INTERPOLACJA

Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice
laboratorium 2
Aleksandra Smela

1. OPIS ZADANIA

Dla zagadnienia Lagrange'a przygotować program wyznaczający wielomian interpolujący zgodnie ze wzorem Lagrange'a oraz Newtona.

W obu przypadkach węzły mogą być rozmieszczone:

a) równomiernie w całym przedziale (uwzględniając końce przedziału),
b) zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa.

Przygotować program do wizualizacji wykresu funkcji zadanej określoną liczbą punktów lub określonym wzorem.

2. UŻYTE NARZĘDZIA I ŚRODOWISKO

- Komputer z systemem Windows 10
- Procesor: AMD Ryzen 7 3700X 3,6GHz
- Pamięć RAM: 32 GB
- Język programowania: Python 3
- Użyte biblioteki: numpy, matplotlib

3. REALIZACJA ZADANIA

3.1. Przygotowanie modułu z niezbędnymi funkcjami

Przygotowano moduł *interpolation.py* z niezbędnymi funkcjami do realizacji zadania:

- *lagrange_interpolation(points)*

Funkcja przyjmuje zbiór dwuwymiarowych punktów $(x_i, f(x_i)$, gdzie x_i to węzły interpolacji. Funkcja zwraca wielomian interpolacyjny: *polynomial(x)*.

Wzór interpolacyjny jest wyznaczony zgodnie z wzorem Lagrange'a: $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_k(x)$

Gdzie: $L_k(x) = \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$ to bazy Lagrange'a.

- *newton_interpolation(points)*

Podobnie jak poprzednio funkcja przyjmuje zbiór dwuwymiarowych punktów $(x_i, f(x_i)$, gdzie x_i to węzły interpolacji. Funkcja zwraca wielomian interpolacyjny: *polynomial(x)*.

Wzór interpolacyjny jest wyznaczony zgodnie z wzorem Newtona:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})$$

Gdzie: $a_0, a_1, \ldots a_n$ to kolejne ilorazy różnicowe.

- *generate_regularly(n, interval)*

Funkcja przyjmuje liczbę liczb do wygenerowania i przedział, z którego mają być wygenerowane. Zwraca n liczb wybranych równomiernie z przedziału.

- *generate_czybyszow(n, interval)*

Funkcja przyjmuje liczbę liczb do wygenerowania i przedział, z którego mają być wygenerowane. Zwraca n liczb wybranych z przedziału zgodnie z zerami wielomianu Czybyszewa. Zgodnie z wzorem: $\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{2i-1}{2n}\pi\right)$

Gdzie: (a, b) – przedział przekazany do funkcji, n – liczba liczb do wygenerowania, i – numer liczby do wygenerowania.

- *generate_points(n, interval, x_generator, f_x)*

Funkcja przyjmuje liczbę punktów do wygenerowania, przedział tożsamy z dziedziną, funkcja zgodnie z którą powinny być wygenerowane współrzędne x (np. generate_czybyszow lub generate_regularly) oraz funkcję f(x), gdzie y=f(x).

- *draw_points(points, plot_name, file_name)*

Funkcja rysująca wykres punktów o zadanej nazwie i zapisująca ten wykres do pliku o określonej nazwie.

- *draw_fun(fun, interval, n, plot_name, file_name)*

Funkcja rysująca wykres (o zadanej nazwie) funkcji na zadanym przedziale i zapisująca go do określonego pliku. Funkcja przyjmuje również liczbę n, ponieważ rysowane jest tak naprawdę n równomiernie rozmieszczonych punktów przekazanej funkcji.

3.2. Przygotowane testy

Przygotowano następujące funkcje do przetestowania algorytmów wyznaczających wielomiany interpolacyjne:

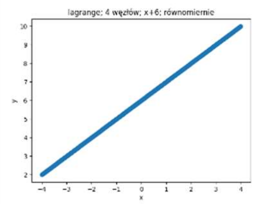
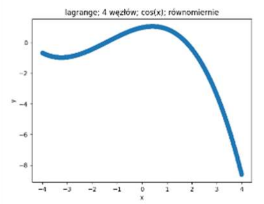
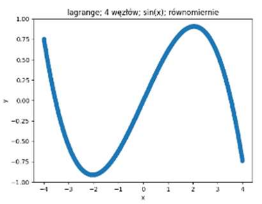
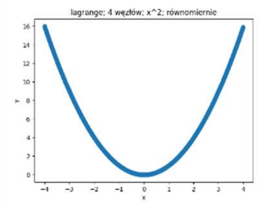
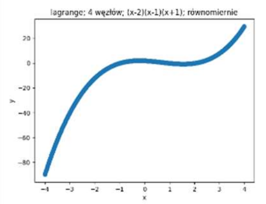
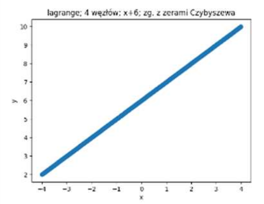
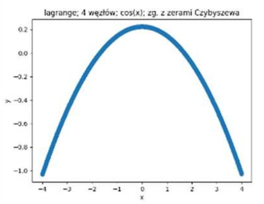
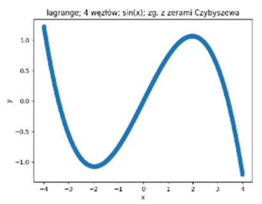
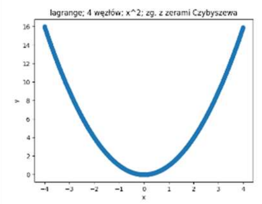
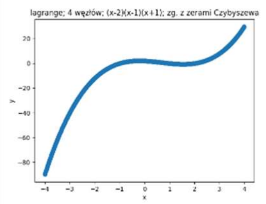
- $x + 6$
- $cos(x)$
- $sin(x)$
- x^2
- $(x-2)(x-1)(x+1)$

Przetestowano oba algorytmy, zarówno dla wzoru w wersji Lagrange'a jak i Newtona. Algorytm przetestowano dla 4, 20 i 100 węzłów interpolacyjnych. Następnie narysowano wykresy przybliżając je 1000 punktami.

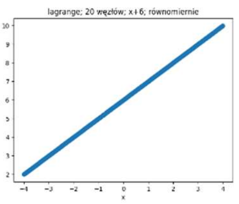
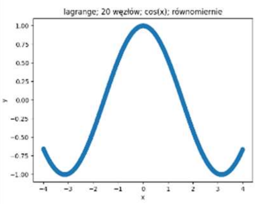
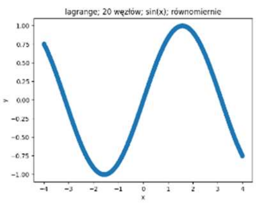
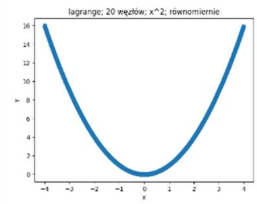
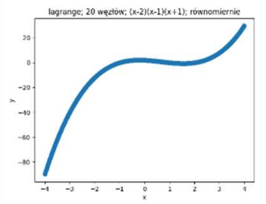
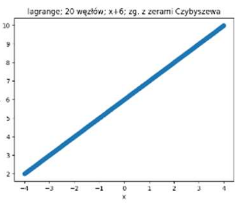
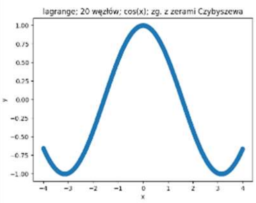
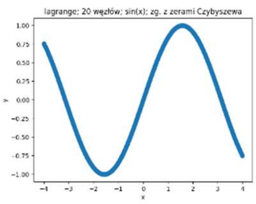
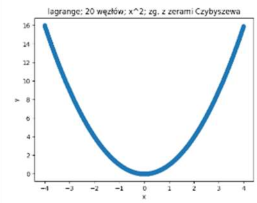
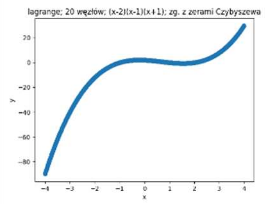
4. OTRZYMANE WYNIKI

