CALCUL D'INTEGRALES AVEC LE THEOREME DES RESIDUS

Exercice 01 : Calculer les intégrales suivantes par la méthode des Résidus.

$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$; $B = \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6}$; $C = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$; $D = \int_{0}^{2\pi} \frac{dx}{3-\cos x}$; $E = \int_{0}^{2\pi} \frac{dx}{2+\cos x}$;

$F = \int_{0}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$; $G = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$; $H = \int_{0}^{+\infty} \frac{x^2}{(4+x^2)^2} dx.$

Solution 01 : 1°) Calcul de $= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$.

Soit $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$; $\forall\, x \epsilon R$ et soit $(z) = \frac{1}{1+z^4}$. F est une extension holomorphe de f dans $C\backslash\{z_0, z_1, z_2, z_3\}$ et $\lim_{|z|\to+\infty}(z-p)F(z) = 0$; $(p = 0)$.

Or par définition : $z^\alpha = -1 \to z_k = e^{i(\frac{\pi}{\alpha}+\frac{2k\pi}{\alpha})}$ où $0 \le k \le \alpha - 1$.

Ainsi : $z_0 = e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

$$z_1 = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)} = e^{i(\frac{\pi}{4})} . e^{i(\frac{\pi}{2})} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i).i = \frac{\sqrt{2}}{2}(i-1)$$

$$z_2 = e^{i(\frac{\pi}{4}+\pi)} = e^{i(\frac{\pi}{4})} . e^{i\pi} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)$$

$$z_3 = e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{2})} = e^{i(\frac{\pi}{4})} . e^{i\pi} . e^{i(\frac{\pi}{2})} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)i = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$$

$\left.\begin{matrix} z_0, z_1\, \epsilon \mathbb{H}^+ \\ z_0, z_1 \epsilon Int(\mathbb{\Gamma}) \end{matrix}\right\} \to z_0, z_1\, \epsilon Int(\mathbb{\Gamma}) \cap \mathbb{H}^+$. D'où: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i(Rés(F, z_0) + Rés(F, z_1))$

$$Rés(F, z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)F(z) = \frac{1}{(z_0-z_1)(z_0-z_2)(z_0-z_3)}$$

$$z_0 - z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i-i+1) = \sqrt{2}$$

$$z_0 - z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i+1+i) = \sqrt{2}(1+i)$$

$$z_0 - z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i+i-1) = i\sqrt{2}$$

$$Rés(F, z_0) = \frac{1}{\sqrt{2}(i\sqrt{2})\sqrt{2}(1+i)} = \frac{1}{2i}\frac{1}{\sqrt{2}(1+i)} = \frac{1}{2i}\frac{1-i}{2\sqrt{2}} .$$

$\to 2\pi i Rés(F, z_0) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}(1-i)$ (1)

$$Rés(F, z_1) = \lim_{z\to z_1}(z-z_1)F(z) = \frac{1}{(z_1-z_0)(z_1-z_2)(z_1-z_3)}$$

$$z_1 - z_0 = -\sqrt{2}$$

$$z_1 - z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(i - 1 + 1 + i) = i\sqrt{2}$$

$$z_1 - z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(i - 1 + i - 1) = \sqrt{2}(i - 1)$$

$Rés(F, z_1) = \frac{1}{(-\sqrt{2})(i\sqrt{2})\sqrt{2}(i-1)} = \frac{1}{2i}\frac{i+1}{2\sqrt{2}}$.

$\rightarrow 2\pi i Rés(F, z_1) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}(1 + i)$ (2). Par suite (1) et (2) entrainent d'après le Théorème des Résidus : $2\pi i(Rés(F, z_0) + Rés(F, z_1)) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}(1 - i + 1 + i) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

$$\boxed{\text{Donc : } A = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}}$$

2°) Calcul de $B = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6}$.

Soit $f(x) = \frac{1}{1+x^6}$; $\forall\, x \epsilon R$ et soit $(z) = \frac{1}{1+z^6}$. F est une extension holomorphe f de $C \backslash \{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4; z_5\}$ et $\lim_{|z| \to +\infty}(z - p)F(z) = 0$; $(p = 0)$.

