

INTERPOLACJA

Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice
laboratorium 2
Aleksandra Smela

Po zajęciach laboratoryjnych dodano:

informację dla jakiej liczby węzłów wielomian interpolacyjny zmienia swoją jakość dopasowania w zależności od tego czy zastosowano wzór Newtona czy Lagrange'a (punkty 4.2, 4.5).

1. OPIS ZADANIA

- 1.a. Dla funkcji $f(x) = \sin x \cdot \sin\left(\frac{2x^2}{\pi}\right)$ na przedziale $(-\pi, 2\pi)$ wyznacz dla zagadnienia Lagrange'a wielomian interpolujący w postaci Lagrange'a i Newtona.
- 1.b. Interpolację przeprowadź dla różnej liczby węzłów.
- 1.c. Dla każdego przypadku interpolacji porównaj wyniki otrzymane dla różnego rozmieszczenia węzłów: równoodległe oraz zgodne z zerami wielomianu Czebyszewa.
- 1.d. Oceń dokładność, z jaką wielomian przybliża zadaną funkcję.
- 1.e. Poszukaj wielomianu, który najlepiej przybliża zadaną funkcję.
- 1.f. Wyszukaj stopień wielomianu, dla którego można zauważyć efekt Runge'go (dla równomiernego rozmieszczenia węzłów). Porównaj z wyznaczonym wielomianem dla węzłów Czebyszewa.

2. UŻYTE NARZĘDZIA I ŚRODOWISKO

- Komputer z systemem Windows 10
- Procesor: AMD Ryzen 7 3700X 3,6GHz
- Pamięć RAM: 32 GB
- Język programowania: Python 3
- Użyte biblioteki: numpy, matplotlib

3. REALIZACJA ZADANIA

3.1. Przygotowanie modułu z niezbędnymi funkcjami

Przygotowano moduł *interpolation.py* z niezbędnymi funkcjami do realizacji zadania:

- *lagrange_interpolation(points)*

Funkcja przyjmuje zbiór dwuwymiarowych punktów $(x_i, f(x_i))$, gdzie x_i to węzły interpolacji. Funkcja zwraca wielomian interpolacyjny: *polynomial(x)*.

Wzór interpolacyjny jest wyznaczony zgodnie z wzorem Lagrange'a: $P_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) L_k(x)$

Gdzie: $L_k(x) = \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$ to bazy Lagrange'a.

- *newton_interpolation(points)*

Podobnie jak poprzednio funkcja przyjmuje zbiór dwuwymiarowych punktów $(x_i, f(x_i))$, gdzie x_i to węzły interpolacji. Funkcja zwraca wielomian interpolacyjny: *polynomial(x)*.

Wzór interpolacyjny jest wyznaczony zgodnie z wzorem Newtona:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

Gdzie: a_0, a_1, \dots, a_n to kolejne ilorazy różnicowe.

- *generate_regularly(n, interval)*

Funkcja przyjmuje liczbę liczb do wygenerowania i przedział, z którego mają być wygenerowane. Zwraca n liczb wybranych równomiernie z przedziału łącznie z krańcami przedziałów.

- *generate_czybyszow(n, interval)*

Funkcja przyjmuje liczbę liczb do wygenerowania i przedział, z którego mają być wygenerowane. Zwraca n liczb wybranych z przedziału zgodnie z zerami wielomianu Czybyszewa. Zgodnie z wzorem:

$$\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{2i-1}{2n}\pi\right)$$

Gdzie: (a, b) – przedział przekazany do funkcji, n – liczba liczb do wygenerowania, i – numer liczby do wygenerowania.

- `generate_points(n, interval, x_generator, f_x)`

Funkcja przyjmuje liczbę punktów do wygenerowania, przedział tożsamy z dziedziną, funkcja zgodnie z którą powinny być wygenerowane współrzędne x (np. `generate_czybyszow` lub `generate_regularly`) oraz funkcję $f(x)$, gdzie $y=f(x)$.

