Devoir Maison №1

Semmad Mohamed, Ecole Nationale Polytechnique 15/04/2020

Problème

Pour le problème 2D dans le plan de dimension LxH = 60 mm x 90 mm et en régime permanent, l'équation de conduction de chaleur est donnée par :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \qquad 0 \leq x \leq L \qquad 0 \leq y \leq H$$
$$T(0, y) = T_1 \qquad T(L, y) = T_1$$
$$T(x, 0) = T_1 \qquad T(x, H) = T_2$$
$$T_1 = 50°C \qquad T_2 = 100°C \qquad H = 90mm \qquad L = 60mm$$

0.1 la distribution de température par la méthode des différence finis

1. en considérant les maillages suivants : 4x6, 8x12, et 16x24
2. en appliquant le bilant d'énergie on obtient pour chaque noeud d'équation suivante :

$$T_{m,n+1} + T_{m,n-1} + T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 4 * T_{m,n}$$

3. on résout le système linéaire obtenue .

on obtient le résultat suivant :

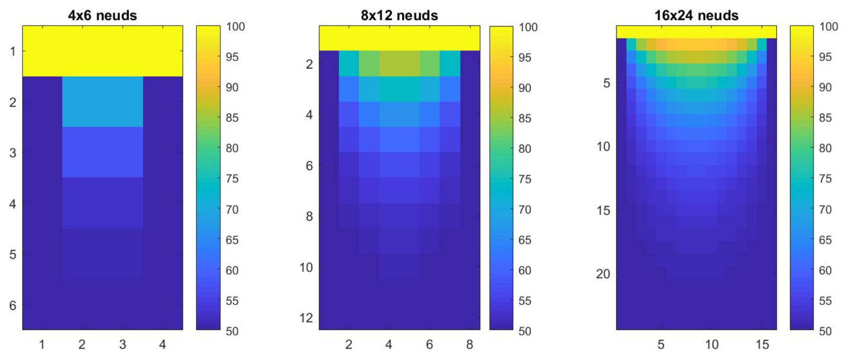

Figure 1 – visualisation du résultat de la méthode des différences finis

On présente ici que la distribution pour le deuxième maillage pour ne pas encombrer le

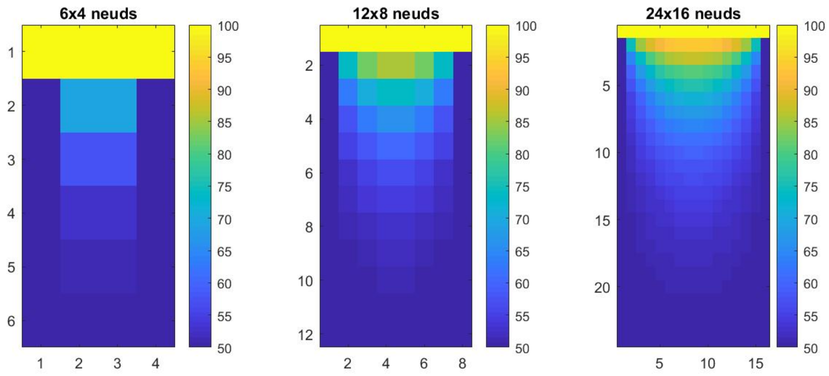

FIGURE 2 – visualisation des résultats analytiques

document,les autre distribution peuvent être obtenue avec le programme Matlab.

$$
,\begin{pmatrix}
100.0 & 100.0 & 100.0 & 100.0 & 100.0 & 100.0 & 100.0 & 100.0 \\
50.0 & 73.9 & 82.5 & 85.5 & 85.5 & 82.5 & 73.9 & 50.0 \\
50.0 & 63.1 & 70.7 & 74.0 & 74.0 & 70.7 & 63.1 & 50.0 \\
50.0 & 57.8 & 63.2 & 65.8 & 65.8 & 63.2 & 57.8 & 50.0 \\
50.0 & 54.8 & 58.4 & 60.3 & 60.3 & 58.4 & 54.8 & 50.0 \\
50.0 & 53.0 & 55.4 & 56.6 & 56.6 & 55.4 & 53.0 & 50.0 \\
50.0 & 51.9 & 53.4 & 54.3 & 54.3 & 53.4 & 51.9 & 50.0 \\
50.0 & 51.2 & 52.2 & 52.7 & 52.7 & 52.2 & 51.2 & 50.0 \\
50.0 & 50.7 & 51.3 & 51.7 & 51.7 & 51.3 & 50.7 & 50.0 \\
50.0 & 50.4 & 50.8 & 51.0 & 51.0 & 50.8 & 50.4 & 50.0 \\
50.0 & 50.2 & 50.3 & 50.4 & 50.4 & 50.3 & 50.2 & 50.0 \\
50.0 & 50.0 & 50.0 & 50.0 & 50.0 & 50.0 & 50.0 & 50.0
\end{pmatrix}'
$$

