Gröbner-Fächer für lineare Codes

Daniel Rembold

Technische Universität Hamburg Harburg

daniel.rembold@tuhh.de

3. September 2014

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung
2. Mathematische Grundlagen
3. Aufzählen von Gröbner-Fächern
4. Ergebnisse
5. Vorführung
6. Mögliche Verbesserungen & Fazit

Motivation

- Viele Anwendungen der Gröbnerbasen basieren auf Gröbner-Fächer
- Nützlich für Idealzugehörigkeitsproblem und polynomiale Gleichungssysteme
- Kompletter Gröbner-Fächer nicht immer nötig

Motivation

- Viele Anwendungen der Gröbnerbasen basieren auf Gröbner-Fächer
- Nützlich für Idealzugehörigkeitsproblem und polynomiale Gleichungssysteme
- Kompletter Gröbner-Fächer nicht immer nötig

Motivation

- Viele Anwendungen der Gröbnerbasen basieren auf Gröbner-Fächer
- Nützlich für Idealzugehörigkeitsproblem und polynomiale Gleichungssysteme
- Kompletter Gröbner-Fächer nicht immer nötig

Mathematische Grundlagen

Monome

Monom

- Produkt von Variablen über einen endlichen Körper $\mathbb{K}[X_1, X_2, \ldots, X_n]$
- Schreibweise $m = X_1^{u_1} X_2^{u_2} \cdots X_n^{u_n}$ und $u_i \in \mathbb{N}_0$

Grad eines Monoms: $deg(m) = \sum_{i=1}^{n} u_i$.

Monome

Monom

- Produkt von Variablen über einen endlichen Körper $\mathbb{K}[X_1, X_2, \ldots, X_n]$
- Schreibweise $m = X_1^{u_1} X_2^{u_2} \cdots X_n^{u_n}$ und $u_i \in \mathbb{N}_0$

Grad eines Monoms: $deg(m) = \sum_{i=1}^{n} u_i$.

Monome

Monom

- Produkt von Variablen über einen endlichen Körper $\mathbb{K}[X_1, X_2, \ldots, X_n]$
- Schreibweise $m = X_1^{u_1} X_2^{u_2} \cdots X_n^{u_n}$ und $u_i \in \mathbb{N}_0$

Grad eines Monoms: $deg(m) = \sum_{i=1}^{n} u_i$.

Termordnung

Termordnung $>$

- Relation $>$ auf der Menge von allen Monomen in $\mathbb{K}[X_1, X_2, \ldots, X_n]$

Termordnung Beispiele

- Lexikographische Ordnung $>_{lex}$
- Graduiert-lexikographische Ordnung $>_{grlex}$
- Ordnung mit Gewichtsvektor $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n_+$

Termordnung

Termordnung $>$

- Relation $>$ auf der Menge von allen Monomen in $\mathbb{K}[X_1, X_2, \dots, X_n]$

Termordnung Beispiele

- Lexikographische Ordnung $>_{lex}$
- Graduiert-lexikographische Ordnung $>_{grlex}$
- Ordnung mit Gewichtsvektor $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n_+$

Termordnung

Termordnung $>$

- Relation $>$ auf der Menge von allen Monomen in $\mathbb{K}[X_1, X_2, \ldots, X_n]$

Termordnung Beispiele

- Lexikographische Ordnung $>_{lex}$
- Graduiert-lexikographische Ordnung $>_{grlex}$
- Ordnung mit Gewichtsvektor $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n_+$

Termordnung

Termordnung $>$

- Relation $>$ auf der Menge von allen Monomen in $\mathbb{K}[X_1, X_2, \ldots, X_n]$

Termordnung Beispiele

- Lexikographische Ordnung $>_{lex}$
- Graduiert-lexikographische Ordnung $>_{grlex}$
- Ordnung mit Gewichtsvektor $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}_+^n$

Termordnung

Termordnung $>$

- Relation $>$ auf der Menge von allen Monomen in $\mathbb{K}[X_1, X_2, \ldots, X_n]$

Termordnung Beispiele

- Lexikographische Ordnung $>_{lex}$
- Graduiert-lexikographische Ordnung $>_{grlex}$
- Ordnung mit Gewichtsvektor $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}_+^n$

Termordnung

Termordnung $>$

- Relation $>$ auf der Menge von allen Monomen in $\mathbb{K}[X_1, X_2, \dots, X_n]$

Termordnung Beispiele

- Lexikographische Ordnung $>_{lex}$
- Graduiert-lexikographische Ordnung $>_{grlex}$
- Ordnung mit Gewichtsvektor $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}_+^n$

Leitterm

Leitterm $\mathrm{LT}(p)$

- Polynom $p \in \mathbb{K}[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ besitzt Term höchster Ordnung in Bezug auf $>$

Beispiel

Sei $f = x^2 + 3xyz + y^3$

- lex-Order : $f = \underline{x^2} + 3xyz + y^3$
- grlex-Order : $f = \underline{3xyz} + y^3 + x^2$
- $c = (1, 3, 1)$: $f = \underline{y^3} + 3xyz + x^2$

Leitterm

Leitterm $\mathrm{LT}(p)$

- Polynom $p \in \mathbb{K}[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ besitzt Term höchster Ordnung in Bezug auf $>$

Beispiel

Sei $f = x^2 + 3xyz + y^3$

- lex-Order : $f = \underline{x^2} + 3xyz + y^3$
- grlex-Order : $f = \underline{3xyz} + y^3 + x^2$
- $c = (1,3,1)$: $f = \underline{y^3} + 3xyz + x^2$