- `max_error(f1, f2, interval)`

Funkcja licząca błąd maksymalny zgodnie z wzorem: $\max_{i=0,\dots,500} |f_1(x_i) - f_2(x_i)|$

- `mean_squared_error(f1, f2, interval)`

Funkcja licząca błąd średniokwadratowy zgodnie z wzorem: $\frac{1}{500} \sqrt{\sum_{i=0}^{500} (f_1(x_i) - f_2(x_i))^2}$

3.2. Kod generujący wykresy i tabele

Przygotowano program `exec.py`, który rysuje wykresy z funkcją, wielomianem interpolacyjnym i węzłami oraz tabele z wyliczonymi błędami: maksymalnym i średniokwadratowym.

4. OTRZYMANE WYNIKI

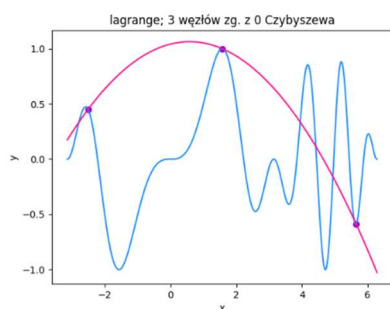
Legenda do wykresów 1-38:

kolor niebieski – funkcja interpolowana,

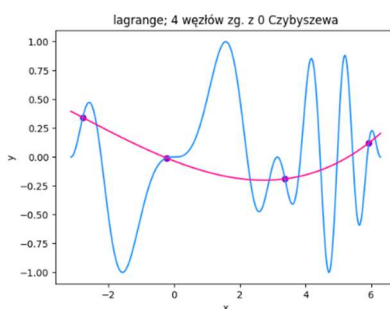
kolor różowy – wielomian interpolujący,

kolor fioletowy – węzły interpolacyjne.

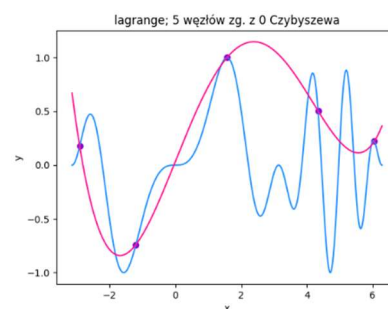
4.1. Wzór w wersji Lagrange'a dla liczby węzłów między 3 i 20



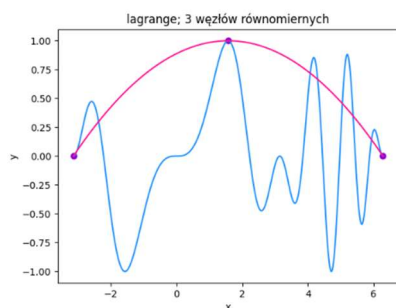
Wykres 1.



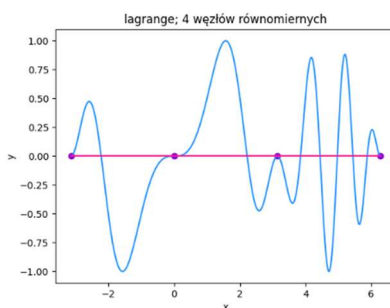
Wykres 2.



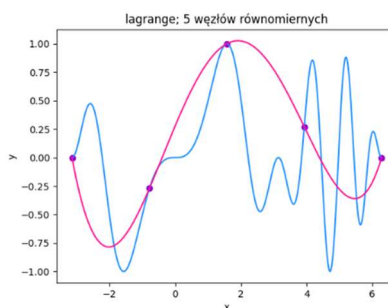
Wykres 3.



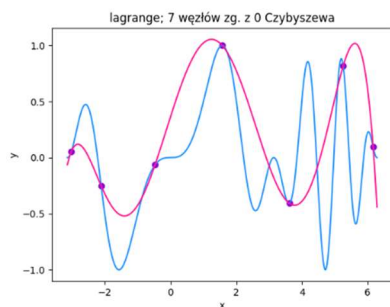
Wykres 4.



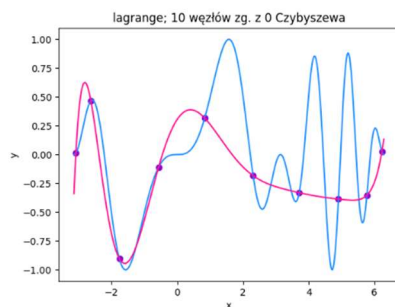
Wykres 5.



