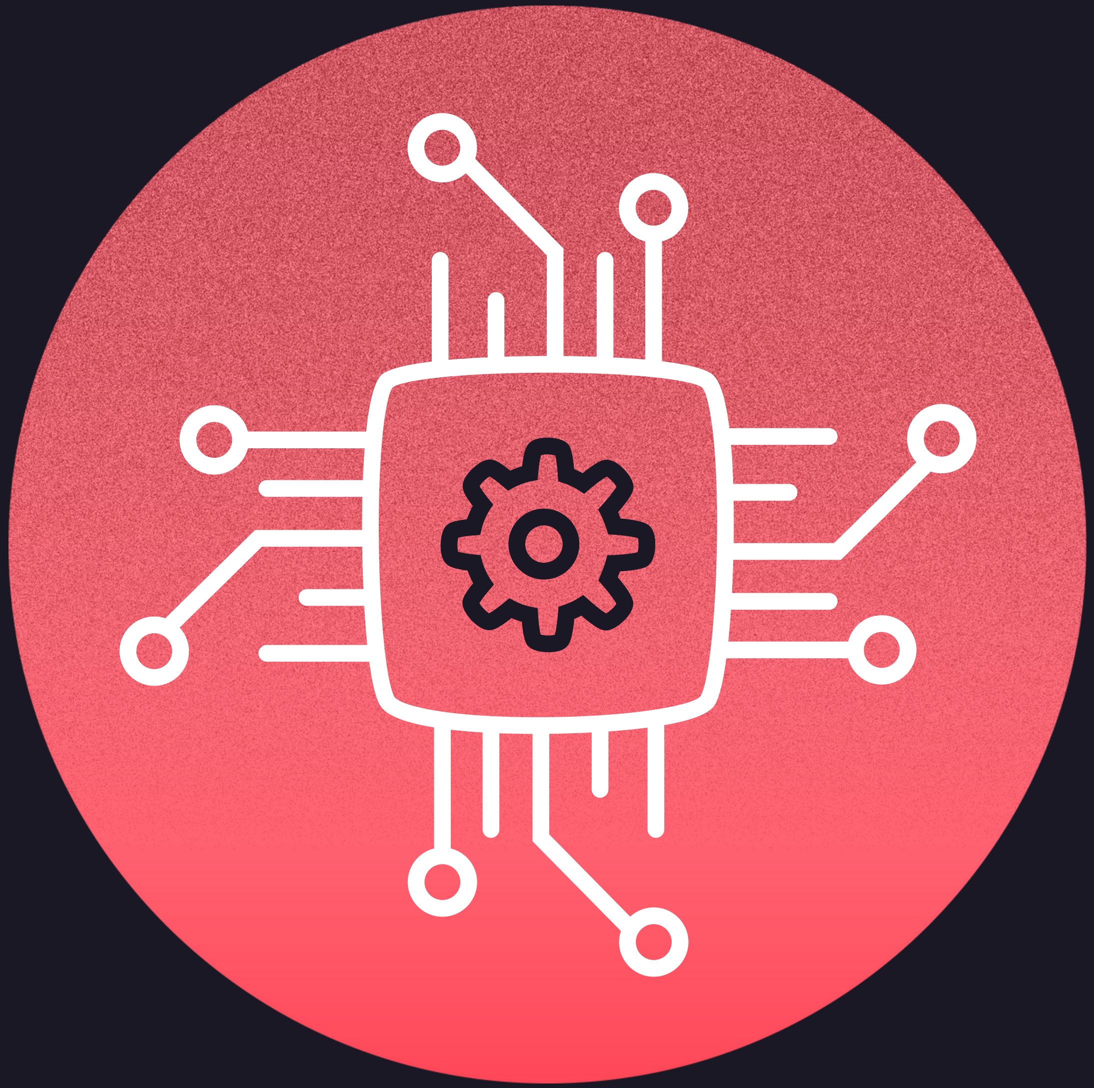


Computação Quântica: Qubits e Portas Lógicas

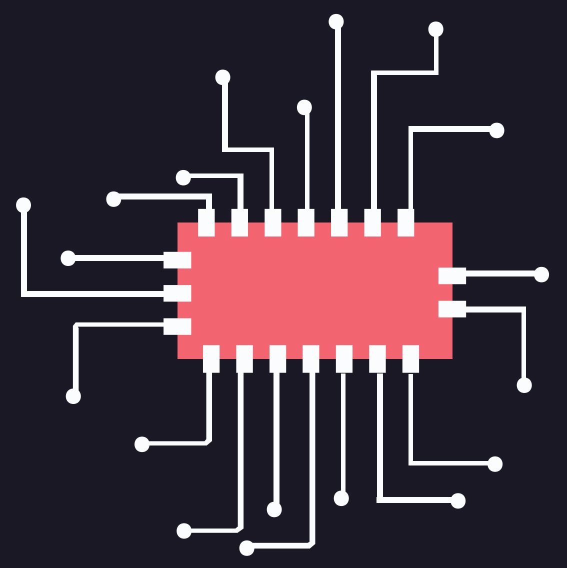
Bruna Shinohara - Doutoranda em Física - USP
Arthur Faria- Doutorando em Física - UNICAMP/ U. of Stuttgart

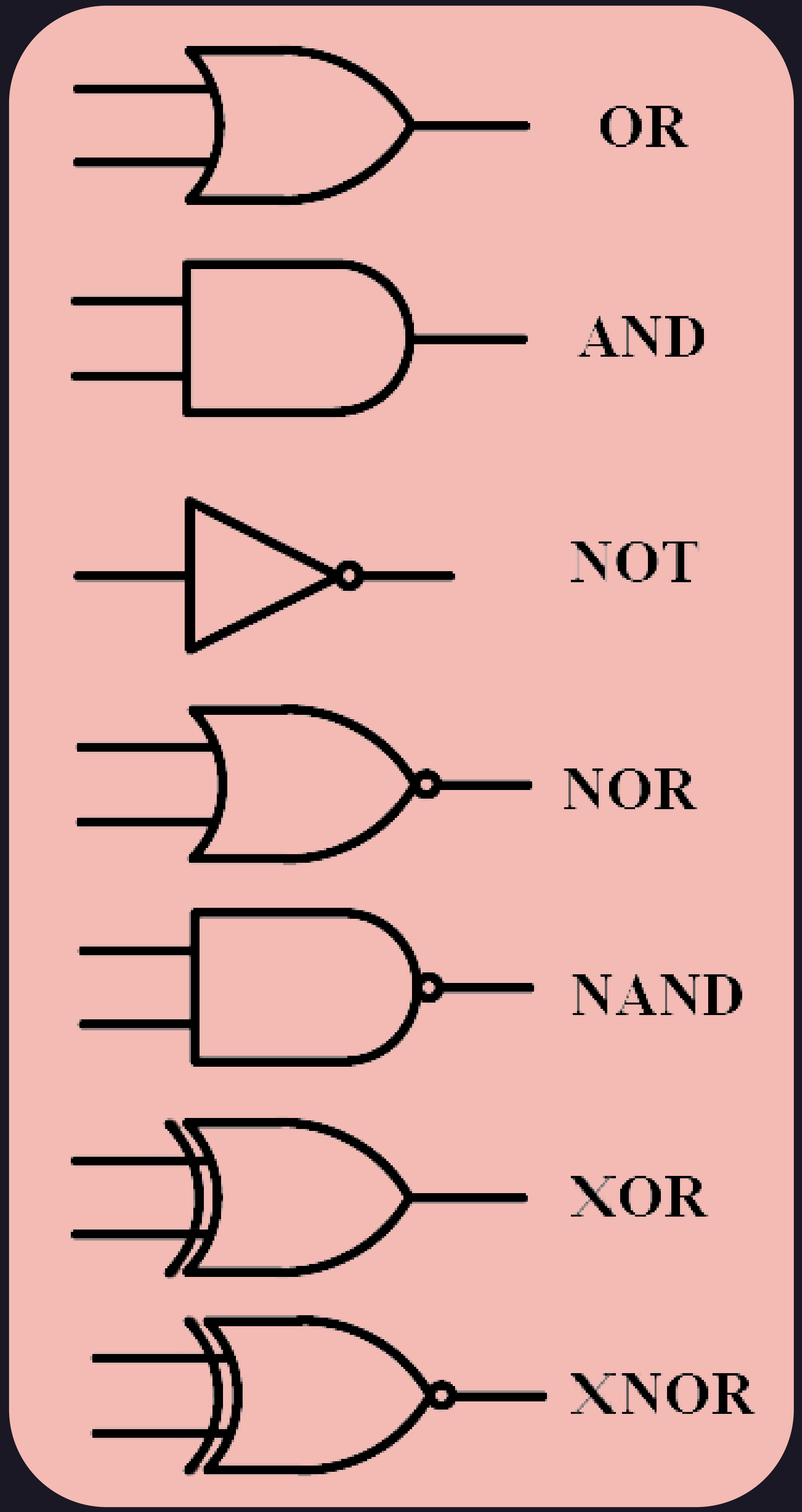
- Bits x Qubits: diferenças e implementações físicas.
  - Revisão de álgebra linear: vetores linha e coluna, matrizes, produto tensorial.
  - Relação com conceitos físicos. Equação de autovalores.
  - Notação de Dirac
  -
- Computação com portas lógicas: comparação clássico e quântico.
  - Portas recorrentes