4.1. Wzór w wersji Lagrange'a

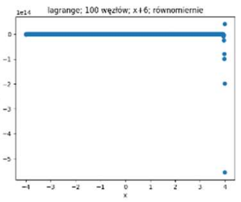
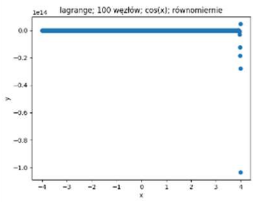
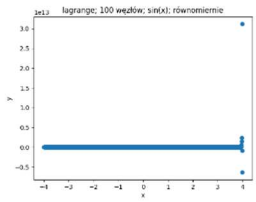
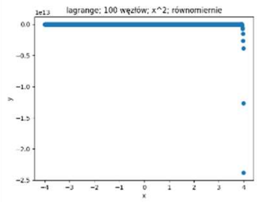
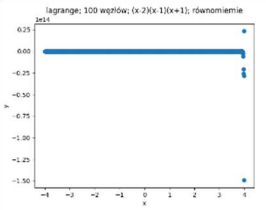
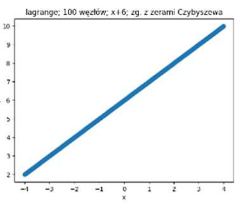
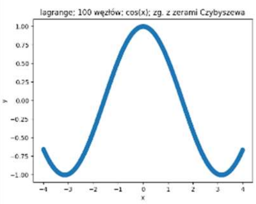
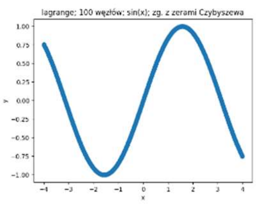
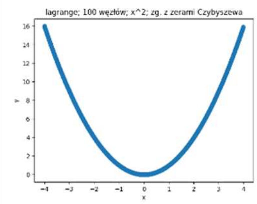
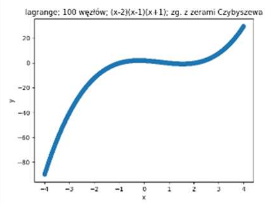
4.1.1. 4 węzły

	$f(x) = x + 6$	$f(x) = \cos(x)$	$f(x) = \sin(x)$	$f(x) = x^2$	$f(x) = (x-2)(x-1)(x+1)$
węzły rozm. równom.	 Wykres I	 Wykres II	 Wykres III	 Wykres IV	 Wykres V
węzły rozm. zg. z 0 Czyb.	 Wykres VI	 Wykres VII	 Wykres VIII	 Wykres IX	 Wykres X

4.1.2. 20 węzłów

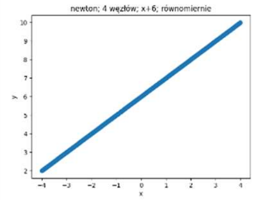
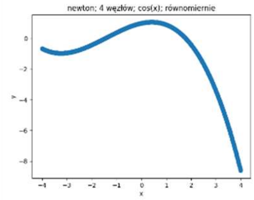
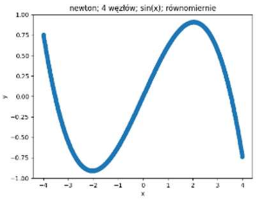
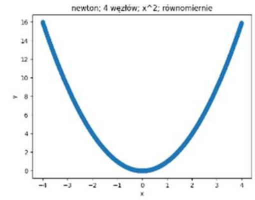
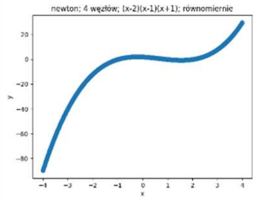
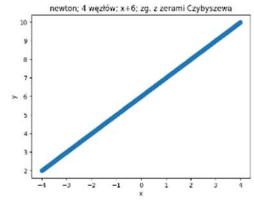
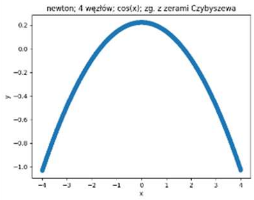
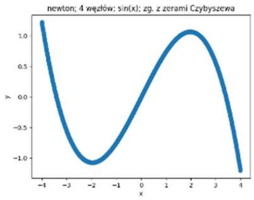
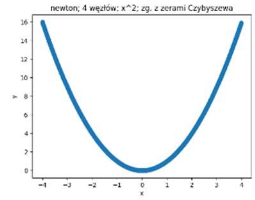
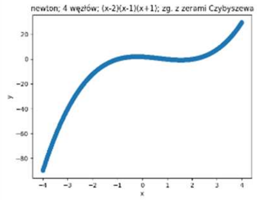
	$f(x) = x + 6$	$f(x) = \cos(x)$	$f(x) = \sin(x)$	$f(x) = x^2$	$f(x) = (x-2)(x-1)(x+1)$
węzły rozm. równom.	 Wykres XI	 Wykres XII	 Wykres XIII	 Wykres XIV	 Wykres XV
węzły rozm. zg. z 0 Czyb.	 Wykres XVI	 Wykres XVII	 Wykres XVIII	 Wykres XIX	 Wykres XX