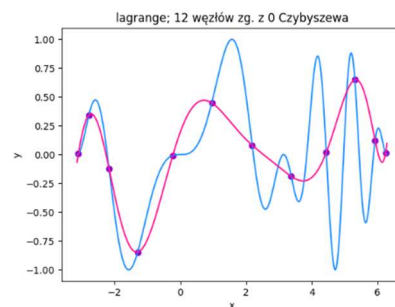
Wykres 6.



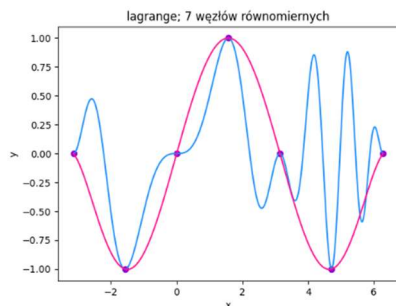
Wykres 7.



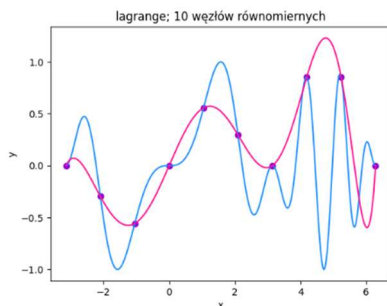
Wykres 8.



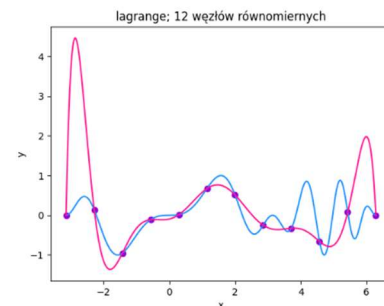
Wykres 9.



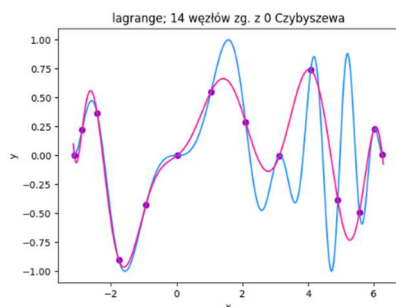
Wykres 10.



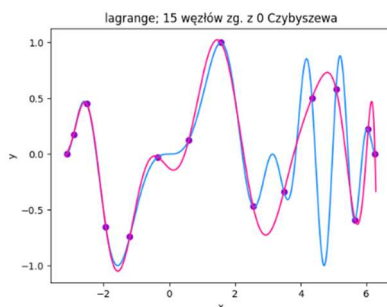
Wykres 11.



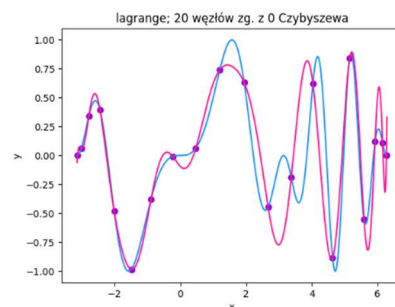
Wykres 12.



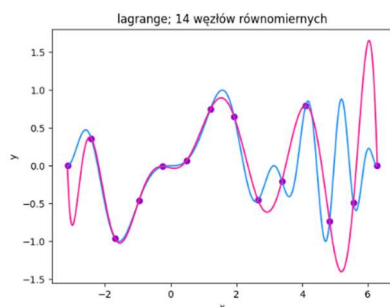
Wykres 13.



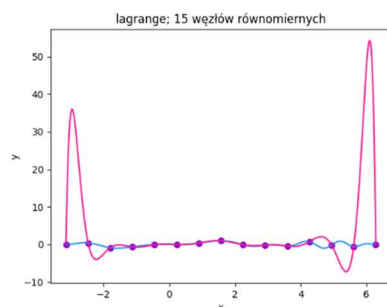
Wykres 14.



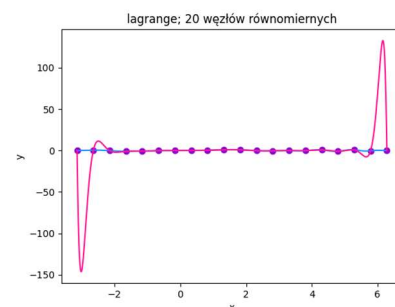
Wykres 15.



