

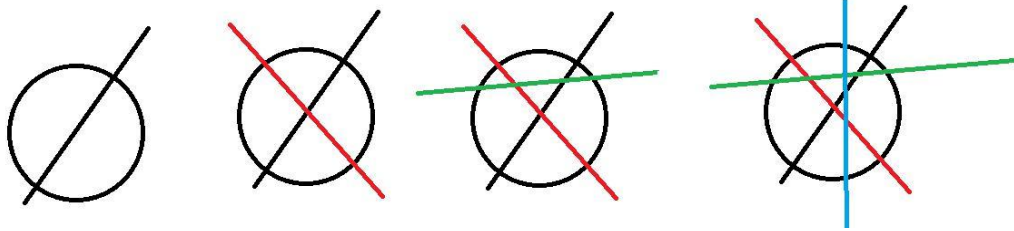


# интересные задачи

авторы Пётр и Артём

# Разрезание пиццы

- на сколько максимум кусков можно разрезать пиццу?



n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f(n)	2	4	7	11	16	22	29	37	46

- то есть  $f(n)=f(n-1)+n = f(n-2)+(n-1)+n=1+1+2 + 3+4+\dots+(n-1)+n = 1 + n(n+1)/2$  проверка :

$f(7) = 1+7* 82 = 29$  ,  $22+7 = 29$  проверка :  $f(9) = 1+9* 210 = 46$  ,  $37+9 = 46$

# Убийство по кругу для $k=2$

- по кругу стоят юниты, умирает каждый  $k$ -й, пропуская мёртвых. Какой юнит выживет? •
- Рассмотрим случай для  $k=2$ , то есть умирает каждый второй:

n	$f(n,2)$	$f(n,2)-n$	$2^{*n+1}-f(n,2)$		n	$f(n,2)$						
1	1	0	2		10	5	-5	16	19	7	-12	32
2	1	-1	4		11	7	-4	16	20	9	-11	32
3	3	0	4		12	9	-3	16	21	11	-10	32
4	1	-3	8		13	11	-2	16	22	13	-9	32
5	3	-2	8		14	13	-1	16	23	15	-8	32
6	5	-1	8		15	15	0	16	24	17		32
7	7	0	8		16	1	-15	32	25	19		32
8	1	-7	16		17	3	-14	32	26	21		32
9	3	-6	16		18	5	-13	32	27	23		2

# Убийство по кругу, для $k=2$ , формула

- то есть
- $2n + 1 - f(n, 2) = 2 \cdot 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}$  откуда
- $f(n, 2) = 2n + 1 - 2 \cdot 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}$
- быстро посчитать целый логарифм от 2:
- `def log_2_uint( x):`
  - `x |= x >> 1;`
  - `x |= x >> 2;`
  - `x |= x >> 4;`
  - `x |= x >> 8;`
  - `x |= x >> 16;`
  - `#x |= x >> 16; #for long`
  - `x = x ^ (x >> 1);`
  - `return x`

# Убийство по кругу, для $k=3$ , таблица

## Убийство по кругу, для $k=3$ , таблица

n	f(n,3)	red-n	3n-red+1	n	f(n,3)	red-n	3n-red+1	n	f(n,3)	red-n	3n-red+1
1	1			10	4,10	0	21	19	10,17	-9	48
2	1, 2			11	2,7	-9	32	20	13,20	-7	48
3	1, 2	-2	9	12	5,10	-7	32	21	2,16	-5	48
4	1,4	0	9	13	8,13	-5	32	22			
5	2,4	-3	14	14	2,11	-3	32	23			
6	1,5	-1	14	15	5,14	-1	32	24			
7	1,4	-6	21	16	1,8	-15	48	25			
8	4,7	-4	21	17	4,11	-13	48	26			
9	1,7	-2	21	18	7,14	-11	48	27			

# Убийства по кругу для $k=3$ , закономерность

- есть два числа, каждое число растёт с шагом в 3,
- затем когда становится  $n-1$ , следующим будет 1
- а если равно  $n$ , то следующим будет 2



# Кощей ложит деньги в банк

- вначале ложит  $k$ , затем в каждый последующий день на 1 больше
- после того как кощей ложит деньги, банк уменьшает всю сумму в 2 раза
- при каком начальном  $n$  в банке всегда будет целое число
- перебором подошло только  $k=2$

