INTERPOLACJA – ZAGADNIENIE HERMITE'A

Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice
laboratorium 3
Aleksandra Smela

Po konsultacji podczas laboratoriów poprawiono:

- Sposób rysowania wykresów w stosunku do liczenia błędów. Wcześniej błędy liczono na 500 punktach, a wykres rysowano na 1000 punktów, przez co wyniki w tabeli nie odpowiadały wynikom na wykresach. Teraz wykres rysowany jest na podstawie 500 punktów.

1. OPIS ZADANIA

1.a. Dla funkcji $f(x) = \sin x \cdot \sin\left(\frac{2x^2}{\pi}\right)$ na przedziale $(-\pi, 2\pi)$ wyznacz dla zagadnienia Hermite'a wielomian interpolujący.
1.b. Interpolację przeprowadź dla różnej liczby węzłów.
1.c. Dla każdego przypadku interpolacji porównaj wyniki otrzymane dla różnego rozmieszczenia węzłów: równoodległe oraz zgodne z zerami wielomianu Czebyszewa.
1.d. Oceń dokładność, z jaką wielomian przybliża zadaną funkcję.
1.e. Poszukaj wielomianu, który najlepiej przybliża zadaną funkcję.
1.f. Wyszukaj stopień wielomianu, dla którego można zauważyć efekt Runge'go (dla równomiernego rozmieszczenia węzłów). Porównaj z wyznaczonym wielomianem dla węzłów Czebyszewa.
1.g. Wyniki porównaj z otrzymanymi dla zagadnienia Lagrange'a.

2. UŻYTE NARZĘDZIA I ŚRODOWISKO

- Komputer z systemem Windows 10
- Procesor: AMD Ryzen 7 3700X 3,6GHz
- Pamięć RAM: 32 GB
- Język programowania: Python 3
- Użyte biblioteki: numpy, matplotlib

3. REALIZACJA ZADANIA

3.1. Przygotowanie modułu z niezbędnymi funkcjami

Przygotowano moduł *hermite.py* z niezbędnymi funkcjami do realizacji zadania:

- *hermite_interpolation(points)*

Funkcja przyjmuje zbiór punktów $(x_i, f(x_i), f'(x_i))$, gdzie x_i to węzły interpolacji, $f(x_i)$ to wartości funkcji w punkcie x_i, $f'(x_i)$ to wartości pierwszej pochodnej w punkcie x_i. Funkcja zwraca wielomian interpolacyjny: *polynomial(x)* wyliczony z wykorzystaniem wzoru Newtona.

- *generate_points_1stderiv(n, interval, x_generator, f_x, der_x)*

Funkcja przyjmuje liczbę punktów do wygenerowania, przedział tożsamy z dziedziną, funkcja zgodnie z którą powinny być wygenerowane współrzędne x (np. *generate_czybyszow* lub *generate_regularly*), funkcję f(x), gdzie y=f(x) oraz funkcję będącą pierwszą pochodną funkcji f.

Poza modułem *hermite.py* wykorzystano funkcje z modułu *interpolation.py* przygotowanego na pierwsze laboratoria. Funkcje dostępne w tym module zostały szczegółowo opisane w punkcie 3 poprzedniego sprawozdania.

3.2. Kod generujący wykresy i tabele

Przygotowano program *test.py*, który rysuje wykresy z funkcją, wielomianem interpolacyjnym i węzłami oraz tabele z wyliczonymi błędami: maksymalnym i średniokwadratowym.

4. OTRZYMANE WYNIKI

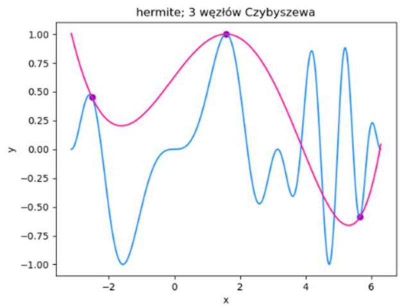
Legenda do wykresów 1-38:

kolor niebieski – funkcja interpolowana,

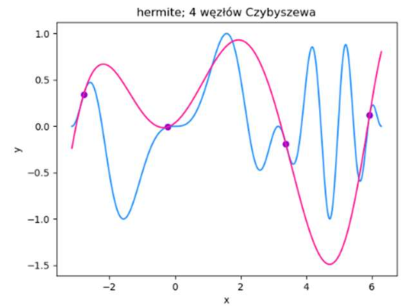
kolor różowy – wielomian interpolujący,

kolor fioletowy – węzły interpolacyjne.