Or par définition : $z^\alpha = -1 \rightarrow z_k = e^{i(\frac{\pi}{\alpha} + \frac{2k\pi}{\alpha})}$ où $0 \leq k \leq \alpha - 1$

Ainsi : $z_0 = e^{i(\frac{\pi}{6})} = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)$

$$z_1 = e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{6})} = e^{i(\frac{3\pi}{6})} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

$$z_2 = e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{6})} = e^{i(\frac{5\pi}{6})} = e^{i\pi}.e^{i(\frac{-\pi}{6})} = -\frac{1}{2}(\sqrt{3} - i)$$

$$z_3 = e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{6\pi}{6})} = e^{i\pi}.e^{i(\frac{\pi}{6})} = -\frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)$$

$$z_4 = e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{8\pi}{6})} = e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{6\pi}{6} + \frac{2\pi}{6})} = e^{i\pi}.e^{i(\frac{\pi}{6})}.e^{i(\frac{\pi}{3})} = -\frac{1}{2}(\sqrt{3} + i) \times \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$$

$$z_4 = \frac{1}{4}(-\sqrt{3} - 3i - i + \sqrt{3}) = \frac{1}{4}(-4i) = -i$$

$$z_5 = e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{10\pi}{6})} = e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{12\pi}{6} - \frac{2\pi}{6})} = e^{i2\pi}.e^{i(\frac{\pi}{6})}.e^{i(-\frac{\pi}{3})} = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i) \times \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})$$

$$z_5 = \frac{1}{4}(\sqrt{3} - 3i + i + \sqrt{3}) = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - i)$$

Comme $z_0, z_2 \,\epsilon\, Int(\Gamma) \cap \mathbb{H}^+$ alors $Ind_\Gamma(z_0) \neq 0$ $et Ind_\Gamma(z_2) \neq 0$. Ainsi donc :

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i[Rés(F, z_0) + Rés(F, z_2)]$$

Or $Rés(F, z_0) = \lim_{z \to z_0}(z - z_0)F(z) = \frac{1}{(z_0 - z_1)(z_0 - z_2)(z_0 - z_3)(z_0 - z_4)(z_0 - z_5)}$

$$z_0 - z_1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + i - 2i\right) = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - i)$$

$$z_0 - z_2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + i + \sqrt{3} - i\right) = \sqrt{3}$$

$$z_0 - z_3 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + i + \sqrt{3} + i\right) = \sqrt{3} + i$$

$$z_0 - z_4 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + i + 2i\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + 3i\right)$$

$$z_0 - z_5 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + i - \sqrt{3} + i\right) = i$$

$$Rés(F, z_0) = \frac{1}{\frac{1}{2}(\sqrt{3} - i)(\sqrt{3})(\sqrt{3} + i)\frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + 3i\right)(i)} = \frac{4}{(3+1)(3)\left(1 + i\sqrt{3}\right)i} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{3i(1+3)}$$

$$Rés(F, z_0) = \frac{1 - i\sqrt{3}}{(2i)6} \rightarrow 2\pi i Rés(F, z_0) = \frac{\pi}{6}\left(1 - i\sqrt{3}\right)\ (1)$$

$$Rés(F, z_2) = \frac{1}{(z_2 - z_0)(z_2 - z_1)(z_2 - z_3)(z_2 - z_4)(z_2 - z_5)}$$

$$z_2 - z_0 = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{3} + i - \sqrt{3} - i\right) = -\sqrt{3}$$

$$z_2 - z_1 = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{3} + i - 2i\right) = \frac{1}{2}(-\sqrt{3} - i)$$

$$z_2 - z_3 = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{3} + i + \sqrt{3} + i\right) = i$$

$$z_2 - z_4 = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{3} + i + 2i\right) = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{3} + 3i\right)$$

$$z_2 - z_5 = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{3} + i - \sqrt{3} + i\right) = -\sqrt{3} + i$$

$$Rés(F, z_2) = \frac{1}{(-\sqrt{3})\frac{1}{2}(-\sqrt{3} - i)(i)\frac{1}{2}\left(-\sqrt{3} + 3i\right)(-\sqrt{3} + i)} = \frac{4}{(\sqrt{3})i(-\sqrt{3} + 3i)(-4)}$$

$$Rés(F, z_2) = \frac{1}{3j(1 - i\sqrt{3})} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{3i(4)} = \frac{1}{2i}\frac{1 + i\sqrt{3}}{6} \rightarrow 2\pi i Rés(F, z_2) = \frac{\pi}{6}\left(1 + i\sqrt{3}\right)\ (2)$$

Par suite (1) et (2) entrainent d'après le Théorème des Résidus :

$$2\pi i(Rés(F, z_0) + Rés(F, z_2)) = \frac{\pi}{6}\left(1 - i\sqrt{3} + 1 + i\sqrt{3}\right)$$

$$\boxed{Donc: B = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^6} = \frac{\pi}{3}}$$

3°) Calcul de $C = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$.

