

Rozwiązywanie układów równań liniowych metodami iteracyjnymi

Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice

Laboratorium 11

Aleksandra Smela

SPIS TREŚCI

1	Użyte narzędzia i środowisko.....	2
2	Opis zadania.....	2
2.1	Zadanie I	2
2.2	Zadanie II.....	2
3	Sposób realizacji zadania	2
3.1	Wstęp teoretyczny.....	2
3.1.1	Twierdzenie o zbieżności procesu iteracyjnego rozwiązywania $Ax=b$	2
3.1.2	Promień spektralny	3
3.1.3	Metoda Jacobiego.....	3
3.2	Szczegóły techniczne.....	3
3.2.1	Sposób szukania promienia spektralnego.....	3
3.2.2	Sposób liczenia normy	3
3.3	Przeprowadzone testy.....	3
4	Wyniki i ich analiza	4
4.1	Zadanie II – promień spektralny.....	4
4.2	Zadanie I – rozwiązania układu równań.....	4
4.2.1	Interpretacja zer w tabelach czasu.....	4
4.2.2	Różne rozmiary układu i kryteria stopu.....	5
4.2.3	Różne wartości parametru ρ	7
4.2.4	Ekstremalne wartości parametru ρ	8
4.2.5	Różne wektory początkowe	10
4.2.6	Kryterium rezydualne i kryterium przyrostowe – podsumowanie	11
5	Podsumowanie	11
6	Bibliografia	11

1 UŻYTE NARZĘDZIA I ŚRODOWISKO

- Komputer z systemem Windows 10
- Procesor: Intel Core i5-1035G4 1.5 GHz
- Pamięć RAM: 8 GB
- Język programowania: Python 3
- Biblioteki: pandas, numpy, time, random

2 OPIS ZADANIA

Dany jest układ równań liniowych $Ax=b$. Elementy macierzy A są zadane wzorem:

$$\begin{cases} a_{i,i} = 10 \\ a_{i,j} = \frac{1}{|i-j|+4} \text{ dla } i \neq j \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

Przyjmij wektor x jako dowolną n -elementową permutację ze zbioru $\{1, -1\}$ i oblicz wektor b .

2.1 Zadanie I

Metodą Jacobiego rozwiąż układ równań liniowych $Ax=b$ (przyjmując jako niewiadomą wektor x).

Jako kryterium stopu przyjmij kolejno:

- 1) Kryterium przyrostowe

$$\|x^{(i+1)} - x^{(i)}\| < \rho$$

- 2) Kryterium rezydualne

$$\|Ax^{(i)} - b\| < \rho$$

Obliczenia wykonaj dla różnych rozmiarów układu n , dla różnych wektorów początkowych, a także różnych wartości ρ w kryteriach stopu.

Podaj w jaki sposób liczono normę.

Wyznacz liczbę iteracji oraz sprawdź różnicę w czasie obliczeń dla obu kryteriów stopu.

Sprawdź dokładność obliczeń.

2.2 Zadanie II

Dowolną metodą znajdź **promień spektralny** macierzy iteracji (dla różnych rozmiarów układu – takich, dla których znajdowane były rozwiązania układu).

Sprawdź, czy spełnione są założenia twierdzenia o zbieżności metody dla zadanego układu.

Opisz metodę znajdowania promienia spektralnego.

3 SPOSÓB REALIZACJI ZADANIA

3.1 Wstęp teoretyczny

3.1.1 Twierdzenie o zbieżności procesu iteracyjnego rozwiązywania $Ax=b$

Ciąg rozwiązań iteracyjnych postaci $x^{(t+1)} = M * x^{(t)} + W$, gdzie:

$$A = B + R, \quad M = I - B^{-1}A, \quad W = B^{-1}b$$

z dowolnym wektorem startowym $x^{(0)}$ jest zbieżny do jedynego granicznego $x^{(\infty)}$ wtedy i tylko wtedy, gdy promień spektralny macierzy iteracji M jest mniejszy od 1, tzn.: $\nu(M) < 1$.