Wykres 16.



Wykres 17.



Wykres 18.

4.2. Wzór w wersji Newtona dla liczby węzłów między 3 i 20

W wersji Newtona dla liczby węzłów poniżej 20 wielomiany interpolacyjne są analogiczne do tych uzyskanych z wykorzystaniem wzoru Lagrange'a

4.3. Błąd maksymalny i średniokwadratowy dla wzoru w wersji Lagrange'a

Lagrange; błąd maksymalny

	I. węzłów	równomiernie	zg. z 0 Czyb.
0	3	1.5636	1.7744
1	4	1.0000	1.1677
2	5	1.4035	1.6125
3	7	1.7401	1.6068
4	8	1.2140	1.8099
5	9	3.5497	1.6746
6	10	2.2257	1.2747
7	11	8.4109	2.1986
8	12	4.2356	1.2592
9	13	13.2152	1.6075
10	14	2.2792	1.5996
11	15	54.0446	1.7188
12	20	146.2692	1.0153

Tabela 1.

Lagrange; błąd średniokwadratowy

	I. węzłów	równomiernie	zg. z 0 Czyb.
0	3	0.0387	0.0404
1	4	0.0229	0.0256
2	5	0.0275	0.0302
3	7	0.0282	0.0246
4	8	0.0222	0.0254
5	9	0.0545	0.0249
6	10	0.0251	0.0205
7	11	0.1091	0.0239
8	12	0.0463	0.0192
9	13	0.1539	0.0200
10	14	0.0264	0.0183
11	15	0.5085	0.0173
12	20	1.2736	0.0141

Tabela 2.

4.4. Błąd maksymalny i średniokwadratowy dla wzoru w wersji Newtona

Newton; błąd maksymalny

	I. węzłów	równomiernie	zg. z 0 Czyb.
0	3	1.5636	1.7744
1	4	1.0000	1.1677
2	5	1.4035	1.6125
3	7	1.7401	1.6068
4	8	1.2140	1.8099
5	9	3.5497	1.6746
6	10	2.2257	1.2747
7	11	8.4109	2.1986
8	12	4.2356	1.2592
9	13	13.2152	1.6075
10	14	2.2792	1.5996
11	15	54.0446	1.7188
12	20	146.2692	1.0153

Tabela 3.

Newton; błąd średniokwadratowy

	I. węzłów	równomiernie	zg. z 0 Czyb.
0	3	0.0387	0.0404
1	4	0.0229	0.0256
2	5	0.0275	0.0302
3	7	0.0282	0.0246
4	8	0.0222	0.0254
5	9	0.0545	0.0249
6	10	0.0251	0.0205
7	11	0.1091	0.0239
8	12	0.0463	0.0192
9	13	0.1539	0.0200
10	14	0.0264	0.0183
11	15	0.5085	0.0173
12	20	1.2736	0.0141

Tabela 4.

4.5. Porównanie wzoru Lagrange'a i Newtona

Różnice w uzyskanych wielomianach interpolacyjnych dla wzorów Newtona i Lagrange'a zauważono na poziomie ok. 40 węzłów interpolacyjnych dla węzłów zgodnych z zerami Czybyszewa.

Lagrange; błąd średniokwadratowy

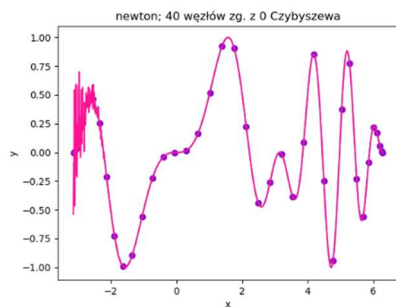
	I. węzłów	równomiernie	zg. z 0 Czyb.
0	21	3.7808	0.0114
1	22	3.4359	0.0106
2	23	1.3159	0.0088
3	24	4.3997	0.0056
4	25	4.7737	0.0045
5	30	1.5906	0.0007
6	35	1.3366	0.0000
7	40	0.1265	0.0000
8	45	0.0507	0.0000
9	50	0.0035	0.0000

Tabela 5.

