $(x)=\ y_p(x)+y_i(x)\ \ \rightarrow \boxed{y(x)=a_1x+a_0+(a_0+1)x(Arctan\ x)}$. Donc cette série est de rayon R=+∞ si $a_0=-1$(c'est un polynôme) et R=1 sinon. D'où on remarquera que la fonction obtenue dans ce dernier cas se prolonge sur IR tout entier vérifie sur IR l'équation différentiel.

6°) $xy''+(x-1)y'-y=0$; On a : $y=\sum_{n\geq 0}a_nx^n$; $y'=\sum_{n\geq 0}na_nx^{n-1}$

Et $y'' = \sum_{n\geq 0} n(n-1)a_n x^{n-2}$. Posons $\boldsymbol{\varepsilon}\,(x)= xy'' + (x-1)y' - y = 0$

$\boldsymbol{\varepsilon}\,(x)= x\sum_{n\geq 0} n(n-1)a_n x^{n-2} + (x-1)\sum_{n\geq 0} na_n x^{n-1} - \sum_{n\geq 0} a_n x^n$

$\boldsymbol{\varepsilon}\,(x)=\sum_{n\geq 0}[n(n-1)-n]a_n x^{n-1} + \sum_{n\geq 0}(n-1)a_n x^n$

$\boldsymbol{\varepsilon}\,(x)=\sum_{n\geq 1} n(n-2)a_n x^{n-1} + \sum_{n\geq 0}(n-1)a_n x^n$. Posons : $p = n-1 \rightarrow n = p+1$ et $p-1 = n-2$. Ainsi : $\boxed{\sum_{n\geq 1} n(n-1)a_n x^{n-1} = \sum_{n\geq 0}(p+1)(p-1)a_{p+1}x^p}$ et comme la variable est muette alors (n=p).

$\boldsymbol{\varepsilon}\,(x) = \sum_{n\geq 0}[(n+1)(n-1)a_{n+1} + (n-1)a_n]x^n$. Et puisque la série $\boldsymbol{\varepsilon}\,(x)$ est nulle, alors tous ses coefficients sont nuls.

$\forall n \geq 0$; $(n+1)(n-1)a_{n+1} + (n-1)a_n = 0$ et ce qui est vrai si n=1

• Si n=0 ; $a_1 + a_0 = 0 \rightarrow a_1 = -a_0$.

•Si n≥ 2 ; $(n+1)a_{n+1} + a_n$=0 $\rightarrow a_{n+1} = -\frac{a_n}{n+1}$ et tous les coefficients se calculent en fonction de a_2 et ils ne sont pas tous nuls sia_2≠0. $\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} n+1 \rightarrow$ $\boxed{R=+\infty}$

Alors les calculs précédents sont valables dans tout IR entier, et on a :

$$\left.\begin{array}{l} a_3 = -\frac{a_2}{3} \\ a_4 = -\frac{a_3}{4} \\ \quad\vdots \\ a_{n+1} = -\frac{a_n}{n+1} \end{array}\right\} \rightarrow a_{n+1} = \frac{(-1)^{n-1}a_2}{1\times 3\times 4\times\cdots\times(n+1)} \rightarrow a_n = \frac{2(-1)^n}{(n+2)!}a_2.$$

D'où $y(x) = a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = a_0 - a_0 x + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+2)!}2a_2 x^n$ .Posons p=n+2 $\rightarrow$n=p-2 et $\boxed{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+2)!}2a_2 x^n = \sum_{p=4}^{\infty}\frac{(-1)^{p-2}}{p!}2a_2 x^{p-2}}$; comme la variable est muette (n=p).

