۸۱۰۱۹۷۵۹۳ امید مهدی موسوی

① با توجه به تعریف مطرح شده برای False alarm می‌توان گفت این حالت معادل آن است که احتمال آن را به دست آوریم که ~~آلارم~~ شرایط به شرط زنگ خوردن آلارم نرمال باشد. برای این حالت داریم:

$$P(FA) = \frac{(۰/۰۰۵)(۰/۹۹۵)}{P(A)} = \frac{(۰/۰۰۵)(۰/۹۹۵)}{(۰/۰۰۵)(۰/۹۹۵) + (۰/۰۰۵)(۰/۹۵)} = \frac{۰/۹۹۵}{۰/۹۹۵ + ۰/۹۵} = ۰/۵۱۱۵$$

زنگ در روز نرمال — روز نرمال — روز غیرنرمال — زنگ در روز غیر نرمال

ب) در این قسمت از سوال یک احتمال آن را باید به دست بیاوریم که به شرط ~~زنگ نخوردن شرایط خطرناک~~ شرایط خطرناک، آلارم نداشته باشیم.

$$P(UCC) = \frac{(۰/۰۰۵)(۰/۰۵)}{P(NA)} = \frac{(۰/۰۰۵)(۰/۰۵)}{(۰/۰۰۵)(۰/۰۵) + (۰/۹۹۵)(۰/۹۹۵)} = ۲,۵۲۴ \times ۱۰^{-۴}$$

شرایط خطرناک — آلارم نخوردن در شرایط خطرناک — شرایط نرمال — زنگ نخوردن در شرایط نرمال

ج) در این قسمت باید از احتمال مطلق و نه شرطی عبارت‌ها استفاده کنیم:

$$E[FA] = P(FA) \times ۱۰ \times ۳۶۵ = ۱۸,۱۵۸$$

$$P(FA) \rightarrow ۰/۰۰۵ \times ۰/۹۹۵$$

زنگ در شرایط نرمال — شرایط نرمال

$$E[UCC] = P(UCC) \times ۱۰ \times ۳۶۵ = ۰/۹۱$$

$$P(UCC) \rightarrow (۰/۰۰۵)(۰/۰۵)$$

شرایط خطرناک — تشخیص ندادن در شرایط خطرناک

سیستم در دست بعد از ده هزار روز به طور میانگین کمتر از یک روز خطرناک را تشخیص نمی‌دهد و به نظر می‌رسد در رد کردن حالت‌های خطرناک عملکرد مناسبی دارد اما در همین مدت به طور میانگین ۱۸ روز به اشتباه آلارم را به صدا در آورده است.

کاربرد این سیستم می‌تواند در جایی مناسب باشد که زنگ نخوردن در حالت خطر ضرر بسیار بیشتری نسبت به حالت زنگ خوردن در حالت بی خطر باشد.

۲) الف)

$$E[Y_1] = E[X_1+X_2] = E[X_1]+E[X_2] = 2m$$

$$var[Y_1] = var[X_1]+var[X_2] = 2\sigma^2$$

ب)

$$E[Y_2] = E[2X_1] = 2E[X_1] = 2m$$

$$Var[Y_2] = var[2X_1] = 4var[X_1] = 4\sigma^2$$

ج) همانطور که دیده شد واریانس در حالتی که داده ها را ضرب در ۲ کردیم ۲ برابر حالت دیگر شد. اگر از لحاظ ریاضی به موضوع نگاه کنیم به دلیل scaling factor داشتن برای Y_2 این متغیر واریانسش تغییرات بیشتری داشت. از لحاظ شهودی هم می توان گفت که زمانی که ما همه داده ها را ضرب در ۲ می کنیم این موضوع باعث می شود که از میانگین فاصله بیشتری بگیرند و واریانس خیلی زیادتر شود. در حالتی که ما دو متغیر را جمع می کنیم در حقیقت باز هم احتمال اینکه داده ها از مرکز دور باشند زیاد می شود اما نه به اندازه حالت قبل در حقیقت به طور ساده شده داریم: (برای $m=0$، $\sigma=1$)

$$e^{-\frac{(2x)^2}{2}} < e^{-\frac{x_1^2}{2}} \cdot e^{-\frac{x_2^2}{2}} < e^{-\frac{(\frac{x_1}{2})^2}{2}}$$

که نشان می دهد اینکه داده ای در فاصله $2x$ از میانگین باشد در حالتی که $Y_2 = 2X_1$ است از همه حالت ها بیشتر است و به دنبال آن واریانس نیز باید بیشتر باشد.