3.1.2 Promień spektralny

Promień spektralny macierzy M to największa co do wartości bezwzględnej wartość własna macierzy M , tzn.: $\nu = \max(|\lambda_i|)$, gdzie λ_i to i -ta wartość własna macierzy M .

3.1.3 Metoda Jacobiego

W metodzie Jacobiego aby rozwiązać iteracyjnie układ $Ax=b$ korzystamy z wzoru:

$$x^{(t+1)} = D^{-1} * [b - (L + U) * x^{(t)}]$$

gdzie:

$A=L+D+U$ oraz L – macierz dolnotrójkątna, U – macierz górnortrójkątna, D – macierz diagonalna.

Powyższy wzór macierzowy można przekształcić na wzór roboczy:

$$x^{(t+1)}_i = \frac{1}{a_{ii}} * [b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x^{(t)}_j] \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Na powyższym wzorze roboczym widać, że macierz A nie może mieć zer na przekątnej.

3.2 Szczegóły techniczne

3.2.1 Sposób szukania promienia spektralnego

Aby znaleźć promień spektralny macierzy iteracji M wykorzystałam kilka funkcji z biblioteki *numpy*. Wykorzystuję funkcję *eigvals* z pakietu *linalg*, która zwraca wartości własne macierzy M . Następnie wyliczam wartości bezwzględne znalezionych wartości własnych (*np.abs*) i jako promień spektralny wybieram największą z nich (*np.max*).

Macierz iteracji M w metodzie Jacobiego to macierz $-D^{-1}(L + U)$. To jej promień spektralny wyliczam w celu sprawdzenia, czy spełnione są założenia twierdzenia o zbieżności procesu iteracyjnego przytoczonego w podpunkcie 3.1.1.

3.2.2 Sposób liczenia normy

W realizacji zadania zastosowałam normę maksimum postaci:

$$d(x^a, x^b) = \|x^a - x^b\| = \max_{i=0, \dots, n} |x^a_i - x^b_i|$$

Norma była liczona podczas sprawdzania warunków stopu ($d(x^{(t)}, x^{(t+1)})$, $d(Ax^{(t)}, b)$) w iteracjach oraz przy ocenie dokładności rozwiązań ($d(x^{zadany}, x^{obliczony})$).

3.3 Przeprowadzone testy

Testy przeprowadzono dla różnych:

1) Kryteriów stopu

Przetestowana oba kryteria, które zostały opisane w opisie zadania 2.1 – kryterium rezydualne i kryterium przyrostowe.

2) Rozmiarów układu

Przetestowano 20 różnych rozmiarów układu:

3, 4, 5, 7, 10, 12, 15, 20, 30, 40, 50, 75, 100, 125, 150, 175, 200, 250, 300, 500

3) Wektorów początkowych

Przetestowano 3 różne wektory początkowe:

- a) wektor zerowy,
 - b) rozwiązanie układu pomnożone przez -10,
 - c) rozwiązanie układu pomnożone przez -100.
- 4) Wartości ρ w kryteriach stopu

Przetestowano 7 różnych wartości ρ :

1e-15, 1e-12, 1e-10, 1e-8, 1e-5, 0.01, 0.1

4 WYNIKI I ICH ANALIZA

4.1 Zadanie II – promień spektralny

Promień spektralny został wyliczony zgodnie z opisem w punkcie 3.2.1, a wyniki przedstawiono w tabeli I.

