RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE I RÓŻNICOWE

numeryczne rozwiązanie równania potencjału grawitacyjnego z użyciem METODY ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

Aleksandra Smela

ZADANE RÓWNANIE

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = 4\pi G\rho(x)$$

$\Omega = (0,3)$ $\quad\quad\phi(0) = 5 \quad \phi(3) = 4$

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in [0,1] \\ 1 & \text{dla } x \in (1,2] \\ 0 & \text{dla } x \in (2,3] \end{cases}$$

WYPROWADZENIE SFORMUŁOWANIA WARIACYJNEGO

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = 4\pi G\rho(x)$$

Mnożę przez funkcję testującą $v(x)$ i obustronnie całkuję

$$\int_0^3 \frac{d^2\phi}{dx^2} v(x)\, dx = \int_0^3 4\pi G \rho(x)\, v(x)\, dx$$

v to dowolna funkcja z przestrzeni V, gdzie V to przestrzeń funkcji zerujących się na brzegach Ω

Całkuję lewą stronę przez części

$$\int_0^3 \frac{d^2\phi}{dx^2} v(x)\, dx = \left| \begin{matrix} u = v(x) & u' = v'(x) \\ v' = \phi''(x) & v = \phi'(x) \end{matrix} \right| = \Big[\phi' v\Big]_0^3 - \int_0^3 \phi' v'\, dx =$$

$$= \phi'(3)v(3) - \phi'(0)v(0) - \int_0^3 \phi' v' \, dx$$

Ponieważ $v \in V$, czyli $v(0) = v(3) = 0$:

$$-\int_0^3 \phi' v' \, dx = 4\pi G \int_1^2 v \, dx$$ # Podstawiłam również $p(x)$

Ponieważ warunki Dirichleta są niezerowe, przyjmuję:

$\phi = \overline{\phi} + w$ $\phi(0) = 5$ $\phi(3) = 4$

$w(0) = 0$ $w(3) = 0$

Przyjmę, że: $\overline{\phi}(x) = 5 - \frac{x}{3}$

$\phi' = w' - \frac{1}{3}$ $\overline{\phi}' = -\frac{1}{3}$

Podstawiam i przekształcam:

$$-\int_0^3 \left(w' - \frac{1}{3}\right) v' \, dx = 4\pi G \int_1^2 v \, dx$$

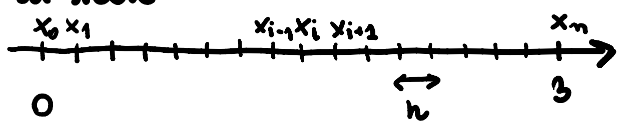
$$\int_0^3 w' v' \, dx = \int_0^3 \frac{1}{3} v' dx - 4\pi G \int_1^2 v \, dx$$

$$B(w,v) = \int_0^3 w' v' dx \qquad \mathcal{L}(v) = \int_0^3 \frac{1}{3} v' dx - 4\pi G \int_1^2 v \, dx$$

$$B(w, v) = \mathcal{L}(v)$$

METODA GALERKINA

Obieram $n+1$ punktów na przedziale $[0,3]$, wliczając w to punkt 0 i punkt 3. Punkty są w równych odległościach od siebie:



$h = \frac{3}{n}$ - długość przedziału

Funkcje bazowe definiuję następująco:

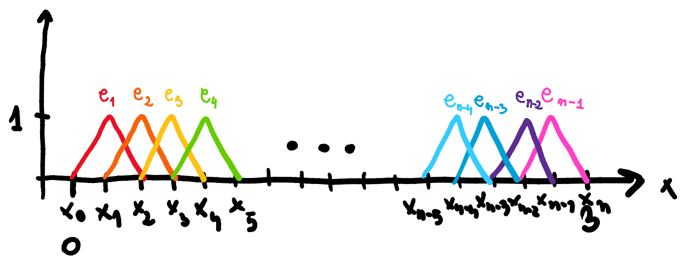
$$e_i(x) = \begin{cases} \frac{x}{h} - i + 1 & x \in [h(i-1), hi] \\ i - \frac{x}{h} + 1 & x \in (hi, h(i+1)] \\ 0 & \text{w p.p} \end{cases}$$

gdzie $i \in \{1, \dots, n-1\}$

Niech $V_h \subset V$, gdzie funkcje bazowe e_i generują przestrzeń V_h

oraz $w_h \in V_h$: $w \approx w_h = \sum_1^{n-1} w_i e_i$

Co istotne, funkcja w zeruje się na brzegach dziedziny, więc może być tak, że $i \in \{1, \dots, n-1\}$, a nie $i \in \{0 \dots n\}$



Podstawiam w do $B(w,v) = \mathcal{L}(v)$

$$B\left(\sum_1^{n-1} w_i e_i, v\right) = \mathcal{L}(v)$$

$$\sum_1^{n-1} w_i B(e_i, v) = \mathcal{L}(v)$$

Ponieważ $e_i \in V_h \subset V$ oraz $v \in V$

$$\sum_1^{n-1} w_i B(e_i, e_j) = \mathcal{L}(e_j) \quad j = 1, 2 \dots N-1$$

Daje to układ $n-1$ równań.

UKŁAD RÓWNAŃ W POSTACI MACIERZOWEJ

$$\underbrace{\begin{bmatrix} B(e_1,e_1) & B(e_2,e_1) & \dots & B(e_{n-1},e_1) \\ B(e_1,e_2) & B(e_2,e_2) & \dots & B(e_{n-1},e_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B(e_1,e_{n-1}) & B(e_2,e_{n-1}) & \dots & B(e_{n-1},e_{n-1}) \end{bmatrix}}_{\text{macierz } B} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(e_1) \\ L(e_2) \\ \vdots \\ L(e_{n-1}) \end{bmatrix}$$

ROZWIĄZANIE

Równanie, które należało rozwiązać ma postać: $\frac{d^2\phi}{dx^2} = 4\pi G\rho(x)$

Jego rozwiązanie to: $\phi(x) = \overline{\phi}(x) + w(x)$

A więc: $\phi(x) = 5 - \frac{x}{3} + \sum_{1}^{n-1} w_i e_i$

OPTYMALIZACJA IMPLEMENTACJI

$$e_i'(x) = \begin{cases} \frac{1}{h} & x \in [h(i-1), hi] \\ -\frac{1}{h} & x \in [hi, h(i+1)] \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

$$B(e_i, e_j) = \int_0^3 e_i' e_j' \, dx$$

Zauważam:

1) $B(e_i, e_j) = B(e_j, e_i)$
2) $B(e_i, e_j) = 0$ dla $|i-j| > 1$
3) $B(e_1,e_1) = B(e_2,e_2) = \dots = B(e_{n-1},e_{n-1}) = \int_0^{2h} \frac{1}{h^2} dx$
4) $B(e_i, e_{i+1}) = \int_{hi}^{h(i+1)} -\frac{1}{h^2} \, dx$

5) $B(e_{i-1}, e_i) = \int_{h(i-1)}^{hi} -\frac{1}{h^2}\,dx$

Wykorzystam te własności przy tworzeniu macierzy B