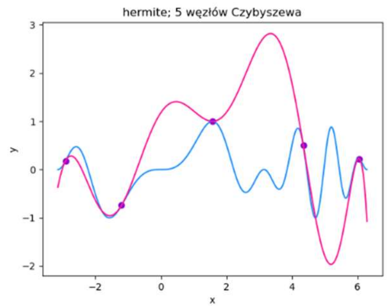
4.1. Interpolacja dla liczby węzłów między 3 i 20



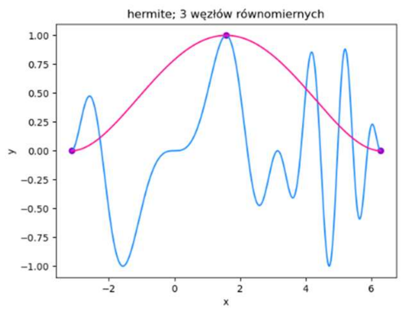
Wykres 1.



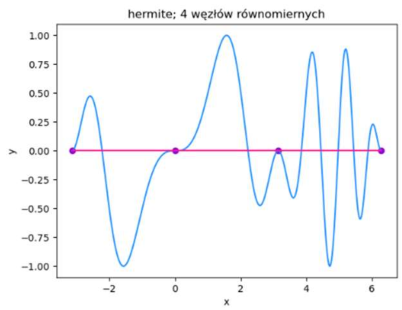
Wykres 2.



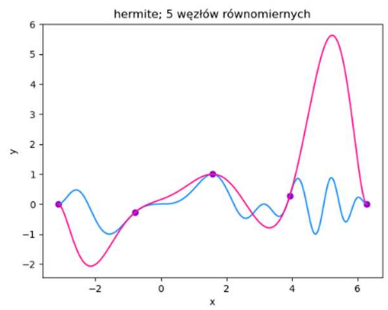
Wykres 3.



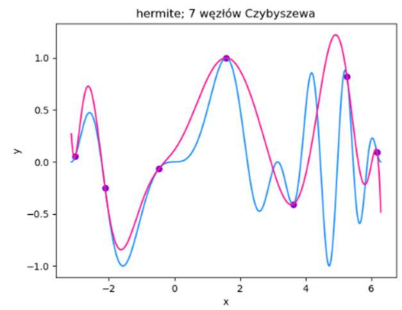
Wykres 4.



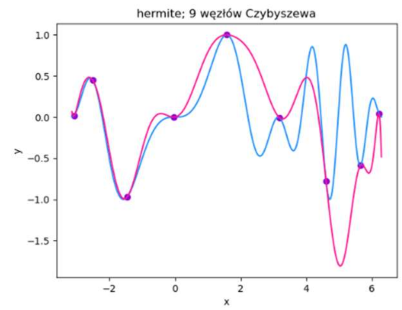
Wykres 5.



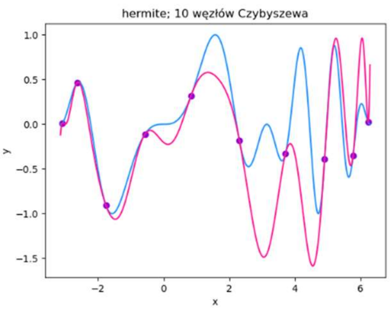
Wykres 6.



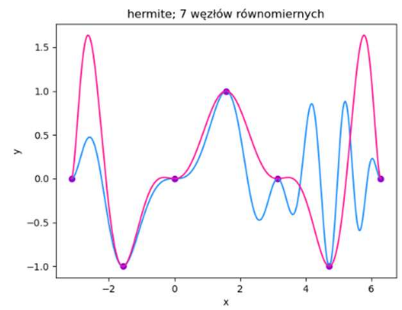
Wykres 7.



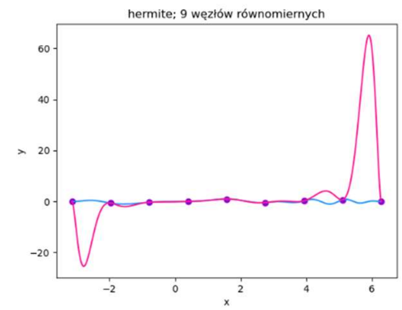
Wykres 8.



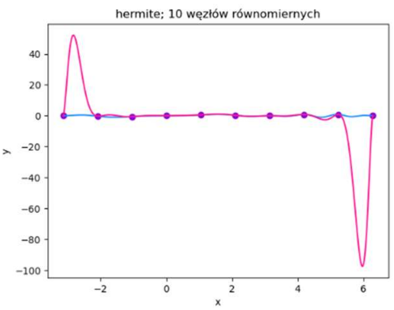
Wykres 9.



