Aproksymacja średniokwadratowa trygonometryczna

Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice

Laboratorium 6

Aleksandra Smela

SPIS TREŚCI

1. OPIS ZADANIA

1.1. Dla funkcji $f(x) = \sin x \cdot \sin\left(\frac{2x^2}{\pi}\right)$ na przedziale $(-\pi, 2\pi)$ wyznaczyć wartości w n dyskretnych punktach. Następnie w oparciu o te punkty wyznaczyć przybliżenie funkcji wykorzystując **aproksymację średniokwadratową trygonometryczną**.

1.2. Wykonać eksperymenty numeryczne dla różnej liczby punktów dyskretyzacji oraz układów funkcji bazowych zawierających różną liczbę funkcji.

1.3. Oszacować błędy przybliżenia.

1.4. Graficznie zilustrować interesujące przypadki.

2. UŻYTE NARZĘDZIA I ŚRODOWISKO

- Komputer z systemem Windows 10
- Procesor: AMD Ryzen 7 3700X 3,6GHz
- Pamięć RAM: 32 GB
- Język programowania: Python 3
- Użyte biblioteki: numpy, matplotlib, pandas

3. SPOSÓB REALIZACJI ZADANIA

3.1. Wstęp teoretyczny

Aby dokonać aproksymacji średniokwadratowej trygonometrycznej wykorzystano następujące wzory:

$F_m(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{i=1}^{m}\left(a_j \cdot \cos(j \cdot x) + b_j \cdot \sin(j \cdot x)\right)$ *wzór I*

$a_j = \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \cos\,(j \cdot x_i)$ *wzór II*

$b_j = \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \sin\,(j \cdot x_i)$ *wzór III*

Gdzie:

- $(x_i, f(x_i))$ dla *i=0, 1, …, n-1* to punkty dyskretyzacji;
- n – liczba punktów dyskretyzacji;
- $F_m(x)$ to funkcja aproksymująca;
- m – stopień wielomianów bazowych.

Z twierdzenia Weierstraßa dla funkcji okresowych wynika, że wielomianami trygonometrycznymi można aproksymować dowolną funkcję okresową. W przypadku tej metody aproksymacji najwyższy dopuszczalny stopień wielomianów bazowych m wynosi $m = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$. Dla wyższych stopni m problem jest źle uwarunkowany.

Co istotne, w przypadku aproksymacji wielomianami trygonometrycznymi należy przeskalować przedział wejściowy (a, b) (w tym przypadku $(-\pi, 2\pi)$) na przedział $(0, 2\pi)$. Do tego celu dla każdego punktu x_i użyto wzorów:

$x_{i\ \mathrm{new}} = \mathrm{p} \cdot x_i + \mathrm{q}$ *wzór IV*

$\mathrm{p} = \frac{-2\pi}{\mathrm{b-a}}$ *wzór V*

$\mathrm{q} = \frac{2\pi \mathrm{a}}{\mathrm{b-a}}$ *wzór VI*

Tak wyliczone $x_{i\ \mathrm{new}}$ są użyte we wzorach I-III w miejsce x_i.

3.2. Oznaczenia

W dalszej części sprawozdania utrzymano oznaczenia**: *n* to liczba punktów dyskretyzacji**, a ***m* to stopień wielomianów bazowych** – zgodnie z wstępem teoretycznym (3.1.).

3.3. Przygotowanie modułu z niezbędnymi funkcjami

Przygotowano moduł *approximation.py* zawierający funkcje niezbędne do zrealizowania zadania.

- *approx(points, m)*

  Funkcja przyjmuje *points*, jako listę krotek postaci: *(x, f(x))*, gdzie *x* to liczba, *f(x)* to wartość funkcji aproksymowanej dla *x*.

  Parametr *m* określa najwyższy stopień wielomianów bazowych.

  Funkcja zwraca funkcję *F(x)*, która dla zadanego *x* zwraca wartość funkcji aproksymującej.

- *generate_points(n, interval, f_x)*

  Funkcja przyjmuje *n* jako liczbę punktów do wygenerowania, *interval*, jako krotkę *(a, b)*, która określa przedział, z którego zostaną wygenerowane współrzędne *x* punktów oraz *f_x* jako funkcję od *x*.