CONTEXTO: MODELO CIRCUITAL DA COMPUTAÇÃO

CONTEXTO: MODELO CIRCUITAL DA COMPUTAÇÃO

- No modelo circuital, a computação é feita usando bits e portas lógicas booleanas





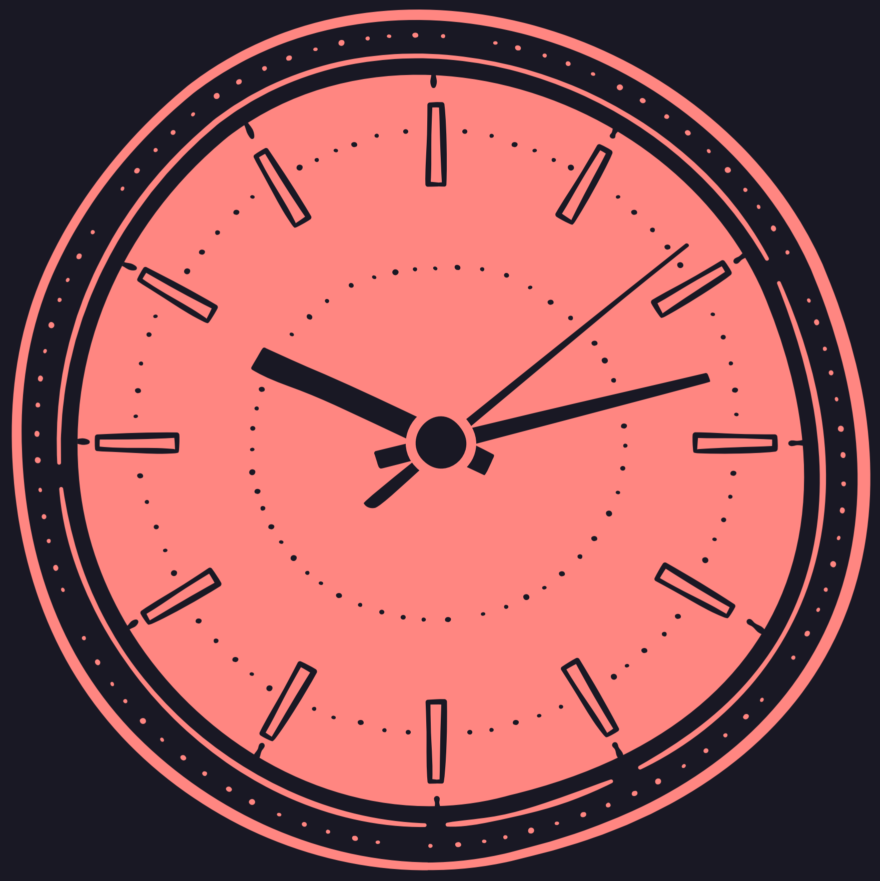
CONTEXTO: MODELO CIRCUITAL DA COMPUTAÇÃO

- No modelo circuital, a computação é feita usando bits e portas lógicas
- Os bits carregam as informações e as portas lógicas fazem operações nos bits para obter os resultados desejados

CONTEXTO: MODELO CIRCUITAL DA COMPUTAÇÃO

- Os bits codificam informação em dois estados, que vamos chamar de 0 e 1 (com diversas implementações físicas)
- As portas, atuando em apenas dois estados, funcionam sob airtmética modulo 2.