4.1.3. 100 węzłów

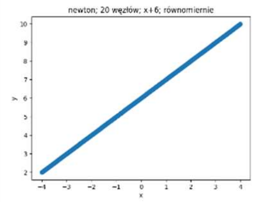
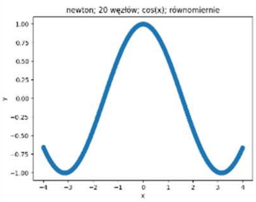
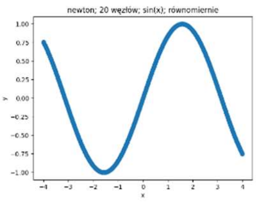
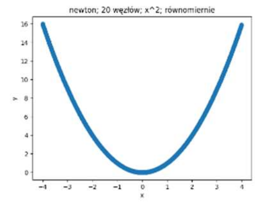
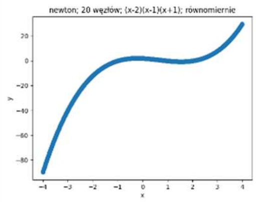
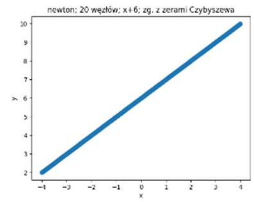
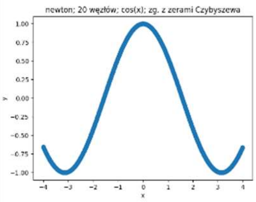
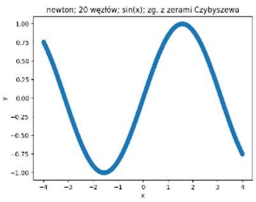
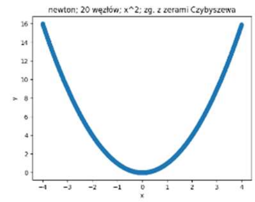
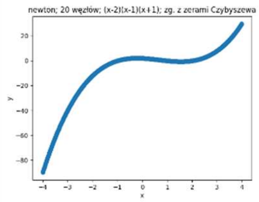
	$f(x) = x + 6$	$f(x) = \cos(x)$	$f(x) = \sin(x)$	$f(x) = x^2$	$f(x) = (x-2)(x-1)(x+1)$
węzły rozm. równom.	 Wykres XXI	 Wykres XXII	 Wykres XXIII	 Wykres XXIV	 Wykres XXV
węzły rozm. zg. z 0 Czyb.	 Wykres XXVI	 Wykres XXVII	 Wykres XXVIII	 Wykres XXIX	 Wykres XXX

4.2. Wzór w wersji Newtona

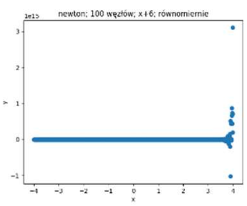
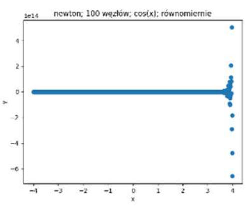
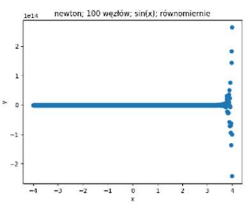
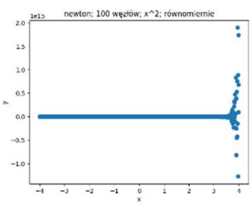
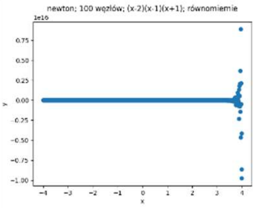
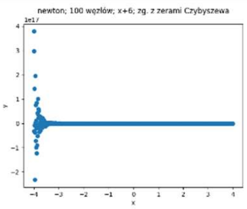
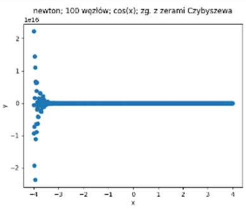
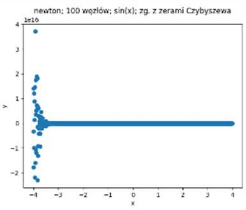
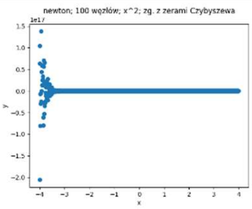
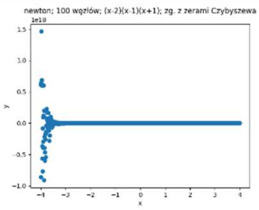
4.2.1. 4 węzły