ложит	2	3	4	5		чётн	нечёт	чёт	нечёт
сумма	2	4	6	8		чёт	чёт	чёт	чёт
после деления	1	2	3	4...		нечёт	чёт	нечёт	чёт
ложит	6	7	8		18	19	20	21	
сумма	6	10	13 xx		18	28	34	38	
после деления	3	5			9	14	17	19xx	

# Квадрат задан линиями

- $y=ax+b$   $y=bx+c$   $y=cx+d$   $y=dx+a$
- пусть первая перпендикулярна второй ( и четвёртой), тогда
  - $b=-1/a$   $y = ax-1/a$  ,  $y = -x/a+a$ ,  $y = ax-1/a$   $y = ax-1/a$
  - $c=a$
  - $d=b=-1/a$
  - пусть первая перпендикулярна третьей, тогда
  - $c=-1/a$
- перпендикуляр к линии
- $1 + h^2 = t^2$
- $t^2 + 1 + a^2 = (a+h)^2 = a^2 + 2 ah + h^2$
- $1 + h^2 + 1 + a^2 = (a+h)^2 = a^2 + 2 ah + h^2$
- $1 + 1 + = (a+h)^2 = + 2 ah = 2$
- $a = 1/h$



# Вероятность прийти раньше

**Задача 1.** Антон, Борис и Вениамин договорились прийти в музей в промежуток между 13:00 и 14:00. Каждый мальчик выбирает время прихода наугад. Известно, что Антон пришёл раньше Бориса. Какова вероятность, что он пришёл и раньше Вениамина? Ответ должен быть числом от 0 до 1. Если необходимо, округлите ответ с точностью до 0,001.

Подход высокого уровня

Из соображений симметрии, при фиксированных 2 точках, есть два варианта - меньшая либо  $b$  либо  $a$  то есть вариантов, где  $a < b$  в два раза меньше чем всего пар точек. Тогда вероятность, что антон пришёл раньше бориса, который пришёл случайно, равно  $P(a < b) = 0.5$

Формальный подход

Вероятность что случайное  $A$  меньше случайного  $b$  в интервале  $0,1$  равна  $b$

Давай посмотрим какова сумма вероятности для всех возможных  $a$

Это будет интеграл от 0 до 1 от  $b$   $db$  равно одна вторая

То есть  $a$  придёт раньше  $b$  с вероятностью  $1/2$

Подход высокого уровня

Далее, при 3 или более фиксированных точках, всего вариантов размещения на тех же позициях разных людей будет  $n!$ , размещений где меньшая точка  $a$  -  $(n-1)!$  итого вероятность что  $a$  окажется наименьшей,  $(n-1)!/n! = 1/n$

$P(a < b \text{ и } a < в \text{ и } \dots) = 1/n$

Наконец условная вероятность что  $a < в$  при  $a < b$  это  $a$  меньше  $b$  и  $в$  делить на  $a$  меньше  $b$   $1/3$  делить на  $1/2$  будет  $2/3$

## Вероятность прийти раньше 2

- Итого если есть  $n+1$  элементов из которых надо найти вероятность что  $a$  меньше остальных  $n$  при условии что оно меньше конкретных  $k$ . по условной вероятности будет  $k+1$  делить  $n+1$ . В этом условии  $k=1$   $n=2$
- Можно несколько усовершенствовать задачу сказав что  $a$  должно быть меньше любых количество  $K$  из  $n$ . Думаю ты без труда найдёшь эту маленькую модификацию