ARITMÉTICA MODULAR



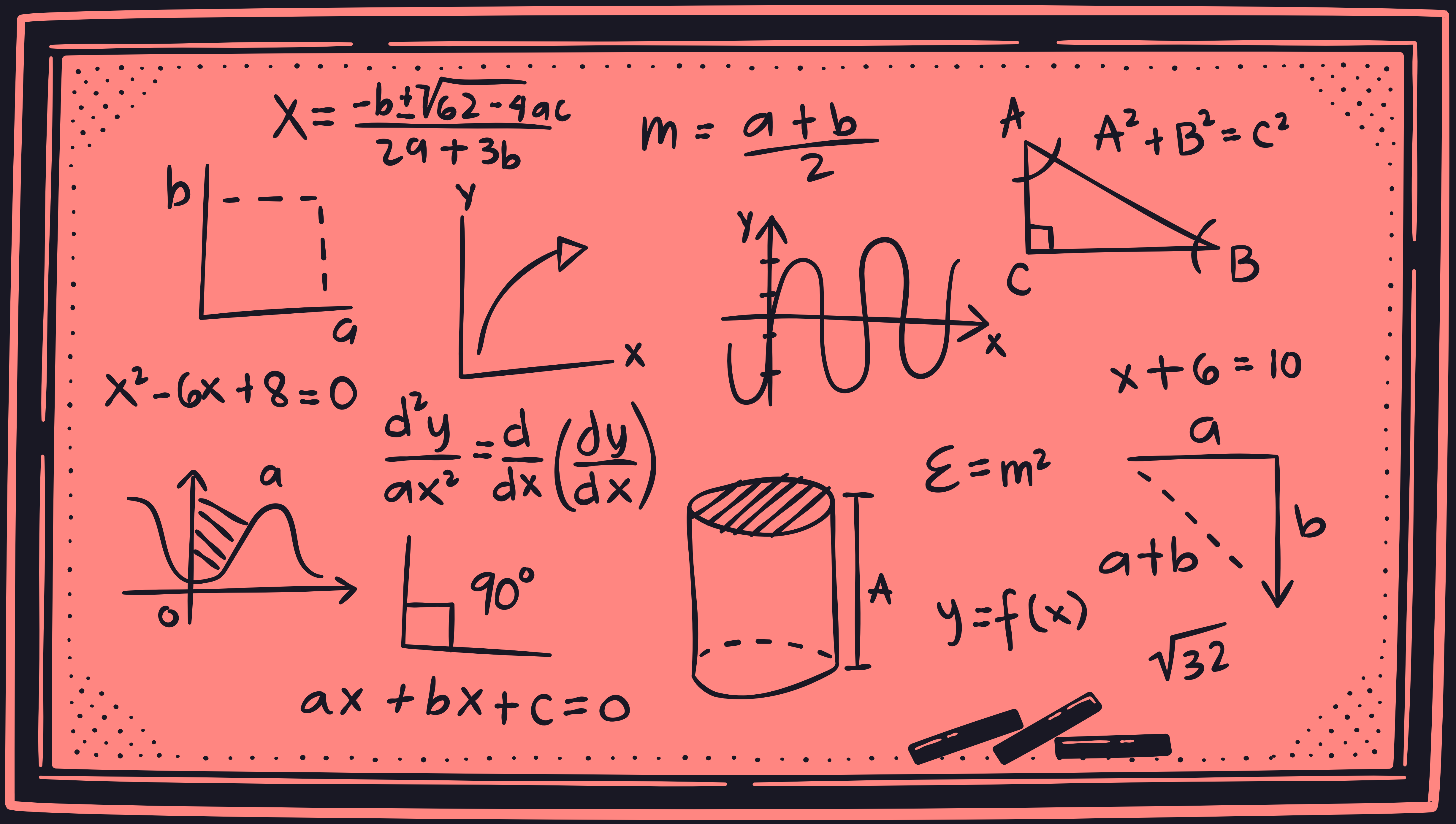
x = y (mod N)

Exemplo:
15 = 3 mod (N)
(15 horas = 3horas, nossos relógios seguem aritmética mod 12)

Relacionado a operação de módulo (%), que retorna o resto de uma divisão inteira.

Exemplo: 15 % 4 = 3

REVISÃO - ÁLGEBRA LINEAR



Matrizes

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \cdots & n \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ m \end{array} &
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

m linhas

n colunas

m x n elementos

Vetores

- Casos específicos de matrizes
  - Matrizes gerais: N linhas x M colunas
  - Um vetor linha: N linhas x 1 coluna
  - Um vetor coluna: 1 linha x M coluna