د)

$$cov(Y_1, Y_2) = E[Y_1 Y_2] - E[Y_1]E[Y_2] = E[(X_1+X_2)(2X_1)] - (2m)(2m)$$

$$= E[2X_1^2] + E[2X_1X_2] - 4m^2$$

$$E[2X_1^2] = 2E[X_1^2] = 2(Var(X_1) + mean(X_1)^2) = 2m^2 + 2\sigma^2$$

$$2E[X_1X_2] \underset{\text{مستقل اند } X_2 \text{ و } X_1}{\Longrightarrow} 2E[X_1]E[X_2] = 2m^2$$

$$\Rightarrow cov(Y_1, Y_2) = 4m^2 + 2\sigma^2 - 4m^2 = 2\sigma^2$$

۴)

الف) اگر فرزند بزرگتر دختر باشد دو حالت داریم یعنی $\{GB, GG\}$. احتمال خواسته شده GG است پس

$$P(GG) = \frac{1}{2}$$

ب) حالت ها در این سوال $\{BG, GB, BB\}$ هستند. حالت مدنظر فقط BB است پس

$$P(BB) = \frac{1}{3}$$

۳) الف) به ازای هر نفر جدیدی که اضافه شود با توجه به استقلال روز تولد افراد حالت‌ها ۳۶۵ برابر می‌شود. با توجه به این موضوع احتمال هر دنباله از روزهای تولد $\frac{1}{۳۶۵^n}$ است که در آن n برابر با طول دنباله یا تعداد افراد است.

ب) اگر احتمال بودن یک نفر با تولد یکسان را $P(A)$ در نظر بگیریم برای $P(\bar{A})$ خواهیم داشت که حالتی است که بعد از اضافه کردن n نفر به گروه هنوز تولد مشترک با خودم ندارم داریم:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

$$P(\bar{A}) = \left(\frac{۳۶۴}{۳۶۵}\right)^n \Rightarrow P(A) = 1 - \left(\frac{۳۶۴}{۳۶۵}\right)^n$$

برای سوال بعدی باید معادله $1 - \left(\frac{۳۶۴}{۳۶۵}\right)^n > \frac{1}{2}$ را حل بکنیم. خواهیم داشت:

$$n = \frac{Log\left(\frac{1}{2}\right)}{Log\left(\frac{۳۶۴}{۳۶۵}\right)} = ۲۵۲{,}۶۵ \longrightarrow$$

به ازای $n = ۲۵۳$ ، $P(A) > \frac{1}{2}$ خواهد بود.

ج) با توجه به اصل لانه کبوتری اگر ۳۶۶ فرد در گروه وجود داشته باشند قطعا یک روز تولد دارای دو نفر متولد است. حال به همین ترتیب می‌توان گفت به صورت تخمینی که اگر با این تعداد به احتمال ۱۰۰ درصد دو نفر متولد در یک روز داریم منطقی است که ~~[illegible]~~ با بیشتر از نصف این تعداد به احتمال نصف ۱۰۰ درصد یا ۵۰ درصد این اتفاق بیفتد.

د) زمانی که با ۱۰۰۰۰ آزمایش این کار را انجام دادیم بعد از هر بار آزمایش خروجی ۴۱ به دست آمد اما در حالتی که تعداد آزمایش را برابر ۳۰ قرار دادیم دیده شد که خروجی از ۳۸ تا ۴۵ کم و زیاد شد بعد از هر آزمایش دوباره.

و) در این قسمت هم احتمال مکمل را حساب می‌کنیم که ~~[illegible]~~ مشترک نبودن هیچ دو تولدی است:

$$P(\bar{B}) = \left(\frac{۳۶۵}{۳۶۵}\right)\left(\frac{۳۶۴}{۳۶۵}\right) \cdots \left(\frac{۳۶۵-n+1}{۳۶۵}\right) \Rightarrow P(B) = 1 - P(\bar{B})$$

۴) ~~[illegible]~~ بعد از اینکه این آزمایش را انجام دادیم به این نتیجه رسیدیم که برای رسیدن به مقدار احتمال ۰٫۵ برای این رویداد به $n = ۸۸$ نیاز داریم.

ی) ~~[illegible]~~ در دنیای واقعی با توجه به اینکه دلایل فرهنگی و اجتماعی باعث شده‌اند که تولدها به طور یکنواخت در طول روزها توزیع نشوند. این عدم یکنواخت بودن باعث شده است که بعضی از روزها تولدهای بیشتری داشته باشند و به همین دلیل در آزمایش های واقعی اکثر افراد متولد روزهای خاصی باشند که باعث می‌شود احتمال اینکه در تعداد افراد ثابت روزهای تولد یکسان داشته باشیم بیشتر شود.