  Funkcja zwraca listę krotek postaci *(x, f_x(x)).*

- *max_error(f1, f2, interval)* oraz *mean_squared_error(f1, f2, interval)*

  Funkcje zwracające odpowiednio błąd maksymalny i błąd średniokwadratowy zgodnie z wzorami opisanymi w punkcie 3.2.. Parametr *interval* określa przedział, na którym liczone są błędy.

- *draw_approx(…)*

  Funkcja rysuje wykres funkcji aproksymującej i aproksymowanej na podstawie 1000 punktów z przedziału, zaznacza punkty dyskretyzacji i zapisuje wykres do pliku o określonej ścieżce.

3.4. Błędy interpolacji

Do wyliczania błędów aproksymacji zastosowano wzory:

- Błąd maksymalny wyliczono z wzoru: : $max_{i=0,\dots,1000}|f_1(x_i) - f_2(x_i)|$
- Błąd średniokwadratowy wyliczono z wzoru: : $\frac{1}{1000}\sqrt{\sum_{i=0}^{1000}(f_1(x_i) - f_2(x_i))^2}$

gdzie f_1 to funkcja aproksymowana, natomiast f_2 to funkcja aproksymująca. Liczby x_i są równomiernie rozmieszczone na określonym przedziale.

3.5. Testy

W module *test*.py przygotowano wykresy aproksymacji oraz tabele błędów dla następujących parametrów:

- *m*: 2, 3, 5, 7, 10, 14, 15, 20, 25, 30;
- *n*: 5, 7, 10, 15, 20, 30, 40, 50, 80, 100, 200.

4. WYNIKI I ICH ANALIZA

Legenda do wykresów:

- **kolor niebieski** – funkcja aproksymowana,
- **kolor różowy** – funkcja aproksymująca,
- **kolor fioletowy** – punkty dyskretyzacji.

4.1. Tabele błędów

Tabele błędów posłużą do analiz przeprowadzonych w kolejnych punktach.

Kolorem ciemnoszarym oznaczono wyniki obliczeń dla problemów źle uwarunkowanych. To kiedy problem jest, źle uwarunkowany w aproksymacji trygonometrycznej opisano we wstępie teoretycznym (3.1.). Wartości te nie będą brane pod uwagę w analizie wyników poza punktem 4.5., który został im poświęcony.

4.1.1. Błąd maksymalny

m → n ↓	2	3	5	7	10	15	20	25	30
5	1.157	1.0991	1.1696	1.2251	2.1714	3.8357	5.5017	7.1654	8.8278
7	1.3816	1.5353	1.9616	1.6934	1.549	2.8735	3.9041	5.1302	6.6134
10	1.4468	1.6844	1.8926	1.6853	1.4141	1.4553	2.4655	2.7958	4.0159
15	1.0157	0.9736	1.3075	1.353	1.3228	0.9995	1.825	2.0143	2.7211
20	0.9994	1.0144	1.0605	0.8556	0.9537	0.9863	1.0044	1.8946	2.0018
30	0.9996	1.0097	1.0933	0.9143	0.5174	0.0961	0.5017	1.1215	1.0201
40	0.9995	1.0125	1.0975	0.9137	0.5176	0.0653	0.0489	0.0654	0.5104
50	0.9995	1.0142	1.0998	0.9129	0.5176	0.0613	0.0399	0.0393	0.0417
80	0.9995	1.0166	1.1032	0.9116	0.5174	0.0573	0.0262	0.0255	0.025
100	0.9995	1.0174	1.1043	0.9112	0.5174	0.0578	0.0215	0.0206	0.0201
200	0.9995	1.0191	1.1065	0.9103	0.5173	0.0589	0.0135	0.0108	0.0103

