Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов

Способ решения

- Мы хотим решить дифур, представив y в виде ряда:
$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + \ldots$$
- В дифуре есть y’,y”, для них мы считаем производную от ряда:
  - $y^{‘} = c_1 + 2c_2x^1 + 3c_3x^2 + 4\mathrm{c}_4x^3 + 5c_4x^4 + \ldots$
  - $y^{”} = 2c_2 + 3 * 2c_3x^1 + 4 * 3\mathrm{c}_4x^2 + 4 * 5c_5x^3 + \ldots$
- Подставив эти ряды в исходное уравнение, мы сравниваем коэфициенты при x- ах с одинаковой степенью и так находит все “с” для ряда
- может быть надо начальное условие типа чему равно y(0) тогда из формул рядок:
  - y(0)=c_0 (остальное умноженое на x, то есть 0
  - y’(0)=c_1 (остальное умноженое на x, то есть 0), и так далее
- можно использовать разложение в ряд Тейлора в точке 0:
- y(x)=y(0)+$\frac{y’(0)}{1!}x + \frac{y”(0)}{2!}x^2 + \frac{y’”(0)}{3!}x^3 + \frac{y””(0)}{4!}x^4 + \ldots$

Известные ряды

- Будет использоваться ряд экспоненты
- $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots$

Пример 1

- y’=$\frac{1}{2}xy$ *при y(0) = 1 то есть сразу знаем что* $c_0 = y(0) = 1$
  - *подставим ряды в формулу:* y’ $-\frac{1}{2}xy = 0$
  - $(c_1 + 2c_2x^1 + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + \ldots) - \frac{1}{2}x(c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \ldots) = 0$
- *раскроем скобки и сгруппируем элементы с каждым x:*
  - $c_1 + 2c_2x^1 + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + 5c_5x^4 \ldots - \frac{1}{2}xc_0 - \frac{1}{2}c_1x^2 - \frac{1}{2}c_2x^3 - \frac{1}{2}c_3x^4 + \ldots = 0$
  - $c_1 + (2c_2 - \frac{1}{2}c_0)x^1 + (3c_3 - \frac{1}{2}c_1)x^2 + (4c_4x^3 - \frac{1}{2}c_2x^3) + (5c_5 - \frac{1}{2}c_3)x^4 + \ldots = 0$
- *теперь, чтобы при любых x выполнялось равенство надо чтобы каждый коэфициент при каждом* x^n был равент 0 то есть
  - $c_1 = 0$
  - $2c_2 - \frac{1}{2}c_0 = 0, \quad c_2 = \frac{1}{4}c_0 = \frac{1}{4}$
  - $3c_3 - \frac{1}{2}c_1 = 0$, c_3 *=0, также c5 и все нечётные c = 0*
- $4c_4 - \frac{1}{2}c_2 = 0, c_4 = \frac{1}{2*4}c_2 = \frac{1}{2*4*4}$
  - $6c_6 - \frac{1}{2}c_4 = 0, \quad c_6 = \frac{1}{4*2*4*2*6}c_4 = 0,$ *то есть для чётных* $c_n = \frac{1}{n!4^n}$
- $y = 1 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^2\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{4}x^2\right)^3 = e^{\frac{1}{4}x^2}$ *по формуле ряда экспоненты*

Пример 2

- $y^{'} = x^2 + y^2$, при $y(0) = \frac{1}{2}$
- $y^2 = (c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \ldots)^2 =$
- ладно напишу подробно как считать квадрат
  - $= (c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \ldots)*(c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \ldots) =$
  - $c_0c_0 + c_0c_1x + c_0c_2x^2 + c_0c_3x^3 + \ldots$
  - $c_1c_0x + c_1c_1x^2 + c_1c_2x^3 + c_1c_3x^4 + \ldots$
  - $c_2c_0x^2 + c_2c_1x^3 + c_2c_2x^4 + c_2c_3x^5 + \ldots$
  - $c_3c_0x^3 + c_3c_1x^4 + c_3c_2x^5 + c_3c_3x^6 + \ldots$