Listing 1 – Programe MATLAB – Méthode des différences finies.

```
function[tp]=Tdif_fin(k)
%k est la puissance de 2 qui concerne la maillage
%-------------la distribution de temp rature en dans la matrice tp-------------
n=3*2^(k); %nbr des lignes
m=2*2^(k); %nbr des colonnes
T=sym('T',[n,m]) ;
t=1;
T(1,:)=100;
T(:,1)=50;
T(:,m)=50;
T(n,:)=50;
for j=2:1:m-1
     for i=2:1:n-1
        eq(t)=T(i,j+1)+T(i,j-1)+T(i+1,j)+T(i-1,j)-4*T(i,j)==0;
        t=t+1;
    end
```

```
    end
[A,b]= equationsToMatrix(eq,reshape(T(2:n-1,2:m-1),1,[]));
h=A\b;
Temp=reshape(h,n-2,m-2);
Th=ones(1,m);
Tv=ones(n-2,1);
Temp=[100.*Th;[50.*Tv Temp 50.*Tv];50.*Th];
tp=zeros(n,m);
tp(1:end,1:end)=Temp;
imagesc(tp)
colorbar
end
```

0.2 la distribution de température par la méthode analytique

on doit resoudre le système sonne par l'équation de la chaleur précédente,on fait un changement de variable suivant :

$$u = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1}$$

donc on aura le problème suivant :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad 0 \leq x \leq L \qquad 0 \leq y \leq H$$

$$u\left(0, y\right) = 0 \qquad u\left(L, y\right) = 0$$

$$u\left(x, 0\right) = 0 \qquad u\left(x, H\right) = 1$$

on pose donc :

$$u\left(x, y\right) = h\left(x\right)\varphi\left(y\right)$$

on transforme les conditions au limites :

$$h\left(0\right) = 0 \qquad \varphi\left(0\right) = 0 \qquad h\left(H\right) = 0$$

on injectant le produit dans l'équation différentielle,on obtient :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(h\left(x\right)\varphi\left(y\right)\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(h\left(x\right)\varphi\left(y\right)\right) = 0$$

$$\varphi\left(y\right)\frac{d^2 h}{dx^2} + h\left(x\right)\frac{d^2\varphi}{dy^2} = 0$$

$$\frac{1}{h}\frac{d^2 h}{dx^2} = -\frac{1}{\varphi}\frac{d^2\varphi}{dy^2}$$

on remarque que chaque membre de l'équation qui dépend d'une seule variable,donc on peut écrire :

$$\frac{1}{h}\frac{d^2 h}{dx^2} = -\frac{1}{\varphi}\frac{d^2\varphi}{dy^2} = -\lambda$$

donc on a ce système d'équations :

$$\frac{d^2\varphi}{dy^2} - \lambda\varphi = 0 \qquad\qquad \frac{d^2h}{dx^2} + \lambda h = 0$$

$$\varphi(0) = 0 \qquad\qquad h(0) = 0 \qquad h(L) = 0$$

on résout ce système :

lambda= 0

on a donc

$$h(x) = c_1 + c_2 x$$

on vérifie les conditions aux limites :

$$0 = h(0) = c_1$$

$$0 = h(L) = c_2$$

donc c'est une solution triviale.

lambda < 0

donc la solution est de la forme :

$$y(x) = c_1 \cosh\left(\sqrt{-\lambda}\, x\right) + c_2 \sinh\left(\sqrt{-\lambda}\, x\right)$$

on applique les conditions limites :

$$0 = h(0) = c_1 \cosh(0) + c_2 \sinh(0) = c_1 \qquad \Rightarrow \qquad c_1 = 0$$

$$0 = h(L) = c_2 \sinh(L) = \qquad \Rightarrow \qquad c_2 = 0$$

donc c'est une solution triviale.

lambda > 0

donc la solution est de la forme :

$$h(x) = c_1 \cos\left(\sqrt{\lambda}\, x\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\lambda}\, x\right)$$

on vérifie la première condition au limite :

$$0 = h(0) = \ c_1 \qquad \Rightarrow \qquad c_1 = 0$$

on vérifie la deuxième condition au limite :

$$0 = c_2 \sin\left(L\sqrt{\lambda}\right)$$

$$\Rightarrow \sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{L} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

donc on a :

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \qquad h_n(x) = \sin\left(\frac{n\,\pi\, x}{L}\right) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

on résout la seconde équation :

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \varphi = 0$$
$$\varphi(0) = 0$$

on sais que λ est positive donc :

$$\varphi(y) = c_1 \cosh\left(\frac{n\pi\, y}{L}\right) + c_2 \sinh\left(\frac{n\pi\, y}{L}\right)$$

on vérifie la condition au limite :

$$0 = \varphi(0) = c_1$$

on aura donc :

$$\varphi(y) = c_2 \sinh\left(\frac{n\pi\, y}{L}\right)$$

le produit des solutions est donc :

$$u_n(x,y) = B_n \sinh\left(\frac{n\pi\, y}{L}\right) \sin\left(\frac{n\,\pi\, x}{L}\right) \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

on applique le principe de superposition :