Leitterm

Leitterm $\mathrm{LT}(p)$

- Polynom $p \in \mathbb{K}[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ besitzt Term höchster Ordnung in Bezug auf $>$

Beispiel

Sei $f = x^2 + 3xyz + y^3$

- lex-Order : $f = \underline{x^2} + 3xyz + y^3$
- grlex-Order : $f = \underline{3xyz} + y^3 + x^2$
- $c = (1, 3, 1)$: $f = \underline{y^3} + 3xyz + x^2$

Leitterm

Leitterm $\mathrm{LT}(p)$

- Polynom $p \in \mathbb{K}[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ besitzt Term höchster Ordnung in Bezug auf $>$

Beispiel

Sei $f = x^2 + 3xyz + y^3$

- lex-Order : $f = \underline{x^2} + 3xyz + y^3$
- grlex-Order : $f = \underline{3xyz} + y^3 + x^2$
- $c = (1, 3, 1)$: $f = \underline{y^3} + 3xyz + x^2$

Leitterm

Leitterm $\mathrm{LT}(p)$

- Polynom $p \in \mathbb{K}[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ besitzt Term höchster Ordnung in Bezug auf $>$

Beispiel

Sei $f = x^2 + 3xyz + y^3$

- lex-Order : $f = \underline{x^2} + 3xyz + y^3$
- grlex-Order : $f = \underline{3xyz} + y^3 + x^2$
- $c = (1, 3, 1)$: $f = \underline{y^3} + 3xyz + x^2$

Leitterm

Leitterm $\mathrm{LT}(p)$

- Polynom $p \in \mathbb{K}[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ besitzt Term höchster Ordnung in Bezug auf $>$

Beispiel

Sei $f = x^2 + 3xyz + y^3$

- lex-Order : $f = \underline{x^2} + 3xyz + y^3$
- grlex-Order : $f = \underline{3xyz} + y^3 + x^2$
- $c = (1, 3, 1)$: $f = \underline{y^3} + 3xyz + x^2$

Ideale

Ideal

- Kollektion von Polynomen $f_1, \ldots, f_s$:

$$\langle f_1, \ldots, f_s \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{s} h_i f_i \mid h_1, \ldots, h_s \in \mathbb{K}\left[X_1, \ldots, X_n\right] \right\}$$

Beispiel

- Sei $I = \langle f_1, f_2 \rangle = \langle x^2 + y, x + y + 1 \rangle$ und $f = x^2 y + x^2 + y^2 + xy + x$
- Es gilt $f = y \cdot f_1 + x \cdot f_2, \; f \in I$

Ideale

Ideal

- Kollektion von Polynomen $f_1, \ldots, f_s$:

$$\langle f_1, \ldots, f_s \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{s} h_i f_i \mid h_1, \ldots, h_s \in \mathbb{K}\left[X_1, \ldots, X_n\right] \right\}$$

Beispiel

- Sei $I = \langle f_1, f_2 \rangle = \langle x^2 + y, x + y + 1 \rangle$ und $f = x^2y + x^2 + y^2 + xy + x$
- Es gilt $f = y \cdot f_1 + x \cdot f_2$, $f \in I$

Ideale

Ideal

- Kollektion von Polynomen $f_1, \ldots, f_s$:

$$\langle f_1, \ldots, f_s \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{s} h_i f_i \mid h_1, \ldots, h_s \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n] \right\}$$

Beispiel

- Sei $I = \langle f_1, f_2 \rangle = \langle x^2 + y, x + y + 1 \rangle$ und $f = x^2 y + x^2 + y^2 + xy + x$
- Es gilt $f = y \cdot f_1 + x \cdot f_2, \ f \in I$

Ideale

Ideal

- Kollektion von Polynomen $f_1, \ldots, f_s$:

$$\langle f_1, \ldots, f_s \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{s} h_i f_i \mid h_1, \ldots, h_s \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n] \right\}$$

Beispiel

- Sei $I = \langle f_1, f_2 \rangle = \langle x^2 + y, x + y + 1 \rangle$ und $f = x^2 y + x^2 + y^2 + xy + x$
- Es gilt $f = y \cdot f_1 + x \cdot f_2, \ f \in I$

Ideale

Ideal

- Kollektion von Polynomen $f_1, \dots, f_s$:

$$\langle f_1, \dots, f_s \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{s} h_i f_i \mid h_1, \dots, h_s \in \mathbb{K}\left[X_1, \dots, X_n\right] \right\}$$

Beispiel

- Sei $I = \langle f_1, f_2 \rangle = \langle x^2 + y, x + y + 1 \rangle$ und $f = x^2y + x^2 + y^2 + xy + x$
- Es gilt $f = y \cdot f_1 + x \cdot f_2,\ f \in I$

Divisionsalgorithmus (1)

- Notwendig zum Lösen des Idealzugehörigkeitsproblems

Ziel des Algorithmus

Polynom g durch Ideal $I = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$ teilen, so dass

$$g = a_1 f_1 + \ldots + a_s f_s + r, \quad a_i, g, I, r \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$$

Sei Polynom p und Ideal I

- Wenn p % I = 0, dann gilt $p \in I$

Divisionsalgorithmus (1)

- Notwendig zum Lösen des Idealzugehörigkeitsproblems

Ziel des Algorithmus

Polynom g durch Ideal $I = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$ teilen, so dass

$$g = a_1 f_1 + \ldots + a_s f_s + r, \quad a_i, g, I, r \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$$

Sei Polynom p und Ideal I

- Wenn p % I = 0, dann gilt $p \in I$

Divisionsalgorithmus (1)