по диагоналям расположены элементы с одинаковым “x”, сгруппируем их

- $c_0^2 + 2c_0c_1x + 2(c_0c_2 + c_1^2)x^2 + 2(c_0c_3 + c_1c_2)x^3 + 2(c_0c_4 + c_1c_3 + c_2^2)x^4$

- подставим это в $y^{'} = x^2 + y^2$

$c_1 + 2c_2x^1 + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + \ldots = c_0^2 + 2c_0c_1x + 2(c_0c_2 + c_1^2 + \frac{1}{2})x^2 + 2(c_0c_3 + c_1c_2)x^3 + 2(c_0c_4 + c_1c_3 + c_2^2)x^4$

Пример 2

- *из этого сравним элементы при каждом* x^n
  - $c_1 = c_0{}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$
  - $2c_2 = 2c_0c_1,$
  - $c_2 = \frac{1}{2}\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$
  - $3c_3 = 2(c_0c_2 + c_1{}^2 + \frac{1}{2}),$
  - $c_3 = \frac{2}{3}(\frac{1}{4}\frac{1}{8} + \frac{1}{4}\frac{1}{4} + \frac{1}{2}) = \frac{2}{3}\frac{1+2+16}{32} = \frac{19}{3*16}$
  - $4c_4 = 2(c_0c_3 + c_1c_2), c_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{19}{3*16} + \frac{1}{4}\frac{1}{8}\right) = \frac{11}{96}$
  - *и так далее*
- *тогда ответ*
- $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{18}{48}x^3 + \frac{11}{96}x^4 + \ldots$ (считаем сколько надо)

Пример 2 - второй способ

- $y' = x^2 + y^2$, возьмём производную несколько раз
  - $y'' = 2x + 2yy'$
  - по формуле производной от суммы $(ab)' = a'b + ab'$
  - $y''' = 2 + 2y'y' + 2yy''$
  - $y'''' = 0 + 2y'y'' + 2y''y' + 2y\,y''' + 2y'y'' = 4y'y'' + 2y''y' + 2y\,y'''$
- *подставим x=0, y(0)=*$\frac{1}{2}$
  - $y'(0) = 0^2 + \frac{1}{2}^2 = \frac{1}{4}$
  - $y''(0) = 2\frac{1}{2}\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$
  - $y'''(0) =2+2\frac{1}{4}\frac{1}{4} + 2\frac{1}{2}\frac{1}{4} = \frac{18}{8}$
  - $y''''(0) = 4\frac{1}{4}\frac{1}{4} + 2\frac{1}{4}\frac{1}{4} + 2\frac{1}{2}\frac{18}{8} = \frac{11}{4}$
- *подставим эти значения в ряд Тейлора у точки 0:*
- $y=\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4*2}x^2 + \frac{18}{8}\frac{1}{6}x^3 + \frac{11}{4}\frac{1}{24}x^4$ *(получили те же коэффициенты)*

Пример 3 (x-1)y”(x)-xy’(x)+y(x)=0

- подставляем ряды для y, y’ и y“:

$(x\text{-}1)(2c_2 + 3*2c_3x^1 + 4*3c_4x^2 + 4*5c_5x^3 + 5*6c_6x^4 + \ldots)$

$$-x(c_1 + 2c_2x^1 + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + 5c_4x^4 + \ldots)$$

$$+ c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + \ldots = 0$$

- *смотрим коэфициенты при “x”- ax*

  - x^0: $-2c_2 + c_0 = 0$ $\qquad c_2 = -\frac{c_0}{2}$
  - x^1: $2c_2 - 6c_3 - c_1 + c_1 = 0,$ $\qquad c_3 = \frac{1}{3}c_2 = -\frac{c_0}{6}$
  - x^2: $6c_3 - 12c_4 - 2c_2 + c_2 = 0,$ $\quad c_4 = \frac{1}{2}c_3 - \frac{1}{12}c_2 = -\frac{c_0}{12} + \frac{c_0}{24} = -\frac{c_0}{24}$
  - x^3: $12c_4 - 20c_5 - 3c_3 + c_3 = 0,$ $\qquad c_5 = \frac{12}{20}c_4 - \frac{2}{20}c_3 = -\frac{12}{20}\frac{c_0}{24} + \frac{8}{20}\frac{c_0}{24} = \frac{4c_0}{20*24} = -\frac{c_0}{120}$