tabela I: błąd maksymalny

4.1.1. Błąd średniokwadratowy

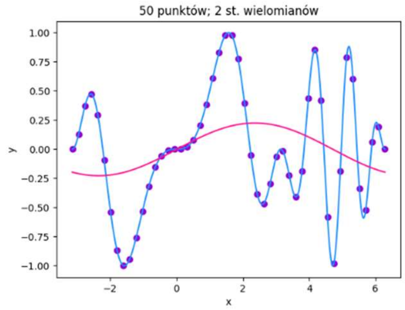
m → n ↓	2	3	5	7	10	15	20	25	30
5	0.033	0.0296	0.0305	0.0367	0.0442	0.0567	0.0671	0.0758	0.0839
7	0.0347	0.0323	0.0348	0.0371	0.0426	0.0599	0.0732	0.0843	0.0961
10	0.0347	0.0325	0.0325	0.0328	0.036	0.038	0.0496	0.0532	0.0635
15	0.0307	0.026	0.0232	0.0241	0.0225	0.0288	0.0391	0.0448	0.0504
20	0.0306	0.0253	0.021	0.0187	0.0156	0.0189	0.0293	0.0378	0.043
30	0.0306	0.0253	0.0209	0.0184	0.0116	0.0025	0.0109	0.0196	0.0303
40	0.0306	0.0253	0.0209	0.0184	0.0116	0.0019	0.0016	0.0019	0.011
50	0.0306	0.0253	0.0209	0.0184	0.0115	0.0017	0.0013	0.0013	0.0013
80	0.0306	0.0253	0.0208	0.0184	0.0115	0.0014	0.0008	0.0008	0.0008
100	0.0306	0.0252	0.0208	0.0184	0.0115	0.0013	0.0007	0.0006	0.0006
200	0.0306	0.0252	0.0208	0.0183	0.0115	0.0011	0.0004	0.0003	0.0003

tabela II: błąd średniokwadratowy

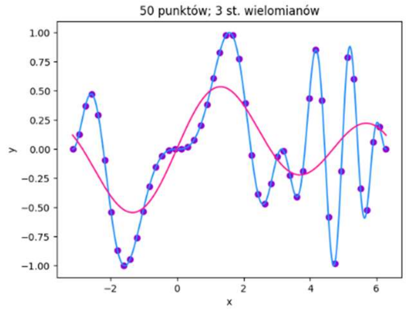
4.2. Aproksymacja dla różnej liczby wielomianów bazowych

Aby zbadać aproksymację dla różnej liczby wielomianów bazowych w ramach tej samej liczby punktów przeanalizowano aproksymację dla 50 punktów dyskretyzacji. Ta analiza opiera się na wynikach zobrazowanych przez wykresy w punkcie 4.2.1. oraz błędy maksymalne i średniokwadratowe, które znajdują się w wierszach tabel I i II (4.1.) wyróżnionych kolorem **fioletowym**.