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

Multiplicação de Matrizes

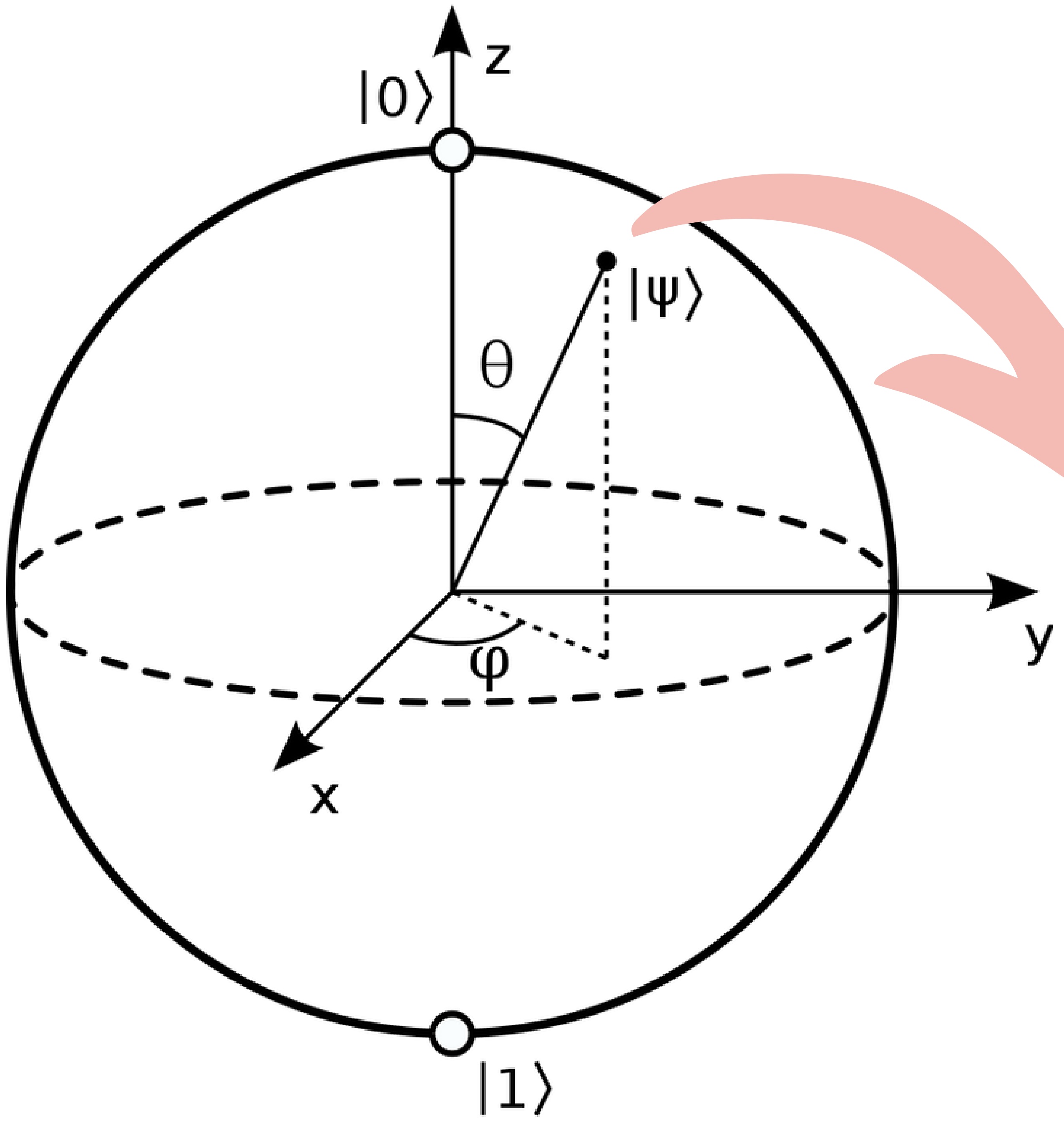
$$\begin{bmatrix} \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \underline{1000} \\ 1 & \underline{100} \\ 0 & \underline{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & \underline{2340} \\ 0 & 1000 \end{bmatrix}.$$

Produto Tensorial

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} & 2\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \\ 3\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} & 4\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times 0 & 1\times 5 & 2\times 0 & 2\times 5 \\ 1\times 6 & 1\times 7 & 2\times 6 & 2\times 7 \\ 3\times 0 & 3\times 5 & 4\times 0 & 4\times 5 \\ 3\times 6 & 3\times 7 & 4\times 6 & 4\times 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 10 \\ 6 & 7 & 12 & 14 \\ 0 & 15 & 0 & 20 \\ 18 & 21 & 24 & 28 \end{bmatrix}.$$

Permite multiplicar coluna por coluna e linha por linha

Representação Gráfica



$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r \sin\theta \, \cos\varphi \\ r \sin\theta \, \sin\varphi \\ r \cos\theta \end{bmatrix}.$$

$$x = r \cos\varphi \, \sin\theta,$$
$$y = r \sin\varphi \, \sin\theta,$$
$$z = r \cos\theta.$$