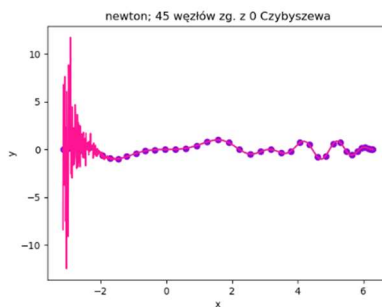
Newton; błąd średniokwadratowy

	I. węzłów	równomiernie	zg. z 0 Czyb.
0	21	3.7808	0.0114
1	22	3.4359	0.0106
2	23	1.3159	0.0088
3	24	4.3997	0.0056
4	25	4.7737	0.0045
5	30	1.5906	0.0007
6	35	1.3366	0.0001
7	40	0.1265	0.0022
8	45	0.0507	0.0476
9	50	0.0035	0.6592

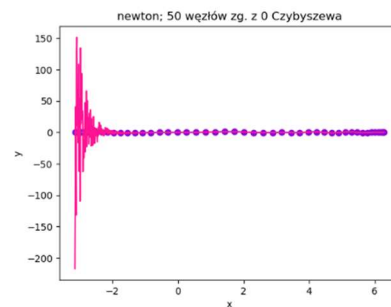
Tabela 6.



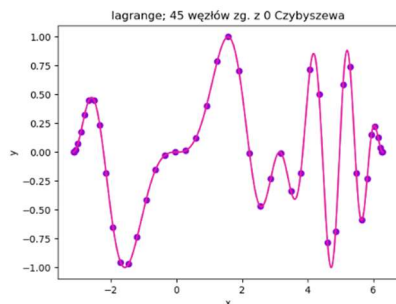
Wykres 19.



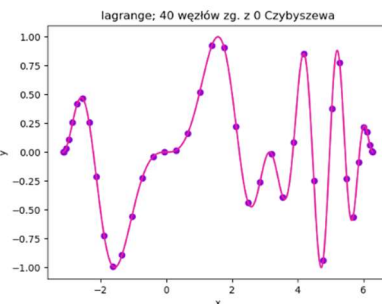
Wykres 20.



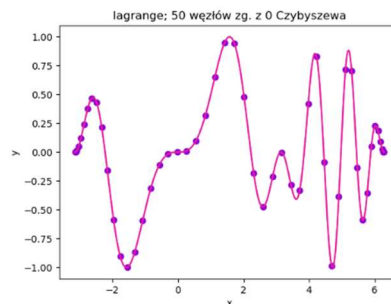
Wykres 21.



Wykres 22.



Wykres 23.



Wykres 24.

Widoczne na wykresach błędy w interpolacji dla wzoru Newtona i węzłów zgodnych z zerami Czybyszewa wynikają najprawdopodobniej z ograniczonej dokładności arytmetyki i reprezentacji liczb w komputerze.

5. PODSUMOWANIE WYNIKÓW

- 5.1. (ad. 1.d.) Do oceny dokładności interpolacji zastosowano wyliczenia błędów maksymalnego i standardowego. Wyniki zostały przedstawione w tabelach 1-4.
- 5.2. (ad. 1.c.) Analiza przedstawionych tabel i wykresów pozwala zauważyć, że interpolacja ma zdecydowanie lepszą jakość dla węzłów rozmieszczonych zgodnie z zerami wielomianu Czybyszewa. Rozmieszczenie równomierne daje gorsze wyniki.
- 5.3. (ad. 1.e.) Funkcja jest najlepiej przybliżona przy 20 węzłach rozmieszczonych zgodnie z zerami Czybyszewa. Osiąga wtedy najmniejszy błąd maksymalny oraz średniokwadratowy. Warto jednak zwrócić uwagę, że przy tej samej liczbie węzłów rozmieszczonych równomiernie, jakość interpolacji jest wielokrotnie gorsza. Jest to wynikiem efektu Runge'go.
- 5.4. (ad. 1.f.) Efekt Runge'go można zauważyć przy równomiernym rozmieszczeniu np. 15 lub 20 węzłów interpolacyjnych dla rozpatrywanej funkcji. Świadczy o tym znaczące pogorszenie jakości interpolacji szczególnie na krańcach przedziału oraz wysoki błąd maksymalny.
- 5.5. Różnice w wynikach zastosowania wzoru Lagrange'a i Newtona zostały przedstawione i wyjaśnione w punkcie 4.5.