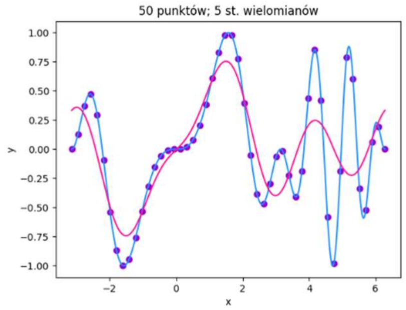
4.2.1. Wykresy



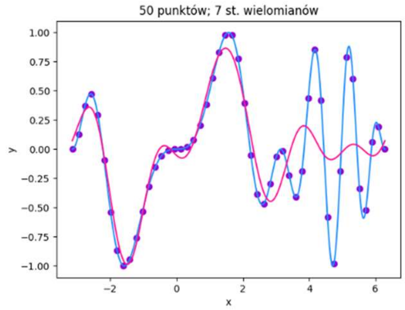
wykres I



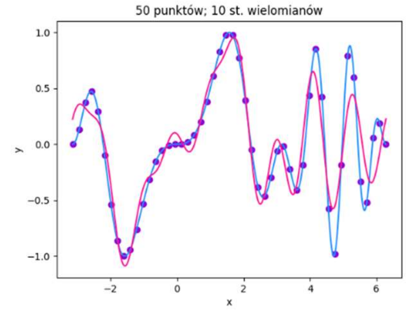
wykres II



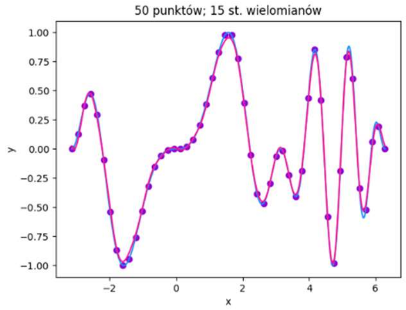
wykres III



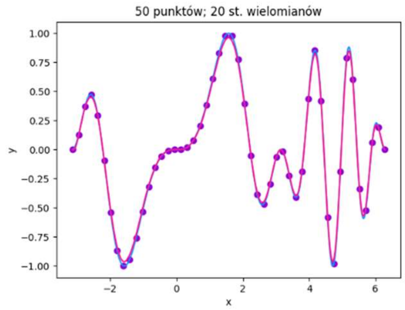
wykres IV



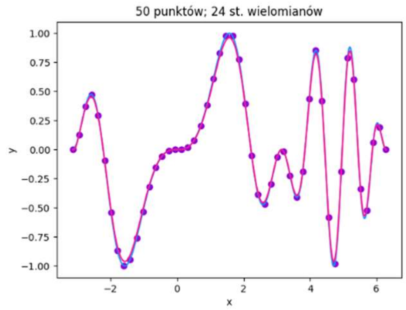
wykres V



wykres VI



wykres VII



wykres VIII

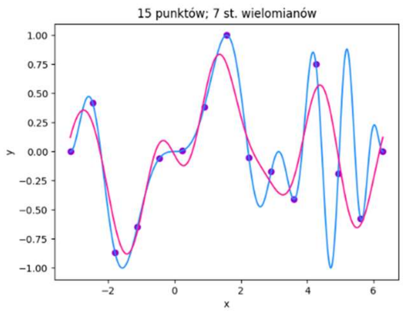
4.2.2. Wnioski

- Wraz ze zmianą parametru *m* zmienia się liczba ekstremów lokalnych funkcji.
- Przyglądając się wykresom I-VIII można zauważyć, że wraz ze wzrostem stopnia wielomianów wielomianów bazowych znacznie rośnie dokładność aproksymacji. Zasadę tę potwierdza obserwacja wartości błędów średniokwadratowego i maksymalnego. Na ogół błędy maleją wraz ze wzrostem liczby wielomianów bazowych. Wyjątkiem jest błąd maksymalny przy przejściu parametru *m* z wartości 10 na 15.
- Funkcja jest tym bardziej gładka im mniejszy jest stopień wielomianów bazowych.
- Już dla *m=15* przy 50 punktach dyskretyzacji błąd średniokwadratowy jest mniejszy niż 0,01.
- Obserwując zmiany wartości błędów przy zmianie liczby wielomianów bazowych, przy ustalonej liczbie punktów dyskretyzacji można zauważyć zależność – im więcej wielomianów tym mniejszy błąd. Nie jest to jednak zależność, która zachodzi zawsze – czasami dla większego *m* błąd średniokwadratowy lub maksymalny jest większy.

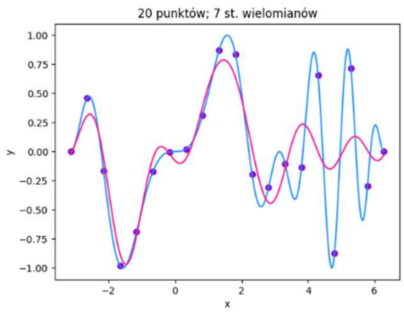
4.3. Aproksymacja dla różnej liczby punktów dyskretyzacji

Aby zbadać aproksymację dla różnej liczby punktów dyskretyzacji w ramach tej samej liczby wielomianów bazowych przeanalizowano aproksymację dla 7 wielomianów bazowych. Ta analiza opiera się na wynikach zobrazowanych przez wykresy w punkcie 4.3.1. oraz błędy maksymalne i średniokwadratowe, które znajdują się w wierszach tabel I i II (4.1.) wyróżnionych kolorem **błękitnym**.