CONEXÃO COM A FÍSICA

Vetores -> Estados

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

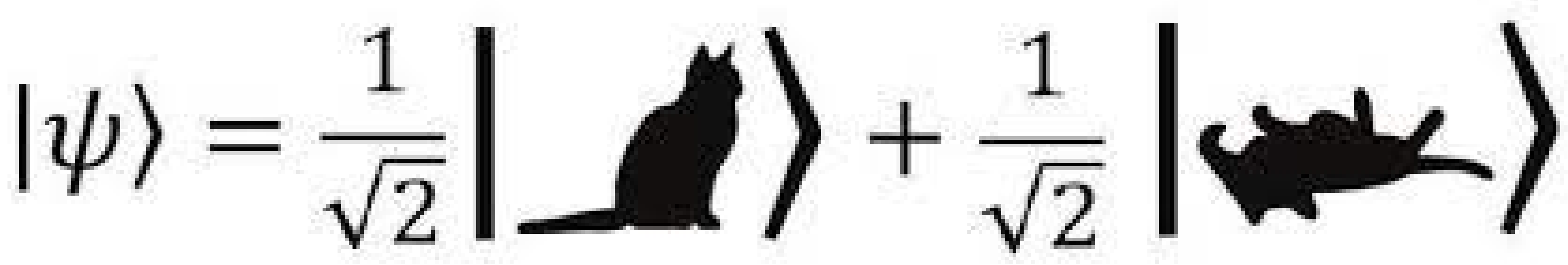
Notação de Dirac (bra-ket)

| "estado"> = ket (coluna)
< "estado"| = bra (linha)
= | "estado">* (* = complexo conjugado)

Superposição

Um estado em superposição pode ser escrito como a soma de outros

| P1> = a1 |e1> + a2|e2> + ...



https://www.cl.cam.ac.uk/~jmb25/MCCR
C/QC-commentary-2019-08-28.pdf

Emaranhamento

Um estado emaranhado é um estado com mais de um qubit

| P2> =A|e1>|f1> + ...
que não pode ser escrito como uma multiplicação de estados superpostos

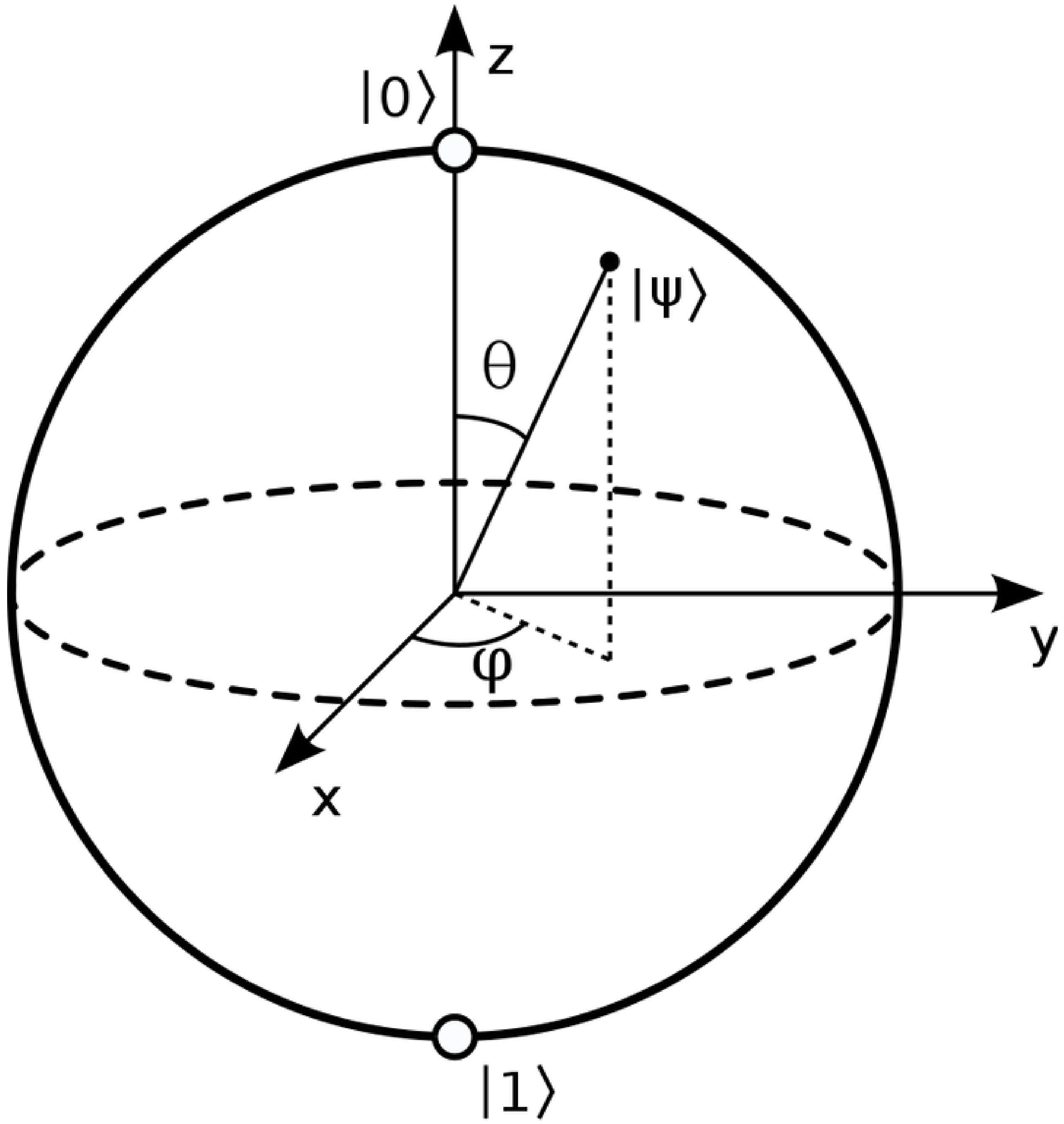
$$|\psi\rangle_A \otimes |\phi\rangle_B .$$