Пример 3

- видим там закономерность- факториалы, решим для общего случая методом индукции
- пусть $c_n = \frac{1}{n!}$, $c_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!}$, найдём c_{n+1}:

  - x^{n-1}: $(n-1)nc_n - n(n+1)c_{n+1} - (n-1)c_{n-1} + c_{n-1} = 0$

  - $c_{n+1} = \frac{(n-1)n}{(n+1)n} c_n - \frac{(n-2)}{(n+1)n} c_{n+1} =- \frac{(n-1)}{(n+1)} \frac{c_0}{n!} + \frac{(n-2)}{(n+1)n} \frac{c_0}{(n-1)!} =$
  - $= \frac{1}{(n+1)!}(-(n-1)c_0 + (n-2)c_0) = \frac{1}{(n+1)!}(n - n + 1 - 2)c_0 =- \frac{c_0}{(n+1)!}$
- итого, при параметрах c_0 и c_1, и используем ряд экспоненты
- y $= c_0 + c_1 x - \frac{c_0}{2!} x^2 - \frac{c_0}{3!} x^3 - \frac{c_0}{4!} x^4 + \ldots = 2c_0 + c_1 x + c_0 x \; - c_0 e^x$

Пример 4   y”-2y’+y=e^x,   y(0)=0,y’(0)=1

- сразу знаем что c_0 =y(0)=0, $c_1 = y$’(0)=1,
- подставляем ряды для y, y’ и y“,
  - $(2c_2 + 3*2c_3x^1 + 4*3c_4x^2 + 4*5c_5x^3 + 5*6c_6x^4 + \ldots)$
  - $-2(c_1 + 2c_2x^1 + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + 5c_4x^4 + \ldots)$
  - $+c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + \ldots = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$
- *смотрим коэфициенты при “x”- ах*
  - x^0: $2c_2 - 2c_1 + c_0 = 1$, $c_2 = \frac{1+2c_1-c_0}{2} = \frac{1+2*1-0}{2} = \frac{3}{2}$
  - x^1: $2*3c_3 - 2*2c_2 + c_1 = 1$, $c_3 = \frac{1+2*2c_2-c_1}{2*3} = \frac{1+2*2\frac{3}{2}-1}{2*3} = 1$
  - x^2: $3*4c_3 - 2*3c_4 + c_2 = \frac{1}{2!}$, $c_4 = \frac{1+2*2c_3-c_2}{3*4} =$
  - x^3: $4*5c_3 - 2*4c_4 + c_3 = \frac{1}{3!}$
  - *(может есть закономерность? как свернуть рекурсию)* $c_n = \frac{1+(n-1)*c_{n-1}-c_{n-2}}{(n-1)n}$ – ?

Ссылки

- https://www.youtube.com/watch?v=2AUoSzaj72U&t=28s&ab_channel=%D0%AF%D1%85%D1%8C%D0%B5%D0%9C%D1%83%D1%85%D1%82%D0%B0%D1%80%D0%BE%D0%B2
- https://matica.org.ua/metodichki-i-knigi-po-matematike/spravochnik-a-a-gusak-v-m-gusak/33-1-integrirovanie-differentcialnykh-uravnenii-s-pomoshchiu-riadov
- https://www.youtube.com/watch?v=CRUq2xmdxJs&ab_channel=%D0%94%D0%BC%D0%B8%D1%82%D1%80%D0%B8%D0%B9%D0%9B%D0%BE%D1%81%D0%B5%D0%B2