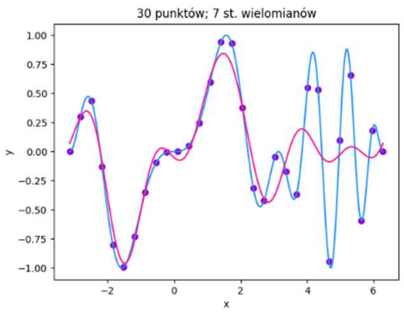
4.3.1. Wykresy



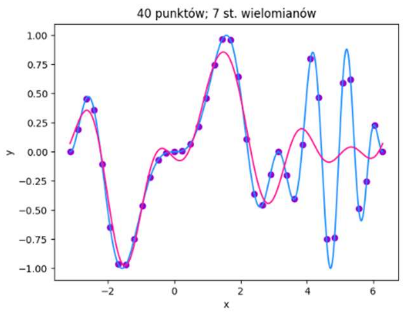
wykres IX



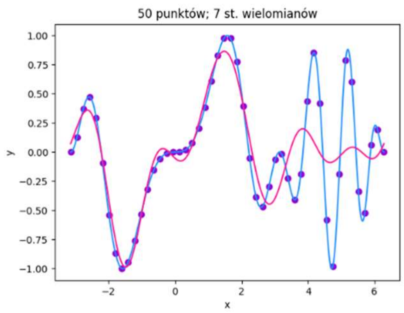
wykres X



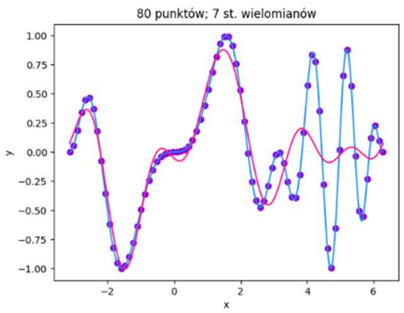
wykres XI



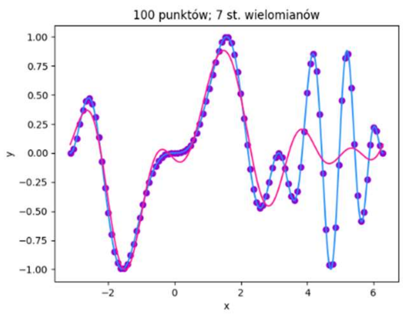
wykres XII



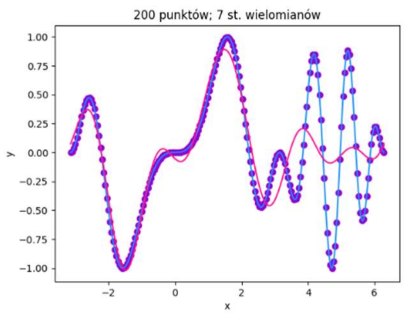
wykres XIII



wykres XIV



wykres XV



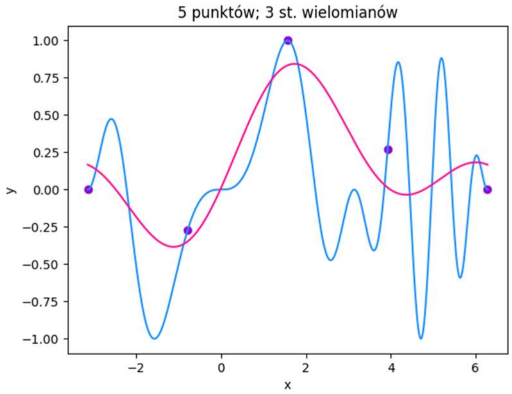
wykres XVI

4.3.2. Wnioski

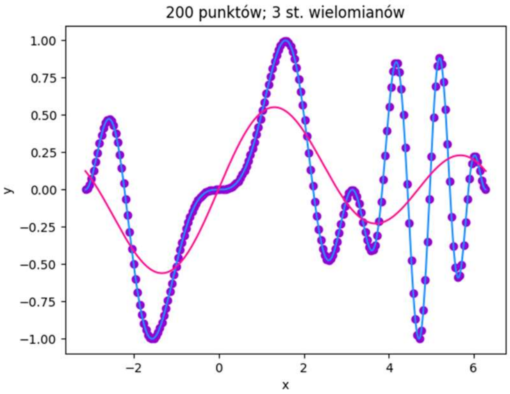
- Dla ustalonej liczby wielomianów bazowych i zmieniającej się liczby punktów dyskretyzacji funkcja aproksymująca ma podobny kształt. Np. w analizowanym przypadku wykresy X-XVI mają tyle samo ekstremów lokalnych. Ta obserwacja została dokładniej opisana w podpunkcie 4.4.
- W badanym przypadku wraz z wzrostem n błąd maksymalny na ogół maleje – wyjątkiem jest przejście z 20 do 30 punktów dyskretyzacji. Dla innych wartości m również można zauważyć podobną zależność, jednak nie zachodzi ona zawsze – istnieją pewne wyjątki, gdzie wzrost n nie oznacza spadku błędu maksymalnego.
- Dla wszystkich badanych przypadków przy ustalonym m wraz z wzrostem n maleje wartość błędu średniokwadratowego. Spadek ten nie jest jednak bardzo

znaczący, a przy pewnej wartości *n* wartość błędu się stabilizuje i praktycznie nie zmienia.