Jak można zauważyć w tabeli dla każdego rozmiaru układu n promień spektralny macierzy iteracji jest mniejszy od 1. Tym samym spełnione są założenia twierdzenia o zbieżności procesu iteracyjnego, które zostało przytoczone w punkcie 3.1.1. Zatem proces iteracyjny jest zbieżny i możemy się spodziewać, że z każdą iteracją rozwiązanie jest bliższe prawidłowemu.

n	promień spektralny
3	0,0378
4	0,0539
5	0,0686
7	0,0948
10	0,1279
12	0,1470
15	0,1724
20	0,2083
30	0,2644
40	0,3077
50	0,3430
75	0,4107
100	0,4609
125	0,5009
150	0,5341
175	0,5626
200	0,5875
250	0,6295
300	0,6642
500	0,7626

tabela I:
promień spektralny

4.2 Zadanie I – rozwiązania układu równań

4.2.1 Interpretacja zer w tabelach czasu

Co istotne zera w tabeli reprezentującej czas realizacji algorytmów nie wynikają z zerowego czasu obliczeń. Metody mierzące czas oraz reprezentacja liczb zmiennoprzecinkowych mają ograniczoną precyzję. Zera w tabeli oznaczają, że zmierzony w tamtych przypadkach czas był za mały by mógł zostać zmierzony.

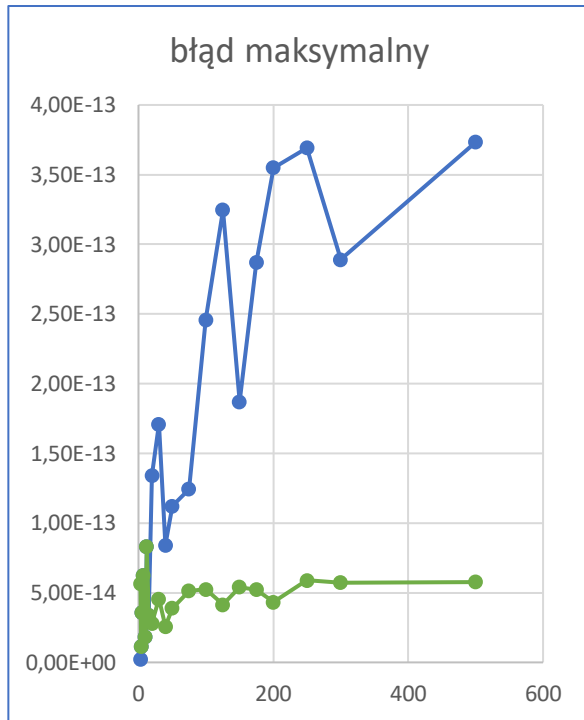
4.2.2 Różne rozmiary układu i kryteria stopu

Analizę danych rozpoczęłam od porównania wyników dla różnych rozmiarów układu i kryteriów stopu. W tabeli II przedstawiono błąd maksymalny (obliczony zgodnie z normą opisaną w 3.2.2), dzięki któremu można ocenić dokładności znalezionej rozwiązania oraz liczbę iteracji i czas potrzebny do znalezienia rozwiązań. Dla lepszego zobrazowania dane przedstawiono również na wykresach I-III.

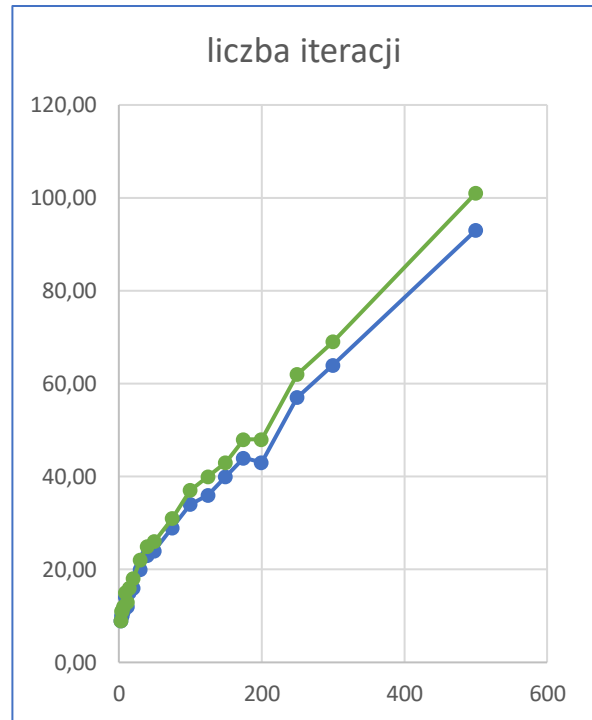
Obliczenia zostały przeprowadzone dla parametru $\rho = 1e - 12$ w kryteriach stopu oraz wektora zerowego jako wektora początkowego.