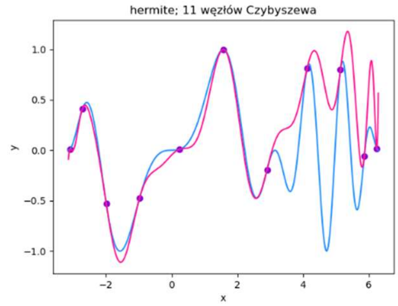
Wykres 10.



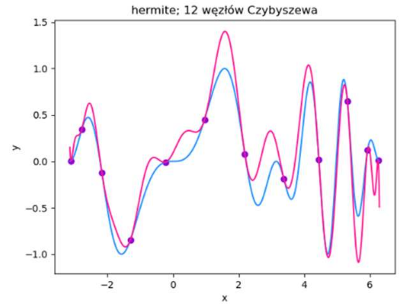
Wykres 11.



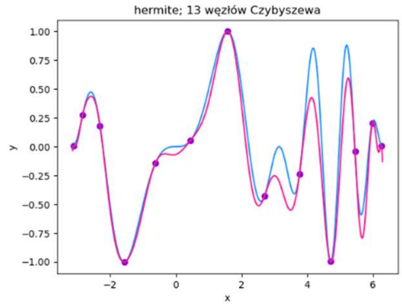
Wykres 12.



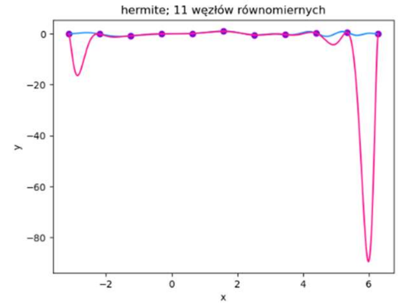
Wykres 13.



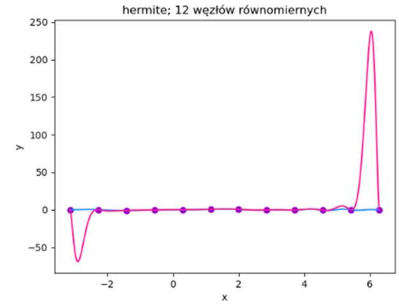
Wykres 14.



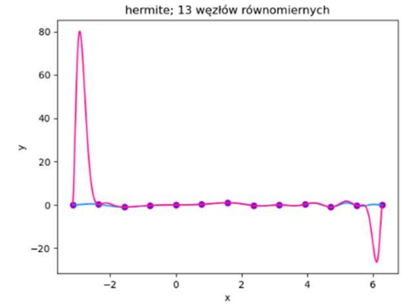
Wykres 15.



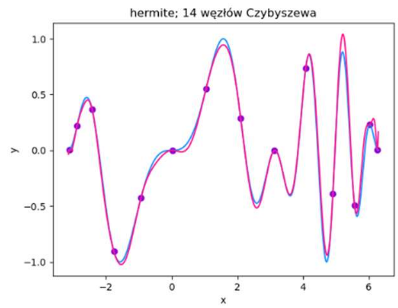
Wykres 16.



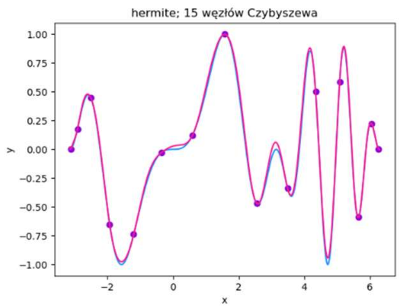
Wykres 17.



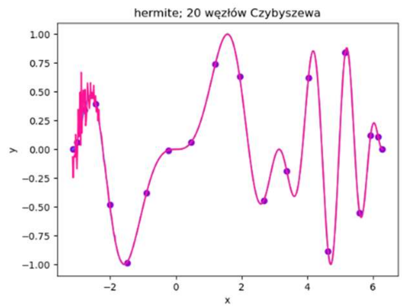
Wykres 18.



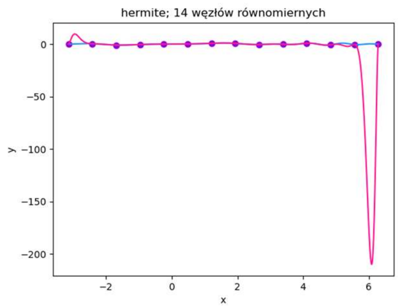
Wykres 19.



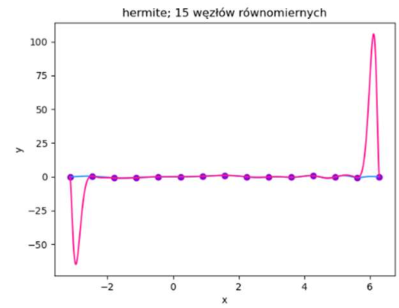
Wykres 20.