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh\left(\frac{n\pi\, y}{L}\right) \sin\left(\frac{n\,\pi\, x}{L}\right)$$

$$B_n = \frac{2}{L \sinh\left(\frac{n\,\pi\, H}{L}\right)} \int_0^L \sin\left(\frac{n\,\pi x}{L}\right) dx \quad n = 1,2,3,\ldots$$

donc la solution de ce problème est :

$$u(x,y) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}+1}{n} \sin\frac{n\pi x}{L} \frac{\sinh n\pi y/L}{sinh n\pi H/L}$$

En substituant par nos valeurs numérique :

$$T(x,y) = 50 + \frac{100}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}+1}{n} \sin\frac{n\pi x}{60} \frac{\sinh n\pi y/60}{sinh 1.5 n\pi}$$
$$Avec : y\ et\ x\ en\ mm \qquad et \qquad T\ en\ °C$$

les résultats obtenue avec la méthode analytique :

la visualisation est dans la deuxième page (pour comparer avec la première méthode)

on présente ici que la distribution pour le deuxième maillage pour ne pas encombrer le document les autre distribution peuvent être obtenue avec le programme Matlab (stocké dan la matrice T).

$$
, \begin{pmatrix}
100.0 & 100.0 & 100.0 & 100.0 & 100.0 & 100.0 & 100.0 & 100.0 \\
50.0 & 74.7 & 83.6 & 86.5 & 86.5 & 83.6 & 74.7 & 50.0 \\
50.0 & 63.4 & 71.7 & 75.1 & 75.1 & 71.7 & 63.4 & 50.0 \\
50.0 & 58.1 & 63.9 & 66.8 & 66.8 & 63.9 & 58.1 & 50.0 \\
50.0 & 55.1 & 59.0 & 61.1 & 61.1 & 59.0 & 55.1 & 50.0 \\
50.0 & 53.3 & 55.8 & 57.2 & 57.2 & 55.8 & 53.3 & 50.0 \\
50.0 & 52.1 & 53.8 & 54.7 & 54.7 & 53.8 & 52.1 & 50.0 \\
50.0 & 51.3 & 52.4 & 53.0 & 53.0 & 52.4 & 51.3 & 50.0 \\
50.0 & 50.8 & 51.5 & 51.9 & 51.9 & 51.5 & 50.8 & 50.0 \\
50.0 & 50.5 & 50.9 & 51.1 & 51.1 & 50.9 & 50.5 & 50.0 \\
50.0 & 50.2 & 50.4 & 50.5 & 50.5 & 50.4 & 50.2 & 50.0 \\
50.0 & 50.0 & 50.0 & 50.0 & 50.0 & 50.0 & 50.0 & 50.0
\end{pmatrix}']
$$

Listing 2 – Programe MATLAB – Méthode des analytique.

```
function[T]=tanali(u)% u est la puissance de 2 pour le maillage
%------------------------la distribution de temp rature en dans la matrice ...
    T--------------------
n=3*2^(u); %nmbr de lignes
m=2*2^(u);
Ter=zeros(n,m);
T=zeros(n,m);
T(:,1)=50;
T(:,end)=50;
T(end,:)=50;
hx=(60)/(m-1);
T(1,:)=100;
hy=90/(n-1);

for i=2:1:m-1
    for j=2:1:n-1
        x=60-hx*(i-1);
        y=90-hy*(j-1);
        %h=1;
        %a=100;
       for h=1:1:100
            T(j,i)=T(j,i)+(100/pi)*(((-1)^(h+1)+1)/(h)*
            (sin((h*pi*x)/(60))*(sinh(h*pi*y/60))/(sinh(1.5*h*pi))));

        end
    end
end
T(2:end-1,2:end-1)=T(2:end-1,2:end-1)+50;
subplot(1,3,u)
imagesc(T)
colorbar
```

```
end
```

En comparant les résultats obtenue par les deux méthodes on trouve que la différence entre les distributions de température est :

— pour 6x4 noeuds une erreur inférieure à 2.3 °C

— pour 12x8 noeuds une erreur inférieure à 1.2 °C

— pour 24x16 noeuds une erreur inférieure à 0.7 °C

Donc la méthode des différence finis est précise de plus en plus on augmente le nombre de noeuds.

Dans notre cas on peut dire que pour un maillage de 24x16 on a de bon résultats car une erreur inférieur à 0.7 °C est acceptable.

Listing 3 – Programe MATLAB – programme pour le calcule de l'écart entre les deux méthodes.

```
clear all
clc
p=3;%on examiner l' cart  jusqu    un maillage de (2x3)*2^3
for p=1:1:p
    t1=Tanali(p);
    t2=Tdif_fin(p);
    err=max(max(t1-t2))) %err est la diff rence maximale
end
```