rozmiar układu	błąd maksymalny		liczba iteracji		czas [s]	
	przyrostowe	rezydualne	przyrostowe	rezydualne	przyrostowe	rezydualne
3	2,109E-15	5,640E-14	9	9	0,00000	0,00057
4	1,155E-14	1,155E-14	10	11	0,00000	0,00000
5	3,575E-14	3,575E-14	10	11	0,00000	0,00100
7	6,262E-14	6,262E-14	11	12	0,00100	0,00000
10	1,821E-14	1,821E-14	14	15	0,00000	0,00100
12	8,327E-14	8,327E-14	12	13	0,00000	0,00100
15	3,375E-14	3,375E-14	15	16	0,00100	0,00100
20	1,343E-13	2,820E-14	16	18	0,00000	0,00293
30	1,710E-13	4,552E-14	20	22	0,00200	0,00497
40	8,415E-14	2,576E-14	23	25	0,00416	0,00800
50	1,121E-13	3,886E-14	24	26	0,00867	0,02499
75	1,243E-13	5,129E-14	29	31	0,02070	0,04725
100	2,458E-13	5,240E-14	34	37	0,05309	0,07948
125	3,246E-13	4,152E-14	36	40	0,08068	0,15396
150	1,870E-13	5,396E-14	40	43	0,15394	0,33516
175	2,870E-13	5,218E-14	44	48	0,20491	0,48855
200	3,550E-13	4,330E-14	43	48	0,35377	0,66658
250	3,693E-13	5,884E-14	57	62	0,74806	1,54573
300	2,891E-13	5,729E-14	64	69	1,03109	2,23062
500	3,733E-13	5,773E-14	93	101	3,99345	8,34147

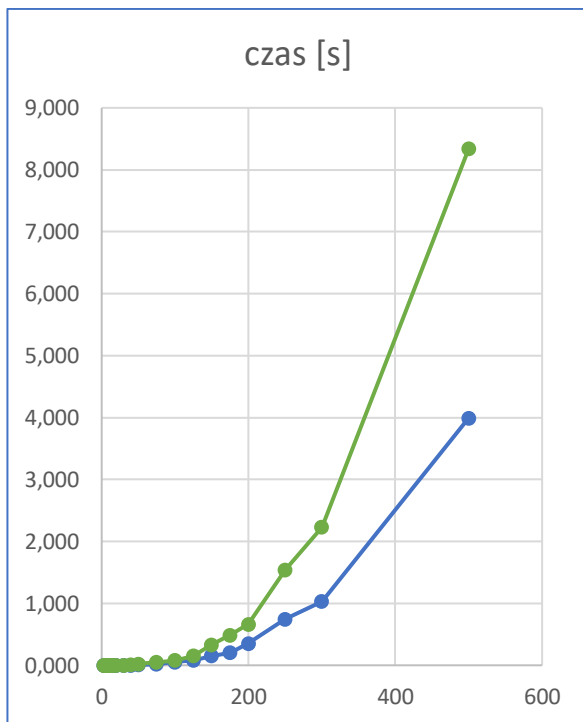
tabela II: wyniki dla różnych rozmiarów układu



wykres I: dokładność rozwiązań dla różnych rozmiarów układu



wykres II: liczba iteracji dla różnych rozmiarów układu



wykres III: czas rozwiązywania dla różnych rozmiarów układu

Legenda:

- kryterium rezydualne
- kryterium przyrostowe

Dokładność rozwiązania jest bardzo wysoka dla wszystkich rozmiarów układów i obu kryteriów stopu. Jest to zgodne z oczekiwaniem – wszystkie testowane układy spełniają założenia twierdzenia o zbieżności. Dla analizowanego przypadku na ogół dokładność maleje wraz z wzrostem rozmiaru układu (bo błąd maksymalny rośnie). Nie jest to jednak spadek jednostajny. Bardziej dokładne w badanym przypadku jest kryterium rezydualne. Chociaż na wykresie te

różnice wydają się bardzo znaczące, to warto zwrócić uwagę na rząd wielkości, który jest na tyle mały, że te różnice są pomijalne.

Liczba iteracji wzrasta wraz z rozmiarem układu. Chociaż liczba iteracji jest bardzo podobna niezależnie od kryterium stopu, to o kilka więcej iteracji wykonywanych jest przy kryterium rezydualnym. Różnica w liczbie iteracji wzrasta wraz z rozmiarem układu, ale dla maksimum osiąganego dla $n=500$ ta różnica wynosi 7.

Czas wzrasta wraz z wzrostem rozmiaru układu, a wykres tego wzrostu przypomina parabolę, w odróżnieniu od wykresu obrazującego liczbę iteracji. Czas dla kryterium rezydualnego jest większy niż dla kryterium przyrostowego i różnica ta zwiększa się wraz z wzrostem rozmiaru układu. Najprawdopodobniej wynika to z czasu potrzebnego na sprawdzanie kryterium stopu. W kryterium rezydualnym oprócz policzenia normy musimy jeszcze wymnożyć macierz A przez wektor.

Podobne zależności i własności zauważono dla innych parametrów – wektora początkowego i ρ .

4.2.3 Różne wartości parametru ρ

W tabeli III przedstawiono wyniki dla różnych wartości parametru ρ w kryterium stopu i trzech rozmiarów układu: 10, 50 i 200. Wektorem początkowym był wektor zerowy.

rozmiar układu	parametr stopu	błąd maksymalny		liczba iteracji		czas [s]	
		przyr.	rezyd.	przyr.	rezyd.	przyr.	rezyd.
10	0,1	7,616E-03	7,616E-03	1	2	0,00100	0,00000
	0,01	9,485E-04	1,214E-04	2	4	0,00100	0,00000
	1E-05	2,538E-07	2,538E-07	6	7	0,00000	0,00000
	1E-08	5,310E-10	5,310E-10	9	10	0,00000	0,00095
	1E-10	8,685E-12	8,685E-12	11	12	0,00000	0,00100
	1E-12	1,821E-14	1,821E-14	14	15	0,00000	0,00100
	1E-15	4,441E-16	2,220E-16	17	1000	0,00101	0,03956
50	0,1	6,822E-03	6,822E-03	1	2	0,00100	0,00105
	0,01	1,946E-03	6,464E-04	2	4	0,00000	0,00300
	1E-05	1,043E-06	3,578E-07	9	11	0,00200	0,00500
	1E-08	1,700E-09	5,830E-10	15	17	0,00915	0,01532
	1E-10	2,353E-11	2,770E-12	19	22	0,01000	0,02254
	1E-12	1,121E-13	3,886E-14	24	26	0,00867	0,02499
	1E-15	6,661E-16	8,882E-16	30	1000	0,01570	0,70860
200	0,1	1,319E-02	3,705E-03	1	3	0,01194	0,05052
	0,01	1,440E-03	6,646E-04	3	5	0,02667	0,08823
	1E-05	3,019E-06	6,115E-07	13	17	0,12356	0,29751
	1E-08	2,994E-09	6,069E-10	26	30	0,16128	0,38323
	1E-10	2,495E-11	5,058E-12	35	39	0,28337	0,56434
	1E-12	3,550E-13	4,330E-14	43	48	0,35377	0,66658
	1E-15	1,776E-15	1,998E-15	57	1000	0,55520	13,63371

tabela III: wyniki dla różnych wartości parametru ρ

Główna pętla w zaimplementowanym algorytmie była przerywana w momencie spełnienia kryterium stopu lub gdy liczba iteracji osiągnęła 1000. Dlatego dla kryterium rezydualnego i $\rho = 1E - 15$ liczba 1000 iteracji oznacza, że kryterium stopu nie zostało

osiągnięte. Mimo to w tych przypadkach osiągnięto bardzo dobre przybliżenie wyniku – błąd maksymalny jest bardzo mały.