	$f(x) = x + 6$	$f(x) = \cos(x)$	$f(x) = \sin(x)$	$f(x) = x^2$	$f(x) = (x-2)(x-1)(x+1)$
węzły rozm. równom.	 Wykres XXXI	 Wykres XXXII	 Wykres XXXIII	 Wykres XXXIV	 Wykres XXXV
węzły rozm. zg. z 0 Czyb.	 Wykres XXXVI	 Wykres XXXVII	 Wykres XXXVIII	 Wykres XXXIX	 Wykres XL

4.2.2. 20 węzłów

	$f(x) = x + 6$	$f(x) = \cos(x)$	$f(x) = \sin(x)$	$f(x) = x^2$	$f(x) = (x-2)(x-1)(x+1)$
węzły rozm. równom.	 Wykres XLI	 Wykres XLII	 Wykres XLIII	 Wykres XLIV	 Wykres XLV
węzły rozm. zg. z 0 Czyb.	 Wykres XLVI	 Wykres XLVII	 Wykres XLVIII	 Wykres XLIX	 Wykres L

4.2.3. 100 węzłów

	$f(x) = x + 6$	$f(x) = \cos(x)$	$f(x) = \sin(x)$	$f(x) = x^2$	$f(x) = (x-2)(x-1)(x+1)$
węzły rozm. równom.	 Wykres LI	 Wykres LII	 Wykres LIII	 Wykres LIV	 Wykres LV
węzły rozm. zg. z 0 Czyb.	 Wykres LVI	 Wykres LVII	 Wykres LVIII	 Wykres LIX	 Wykres LX

5. PODSUMOWANIE WYNIKÓW

5.1. *(wykresy II i XXXII)* Dla 4 węzłów rozmieszczonych równomiernie algorytm interpolacji nieprawidłowo przybliża funkcję zarówno wykorzystując wielomian Lagrange'a i Newtona. Jednak ta sama funkcja dla tej samej liczby węzłów rozmieszczonych zgodnie z zerami wielomianu Czybyszewa przybliża funkcje znacznie dokładniej.

5.2. *(wykresy VII i XVII oraz XXXVII i XLVII) Funkcja* cosinus dla 4 węzłów rozmieszczonymi zgodnie z zerami Czybyszewa została przybliżona z bardzo ograniczoną dokładnością. Wykresy znacznie różni się od analogicznych dla 20 węzłów.

5.3. Poza przypadkiem opisanym w 5.1 nawet dla 4 węzłów kształt funkcji został przybliżony z pewną dokładnością. Warto jednak zauważyć, że dla większej liczby węzłów (np. 20) funkcje mają inny kształt – szczególnie funkcja sinus i cosinus.

5.4. Dla większej liczby węzłów – tj. w tym przypadku 20 – taki problem jak w podpunkcie 5.1 nie został zauważony i funkcje są przybliżane z znaczniejszą dokładnością, niezależnie od rozmieszczenia węzłów i wersji wzoru.

5.5. Dla wzoru w wersji Lagrange'a i 100 węzłów rozmieszczonych równomiernie algorytm nie zwraca odpowiedniego wielomianu interpolacyjnego *(wykresy XXI-XXV).* Problem ten nie występuje dla węzłów rozmieszonych zgodnie z zerami Czybyszewa *(wykresy XXVI-XXX).*

5.6. Dla wzoru w wersji Newtona i 100 węzłów algorytm nie zwraca odpowiedniego wielomianu interpolacyjnego dla testowanych funkcji niezależnie od rozmieszczenia węzłów *(wykresy*.

6. WNIOSKI

6.1. Zera Czybyszewa stanowią optymalne położenie węzłów interpolacyjnych. Wielomian wyznaczony przy takim ułożeniu daje najmniejsze oszacowanie błędu. Wyniki potwierdzają, że takie położenie jest lepsze niż rozmieszczenie równomierne.

6.2. Otrzymane wyniki dla 100 węzłów interpolacyjnych można wytłumaczyć efektem Rungego. Efekt ten polega na pogorszeniu jakość interpolacji wielomianowej, mimo zwiększenia jej węzłów. Początkowo ze wzrostem liczby węzłów n przybliżenie poprawia się, jednak po dalszym wzroście n, zaczyna się pogarszać, co jest szczególnie widoczne na końcach przedziałów. Aby uniknąć tego efektu, stosuje się interpolację z węzłami coraz gęściej umiejscowionymi na krańcach przedziału interpolacji. Np. zgodnie z zerami wielomianu Czybyszewa. W uzyskanych wynikach dla wielomianu Lagrange'a faktycznie zastosowanie takiego rozmieszczenia pomogło uniknąć efektu Rungego, jednak w przypadku wielomianu Newtona to nie pomogło.