Soit $f(x) = \frac{1}{1+x^3}$; $\forall\, x \epsilon R$ et soit $(z) = \frac{1}{1+z^3}$. F est une extension holomorphe de f dans $C \backslash \{z_0, z_1, z_2\}$ et $\lim_{|z| \to +\infty} (z-p)F(z) = 0$; $(p = 0)$.

Or par définition : $z^3 = -1 \to z_k = e^{i(\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3})}$ où $0 \le k \le 2$

Ainsi : $z_0 = e^{i(\frac{\pi}{3})} = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$

$$z_1 = e^{i(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3})} = e^{i\pi} = -1$$

$$z_2 = e^{i(\frac{\pi}{3}+\frac{4\pi}{3})} = e^{i(\frac{5\pi}{3})} = e^{i2\pi}.e^{-i(\frac{\pi}{3})} = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})$$

Comme $z_0\ \epsilon\ Int(\mathbb{\Gamma}) \cap \mathbb{H}^+\ alors Ind_{\mathbb{\Gamma}}(z_0) \neq 0$. $z_1\ \epsilon\ \partial D$($z_1\ \epsilon$ au bord du domaine) et $z_2 \epsilon\ Int(\mathbb{\Gamma}) \cap \mathbb{H}^-$ avec $Ind_{\mathbb{\Gamma}}(z_2) \neq 0$. Ainsi donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i[Rés(F, z_0) + Rés(F, z_1) + Rés(F, z_2)]$$

Or $Rés(F, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)F(z) = \frac{1}{(z_0-z_1)(z_0-z_2)} = \frac{1}{\frac{1}{2}(3+i\sqrt{3})(i\sqrt{3})} = \frac{2}{i(\sqrt{3})^2(\sqrt{3}+i)}$

$Rés(F, z_0) = \frac{\sqrt{3}-i}{i(3)(2)} \to 2\pi i Rés(F, z_0) = \frac{\pi}{3}(\sqrt{3} - i)$ (1).

Et $Rés(F, z_1) = \lim_{z \to z_1} (z - z_1)F(z) = \frac{1}{(z_1-z_0)(z_1-z_2)} = \frac{1}{-\frac{1}{2}(3+i\sqrt{3})\frac{1}{2}(-3+i\sqrt{3})} = \frac{4}{(3+i\sqrt{3})(3-i\sqrt{3})}$

$\to 2\pi i Rés(F, z_1) = \frac{2\pi i}{3}$ (2).

$Rés(F, z_2) = \lim_{z \to z_2} (z - z_2)F(z) = \frac{1}{(z_2-z_0)(z_2-z_1)} = \frac{1}{(-i\sqrt{3})\frac{1}{2}(3-i\sqrt{3})} = -\frac{2(\sqrt{3}+i)}{(3i)(4)} = -\frac{(\sqrt{3}+i)}{(2i)(3)}$

$\to 2\pi i Rés(F, z_2) = -\frac{\pi}{3}(\sqrt{3} + i)$ (3).

Par suite (1) et (2) entrainent d'après le Théorème des Résidus :

$2\pi i \sum_{k=0}^{2} Rés(F, z_k) = \frac{\pi}{3}(\sqrt{3} - i + 2i - \sqrt{3} - i)$

$2\pi i \sum_{k=0}^{2} Rés(F, z_k) = 0$.

$$Donc: C = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} = 0$$

3°) Calcul de $D = \int_{0}^{2\pi} \frac{dx}{3-\cos x}$. Soit $\cos x = \frac{z+\bar{z}}{2}$; en posant $z = e^{ix} \to dz = izdx$

$\to dx = \frac{1}{iz}dz$. Ainsi :$\frac{1}{3-\cos x} = \frac{1}{3-\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})} \to \frac{dx}{3-\cos x} = \frac{dz}{3-\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})} \times \frac{1}{iz}$.