Exemplo:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_A \otimes |1\rangle_B - |1\rangle_A \otimes |0\rangle_B\right).$$

Bits → Qubits

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$|\psi\rangle = \cos(\theta/2)|0\rangle + e^{i\phi}\sin(\theta/2)|1\rangle = \cos(\theta/2)|0\rangle + (\cos\phi + i\sin\phi)\sin(\theta/2)|1\rangle$$

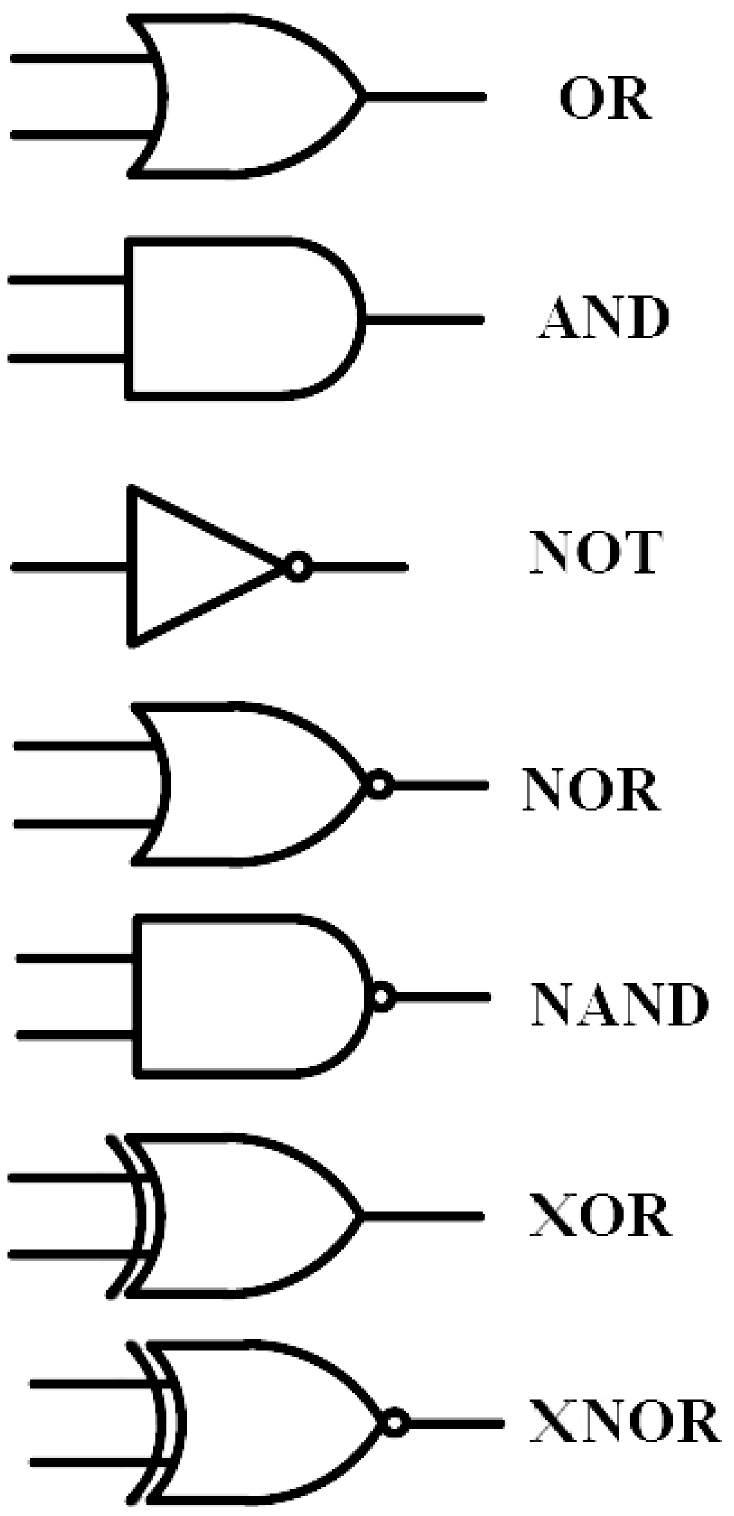
Matrizes → Operadores

Equação de Autovalores e Autovetores: uma multiplicação de matriz especial

$$H \,|P> = E \,|P>$$

Portas lógicas
→ Portas Lógicas Quânticas

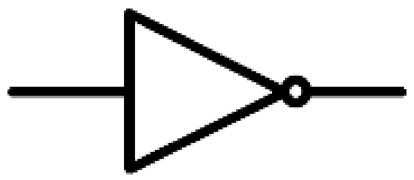
Operator	Gate(s)	Matrix
Pauli-X (X)	$\boxed{\mathbf{X}}$ $\oplus$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
Pauli-Y (Y)	$\boxed{\mathbf{Y}}$	$\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$
Pauli-Z (Z)	$\boxed{\mathbf{Z}}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
Hadamard (H)	$\boxed{\mathbf{H}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$
Phase (S, P)	$\boxed{\mathbf{S}}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$
$\pi/8$ (T)	$\boxed{\mathbf{T}}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{bmatrix}$



Portas Lógicas Quânticas importantes

Pauli Gates

Operator	Gate(s)		Matrix
Pauli-X (X)	$\boxed{\mathbf{X}}$	$\oplus$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
Pauli-Y (Y)	$\boxed{\mathbf{Y}}$		$\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$