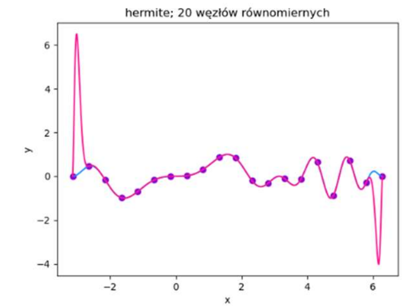
Wykres 21.



Wykres 22.



Wykres 23.



Wykres 24.

4.2. Błąd maksymalny i średniokwadratowy

Hermite; bład maksymalny

	l. węzłów	równomiernie	zg. z 0 Czyb.
0	3	1.3850	1.5360
1	4	1.0000	2.1034
2	5	5.4342	3.1138
3	7	2.1200	2.1192
4	8	3.6179	1.8572
5	9	65.0588	2.5496
6	10	97.6343	1.8085
7	11	89.5959	1.5738
8	12	237.4448	0.5384
9	13	79.7727	0.4768
10	14	210.0366	0.1812
11	15	105.3965	0.0727
12	20	6.4079	0.4466

Tabela 1.

Hermite; bład średniokwadratowy

	l. węzłów	równomiernie	zg. z 0 Czyb.
0	3	0.0340	0.0317
1	4	0.0229	0.0374
2	5	0.0891	0.0609
3	7	0.0284	0.0233
4	8	0.0476	0.0225
5	9	0.6507	0.0274
6	10	0.9406	0.0244
7	11	0.7475	0.0184
8	12	1.8714	0.0098
9	13	0.5972	0.0067
10	14	1.4476	0.0023
11	15	0.8040	0.0012
12	20	0.0415	0.0018

Tabela 2.

4.3. Porównanie wzoru w zagadnieniu Hermite'a i Lagrange'a

Do porównania dokładności dopasowania wielomianu interpolacyjnego wykorzystano wzór w wersji Lagrange'a, gdyż na poziomie 20 węzłów nie odbiegał od wielomianu w wersji Newtona.

Lagrange; bład maksymalny

	l. węzłów	równomiernie	zg. z 0 Czyb.
0	3	1.5636	1.7744
1	4	1.0000	1.1677
2	5	1.4035	1.6125
3	7	1.7401	1.6068
4	8	1.2140	1.8099
5	9	3.5497	1.6746
6	10	2.2257	1.2747
7	11	8.4109	2.1986
8	12	4.2356	1.2592
9	13	13.2152	1.6075
10	14	2.2792	1.5996
11	15	54.0446	1.7188
12	20	146.2692	1.0153

Tabela 5.

Lagrange; bład średniokwadratowy

	l. węzłów	równomiernie	zg. z 0 Czyb.
0	3	0.0387	0.0404
1	4	0.0229	0.0256
2	5	0.0275	0.0302
3	7	0.0282	0.0246
4	8	0.0222	0.0254
5	9	0.0545	0.0249
6	10	0.0251	0.0205
7	11	0.1091	0.0239
8	12	0.0463	0.0192
9	13	0.1539	0.0200
10	14	0.0264	0.0183
11	15	0.5085	0.0173
12	20	1.2736	0.0141

Tabela 6.

5. PODSUMOWANIE WYNIKÓW

5.1. (ad. 1.d.) Do oceny dokładności interpolacji ponownie zastosowano wyliczenia błędów maksymalnego i standardowego. Wyniki zostały przedstawione w tabelach 1-2.

5.2. (ad. 1.c.) Analogicznie jak w przypadku interpolacji Lagrange'a analiza przedstawionych tabel i wykresów pozwala zauważyć, że interpolacja ma zdecydowanie lepszą jakość dla węzłów rozmieszczonych zgodnie z zerami wielomianu Czybyszewa.

5.3. (ad. 1.e.) Funkcja jest najlepiej przybliżona przy 15 węzłach rozmieszczonych zgodnie z zerami Czybyszewa. Osiąga wtedy najmniejszy błąd maksymalny oraz średniokwadratowy.

5.4. (ad. 1.f.) Efekt Runge'go można zauważyć przy równomiernym rozmieszczeniu już dla 9 węzłów interpolacyjnych.

5.5. (ad. 1.g.) Interpolacja Hermite'a daje na ogół lepsze wyniki niż interpolacja Lagrange'a. Jednak nie zawsze. Szczególnie dla węzłów rozmieszczonych równomiernie. W tym przypadku występuje efekt Rungego, który można zauważyć analizując wykresy i tabelę błędów maksymalnych.

5.6. (wykres 21.) Na tym wykresie można zauważyć interesujące zjawisko na lewym krańcu przedziału. Widoczne błędy w interpolacji wynikają najprawdopodobniej z problemów związanych z arytmetyką komputera i niedokładnością reprezentacji liczb.