Pression acoustique d'une bulle sphérique oscillante

Sébastien Ménigot

26 septembre 2025

1 Bulle comme source de fluide

On considère une bulle sphérique de rayon $R(t)$ dans un liquide. La bulle oscille, donc $R(t)$ varie avec le temps, et chaque variation du rayon déplace le liquide autour.

Hypothèse : On suppose que la bulle reste sphérique et que les oscillations sont purement radiales. On néglige les déformations non sphériques et les interactions avec d'autres bulles ou obstacles.

2 Débit volumique radial

Le débit volumique $Q(t)$ correspond au volume de fluide déplacé par unité de temps à la surface de la bulle :

$$Q(t) = \frac{dV}{dt} \tag{1}$$

Le volume d'une sphère de rayon $R(t)$ est :

$$V(t) = \frac{4}{3}\pi R^3(t) \tag{2}$$

En dérivant par rapport au temps :

$$Q(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}\pi R^3(t)\right) = 4\pi R^2(t)\dot{R}(t) \tag{3}$$

Explication : Le débit volumique est proportionnel à la surface de la bulle ($4\pi R^2$) multipliée par la vitesse radiale $\dot{R}$. Cela est exact pour un mouvement radial sphérique.

Approximation : On considère ici que le champ autour de la bulle peut être traité comme un monopôle ponctuel pour la propagation acoustique, ce qui sera valable uniquement pour des distances bien supérieures au rayon de la bulle.

3 Potentiel acoustique

Dans un liquide faiblement compressible, le champ de pression peut se représenter via un potentiel acoustique $\phi(\mathbf{r}, t)$ qui satisfait l'équation des ondes :

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \nabla^2\phi = 0 \tag{4}$$

Pour une source sphérique monopolaire :

$$\phi(r, t) = \frac{f(t - r/c)}{r} \tag{5}$$

où r est la distance à la bulle et $f(t)$ est proportionnel au débit volumique $Q(t)$:

$$\phi(r, t) = \frac{Q(t - r/c)}{4\pi r} \tag{6}$$

Hypothèses :

— On est dans le **champ lointain**, $r \gg R(t)$, ce qui permet de négliger les termes d'ordre $1/r^2$ et $1/r^3$ (champ proche).

— Le retard $t - r/c$ prend en compte le temps de propagation de l'onde.

— On néglige les effets de viscosité et de compressibilité faible non linéaire dans le fluide.

4 Pression acoustique

La pression dans le fluide est reliée au potentiel par :

$$p(r, t) = -\rho\frac{\partial\phi}{\partial t} \tag{7}$$

En injectant $\phi(r, t)$:

$$p(r, t) = -\rho\frac{1}{4\pi r}\frac{dQ}{dt}(t - r/c) \tag{8}$$

Approximation : La formule est exacte dans le champ lointain pour un monopôle sphérique. Dans le champ proche, d'autres termes apparaissent.

5 Débit volumique et dérivée

On rappelle que :

$$Q(t) = 4\pi R^2(t)\dot{R}(t) \tag{9}$$

En dérivant :

$$\frac{dQ}{dt} = 4\pi \frac{d}{dt}\big(R^2(t)\dot{R}(t)\big) \tag{10}$$

En développant :

$$\frac{d}{dt}(R^2\dot{R}) = 2R\dot{R}^2 + R^2\ddot{R} \tag{11}$$

Remarque : Cette étape utilise l'approximation que le débit est uniquement radial et que la bulle est sphérique.

6 Pression en champ lointain

En simplifiant le 4π pour obtenir la pression normalisée :

$$\boxed{p(r,t) = \frac{\rho}{r}\Big[R^2(t-r/c)\ddot{R}(t-r/c) + 2R(t-r/c)\dot{R}^2(t-r/c)\Big]} \tag{12}$$

- $R^2\ddot{R}$: contribution due à l'accélération radiale (monopôle) - $2R\dot{R}^2$: contribution non linéaire liée à la vitesse

Hypothèses et validité :

- La formule est valable uniquement dans le **champ lointain**, $r \gg R(t)$.
- Le champ proche (proche de la bulle) n'est pas décrit par cette formule ; des termes supplémentaires en $1/r^2$, $1/r^3$ apparaissent.
- La bulle est considérée comme un monopôle ponctuel.

Analyse dimensionnelle Vérifions que la formule de la pression est cohérente dimensionnellement.

- R : mètre [m]
- $\dot{R}$: vitesse radiale [m/s]
- $\ddot{R}$: accélération radiale [m/s^2]
- ρ : masse volumique [kg/m^3]
- r : distance [m]

Dimension du terme dans la parenthèse :

$$[R^2\ddot{R}] = m^2 \cdot \frac{m}{s^2} = \frac{m^3}{s^2}, \quad [2R\dot{R}^2] = m \cdot \left(\frac{m}{s}\right)^2 = \frac{m^3}{s^2} \tag{13}$$

Multiplication par ρ/r :

$$\frac{\rho}{r}[R^2\ddot{R} + 2R\dot{R}^2] = \frac{kg}{m^3} \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{m^3}{s^2} = \frac{kg}{m \cdot s^2} = \text{Pa} \tag{14}$$