Soit alors : $F(z) = \frac{1}{3-\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})} \times \frac{1}{iz} = \frac{2iz}{2iz(3-\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}))} \times \frac{1}{iz}$ $\quad \rightarrow F(z) = \frac{2}{i(6z-z^2-1)}$

$\Delta = 8$ et $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2}$. D'où $z_1 = \frac{-3-2\sqrt{2}}{-1} = 3+2\sqrt{2} \,\epsilon\, \mathbb{H}^+ \, et \, z_1 \notin Int(\mathbb{\Gamma})$ tandis que $z_2 = \frac{-3+2\sqrt{2}}{-1} = 3-2\sqrt{2} \,\epsilon\, Int(\mathbb{\Gamma}) \cap \mathbb{H}^+ \rightarrow Ind_{\mathbb{\Gamma}}(z_2) \neq 0.$

Alors d'après le Théorème des Résidus : $\int_{\mathbb{\Gamma}} F(z)dz = 2\pi i Rés(F, z_2)$.

Comme $Rés(F, z_2) = \lim_{z \to z_2}(z-z_2)F(z) = \frac{2}{-i(z_2-z_1)} = \frac{2}{i(z_1-z_2)} = \frac{2}{i(4\sqrt{2})} = \frac{1}{(2i)\sqrt{2}}$

$\rightarrow \; 2\pi i Rés(F, z_2) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \rightarrow \int_{\mathbb{\Gamma}} F(z)dz = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

Donc : $D = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{3-\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

4°) Calcul de $E = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\cos x}$. Soit $\cos x = \frac{z+\bar{z}}{2}$; en posant $z = e^{ix} \rightarrow dz = izdx$

$\rightarrow dx = \frac{1}{iz} dz$. Ainsi : $\frac{1}{2+\cos x} = \frac{1}{2+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)} \rightarrow \frac{dx}{2+\cos x} = \frac{dz}{2+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)} \times \frac{1}{iz}$.

Soit alors : $F(z) = \frac{1}{2+\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})} \times \frac{1}{iz} = \frac{2iz}{2iz(2+\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}))} \times \frac{1}{iz}$ $\quad \rightarrow F(z) = \frac{2}{i(4z+z^2+1)}$

$\Delta' = 3$ et $\sqrt{\Delta'} = \sqrt{3}$. D'où $z_1 = -2-\sqrt{3} \,\epsilon\, \mathbb{H}^+ \, et \, z_1 \notin Int(\mathbb{\Gamma}) \; \rightarrow Ind_{\mathbb{\Gamma}}(z_1) = 0$ tandis que $z_2 = -2+\sqrt{3} \,\epsilon\, Int(\mathbb{\Gamma}) \cap \mathbb{H}^+ \rightarrow Ind_{\mathbb{\Gamma}}(z_2) \neq 0.$

Alors d'après le Théorème des Résidus : $\int_{\mathbb{\Gamma}} F(z)dz = 2\pi i Rés(F, z_2)$.

Comme $Rés(F, z_2) = \lim_{z \to z_2}(z-z_2)F(z) = \frac{2}{i(z_2-z_1)} = \frac{2}{i(2\sqrt{3})} = \frac{1}{i\sqrt{3}}$

$\rightarrow \; 2\pi i Rés(F, z_2) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$. D'où $\int_{\mathbb{\Gamma}} F(z)dz = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ et

$Donc: E = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\cos x} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

5°) Calcul de $F = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$. Soit $f(x) = \frac{\cos x}{1+x^4}$; $\forall \, x \epsilon R$. Comme la fonction f est paire, alors $F = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} Re\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx\right)$. La fonction ρ: $z \rightarrow \frac{e^{iz}}{1+z^2}$ est une extension holomorphe de f dans $C \backslash \{z_0, z_1\}$ car $1+z^2 = 0 \rightarrow z_0 = i$ et $z_1 = -i$. Puisque $z_0 \epsilon \, \mathbb{H}^+$ et $z_1 \notin \; \mathbb{H}^+$, alors d'après le Théorème des Résidus : $\int_{\mathbb{\Gamma}} \rho(z)dz = 2\pi i Rés(\rho, z_0)$

$Rés(\rho, z_0) = \lim_{z \to z_0}(z-z_0)\rho(z) = \frac{e^{iz_0}}{(z_0-z_1)} = \frac{e^{-1}}{2i} \rightarrow 2iRés(\rho, z_0) = \pi e^{-1}$.