Wraz z spadkiem parametru ρ wzrasta dokładność rozwiązania, liczba iteracji oraz czas realizacji algorytmu. W badanym przypadku przy zmniejszeniu parametru ρ o dwa rzędy wielkości, błąd maksymalny również maleje o ok. 2-3 rzędy wielkości. Co istotne liczba iteracji nie zmienia się aż tak znacząco. Liczba iteracji zmienia się jedynie o kilka jednostek. Wyjątek stanowi przejście z $\rho = 1E - 12$ do $\rho = 1E - 15$ dla kryterium rezydualnego.

Dla badanego układu mniej iteracji wykonuje kryterium przyrostowe, jednak różnica jest niewielka. Ponownie szczególny przypadek stanowi $\rho = 1E - 15$.

Na ogół większa dokładność osiągana jest dla kryterium rezydualnego, co jest oczekiwanym wynikiem, skoro wykonuje się więcej iteracji. W tabeli można jednak zauważyć wyjątki od tej reguły, których występowanie wynika najprawdopodobniej z niedokładności arytmetyki komputerowej.

4.2.4 Ekstremalne wartości parametru ρ

Największą wartością parametru ρ która została przetestowana to 0,1, a najmniejszą $1E - 15$. W tabeli IV przedstawiono wyniki dla tych wartości parametru i różnych rozmiarów układu. Wektorem początkowym był wektor zerowy.

parametr stopu	rozmiar układu	błąd maksymalny		liczba iteracji		czas [s]	
		przycz.	rezyd.	przycz.	rezyd.	przycz.	rezyd.
1E-15	3	0	0	11	12	0,00000	0,00000
	4	1,110E-16	1,110E-16	12	1000	0,00000	0,01560
	5	2,220E-16	2,220E-16	13	1000	0,00000	0,01939
	7	2,220E-16	2,220E-16	14	1000	0,00000	0,02331
	10	4,441E-16	2,220E-16	17	1000	0,00101	0,03956
	12	2,220E-16	2,220E-16	16	1000	0,00000	0,05056
	15	4,441E-16	4,441E-16	19	1000	0,00100	0,05915
	20	3,331E-16	2,220E-16	21	1000	0,00097	0,12565
	30	4,441E-16	4,441E-16	26	1000	0,00299	0,30323
	40	6,661E-16	6,661E-16	29	1000	0,00902	0,43553
	50	6,661E-16	8,882E-16	30	1000	0,01570	0,70860
	75	9,992E-16	1,110E-15	36	1000	0,03500	1,67010
	100	1,221E-15	1,332E-15	43	1000	0,07162	2,63154
	125	1,221E-15	1,332E-15	47	1000	0,07843	3,48103
	150	1,554E-15	1,554E-15	51	1000	0,15530	5,62783
	175	1,776E-15	1,554E-15	56	1000	0,33560	10,16762
	200	1,776E-15	1,998E-15	57	1000	0,55520	13,63371
	250	1,554E-15	1,554E-15	73	1000	0,85026	21,27339
	300	2,220E-15	2,109E-15	81	1000	1,21870	30,73271
	500	3,109E-15	2,665E-15	119	1000	5,54731	84,53668
0,1	3	8,000E-04	8,000E-04	1	2	0,00000	0,00000
	4	3,002E-03	3,002E-03	1	2	0,00000	0,00000
	5	1,356E-03	1,356E-03	1	2	0,00000	0,00000
	7	1,610E-03	1,610E-03	1	2	0,00000	0,00000
	10	7,616E-03	7,616E-03	1	2	0,00100	0,00000
	12	7,277E-04	7,277E-04	1	2	0,00000	0,00000
	15	2,155E-03	2,155E-03	1	2	0,00000	0,00000
	20	4,016E-03	4,016E-03	1	2	0,00000	0,00108
	30	4,332E-03	4,332E-03	2	3	0,00000	0,00100
	40	4,907E-03	4,907E-03	2	3	0,00100	0,00100
	50	6,822E-03	6,822E-03	1	2	0,00100	0,00105
	75	1,371E-02	3,923E-03	1	3	0,00400	0,00867
	100	1,443E-02	6,584E-03	2	4	0,00300	0,01195
	125	7,919E-03	3,101E-03	2	4	0,00701	0,01330
	150	7,775E-03	3,110E-03	2	4	0,01900	0,03440
	175	1,210E-02	5,583E-03	2	4	0,02417	0,04699
	200	1,319E-02	3,705E-03	1	3	0,01194	0,05052
	250	2,758E-02	4,151E-03	3	8	0,03057	0,22352
	300	3,323E-02	5,866E-03	2	7	0,06107	0,20946
	500	3,263E-02	5,162E-03	2	8	0,18319	0,70292