$y(x) = a_0(1-x) + 2a_2\sum_{n=4}^{\infty}\frac{(-1)^{n-2}}{n!}x^{n-2} = a_0(1-x) + 2a_2 x^2\left(\sum_{n=4}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n\right)$

$y(x) = a_0(1-x) + 2a_2x^2\left(\sum_{n=4}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}\right) = a_0(1-x) + 2a_2x^2\left(e^{-x} - 1 + x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right)$

Donc : $\boxed{y(x) = a_0(1-x) + 2a_2x^2\left(e^{-x} - 1 + x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right)}$

7°)$x^2y'' - x(x+6)y' + 3(x+4)y = 0$; On a : $y = \sum_{n\geq 0} a_nx^n$; $y' = \sum_{n\geq 0} na_nx^{n-1}$ *et*

$y'' = \sum_{n\geq 0} n(n-1)a_nx^{n-2}$. Posons $\boldsymbol{\varepsilon}(x) = x^2y'' - x(x+6)y' + 3(x+4)y$.

$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = x^2\sum_{n\geq 0} n(n-1)a_nx^{n-2} - x(x+6)\sum_{n\geq 0} na_nx^{n-1} + 3(x+4)\sum_{n\geq 0} a_nx^n$

$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = \sum_{n\geq 0} n(n-1)a_nx^n - \sum_{n\geq 0} na_nx^{n+1} - \sum_{n\geq 0} 6na_nx^n + \sum_{n\geq 0} 3a_nx^{n+1} +$

$\sum_{n\geq 0} 12a_nx^n$.

$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = \sum_{n\geq 0}[n(n-1) - 6n + 12]a_nx^n + \sum_{n\geq 0}(3-n)\,a_nx^{n+1}$

$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = \sum_{n\geq 0}(n-3)(n-4)a_nx^n - \sum_{n\geq 0}(n-3)\,a_nx^{n+1}$. Posons : p=n+1→n=p-1, alors

$\boxed{\sum_{n\geq 0}(n-3)\,a_nx^{n+1} = \sum_{p\geq 1}(p-4)a_{p-1}x^p}$ Car la variable est muette (n=p) alors :

$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = \sum_{n\geq 0}[(n-3)(n-4)a_n - (n-4)a_{n-1}]x^n$. Comme la série $\boldsymbol{\varepsilon}(x)$ est la série nulle, alors tous ses coefficients sont nuls.

- Si n=4, alors l'égalité est vraie.

- Si $1 \leq n \leq 3$; alors : $\begin{cases} 6a_1 + 3a_0 = 0 \\ 2a_2 + 2a_1 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} 2a_1 = -a_0 \\ a_2 = -a_1 \end{cases} \to a_0 = a_1 = a_2 = 0$

- Si $n \geq 5$; alors : $(n-3)a_n = a_{n-1} \to a_n = \frac{1}{n-3}a_{n-1}$ et $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n-1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} n-3 = +\infty$.

$\boxed{\text{Donc R}=+\infty}$. Alors tous les calculs précédents sont valables dans IR tout entier et les coefficients se calculent en fonction de a_4 et ils ne sont pas tous nuls si $a_4 \neq 0$.

$$\left.\begin{array}{l} a_5 = \frac{a_4}{2} \\ a_6 = \frac{a_5}{3} \\ \vdots \\ a_n = \frac{a_{n-1}}{n-3} \end{array}\right\} \to a_n = \frac{a_4}{1\times 2\times 3\times\cdots\times(n-3)} \to \boxed{a_n = \frac{a_4}{(n-3)!}}$$. Finalement :

$y(x) = \sum_{n\geq 4} a_4 \frac{x^n}{(n-3)!} = a_4 x^3 \sum_{n\geq 4} \frac{x^{n-3}}{(n-3)!}$, en posant p=n-3, $\sum_{n\geq 4} \frac{x^{n-3}}{(n-3)!} = \sum_{p\geq 1} \frac{x^p}{p!}$ Car la variable est muette (n=p). D'où : $y(x) = a_4 x^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$=$a_4 x^3 (e^x - 1)$.