- Notwendig zum Lösen des Idealzugehörigkeitsproblems

Ziel des Algorithmus

Polynom g durch Ideal $I = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$ teilen, so dass

$$g = a_1 f_1 + \ldots + a_s f_s + r, \quad a_i, g, I, r \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$$

Sei Polynom p und Ideal I

- Wenn p % I = 0, dann gilt $p \in I$

Divisionsalgorithmus (2)

Algorithm 1 Divisionsalgorithmus

Require: Basis $I = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$ mit Polynomen $f_i \neq 0$ **und** eine feste Termordnung $>$

Ensure: $r = 0$ **oder** kein Term in r ist teilbar durch $LT_>(f_1), \ldots, LT_>(f_m)$

- Reihenfolge der Polynome in I beeinflusst Ergebnis
- $r \neq 0$ möglich, obwohl $p \in I$

Gröbnerbasis (1)

Gröbnerbasis

Sei Termordnung $>$ und Ideal I, dann hat Gröbnerbasis $G = \{f_1, \ldots, f_m\}$ (in Bezug auf $>$) von I die Eigenschaft:

- Von jedem Polynom $p \in I$ ist $\mathrm{LT}_>(p)$ teilbar durch $\mathrm{LT}_>(f_i)$

- Divisionsrest eindeutig bestimmt und unabhängig von Reihenfolge
- Gröbnerbasis aus jedem Ideal mit Hilfe des Buchberger-Algorithmus und einer festen Termordnung

Gröbnerbasis (1)

Gröbnerbasis

Sei Termordnung $>$ und Ideal I, dann hat Gröbnerbasis $G = \{f_1, \ldots, f_m\}$ (in Bezug auf $>$) von I die Eigenschaft:

- Von jedem Polynom $p \in I$ ist $\mathrm{LT}_>(p)$ teilbar durch $\mathrm{LT}_>(f_i)$

- Divisionsrest eindeutig bestimmt und unabhängig von Reihenfolge
- Gröbnerbasis aus jedem Ideal mit Hilfe des Buchberger-Algorithmus und einer festen Termordnung

Gröbnerbasis (1)

Gröbnerbasis

Sei Termordnung $>$ und Ideal I, dann hat Gröbnerbasis $G = \{f_1, \ldots, f_m\}$ (in Bezug auf $>$) von I die Eigenschaft:

- Von jedem Polynom $p \in I$ ist $\mathrm{LT}_>(p)$ teilbar durch $\mathrm{LT}_>(f_i)$

- Divisionsrest eindeutig bestimmt und unabhängig von Reihenfolge
- Gröbnerbasis aus jedem Ideal mit Hilfe des Buchberger-Algorithmus und einer festen Termordnung

Gröbnerbasis (1)

Gröbnerbasis

Sei Termordnung $>$ und Ideal I, dann hat Gröbnerbasis $G = \{f_1, \ldots, f_m\}$ (in Bezug auf $>$) von I die Eigenschaft:

- Von jedem Polynom $p \in I$ ist $\mathrm{LT}_>(p)$ teilbar durch $\mathrm{LT}_>(f_i)$

- Divisionsrest eindeutig bestimmt und unabhängig von Reihenfolge
- Gröbnerbasis aus jedem Ideal mit Hilfe des Buchberger-Algorithmus und einer festen Termordnung

Gröbnerbasis (2)

- Gröbnerbasen sind nicht eindeutig
- Reduzierte Gröbnerbasen jedoch eindeutig für Ideale

Reduzierte Gröbnerbasis

Alle Leitterme von Gröbnerbasis G in Bezug auf Termordnung $>$ monisch und relativ prim zueinander

Gröbnerbasis (2)

- Gröbnerbasen sind nicht eindeutig
- Reduzierte Gröbnerbasen jedoch eindeutig für Ideale

Reduzierte Gröbnerbasis

Alle Leitterme von Gröbnerbasis G in Bezug auf Termordnung $>$ monisch und relativ prim zueinander

Gröbnerbasis (2)

- Gröbnerbasen sind nicht eindeutig
- Reduzierte Gröbnerbasen jedoch eindeutig für Ideale

Reduzierte Gröbnerbasis

Alle Leitterme von Gröbnerbasis G in Bezug auf Termordnung $>$ monisch und relativ prim zueinander

Gröbner-Fächer

- Unendlich viele Termordnungen, endlich viele reduzierte Gröbnerbasen

Gröbner-Fächer

- Vielflächiges Komplex welches Kegel im $\mathbb{R}^n_+$ enthält
- Kegel werden durch lineare Ungleichungen der Polynome bestimmt

- Unendlich viele Termordnungen, endlich viele reduzierte Gröbnerbasen

Gröbner-Fächer

- Vielflächiges Komplex welches Kegel im $\mathbb{R}^n_+$ enthält
- Kegel werden durch lineare Ungleichungen der Polynome bestimmt

Gröbner-Fächer

- Unendlich viele Termordnungen, endlich viele reduzierte Gröbnerbasen

Gröbner-Fächer

- Vielflächiges Komplex welches Kegel im $\mathbb{R}^n_+$ enthält
- Kegel werden durch lineare Ungleichungen der Polynome bestimmt

Gröbner-Fächer

- Unendlich viele Termordnungen, endlich viele reduzierte Gröbnerbasen

Gröbner-Fächer

- Vielflächiges Komplex welches Kegel im $\mathbb{R}^n_+$ enthält
- Kegel werden durch lineare Ungleichungen der Polynome bestimmt

Beispiel Gröbner-Fächer (1)

Sei

1. $I = \langle x^2 - z,\ y - x \rangle \in \mathbb{K}[x, y, z]$
2. $G_{>_{lex}} = \{\underline{y^2} - z,\ \underline{x} - y\}$
3. $\mathbf{w} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3_+$