tabela IV: wyniki dla ekstremalnych wartości parametru ρ

Dla $\rho = 1E - 15$ prawie nigdy nie jest spełnione kryterium rezydualne przy zakończeniu iteracji, ponieważ program kończy działanie po wykonaniu 1000 iteracji niezależnie od tego czy spełniony został warunek. Często błąd maksymalny jest w tych przypadkach taki sam jak dla kryterium przyrostowego i mniejszej liczby iteracji. Oznacza to że od określonej liczby iteracji

wynik się nie zmieniał – czasami nawet się pogarszał. Wynika to z ograniczonej precyzji reprezentacji liczb w komputerze i dokładności działań arytmetycznych w komputerze.

Dla $\rho = 0,1$ i kryterium przyrostowego liczba iteracji dla przetestowanych układów nigdy nie przekracza 3. Dla kryterium rezydualnego iteracji jest zawsze o jedną lub kilka więcej. Dokładność obliczeń jest oczywiście mniejsza niż dla mniejszych wartości parametru, ale znalezione pierwiastki zawsze są równe oczekiwanym na dwóch miejscach po przecinku.

4.2.5 Różne wektory początkowe

W tabeli V kryteria stopu oznaczono następująco: „0” – wektor zerowy, „*(-10)” – wektor oczekiwany pomnożony przez -10 oraz „*(-100)” – wektor oczekiwany pomnożony przez -100. Wyniki przedstawiono dla kilku różnych rozmiarów układu i dla dwóch precyzji.