Donc : $y(x) = a_4 x^3 (e^x - 1)$

8°)$x^2(1+x)y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0$; On a : $y = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$; $y' = \sum_{n\geq 0} n a_n x^{n-1}$ et $y'' = \sum_{n\geq 0} n(n-1) a_n x^{n-2}$.Posons $\boldsymbol{\varepsilon}(x) = x^2(1+x)y'' - x(x+2)y' + (x+2)y$

$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = x^2(1+x)\sum_{n\geq 0} n(n-1)a_n x^{n-2} - x(x+2)\sum_{n\geq 0} n a_n x^{n-1} + (x+2)\sum_{n\geq 0} a_n x^n$

$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = \sum_{n\geq 0} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n\geq 0} n(n-1)a_n x^{n+1} - \sum_{n\geq 0} n a_n x^{n+1} - \sum_{n\geq 0} 2n a_n x^n + \sum_{n\geq 0} a_n x^{n+1} + \sum_{n\geq 0} 2a_n x^n$

$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = \sum_{n\geq 0}[n(n-1) - n + 1]\, a_n x^{n+1} + \sum_{n\geq 0}[n(n-1) - 2n + 2]\, a_n x^n$

$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = \sum_{n\geq 0}(n-1)^2 a_n x^{n+1} + \sum_{n\geq 0}(n-1)(n-2)a_n x^n$.

Posons : $p = n+1 \to n = p-1$ et $$\boxed{\sum_{n\geq 0}(n-1)^2 a_n x^{n+1} = \sum_{p\geq 1}(p-2)^2 a_{p-1} x^p}$$ puisque la variable est muette (n=p).

$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = \sum_{n\geq 1}(n-2)^2 a_{n-1} x^n + \sum_{n\geq 0}(n-1)(n-2)a_n x^n$

$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = \sum_{n\geq 1}[(n-2)^2 a_{n-1} + (n-1)(n-2)a_n]x^n + 2a_0$

Comme la série $\boldsymbol{\varepsilon}(x)$ est la série nulle, alors tous ses coefficients sont nuls. Donc :

$a_0 = 0$ et ∀ n≥1 ; $(n-2)^2 a_{n-1} + (n-1)(n-2)a_n = 0$

•Si $n = 2$, alors l'égalité est vraie

•∀ $n \geq 3$, $(n-2)a_{n-1} + (n-1)a_n = 0 \to a_n = -\frac{n-2}{n-1}a_{n-1} \to \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n-1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n-2} = 1$

Donc : R=1 . Alors tous les calculs précédents sont valables sur $]-1;1[$ et les coefficients se calculent en fonction de a_2 qui ne sont pas sont pas tous nuls si a_2≠0.

$$a_n = -\frac{n-2}{n-1}a_{n-1}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_3 = -\frac{a_2}{2} \\ a_4 = -\frac{2a_3}{3} \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_n = -\frac{(n-2)a_{n-1}}{(n-1)} \end{array}\right\} \to a_n = (-1)^{n-2} \frac{1\times2\times3\times\cdots\times(n-2)a_2}{1\times2\times3\times\cdots\times(n-2)\times(n-1)} \to \boxed{a_n = \frac{(-1)^n}{n-1} a_2}$$

Finalement $y(x) = a_2 \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n-1} = a_2 x \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n-1}}{n-1}$. Posons $p = n-1$

$\to n = p+1$ et $\boxed{\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n-1}}{n-1} = \sum_{p=1}^{\infty}(-1)^{p+1}\frac{x^p}{p}}$ Comme la variable est muette (n=p),

$y(x) = a_2 x \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} \to \boxed{y(x) = a_2 x ln(1+x)\ ;\forall\ x \epsilon\ ]-1;1[}$

9°) $(x^2+x)y'' + (x-2)y' - 4y = 0$; On a : $y = \sum_{n\geq0} a_n x^n$; $y' = \sum_{n\geq0} n a_n x^{n-1}$

$y'' = \sum_{n\geq0} n(n-1)a_n x^{n-2}$. Posons : $\boldsymbol{\varepsilon}(x) = (x^2+x)y'' + (x-2)y' - 4y$

$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = (x^2+x)\sum_{n\geq0} n(n-1)a_n x^{n-2} + (x-2)\sum_{n\geq0} n a_n x^{n-1} - 4\sum_{n\geq0} a_n x^n$