- $\mathbf{w} \in C_{G_{>_{lex}}}$ genau dann, wenn
    - $(0, 2, 0) \cdot (a, b, c) \geq (0, 0, 1) \cdot (a, b, c) \ \vee \ 2b \geq c$
    - $(1, 0, 0) \cdot (a, b, c) \geq (0, 1, 0) \cdot (a, b, c) \ \vee \ a \geq b$

Beispiel Gröbner-Fächer (1)

Sei

1. $I = \langle x^2 - z,\ y - x \rangle \in \mathbb{K}[x, y, z]$
2. $G_{>_{lex}} = \{\underline{y^2} - z,\ \underline{x} - y\}$
3. $\mathbf{w} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3_+$

- $\mathbf{w} \in C_{G_{>_{lex}}}$ genau dann, wenn
  - $(0, 2, 0) \cdot (a, b, c) \geq (0, 0, 1) \cdot (a, b, c) \ \vee \ 2b \geq c$
  - $(1, 0, 0) \cdot (a, b, c) \geq (0, 1, 0) \cdot (a, b, c) \ \vee \ a \geq b$

Sei

1. $I = \langle x^2 - z,\ y - x \rangle \in \mathbb{K}[x, y, z]$
2. $G_{>_{lex}} = \{\underline{y^2} - z,\ \underline{x} - y\}$
3. $\mathbf{w} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3_+$

- $\mathbf{w} \in C_{G_{>_{lex}}}$ genau dann, wenn
  - $(0, 2, 0) \cdot (a, b, c) \geq (0, 0, 1) \cdot (a, b, c) \ \vee\ 2b \geq c$
  - $(1, 0, 0) \cdot (a, b, c) \geq (0, 1, 0) \cdot (a, b, c) \ \vee\ a \geq b$

Beispiel Gröbner-Fächer (1)

Sei

1. $I = \langle x^2 - z,\ y - x \rangle \in \mathbb{K}[x, y, z]$
2. $G_{>_{lex}} = \{\underline{y^2} - z,\ \underline{x} - y\}$
3. $\mathbf{w} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3_+$

- $\mathbf{w} \in C_{G_{>_{lex}}}$ genau dann, wenn
  - $(0, 2, 0) \cdot (a, b, c) \geq (0, 0, 1) \cdot (a, b, c) \ \vee \ 2b \geq c$
  - $(1, 0, 0) \cdot (a, b, c) \geq (0, 1, 0) \cdot (a, b, c) \ \vee \ a \geq b$

Beispiel Gröbner-Fächer (1)

Sei

1. $I = \langle x^2 - z,\ y - x \rangle \in \mathbb{K}[x, y, z]$
2. $G_{>_{lex}} = \{\underline{y^2} - z,\ \underline{x} - y\}$
3. $\mathbf{w} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3_+$

- $\mathbf{w} \in C_{G_{>_{lex}}}$ genau dann, wenn
  - $(0, 2, 0) \cdot (a, b, c) \geq (0, 0, 1) \cdot (a, b, c) \ \vee \ 2b \geq c$
  - $(1, 0, 0) \cdot (a, b, c) \geq (0, 1, 0) \cdot (a, b, c) \ \vee \ a \geq b$

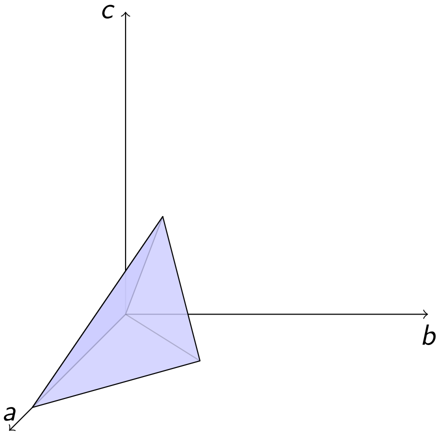
Beispiel Gröbner-Fächer (1)

Sei

1. $I = \langle x^2 - z,\ y - x \rangle \in \mathbb{K}[x, y, z]$
2. $G_{>_{lex}} = \{\underline{y^2} - z,\ \underline{x} - y\}$
3. $\mathbf{w} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3_+$

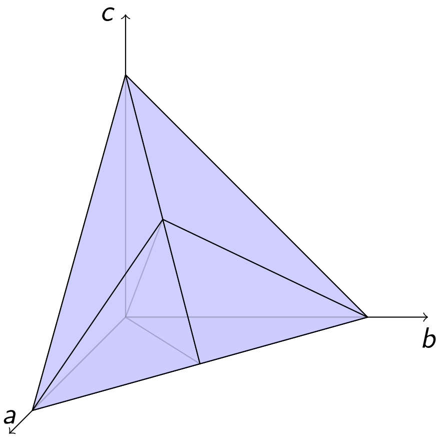
- $\mathbf{w} \in C_{G_{>_{lex}}}$ genau dann, wenn
  - $(0, 2, 0) \cdot (a, b, c) \geq (0, 0, 1) \cdot (a, b, c) \ \vee\ 2b \geq c$
  - $(1, 0, 0) \cdot (a, b, c) \geq (0, 1, 0) \cdot (a, b, c) \ \vee\ a \geq b$

Abbildung: Gröbner-Kegel für $G_{>_{lex}}$



Beispiel Gröbner-Fächer (3)