(۱۱) دو متغیر میانگین و واریانس جامعه متغیرهایی هستند که با دسترسی به تمام جامعه می توان به آنها دسترسی داشت. به عبارت دیگر $E[P]$ و $Var[P]$ دو عدد و نه متغیر تصادفی هستند و با داشتن داده های جامعه می توان آنها را به دست آورد. اندازه sample ها هم با توجه به ماهیتش عددی از پیش تعیین شده است و تصادفی نیست. میانگین sample ها اما عددی تصادفی است. واریانس میانگین ها اما با توجه به واریانس جامعه و اندازه sample که اعدادی مشخص هستند و تصادفی نیستند به دست می آید. بزرگترین عدد sample دوباره یک متغیر تصادفی است که مستقیما به احتمالات حین sampling وابسته است. همچنین اندازه جمعیت هم مقداری است که از پیش مشخص است و به احتمالات ارتباطی ندارد.

در مجموع از تمام متغیرهای داده شده میانگین نمونه و بزرگترین عدد نمونه متغیرهای تصادفی و باقی اعدادی ثابت بودند.

(۵) قضاوت و رای دادن همواره بر این مبناست که با توجه به شواهد در دست چه حالتی محتمل تر است. آیا اینکه متهم واقعا مرتکب جرم شده است احتمال بیشتری دارد و باید او را محکوم کرد یا اینکه به احتمال زیاد متهم مرتکب خطا نشده. در حال حاضر تنها شواهدی که در دست داریم شهادت یک شاهد است و با توجه به اینکه تنها مدرک بر علیه متهم است منطقی است که به گناهکار بودن متهم رای بدهیم اما قبل از نتیجه گیری باید به بررسی قابل اطمینان بودن این شهادت بپردازیم.

جدول روبرو جدولی است که می گوید به ازای رنگ واقعی دیده شدن هر رنگ توسط شاهد به چه مقدار است:

واقعی \ دیده شده	آبی	سبز
آبی	99×10^{-4}	10^{-4}
سبز	$\frac{99\times2}{10^4}$	$\frac{99\times98}{10^4}$

با توجه به این جدول ستون اول نشان می دهد این که رنگ آبی دیده شود $\frac{99\times3}{10^4}$ است. مشکلی که وجود دارد این است که زمانی که یک ماشین آبی دیده شود به احتمال $\frac{99\times2}{10^4}$ در حقیقت سبز بوده است و به احتمال $\frac{99}{10^4}$ ماشین در حقیقت آبی بوده است. به طور خلاصه می توان گفت که حتی اگر ماشین دیده شده توسط شاهد آبی باشد این مورد که به احتمال زیاد در اصل سبز بوده باشد بیشتر است و به همین دلیل می توان گفت که شهادت شاهد اعتبار کافی را دارا نیست.

⑥ احتمال عدد s را به سه حالت s حاصل از تاس های متفاوت می شکنیم:

$$P(s) = P(s|R_1)P(R_1) + P(s|R_2)P(R_2) + P(s|R_3)P(R_3)$$

$$1 \leq s \leq 4 \Rightarrow P(s) = (\tfrac{1}{4})(\tfrac{1}{4}) + (\tfrac{1}{6})(\tfrac{1}{4}) + (\tfrac{1}{8})(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{16}{96}$$

$$5 \leq s \leq 6 \Rightarrow P(s) = (\tfrac{1}{6})(\tfrac{1}{4}) + (\tfrac{1}{8})(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{10}{96}$$

$$7 \leq s \leq 8 \Rightarrow P(s) = (\tfrac{1}{8})(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{6}{96}$$

اعداد بالای احتمال به دست آمدن عدد s دلخواه از تاس ها بود. (سوال رو اشتباه خوندم اول حیفم اومد پاک کنم.)