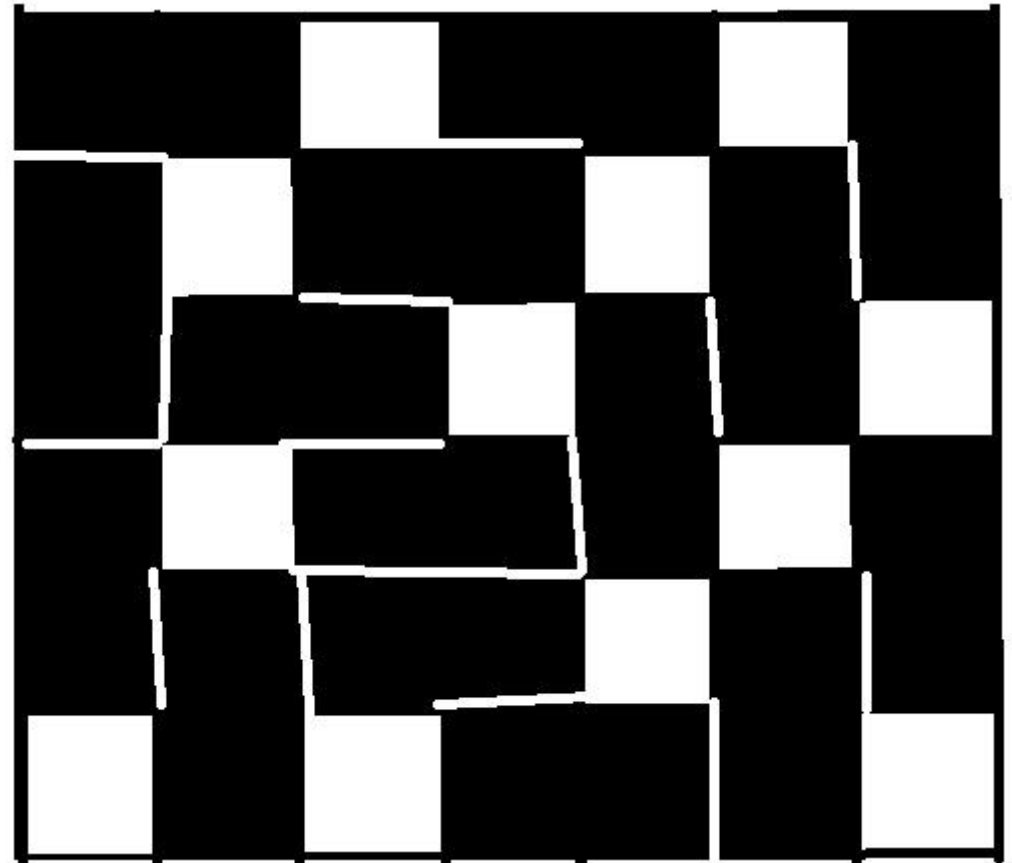
## ОТКРЫВАТЬ И ЗАКРЫВАТЬ ДВЕРИ

- есть 100 дверей в ряд, все двери в начале закрыты. Человек открывает двери, на каждом шагу  $i$  меняя статус двер с шагом  $i$ .  
то есть на первом шагу тронет все двери, на втором каждую вторую, на третьем каждую третью, и т.п.
- Какие двери останутся открытыми в конце?  
дверь трогается на шаге, который делит номер двери  $n$
- количество делителей числа чётное, только если оно не квадрат. - на каждый делитель  $k$  найдётся другой делитель  $n/k$
- если мы трогаем дверь чётное число раз, то в конце оно будет закрыто, если только порядковый номер не квадрат

# ПОЛОЖИТЬ КОСТЯШКИ ДОМИНО так чтобы нельзя было уже положить

5. На прямоугольную доску  $m \times n$  ( $m, n \geq 3$ ) положили несколько фигурок домино (прямоугольники  $1 \times 2$  или  $2 \times 1$ ) таким образом, что фигурки домино не накладываются одна на другую, не выходят за пределы доски  $m \times n$ , по крайней мере одно угловое поле доски покрыто домино и больше жодной фигурки домино не можна положить на доску без нарушения этих правил. Доведите, что по крайней мере  $\frac{2}{3}$  от всех полей доски заполнены.

- две незанятые клетки не могут стоять рядом по вертикали и горизонтали
- тогда в ряду должно быть примерно две занятые, одна незанятая клетка, или больше, если требуются костяшки домино
- тогда чёрными должны быть заполнены хотя бы  $\frac{2}{3}$  доски



# Вариантов путей по прямоугольной доске с диагоналями

- википедия:
  - Числа Деланнуа[1] (или числа Деланоя[2]; фр. Delannoy)  $D(a, b)$  в комбинаторике описывают количества путей из левого нижнего угла прямоугольной решётки  $(a, b)$  в противоположный по диагонали угол, используя только ходы вверх, вправо или вверх-вправо («ходом короля»).
- пусть  $k \leq m \leq n$ , где  $k$  - выбранное число диагоналей,
- тогда мы делаем  $n+m-k$  шагов, из которых выбираем варианты разместить  $k$  диагоналей,  $m-k$  горизонтальных линий,  $n-k$  вертикальных линий
- количество вариантов путей для одного  $k$  числа диагоналей будет полиномиальным коэффициентом 
$$\binom{n+m-k}{k, n-k, m-k} = \frac{(n+m-k)!}{k!(n-k)!(m-k)!}$$
- тогда количество пути для всех  $k$  от 0 до  $m$  будет
- $$\sum_{k=0}^m \frac{(n+m-k)!}{k!(n-k)!(m-k)!}$$