$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = \sum_{n\geq0} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n\geq0} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n\geq0} n a_n x^n - \sum_{n\geq0} 2n a_n x^{n-1} - \sum_{n\geq0} 4a_n x^n$

$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = \sum_{n\geq0}[n(n-1)+n-4]a_n x^n + \sum_{n\geq0}[n(n-1)-2n]a_n n^{n-1}$

$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = \sum_{n\geq0}(n-2)(n+2)a_n x^n + \sum_{n\geq0} n(n-3)a_n x^{n-1}$. Posons :$p = n-1$

$\to n = p+1$ et $\boxed{\sum_{n\geq1} n(n-3)a_n x^{n-1} = \sum_{p\geq0}(p+1)(p-2)a_{p+1}x^p}$ comme la variable est muette (n=p)

$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = \sum_{n\geq0}(n-2)(n+2)a_n x^n + \sum_{n\geq0}(n+1)(n-2)a_{n+1}x^n$

$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = \sum_{n\geq0}[(n-2)(n+2)a_n + (n+1)(n-2)a_{n+1}]\, x^n$

Comme la série $\boldsymbol{\varepsilon}(x)$ est la série nulle, alors tous ses coefficients sont nuls.

•Si $n = 2$, alors l'égalité est vraie

•Si $0\leq n \leq 1$, alors $\begin{cases} 2a_0 + a_1 = 0 \\ 3a_1 + 2a_2 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} a_1 = -2a_0 \\ 2a_2 = -3a_1 \end{cases}$

•Si $n \geq 3$, alors $(n+2)a_n + (n+1)a_{n+1} = 0 \to a_{n+1} = -\frac{n+2}{n+1}a_n \to \lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}$

$\boxed{\text{Donc : R=1}}$. Alors tous les calculs précédents sont valables sur $]-1;1[$ et les coefficients se calculent en fonction de a_3 qui ne sont pas sont pas tous nuls si $a_3 \neq 0$.

$$a_{n+1} = -\frac{n+2}{n+1}a_n$$

$$\left.\begin{array}{l} a_4 = -\frac{5a_3}{4} \\ a_5 = -\frac{6a_4}{5} \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_n = -\frac{(n+1)a_{n-1}}{n} \end{array}\right\} \to a_n = (-1)^{n-3}\frac{5\times6\times7\times\cdots\times n\times(n+1)a_3}{4\times5\times6\times7\times\cdots\times n} \to \boxed{a_n = \frac{(-1)^{n-1}(n+1)a_3}{4}}$$

Finalement $y(x) = a_0 - 2a_0x + 3a_0x^2 + \frac{a_3}{4}\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+1)x^n$

Posons : $u'(x) = \sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+1)x^n$ la dérivée de $u(x)$

Avec $u(x) = \sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{n+1}$ et en prenant $p = n+1 \to n = p-1$

D'où $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{n+1} = \sum_{p=4}^{\infty}(-1)^p x^p \to \boxed{u(x) = \sum_{n=4}^{\infty}(-1)^n x^n}$ car la variable est muette (n=p).

$Or \;\; u(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x - x^2 + x^3 \;\to u'^{(x)} = 1 - 2x + 3x^2 - \frac{1}{(1+x)^2}$

Ainsi : $y(x) = a_0(1 - 2x + 3x^2) + \frac{a_3}{4}\left(1 - 2x + 3x^2 - \frac{1}{(1+x)^2}\right)$

$y(x) = \left(a_0 + \frac{a_3}{4}\right)(1 - 2x + 3x^2) - \frac{a_3}{4}\left(\frac{1}{(1+x)^2}\right)$. Posons : A=$a_0 + \frac{a_3}{4}$ et B=$\frac{a_3}{4}$

Donc : $y(x) = \mathrm{A}(1 - 2x + 3x^2) - \frac{\mathrm{B}}{(1+x)^2}$

10°) $(x^2 + x)y'' + (3x+1)y' + y = \frac{1+x}{(1-x)^3}$; On a : $y = \sum_{n\geq0} a_n x^n$; $y' = \sum_{n\geq0} na_n x^{n-1}$