الف)

$$P(S_4) = \tfrac{1}{4} \quad , \quad P(S_6) = \tfrac{1}{4} \quad , \quad P(S_8) = \tfrac{2}{4} = \tfrac{1}{2}$$

ب) اگر عدد به دست آمده از تاس ۳ باشد طبق محاسبات بالای صفحه داریم: (جای R و s جابه جا است در محاسبات بالا)

$$P(R=3) = P(R=3|s=4)P(s=4) + P(R=3|s=6)P(s=6) + P(R=3|s=8)P(s=8)$$

$$= \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{24} + \tfrac{1}{16} = \tfrac{16}{96} = \tfrac{1}{6}$$

$$P(s=4|R=3) = \frac{P(R=3|s=4)\,P(s=4)}{P(R=3)} = \frac{(\frac{1}{4})(\frac{1}{4})}{\frac{1}{6}} = \frac{3}{8}$$

$$P(s=6|R=3) = \frac{P(R=3|s=6)\,P(s=6)}{P(R=3)} = \frac{(\frac{1}{6})(\frac{1}{4})}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{4}$$

$$P(s=8|R=3) = \frac{P(R=3|s=8)\,P(s=8)}{P(R=3)} = \frac{(\frac{1}{8})(\frac{1}{2})}{\frac{1}{6}} = \frac{3}{8}$$

$\Rightarrow$ تاس های ۴ و ۸ رویه احتمال یکسان دارند و تاس ۶ رویه احتمالش $\frac{2}{3}$ دو حالت دیگر است.

ج)

$$P(R=6) = \tfrac{10}{96} \ , \ P(R=6|s=4) = 0 \ , \ P(R=6|s=6) = \tfrac{1}{6} \ , \ P(R=6|s=8) = \tfrac{1}{8}$$

$$P(s=4|R=3) = \frac{(0)\,\frac{1}{4}}{\frac{10}{96}} = 0 \quad ①$$

$$P(s=6|R=3) = \frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{10}{96}} = \frac{4}{10} \quad ② \qquad P(s=8|R=3) = \frac{\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{10}{96}} = \frac{6}{10} \quad ③$$

① ② ③ $\Rightarrow$ احتمال s=4 صفر و احتمال s=8 بیشتر از s=6 است.

د) با توجه به اینکه تنها تاسی که می تواند عددی بزرگتر از ۶ تولید کند تاس ۸ رویه است پس می توان گفت که اگر عدد ۷ دیده شد قطعا تاسی که پرتاب کرده ایم تاس ۸ رویه بوده است.

۷) الف)

4 sided $\Rightarrow E[X_4] = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i}{4} = 2.5 \Rightarrow Var(X_4) = E[(x-2.5)^2] = \frac{5}{4}$

6 sided $\Rightarrow E[X_6] = \frac{35}{12} \Rightarrow Var(X_6) = \frac{35}{12}$

$Z \Rightarrow Var\left(\frac{X_4+X_6}{2}\right) = \frac{1}{4} Var(X_4) + \frac{1}{4} Var(X_6) = \frac{\left(\frac{5}{16} + \frac{35}{48}\right)}{4} = \frac{50}{48} \cdot \frac{1}{4} = \frac{25}{96}$

$\Rightarrow \sigma_4 = \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad \sigma_6 = \frac{\sqrt{35}}{2\sqrt{3}}, \quad \sigma_Z = \frac{5}{4\sqrt{6}}$

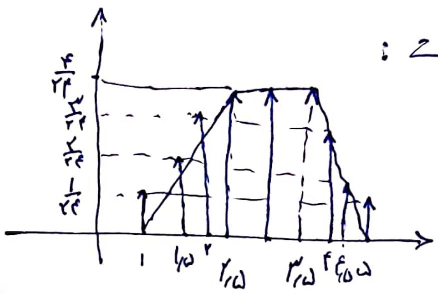
ب)

$Z = \frac{X+Y}{2} \qquad P(Z) = \sum_{x=1}^{4} P_X(x)\, P_y(2Z - x)$

به عبارت دیگر احتمال $P(Z)$ حاصل کانولوشن $P_X(x)$, $P_y(y)$ است و همچنین می دانیم که به ازای $Z<1$ و $Z>5$ داریم: $P(Z)=0$

خواهیم داشت:

$$f_Z(Z) = \begin{cases} 0 & Z<1 \\ \frac{2Z-1}{24} & 1 \le Z \le 2.5 \\ \frac{4}{24} & 3 \le Z \le 3.5 \\ \frac{11-2Z}{24} & 4 \le Z \le 5 \\ 0 & 5<Z \end{cases} \Rightarrow$$



$$CDF\,F(Z) = \begin{cases} 0 & Z<1 \\ \frac{1}{24} & 1.5 > Z \ge 1 \\ \frac{3}{24} & 2 > Z \ge 1.5 \\ \frac{6}{24} & 2.5 > Z \ge 2 \\ \frac{10}{24} & 3 > Z \ge 2.5 \\ \frac{14}{24} & 3.5 > Z \ge 3 \\ \frac{18}{24} & 4 > Z \ge 3.5 \\ \frac{21}{24} & 4.5 > Z \ge 4 \\ \frac{23}{24} & 5 > Z \ge 4.5 \\ 1 & Z \ge 5 \end{cases}$$