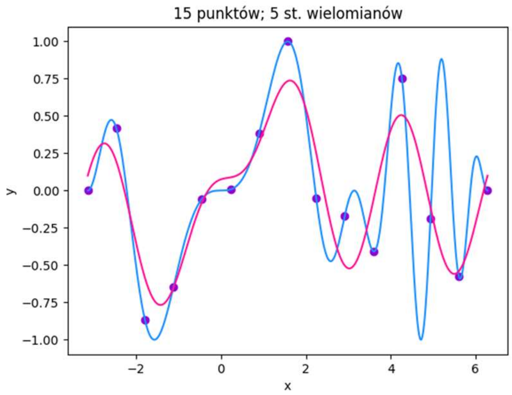
4.4. Kształt funkcji dla ustalonej wartości parametru *m*



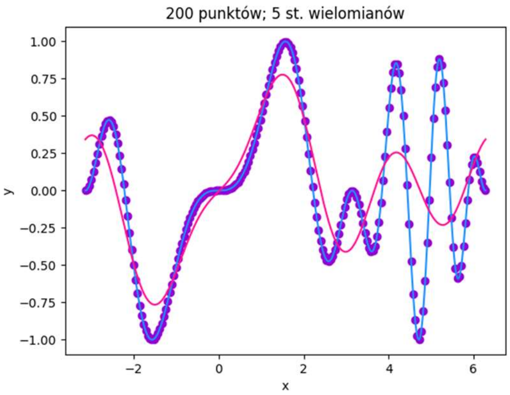
wykres XVII



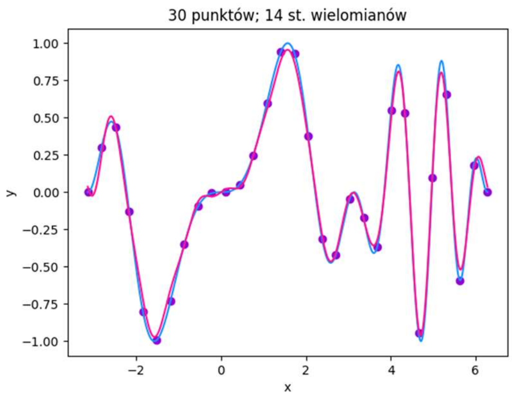
wykres XVIII



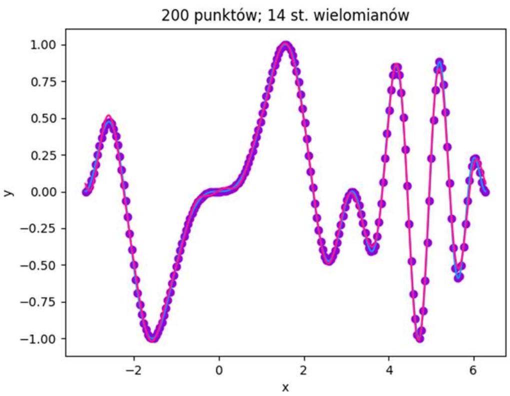
wykres XIX



wykres XX



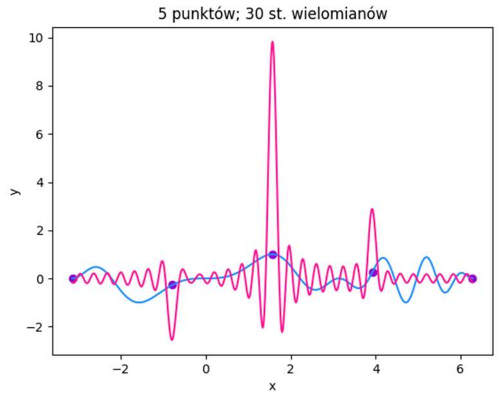
wykres XXI



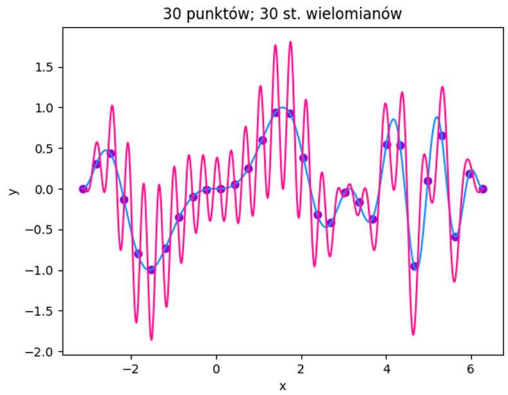
wykres XXII

Wykresy XVII-XXII obrazują, że liczba punktów dyskretyzacji nie wpływa bardzo znacząco na kształt funkcji aproksymującej. Funkcja przy takiej samej licznie wielomianów bazowych mają taką samą liczbę ekstremów lokalnych i podobne ich rozmieszczenie.

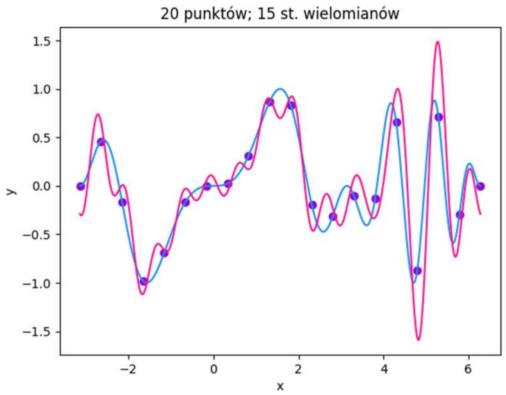
4.5. Problem źle uwarunkowany



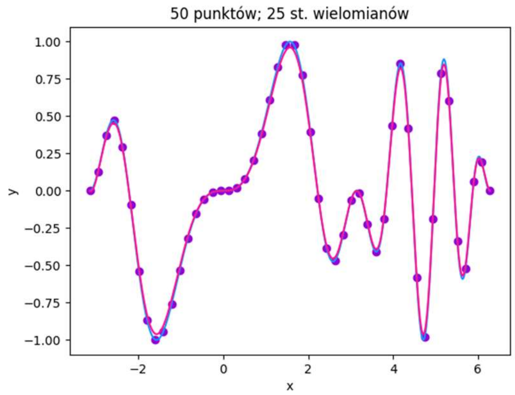
wykres XXIII



wykres XXIV



wykres XXV



wykres XXVI

Wykresy XXIII-XXVI obrazują aproksymację dla problemów źle uwarunkowanych – gdy liczba punktów *n* jest zbyt mała w porównaniu do stopnia wielomianów bazowych *m*.

Wyliczone błędy dla problemów źle uwarunkowanych nie są zawsze większe (lub mniejsze) od tych dobrze uwarunkowanych. Podobnie zdarza się, że wykresy funkcji aproksymujących pokrywają się z wykresami funkcji aproksymowanych (np. wykres XXVI).