$y'' = \sum_{n\geq0} n(n-1)a_n x^{n-2}$. Posons : $\boldsymbol{\varepsilon}(x) = (x^2+x)y'' + (3x+1)y' + y$

$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = (x^2+x)\sum_{n\geq0} n(n-1)a_n x^{n-2} + (3x+1)\sum_{n\geq0} na_n x^{n-1} + \sum_{n\geq0} a_n x^n$

$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = \sum_{n\geq0} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n\geq0} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n\geq0} 3na_n x^n + \sum_{n\geq0} na_n x^{n-1} + \sum_{n\geq0} a_n x^n$

$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = \sum_{n\geq0}[n(n-1) + 3n + 1]a_n x^n + \sum_{n\geq0}[n(n-1) + n]\, a_n x^{n-1}$

$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = \sum_{n\geq0}(n+1)^2 a_n x^n + \sum_{n\geq1} n^2\, a_n x^{n-1}$. Posons : $n = p+1 \to p = n-1$

Et $\boxed{\sum_{n\geq1} n^2\, a_n x^{n-1} = \sum_{p\geq0}(p+1)^2\, a_{p+1}x^p}$ comme la variable est muette (n=p), alors

$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = \sum_{n\geq0}(n+1)^2 a_n x^n + \sum_{n\geq0}(n+1)^2 a_{n+1}x^n$

$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = \sum_{n\geq0}[(n+1)^2 a_n + (n+1)^2 a_{n+1}]x^n$.

$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = \sum_{n\geq0}(n+1)^2(a_n + a_{n+1})\, x^n$. Puisque $\varepsilon_1(x) = \frac{1+x}{(1-x)^3}$ et que :

$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$; $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$; $\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}$

$\frac{1+x}{(1-x)^3} = \frac{1}{2}[(1+x)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}] = \frac{1}{2}[\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-1}]$

En posant $p = n-2 \to n = p+2$ et $\boxed{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \sum_{p=0}^{\infty} (p+2)(p+1)x^p}$

$\boxed{\text{Et } \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-1} = \sum_{m=1}^{\infty} m(m+1)x^m}$

En posant m=$n-1 \to n = m+1$.
Comme les variables sont muettes (n=p) et (n=m).

$\to \varepsilon_1(x) = \frac{1}{2}[\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)x^n]$

$\to \varepsilon_1(x) = \frac{1}{2}[\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1)(n+1)x^n]=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2x^n$ avec le rayon convergence $\boxed{R=1}$

Comme les séries $\boldsymbol{\varepsilon}(x)$ et $\varepsilon_1(x)$ sont égales (équivalentes), alors les coefficients des monômes de même degré sont égaux. Autrement dit $\boldsymbol{\varepsilon}(x) = \varepsilon_1(x)$

$\to \sum_{n\geq 0}(n+1)^2(a_n + a_{n+1})\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2x^n$

$\to \begin{cases} a_n + a_{n+1} = 1 \\ a_{n-1} + a_n = 1 \end{cases}$ $\to a_{n+1} - a_{n-1} = 0 \to a_{n+1} = a_{n-1}$. Donc : $\forall p \geq 0$; $a_{2p} = a_0$
et $a_{2p+1} = a_1 = 1 - a_0$. Réciproquement ces égalités impliquent bien que $\forall n \geq 0$

$a_n + a_{n+1} = 1$.

Finalement : $y(x) = y(x)_{paire} + y(x)_{impaire} = \sum_{p=0}^{\infty} a_{2p}x^{2p} + \sum_{p=0}^{\infty} a_{2p+1}x^{2p+1}$

$$y(x) = a_0 \sum_{p=0}^{\infty} x^{2p} + (1-a_0)\sum_{p=0}^{\infty} x^{2p+1} = \frac{a_0}{1-x^2} + \frac{(1-a_0)x}{1-x^2}$$

$$\boxed{\text{Donc : } y(x) = \frac{x}{1-x^2} + \frac{a_0}{1+x}}$$