Abbildung: Kompletter Gröbner-Fächer



Torische Ideale

- Binomiales Ideal

Torisches Ideal

Gegeben seien $A = [a_1, \ldots, a_n] \in \mathbb{Z}^{d \times n}$ und $u \in \mathbb{Z}^n$ zerlegbar in u^+ und u^-, dann ist das torische Ideal I_A definiert durch

$$\mathbf{I}_A = \langle \mathbf{x}^{u^+} - \mathbf{x}^{u^-} \mid u \in ker\,(A) \rangle.$$

Torische Ideale

- Binomiales Ideal

Torisches Ideal

Gegeben seien $A = [a_1, \ldots, a_n] \in \mathbb{Z}^{d \times n}$ und $u \in \mathbb{Z}^n$ zerlegbar in u^+ und u^-, dann ist das torische Ideal I_A definiert durch

$$\mathbf{I}_A = \langle \mathbf{x}^{u^+} - \mathbf{x}^{u^-} \mid u \in ker\,(A) \rangle.$$

Aufzählen von Gröbner-Fächern

Facet Binomials

- Gröbner-Fächer als Graph
  - Gröbnerbasen als Knoten
  - Gröbnerbasen adjazent wenn im Gröbner-Fächer benachbart

Facet Binomials

Sei $x^{\alpha_k} - x^{\beta_k} \in \mathcal{G}_c$, $\mathcal{G}_c$ Gröbnerbasis mit Gewichtsvektor c
$x^{\alpha_k} - x^{\beta_k}$ ist facet binomial wenn ein Vektor $u \in \mathbb{R}^n$ folgendes erfüllt :

$$\alpha_i \cdot u \geq \beta_i \cdot u : i = 1, \ldots, t, i \neq k$$
$$\beta_k \cdot u \geq \alpha_k \cdot u$$

Facet Binomials

- Gröbner-Fächer als Graph
  - Gröbnerbasen als Knoten
  - Gröbnerbasen adjazent wenn im Gröbner-Fächer benachbart

Facet Binomials

Sei $x^{\alpha_k} - x^{\beta_k} \in \mathcal{G}_c$, $\mathcal{G}_c$ Gröbnerbasis mit Gewichtsvektor c
$x^{\alpha_k} - x^{\beta_k}$ ist facet binomial wenn ein Vektor $u \in \mathbb{R}^n$ folgendes erfüllt :

$$\alpha_i \cdot u \geq \beta_i \cdot u : i = 1, \ldots, t, i \neq k$$
$$\beta_k \cdot u \geq \alpha_k \cdot u$$

Facet Binomials

- Gröbner-Fächer als Graph
  - Gröbnerbasen als Knoten
  - Gröbnerbasen adjazent wenn im Gröbner-Fächer benachbart

Facet Binomials

Sei $x^{\alpha_k} - x^{\beta_k} \in \mathcal{G}_c$, $\mathcal{G}_c$ Gröbnerbasis mit Gewichtsvektor c
$x^{\alpha_k} - x^{\beta_k}$ ist facet binomial wenn ein Vektor $u \in \mathbb{R}^n$ folgendes erfüllt :

$$\alpha_i \cdot u \geq \beta_i \cdot u : i = 1, \ldots, t, i \neq k$$
$$\beta_k \cdot u \geq \alpha_k \cdot u$$

Facet Binomials

- Gröbner-Fächer als Graph
  - Gröbnerbasen als Knoten
  - Gröbnerbasen adjazent wenn im Gröbner-Fächer benachbart

Facet Binomials

Sei $x^{\alpha_k} - x^{\beta_k} \in \mathcal{G}_c$, $\mathcal{G}_c$ Gröbnerbasis mit Gewichtsvektor c
$x^{\alpha_k} - x^{\beta_k}$ ist facet binomial wenn ein Vektor $u \in \mathbb{R}^n$ folgendes erfüllt :

$$\alpha_i \cdot u \geq \beta_i \cdot u : i = 1, \ldots, t, i \neq k$$
$$\beta_k \cdot u \geq \alpha_k \cdot u$$

Beispiel Facet Binomials

- Sei $\mathcal{G} = \{x_1 - x_5,\ x_2^2 - 1,\ x_2x_4 - x_5x_6,\ x_2x_6 - x_4x_5,\ x_3 - x_5,\ x_4^2 - 1,\ x_4x_5x_6 - x_2,\ x_5^2 - 1,\ x_6^2 - 1\}$
- Prüfe ob $x_2x_4 - x_5x_6$ ein facet binomial ist mit LP

$$\begin{array}{rrcl} & Ax & = & b \\ \text{so dass} & x & \geq & 0 \end{array}$$

1. $b = (0, 1, 0, 1, -1, -1)^T$
2. $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Beispiel Facet Binomials

- Sei $\mathcal{G} = \{x_1 - x_5,\ x_2^2 - 1,\ x_2x_4 - x_5x_6,\ x_2x_6 - x_4x_5,\ x_3 - x_5,\ x_4^2 - 1,\ x_4x_5x_6 - x_2,\ x_5^2 - 1,\ x_6^2 - 1\}$
- Prüfe ob $x_2x_4 - x_5x_6$ ein facet binomial ist mit LP

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ \text{so dass} \quad x &\geq 0 \end{aligned}$$

1. $b = (0, 1, 0, 1, -1, -1)^T$
2. $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Beispiel Facet Binomials

- Sei $\mathcal{G} = \{x_1 - x_5,\ x_2^2 - 1,\ x_2x_4 - x_5x_6,\ x_2x_6 - x_4x_5,\ x_3 - x_5,\ x_4^2 - 1,\ x_4x_5x_6 - x_2,\ x_5^2 - 1,\ x_6^2 - 1\}$
- Prüfe ob $x_2x_4 - x_5x_6$ ein facet binomial ist mit LP

$$\begin{array}{rcl} Ax & = & b \\ \text{so dass} \quad x & \geq & 0 \end{array}$$