ج) داریم:

$$W = \begin{cases} 2X & X>Y \\ -1 & X \le Y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X=1 \Rightarrow -1 \\ X=2 \Rightarrow \begin{cases} P=\frac{1}{6} & 4 \\ P=\frac{5}{6} & -1 \end{cases} \\ X=3 \Rightarrow \begin{cases} P=\frac{1}{3} & 6 \\ P=\frac{2}{3} & -1 \end{cases} \\ X=4 \Rightarrow \begin{cases} P=\frac{1}{2} & 8 \\ P=\frac{1}{2} & -1 \end{cases} \end{cases}$$

$\Rightarrow E[W] = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3} - \frac{5}{6}\right) + \frac{1}{4}\left(2 - \frac{2}{3}\right) + \frac{1}{4}\left(4 - \frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow E[W] = \frac{22}{24} \longrightarrow$ در هر راند

بعد از ۶۰ راند:

$E[W] = \frac{22}{24} \times 60 = 55$

۸

الف)

$$E[h] = \int_0^{۳۰} f(h)\,dh = \int_0^{۳۰} ۴۰ - h\,dh = \left(۴۰h - \frac{h^2}{۲}\right)\Big|_0^{۳۰} = ۱۲۰۰ - ۴۵۰ = ۷۵۰$$

به طور معمول ۷۵۰ کشمش وجود دارد

ب)

$$\text{احتمال بودن در } h = \frac{\text{تعداد در } h}{\text{کل تعداد}} = \frac{f(h)}{۷۵۰} = \frac{۴۰ - h}{۷۵۰} = g(H)$$

ج)

$$G(H) = \int_0^H g(H)\,dH = \int_0^H \frac{۴۰ - h}{۷۵۰}\,dh = \frac{۴۰h - \frac{h^2}{۲}}{۷۵۰}\Big|_0^H = \frac{۸۰H - H^2}{۱۵۰۰}$$

د)

$$G(۱۰) = \frac{۸۰(۱۰) - ۱۰۰}{۱۵۰۰} = \frac{۷}{۱۵}$$

۹

الف) جدول احتمالات به ازای حالات مختلف رسم می‌کنیم

$y \backslash X$	$x=-1$	$x=1$	
$y=-1$	c	$\frac{1}{۲} - c$	$\frac{1}{۲}$
$y=1$	$\frac{1}{۲} - c$	c	$\frac{1}{۲}$
	$\frac{1}{۲}$	$\frac{1}{۲}$	

$$\Rightarrow \begin{cases} E[X] = -\frac{1}{۲} + \frac{1}{۲} = 0 \\ E[y] = -\frac{1}{۲} + \frac{1}{۲} = 0 \\ E[xy] = E[xy \mid y=-1]\,P(y=-1) + E[xy \mid y=1]\,P(y=1) \end{cases}$$

$$\overset{P(y=-1)}{E[xy \mid y=-1]} = c - \frac{1}{۲} + c = ۲c - \frac{1}{۲}$$

$$\underset{P(y=1)}{E[xy \mid y=1]} = ۲c - \frac{1}{۲} \Rightarrow E[xy] = ۴c - 1 \to \begin{cases} c = \frac{1}{۲} \to cov(x,y) = 1 \\ c = \frac{1}{۴} \to cov(x,y) = 0 \\ c = 0 \to cov(x,y) = -1 \end{cases}$$

$$Var(x) = Var(y) = E[x^2] - E[x]^2 = 1 - 0 = 1 \Rightarrow \rho_{xy} = \frac{۴c - 1}{(1)(1)} = ۴c - 1$$

ب) با فرض وجود داشتن استقلال

$$\rho_{xy} = 0 \Rightarrow ۴c - 1 = 0 \Rightarrow c = \frac{1}{۴} \Rightarrow \text{حالت مستقل} ,\ P(x=1, y=1) = c \overset{\text{مستقل}}{\Rightarrow} = \left(\frac{1}{۲}\right)\left(\frac{1}{۲}\right) = \boxed{\frac{1}{۴} = c}$$

$$\rho_{xy} = \pm 1 \Rightarrow ۴c - 1 = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} c = \frac{1}{۲} \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow$$ حالت های همبستگی کامل با ضرایب ۱ و ۱-