D'où $\int_{\mathbb{\Gamma}} \rho(z)dz = \pi e^{-1}$ et $F = \frac{1}{2}(\pi e^{-1})$.

Donc : $F = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2e}$

6°) Calcul de $G = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$. Soit $F(z) = \frac{1}{z^2+2z+2}$. $\Delta' = -1 = i^2 \rightarrow \sqrt{\Delta'} = i$

D'où $z_0 = -1 - i$ et $z_1 = -1 + i$. Soit $f(x) = \frac{1}{x^2+2x+2}$. $Alors\ F$ est une extension holomorphe de f dans $C\backslash\{z_0, z_1\}$ et $\lim_{|z|\to+\infty}(z-p)F(z) = 0$; $(p = 0)$. Comme $z_0 \notin \mathbb{H}^+$ et $z_1 \epsilon\ \mathbb{H}^+$, alors d'après le Théorème des Résidus : $\int_{\mathbb{\Gamma}} \mathrm{F}(z)dz = 2\pi i Rés(\mathrm{F}, z_1)$.

Or : $Rés(\mathrm{F}, z_1) = \lim_{z\to z_1}(z-z_1)F(z) = \frac{1}{(z_1-z_0)} = \frac{1}{2i} \to 2i\pi Rés(\mathrm{F}, z_1) = \pi$ et $\int_{\mathbb{\Gamma}} \mathrm{F}(z)dz = \pi$.

$$\boxed{\text{Donc : } G = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \pi}$$

7°) Calcul de $H = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(4+x^2)^2} dx$.

Soit $F(z) = \frac{z^2}{(4+z^2)^2} = \frac{z^2}{[(z-z_0)(z-z_1)]^2} = \frac{z^2}{(z-z_0)^2(z-z_1)^2}$ où $z_0 = -2i$ et $z_1 = 2i$.

Soit $f(x) = \frac{x^2}{(4+x^2)^2}$. F est une extension holomorphe de f dans $C\backslash\{z_0, z_1\}$ et $\lim_{|z|\to+\infty}(z-p)F(z) = 0$; $(p = 0)$. On a que : z_0 et z_1 sont des zéros d'ordre 2. Comme $z_1 \epsilon\ \mathbb{H}^+$ et $z_0 \notin\ \mathbb{H}^+$. Ainsi par le Théorème des Résidus nous avons :

$$\int_{\mathbb{\Gamma}} \mathrm{F}(z)dz = 2\pi i Rés(\mathrm{F}, z_1)$$

$$Rés(\mathrm{F}, z_1) = \frac{1}{(2-1)!} F^{(2-1)}(z) = F'(z_1) \to Rés(\mathrm{F}, z_1) = \frac{d}{dz}\left[\frac{z^2}{(z-z_0)^2}\right]\Big|_{z=z_1}$$

$$Rés(\mathrm{F}, z_1) = \left[\frac{2z(z-z_0)^2 - 2z^2(z-z_0)}{(z-z_0)^4}\right]\Big|_{z=z_1}$$

$$Rés(\mathrm{F}, z_1) = \left[\frac{2z(z-z_0)^2}{(z-z_0)^4}\right]\Big|_{z=z_1} - \left[\frac{2z^2(z-z_0)}{(z-z_0)^4}\right]\Big|_{z=z_1}$$

$$Rés(\mathrm{F}, z_1) = \frac{2z_1}{(z_1-z_0)^2} - \frac{2{z_1}^2}{(z_1-z_0)^3} = \frac{2(2i)}{(4i)^2} - \frac{2(2i)^2}{(4i)^3}$$

$$Rés(\mathrm{F}, z_1) = \frac{1}{4i} - \frac{2(2i)^2}{2^3(2i)^3} = \frac{1}{4i} - \frac{1}{4\times(2i)}$$

$Rés(\mathrm{F}, z_1) = \frac{2-1}{8i} = \frac{1}{8i} \to 2\pi i Rés(\mathrm{F}, z_1) = \frac{\pi}{4}$. D'où $\int_{\mathbb{\Gamma}} \mathrm{F}(z)dz = \frac{\pi}{4}$.

Et $$\boxed{\text{Donc : } H = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(4+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{4}}$$