n	ρ	wek.	błąd maksymalny		liczba iteracji		czas [s]	
		początk.	przycz.	rezyd.	przycz.	rezyd.	przyrostowe	rezydualne
10	1E-12	0	1,821E-14	1,821E-14	14	15	0,00000	0,00100
		*(-10)	2,576E-14	2,576E-14	15	16	0,00000	0,00100
		*(-100)	2,998E-14	2,998E-14	16	17	0,00000	0,00100
	1E-05	0	2,538E-07	2,538E-07	6	7	0,00000	0,00000
		*(-10)	3,571E-07	3,571E-07	7	8	0,00100	0,00000
		*(-100)	4,193E-07	4,193E-07	8	9	0,00000	0,00000
50	1E-12	0	1,121E-13	3,886E-14	24	26	0,00867	0,02499
		*(-10)	1,450E-13	5,018E-14	26	28	0,00700	0,01439
		*(-100)	1,568E-13	5,418E-14	28	30	0,00810	0,02126
	1E-05	0	1,043E-06	3,578E-07	9	11	0,00200	0,00500
		*(-10)	1,350E-06	4,631E-07	11	13	0,00499	0,00937
		*(-100)	1,459E-06	5,004E-07	13	15	0,00400	0,00900
150	1E-12	0	1,870E-13	5,396E-14	40	43	0,15394	0,33516
		*(-10)	3,126E-13	4,841E-14	43	47	0,16333	0,26369
		*(-100)	2,338E-13	3,642E-14	47	51	0,24813	0,36152
	1E-05	0	2,248E-06	6,412E-07	14	17	0,07756	0,16281
		*(-10)	2,012E-06	5,740E-07	18	21	0,10265	0,21871
		*(-100)	2,815E-06	4,289E-07	21	25	0,08439	0,23337
300	1E-12	0	2,891E-13	5,729E-14	64	69	1,03109	2,23062
		*(-10)	2,729E-13	5,418E-14	70	75	1,41113	1,81099
		*(-100)	3,234E-13	4,308E-14	75	81	1,26086	2,73195
	1E-05	0	3,699E-06	4,780E-07	24	30	0,46643	0,92036
		*(-10)	3,492E-06	4,513E-07	30	36	0,47985	1,04732
		*(-100)	2,752E-06	5,355E-07	36	41	0,70089	1,30118

tabela V: wyniki dla różnych wektorów początkowych

Największa dokładność w najmniejszej liczbie iteracji i tym samym najkrótszym czasie osiągnięta jest dla wektora zerowego. Jest to oczekiwany rezultat ponieważ ten wektor jest najbliższy wektora oczekiwanego. Najmniejsza dokładność i największy czas/liczba iteracji jest natomiast osiągnięta dla wektora oczekiwanego wymnożonego przez -100 – co również jest zgodne z oczekiwaniami, ponieważ ten wektor jest najdalej od oczekiwanego.

Różnice w dokładności są jednak niewielkie w ramach tego samego układu oraz kryterium stopu, a różnych wektorów początkowych. W błędy maksymalne rozwiązania są tego samego rzędu. Liczba iteracji też różni się o kilka jednostek a czas proporcjonalnie do liczby iteracji.

Różnice jednak nie są pomijalne i można zauważyć, że lepszy dobór wektora początkowego (czyli wybranie wektora blisko rozwiązania) sprawia, że rozwiązanie jest znajdowane szybciej i z większą dokładnością.

4.2.6 Kryterium rezydualne i kryterium przyrostowe – podsumowanie

Analiza wyników przeprowadzonych testów pokazała, że kryterium przyrostowe sprawia, że wynik jest znajdowany w mniejszej liczbie iteracji i szybszym czasie. Co więcej, na czas kryterium rezydualnego ma znaczący negatywny wpływ mnożenie macierzy A przez wektor. To sprawia, że czas rośnie coraz szybciej wraz z wzrostem rozmiaru układu. Jednakże większa liczba iteracji w kryterium rezydualnym wpływa na lepszą dokładność wyników.

W punkcie 4.2.4 opisano problem dla bardzo małego parametru ρ , który w przeprowadzonych testach występował jedynie dla kryterium rezydualnego. W tym przypadku kryterium przyrostowe osiągnęło przewagę nad rezydualnym.

5 PODSUMOWANIE

Znalezione zależności między różnymi parametrami modelu rozwiązywania układów równań liniowych metodą Jacobiego prowadzą do wniosku, że dobranie parametrów powinno zależeć od oczekiwanych wyników i danych jakimi dysponujemy.

Chociaż metoda Jacobiego ma zastosowanie głównie dydaktyczne, to dla przetestowanych układów znalazła dobre wyniki w stosunkowo krótkim czasie. Istnieją jednak inne szybciej zbieżne metody iteracyjne, które mają szersze wykorzystanie w praktyce.

6 BIBLIOGRAFIA

- [1] Wykłady dr Katarzyny Rycerz;
- [2] "Numerical Analysis. Mathematics of Scientific Computing", 3rd edition, David Kincaid & Ward Cheney