1. $b = (0, 1, 0, 1, -1, -1)^T$
2. $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Beispiel Facet Binomials

- Sei $\mathcal{G} = \{x_1 - x_5,\ x_2^2 - 1,\ x_2x_4 - x_5x_6,\ x_2x_6 - x_4x_5,\ x_3 - x_5,\ x_4^2 - 1,\ x_4x_5x_6 - x_2,\ x_5^2 - 1,\ x_6^2 - 1\}$
- Prüfe ob $x_2x_4 - x_5x_6$ ein facet binomial ist mit LP

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ \text{so dass} \quad x &\geq 0 \end{aligned}$$

1. $b = (0, 1, 0, 1, -1, -1)^T$
2. $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Traversieren von Gröbnerbasen

- Gröberbasis erhalten durch andere Gröbnerbasis
- Facet Binomial „umdrehen“(flip)

Algorithm 2 Lokale Veränderung von reduzierten Gröbnerbasen in I_A (Flip-Algorithmus)

Input: Reduzierte Gröbnerbasis $\mathcal{G}$ von I_A **und**
ein vorgeschriebenes facet binomial $\underline{x}_i^a - x_i^b \in \mathcal{G}$
Output: Die reduzierte Gröbnerbasis adjazent zu $\mathcal{G}$ wobei $\underline{x}_i^b - x_i^a$ ein facet binomial ist.

- Keine expliziten Termordnung nötig

Breitensuche

Algorithm 3 Aufzählen des Gröbner-Fächers mit Breitensuche

Input: Beliebige reduzierte Gröbnerbasis $\mathcal{G}_0$ von I_A
Output: Alle reduzierte Gröbnerbasen von I_A (alle Knoten & Kanten)

- Einfacher und intuitiver Algorithmus
- Alle Gröbnerbasen müssen für den Vergleich gespeichert werden

Tiefensuche(1)

- Gröbner-Fächer mit umgekehrter Tiefensuche nummerieren
- Ergebnis ist ein gerichter Teilgraph $\longrightarrow$ Umgekehrter Suchbaum
- Nachteil von Breitensuche kompensiert

Umgekehrter Suchbaum $T_>(I_A)$

- Azyklischer Graph mit einer eindeutigen Senke (bzgl. einer festen Termordnung)
- Eindeutige Pfade von Gröbnerbasis zur Senke

Tiefensuche(1)

- Gröbner-Fächer mit umgekehrter Tiefensuche nummerieren
- Ergebnis ist ein gerichter Teilgraph $\longrightarrow$ Umgekehrter Suchbaum
- Nachteil von Breitensuche kompensiert

Umgekehrter Suchbaum $T_>(I_A)$

- Azyklischer Graph mit einer eindeutigen Senke (bzgl. einer festen Termordnung)
- Eindeutige Pfade von Gröbnerbasis zur Senke

Tiefensuche(1)

- Gröbner-Fächer mit umgekehrter Tiefensuche nummerieren
- Ergebnis ist ein gerichter Teilgraph $\longrightarrow$ Umgekehrter Suchbaum
- Nachteil von Breitensuche kompensiert

Umgekehrter Suchbaum $T_>(I_A)$

- Azyklischer Graph mit einer eindeutigen Senke (bzgl. einer festen Termordnung)
- Eindeutige Pfade von Gröbnerbasis zur Senke

Tiefensuche(1)

- Gröbner-Fächer mit umgekehrter Tiefensuche nummerieren
- Ergebnis ist ein gerichter Teilgraph $\longrightarrow$ Umgekehrter Suchbaum
- Nachteil von Breitensuche kompensiert

Umgekehrter Suchbaum $T_>(I_A)$

- Azyklischer Graph mit einer eindeutigen Senke (bzgl. einer festen Termordnung)
- Eindeutige Pfade von Gröbnerbasis zur Senke

Tiefensuche(1)

- Gröbner-Fächer mit umgekehrter Tiefensuche nummerieren
- Ergebnis ist ein gerichter Teilgraph $\longrightarrow$ Umgekehrter Suchbaum
- Nachteil von Breitensuche kompensiert

Umgekehrter Suchbaum $T_{>}(I_A)$

- Azyklischer Graph mit einer eindeutigen Senke (bzgl. einer festen Termordnung)
- Eindeutige Pfade von Gröbnerbasis zur Senke

Tiefensuche(1)

- Gröbner-Fächer mit umgekehrter Tiefensuche nummerieren
- Ergebnis ist ein gerichter Teilgraph $\longrightarrow$ Umgekehrter Suchbaum
- Nachteil von Breitensuche kompensiert

Umgekehrter Suchbaum $T_>(I_A)$

- Azyklischer Graph mit einer eindeutigen Senke (bzgl. einer festen Termordnung)
- Eindeutige Pfade von Gröbnerbasis zur Senke

Tiefensuche(2)

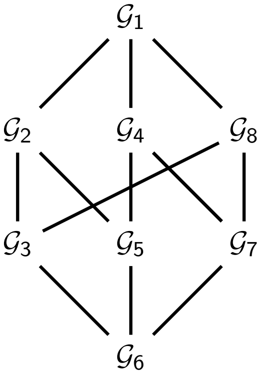
Algorithm 4 Aufzählen des Gröbner-Fächers mit umgekehrter Tiefensuche

Input: Beliebige reduzierte Gröbnerbasis $\mathcal{R}_>$ von I_A und Termordnung $>$
Output: Alle reduzierten Gröbnerbasen von I_A (alle Knoten)