Numeryczne uwarunkowanie zadania, to parametr pozwalający ocenić wpływ drobnych zmian parametrów wejściowych na wynik działania. Problemy dobrze uwarunkowane to takie, w których niewielkie zmiany (błędy) parametrów wejściowych będą powodowały niewielkie zmiany wyników obliczeń.

5. PODSUMOWANIE

- Aproksymacja trygonometryczna dobrze przybliża zadaną funkcję. Dla badanych przypadków (gdy problem był dobrze uwarunkowany) błąd średniokwadratowy nie przekroczył 0,035. W tym są również przypadki gdy mamy niewiele punktów dyskretyzacji, np. 5 lub 7.
- Dla mniejszej liczby wielomianów bazowych funkcja aproksymująca jest gładsza – dla większej liczby lepiej przybliża funkcję aproksymowaną. Z tego powodu parametr *m* należy dobrać zgodnie z oczekiwanym rezultatem.
- Parametr *n* nie wpływa bardzo znacząco na ogólny kształt funkcji aproksymującej. Szczególnie dla odpowiednio dużych *n* kolejne punkty nie zmieniają w sposób istotny jakości aproksymacji.

6. BIBLIOGRAFIA

[1] Wykłady dr Katarzyny Rycerz;

[2] Wykład 4: Aproksymacja; Algorytmy Obliczeniowe; Wydział Elektroniki, Telekomunikacji i Informatyki Politechniki Gdańskiej

[3] Materiały dr Wojciecha Myszki – Politechnika Wrocławska