Pauli-Z (Z)	$\boxed{\mathbf{Z}}$		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$



NOT

Portas Lógicas Quânticas importantes

Hadamard: coloca em superposição de probabilidades iguais

Hadamard (H)	$-\boxed{\mathbf{H}}-$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Portas Lógicas Quânticas importantes

Phase gate e T-gate: modificam a fase

Phase (S, P)	$\boxed{S}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$
$\pi/8$ (T)	$\boxed{T}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{bmatrix}$

Portas Lógicas Quânticas importantes

R-gates:

$$R_x(\theta) = e^{(-i\theta X/2)} = \cos(\theta/2)I - i\sin(\theta/2)X = \begin{bmatrix} \cos\theta/2 & -i\sin\theta/2 \\ -i\sin\theta/2 & \cos\theta/2 \end{bmatrix}$$

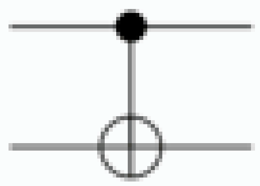
$$R_y(\theta) = e^{(-i\theta Y/2)} = \cos(\theta/2)I - i\sin(\theta/2)Y = \begin{bmatrix} \cos\theta/2 & -\sin\theta/2 \\ \sin\theta/2 & \cos\theta/2 \end{bmatrix}$$

$$R_z(\theta) = e^{(-i\theta Z/2)} = \cos(\theta/2)I - i\sin(\theta/2)Z = \begin{bmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{bmatrix}$$

Portas Lógicas Quânticas importantes

CNOT (controlled not): porta para dois qubits.
Útil para emaranhamento!

Controlled Not (CNOT, CX)



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Portas Lógicas Quânticas importantes

SWAP: troca bits de lugar - útil dependendo da topologia do seu processador

SWAP

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obrigada!

Perguntas?