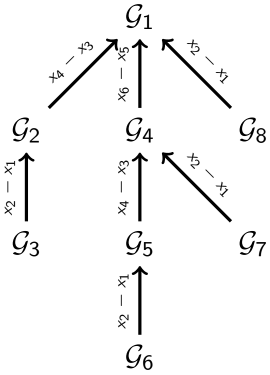
- Termordnung notwendig für Tiefensuche
- Binome die Termordung einhalten werden „umgedreht“

Vergleich: Breitensuche & umgekehrte Tiefensuche

Sei $\mathcal{G}_1 = \{x_1 - x_2, x_3 - x_4, x_5 - x_6, x_2^2 - 1, x_4^2 - 1, x_6^2 - 1\}$ mit lexikographischer Ordnung $>: x_1 > \ldots > x_6$



(a) Ergebnis der Breitensuche



(b) Umgekehrter Suchbaum

Gradkompatible Gröbnerbasis (1)

Gradkompatible Gröbnerbasis

Eine reduzierte Gröbnerbasis (bzgl. zur Termordnung $>$) für ein Ideal ist gradkompatibel wenn der Vektor $\mathbf{1}$ im Gröbner-Kegel liegt.

- Leitterm muss höchsten Grad haben
- Jedes Ideal hat mindestens eine gradkompatible Gröbnerbasis

Gradkompatible Gröbnerbasis (1)

Gradkompatible Gröbnerbasis

Eine reduzierte Gröbnerbasis (bzgl. zur Termordnung $>$) für ein Ideal ist gradkompatibel wenn der Vektor $\mathbf{1}$ im Gröbner-Kegel liegt.

- Leitterm muss höchsten Grad haben
- Jedes Ideal hat mindestens eine gradkompatible Gröbnerbasis

Gradkompatible Gröbnerbasis (1)

Gradkompatible Gröbnerbasis

Eine reduzierte Gröbnerbasis (bzgl. zur Termordnung $>$) für ein Ideal ist gradkompatibel wenn der Vektor $\mathbf{1}$ im Gröbner-Kegel liegt.

- Leitterm muss höchsten Grad haben
- Jedes Ideal hat mindestens eine gradkompatible Gröbnerbasis

Gradkompatible Gröbnerbasis (2)

Einzige gradkompatible Gröbnerbasis

Eine reduzierte Gröbnerbasis $\mathcal{G}$ (bzgl. einer Termordnung $>$) ist die einzige gradkompatible Gröbnerbasis wenn

$$deg(x^a) > deg(x^b) \; \forall \; x^a - x^b \in \mathcal{G}$$

- Breitensuche und umgekehrte Tiefensuche adaptierbar auf gradkompatible Gröbnerbasen

Gradkompatible Gröbnerbasis (2)

Einzige gradkompatible Gröbnerbasis

Eine reduzierte Gröbnerbasis $\mathcal{G}$ (bzgl. einer Termordnung $>$) ist die einzige gradkompatible Gröbnerbasis wenn

$$deg(x^a) > deg(x^b) \; \forall \; x^a - x^b \in \mathcal{G}$$

- Breitensuche und umgekehrte Tiefensuche adaptierbar auf gradkompatible Gröbnerbasen

Lineare Codes

Linearer Code

Ein linearer Code $\mathcal{C}$ der Länge n und Dimension k über $\mathbb{F}$ ist eine injektive lineare Abbildung $\phi\ :\ \mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^n,\ n \geq k$.

- Als $[n, k]$ Code bezeichnet
- Alternativ als Generatormatrix $G \in \mathbb{F}^{k\times n}$ beschrieben
- Standardform : $G = (I_k|M)$
- Codewort c vom Wort x erhält man durch

$$xG = c$$

Lineare Codes

Linearer Code

Ein linearer Code $\mathcal{C}$ der Länge n und Dimension k über $\mathbb{F}$ ist eine injektive lineare Abbildung $\phi \ : \ \mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^n, \ n \geq k$.

- Als $[n, k]$ Code bezeichnet
- Alternativ als Generatormatrix $G \in \mathbb{F}^{k \times n}$ beschrieben
- Standardform : $G = (I_k | M)$
- Codewort c vom Wort x erhält man durch

$$xG = c$$

Lineare Codes

Linearer Code

Ein linearer Code $\mathcal{C}$ der Länge n und Dimension k über $\mathbb{F}$ ist eine injektive lineare Abbildung $\phi : \mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^n,\ n \geq k$.

- Als $[n, k]$ Code bezeichnet
- Alternativ als Generatormatrix $G \in \mathbb{F}^{k \times n}$ beschrieben
- Standardform : $G = (I_k | M)$
- Codewort c vom Wort x erhält man durch

$$xG = c$$

Lineare Codes

Linearer Code

Ein linearer Code $\mathcal{C}$ der Länge n und Dimension k über $\mathbb{F}$ ist eine injektive lineare Abbildung $\phi\ :\ \mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^n,\ n \geq k$.

- Als $[n, k]$ Code bezeichnet
- Alternativ als Generatormatrix $G \in \mathbb{F}^{k \times n}$ beschrieben
- Standardform : $G = (I_k|M)$
- Codewort c vom Wort x erhält man durch

$$xG = c$$

Lineare Codes

Linearer Code

Ein linearer Code $\mathcal{C}$ der Länge n und Dimension k über $\mathbb{F}$ ist eine injektive lineare Abbildung $\phi : \mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^n, \; n \geq k$.

- Als $[n, k]$ Code bezeichnet
- Alternativ als Generatormatrix $G \in \mathbb{F}^{k \times n}$ beschrieben
- Standardform : $G = (I_k | M)$
- Codewort c vom Wort x erhält man durch

$$xG = c$$

Beispiel lineare Codes

- Sei $x = (1, 0, 1, 0)$ und $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$(1, 0, 1, 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (1, 0, 1, 0, 0, 0, 1)$$

Code Ideal

Code Ideal

Sei $\mathcal{C}$ ein $[n, k]$ Code. Das Code Ideal $I(\mathcal{C})$ die Vereinigung zwischen

$$I_{\mathcal{C}} = \langle \mathbf{x}^c - \mathbf{x}^{c'} | c - c' \in \mathcal{C} \rangle + I_p,$$
$$\text{wobei } I_p = \langle x_i^p - 1 | 1 \leq i \leq n \rangle.$$

Beispiel Code Ideal

- Sei $\mathcal{C}$ ein binärer $[6,3]$ Code mit der Generatormatrix

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Code Ideal $I(\mathcal{C})$ ergibt sich zu:

$$I(\mathcal{C}) = \{x_1 - x_5,\ x_2 - x_4x_5x_6,\ x_3 - x_5\} \cup \{x_1^2 - 1,\ x_2^2 - 1,\ x_3^2 - 1,\ x_4^2 - 1,\ x_5^2 - 1,\ x_6^2 - 1\}$$

- Reduzierte Gröbnerbasis mit lexikographischer Ordnung $>$:

$$\mathcal{G}_> = \{x_1 - x_5,\ x_2 - x_4x_5x_6,\ x_3 - x_5\} \cup \{x_4^2 - 1,\ x_5^2 - 1,\ x_6^2 - 1\}$$

Beispiel Code Ideal

- Sei $\mathcal{C}$ ein binärer $[6,3]$ Code mit der Generatormatrix

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Code Ideal $I(\mathcal{C})$ ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} I(\mathcal{C}) = \{&x_1 - x_5,\ x_2 - x_4x_5x_6,\ x_3 - x_5\} \cup \\ &\{x_1^2 - 1,\ x_2^2 - 1,\ x_3^2 - 1,\ x_4^2 - 1,\ x_5^2 - 1,\ x_6^2 - 1\} \end{aligned}$$

- Reduzierte Gröbnerbasis mit lexikographischer Ordnung $>$:

$$\mathcal{G}_> = \{x_1 - x_5,\ x_2 - x_4x_5x_6,\ x_3 - x_5\} \cup \{x_4^2 - 1,\ x_5^2 - 1,\ x_6^2 - 1\}$$

Beispiel Code Ideal

- Sei $\mathcal{C}$ ein binärer $[6,3]$ Code mit der Generatormatrix

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

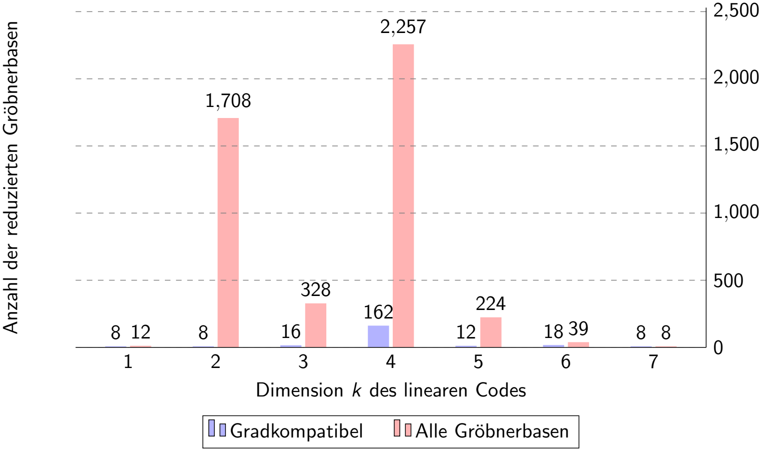
- Code Ideal $I(\mathcal{C})$ ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} I(\mathcal{C}) = \{&x_1 - x_5,\ x_2 - x_4x_5x_6,\ x_3 - x_5\} \cup \\ &\{x_1^2 - 1,\ x_2^2 - 1,\ x_3^2 - 1,\ x_4^2 - 1,\ x_5^2 - 1,\ x_6^2 - 1\} \end{aligned}$$

- Reduzierte Gröbnerbasis mit lexikographischer Ordnung $>$:
$$\mathcal{G}_> = \{x_1 - x_5,\ x_2 - x_4x_5x_6,\ x_3 - x_5\} \cup \{x_4^2 - 1,\ x_5^2 - 1,\ x_6^2 - 1\}$$

Ergebnisse

Vergleich zw. gradkompatiblen & kompletten Gröbner-Fächern



Zeitvergleich zwischen Gfan & Software

Tabelle: Berechnungszeit in Sekunden

$[n, k]$ Code	CIDGEL d.c.	CIDGEL	Gfan
$[8, 2]$	0.206	10.198	38.127
$[8, 4]$	7.743	25.86	47.748
$[9, 4]$	9.27	727.91	982.56
$[9, 5]$	4.72	18.89	59.65
$[10, 6]$	87.92	277.81	380.04

Vorführung der Software

Mögliche Verbesserungen

1. Verwenden von externen LP-Solver
2. Parallelität

Mögliche Verbesserungen

1. Verwenden von externen LP-Solver
2. Parallelität

Fazit

1. Keine (bekannte) Software berechnet gradkompatiblen Gröbnerfächer

2. Schnellere Berechnung als andere Software

Fazit

1. Keine (bekannte) Software berechnet gradkompatiblen Gröbnerfächer
2. Schnellere Berechnung als andere Software

Vielen Dank für eure Aufmerksamkeit!