МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

ОТЧЕТ

по лабораторной работе №1 «Интеграл Римана»
по дисциплине «Математический Анализ»

Выполнил: Денисов Д. А.
Студент группы R3138

Санкт-Петербург

2022

1. Задание:

Составьте интегральную сумму для интеграла Римана данной функции по данному промежутку. Вычислите интеграл через предел интегральных сумм. Докажите, что соответствующий интеграл существует. Проверьте с помощью формулы Ньютона–Лейбница. Напишите программу (язык любой), вычисляющую и рисующую интегральные суммы для данной функции на данном отрезке. Входные данные для программы: число точек разбиения, способ выбора оснащения (левые, правые, средние). Найдите погрешность оценки, сравните ее с теоретической погрешностью (формулы выведите с использованием формулы Тейлора с остатком в форме Лагранжа). Разбиение равномерное.

Для $f(x) = \sin(x)\,, [0, \pi]$

2. Докажем существования интеграла и найдем его значение:

$\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx\ \sigma_\tau(f,\xi) = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{\pi k}{n}\right) * \frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{\pi k}{n}\right)$

Рассмотрим: $\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{\pi k}{n}\right) = sin\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{\pi(n-1)}{n}\right) + \sin\left(\frac{\pi n}{n}\right)$ До множим на $2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$, тогда получим, $2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) + 2\sin\left(\frac{\pi 2}{n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) + \cdots + 2\sin\left(\frac{\pi(n-1)}{n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) + 2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{n}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + 1\right)$ следовательно $\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{\pi k}{n}\right) = \frac{2\left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)+1\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}$, а тогда $\sigma_\tau(f,\xi) = \frac{\pi}{n} * \frac{2(1+1)}{2\left(\frac{\pi}{n}\right)} = 2$

Проверим найденное значение по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx = -\cos\,(x)\Big|_0^{\pi} = 1 + 1 = 2$$

Значит можно сделать вывод, что интеграл по Риману доказан правильно.

3. Результаты работы

По заданию сказана рассмотреть три типа оснащения, поэтому начнем с левого и возьмем разбиение на 10 отрезков:

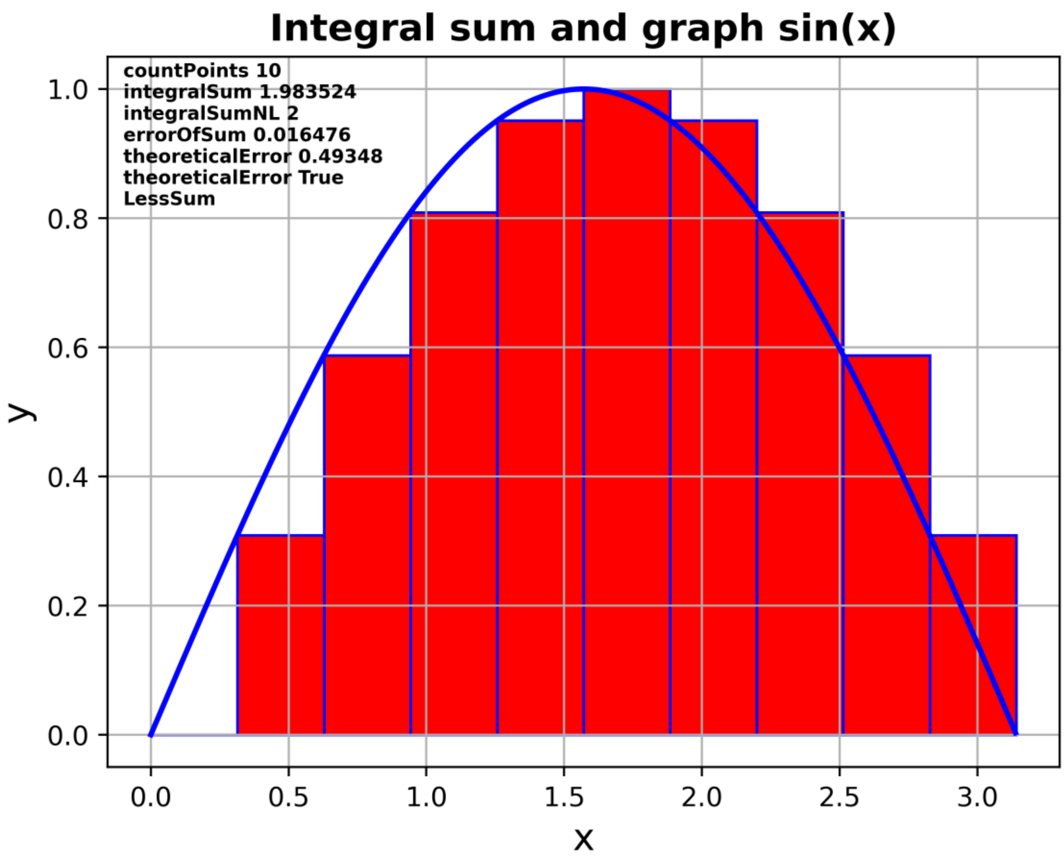


Рисунок 1: левое разбиение, шаг 10

Можно заметить, что теоретическая погрешность и погрешность оценки разные, так что теоретическая больше, чем практическая, следовательно программа работает правильно. Также необходимо сделать оговорку, что значение в формуле расчета теоретической погрешности для $\max |f'|$ и второй производной приняты как 1, так как необходимо принять максимальное значение.

Центральное разбиение на 10 отрезков:

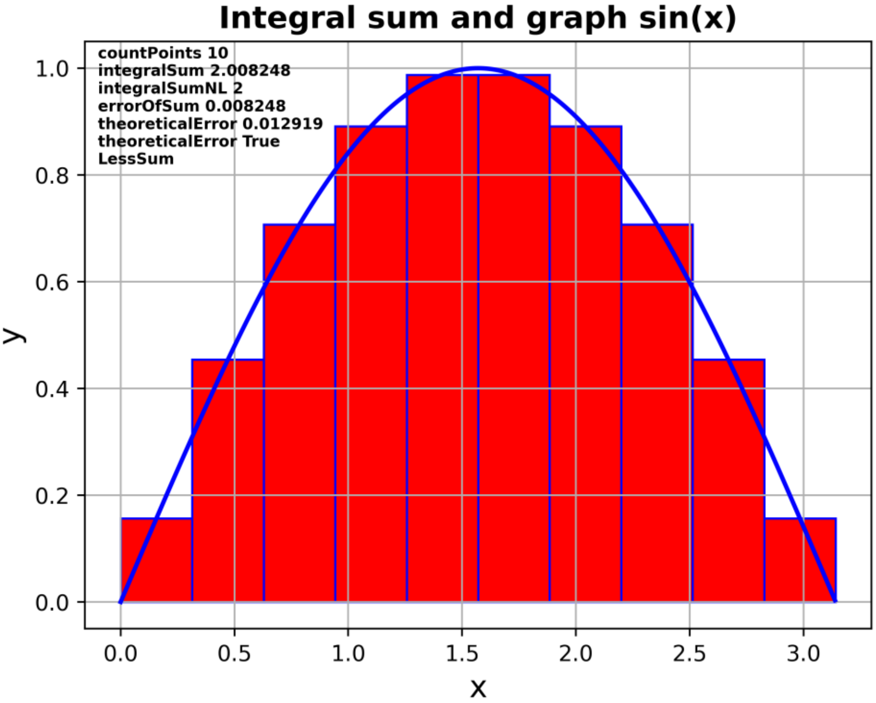


Рисунок 2среднее разбиение, шаг 10

Как можно заметить, что и здесь погрешность теоретическая больше практической. Посмотрим правое разбиение и шаг 10:

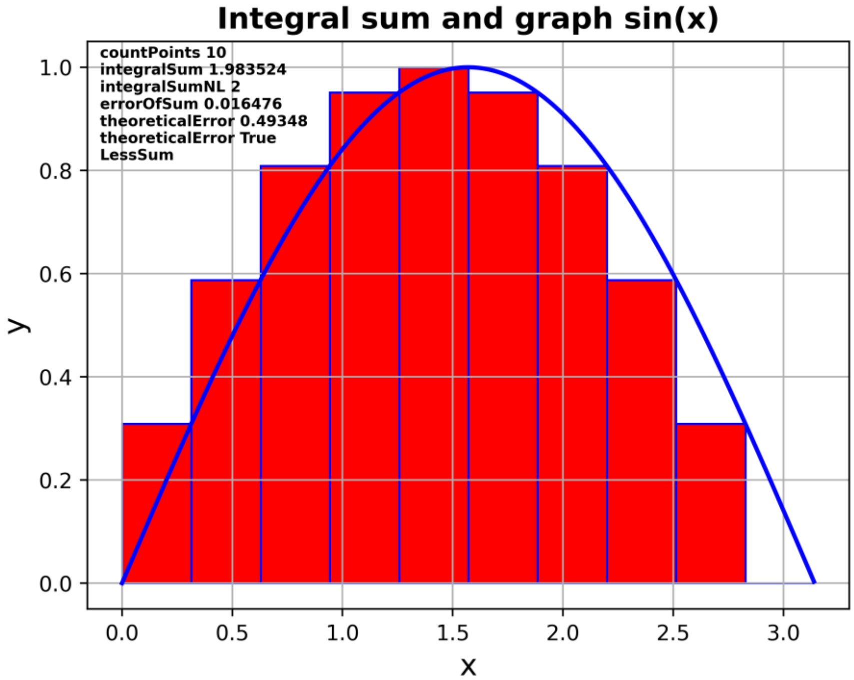


Рисунок 3: правое разбиение, шаг 10

Как можно заметить, что и тут погрешность меньше практической.

Увеличим количество точек разбиение в 1000 раз и посмотрим результат:

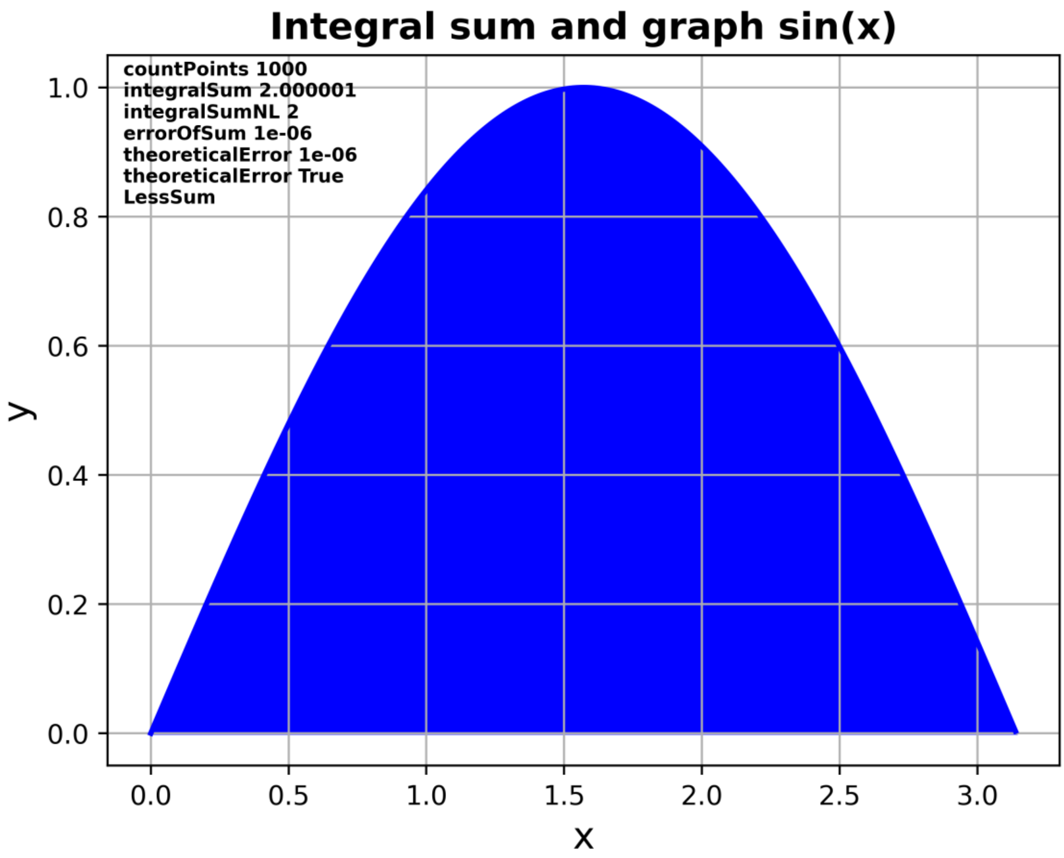


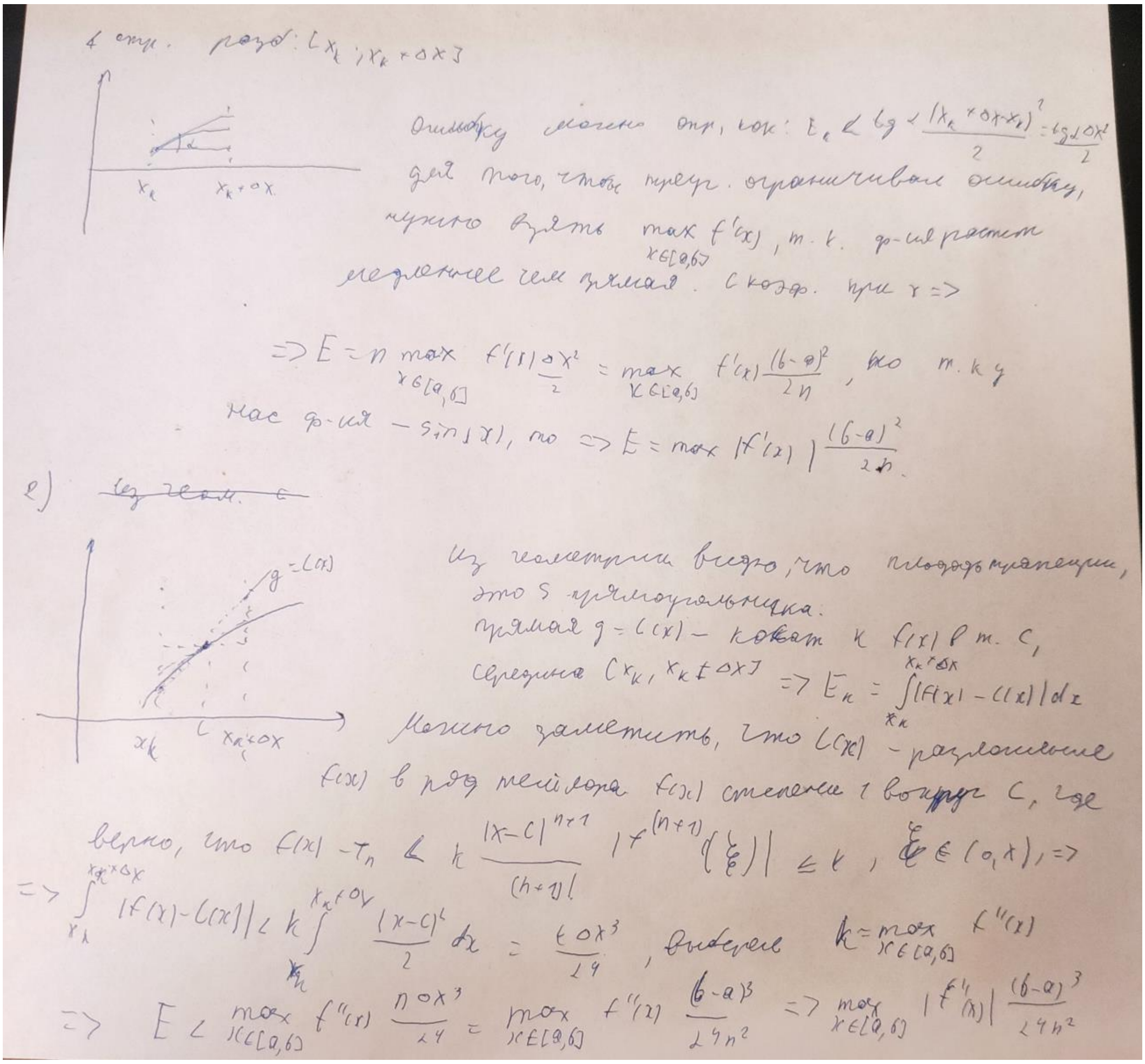
Рисунок 4 центральное разбиение, шаг 1000

Как можно заметить, что и здесь программа работает правильно, так как разбиение теоретическое больше, чем практическое, а на графике отсутствует красный цвет, так его перекрывают синие границы прямоугольника.

4. Ссылка на программу.

По данной ссылке можно найти исходный код программы и дополнительные графики, которые не включены в отчет, но построены данной программой. В консоль программа результат не выводит, но требует ввести исходные параметры, такие как тип оснащения и количество точек разбиения. https://github.com/smert-WoEN/mathLab1

5. Формула теоретической погрешности интеграла и его приближения.



1 стр. разб: $[x_k; x_k+\Delta x]$

Ошибку можно опр. так: $E_k < tg\,\alpha \frac{(x_k+\Delta x-x_k)^2}{2} = \frac{tg\,\alpha\,\Delta x^2}{2}$

для того, чтобы преуг. ограничивал ошибку, нужно взять $\max\limits_{x\in[a,b]} f'(x)$, т.к. ф-ия растет медленнее чем прямая с коэф. при x =>

$$\Rightarrow E = n \max_{x\in[a,b]} f'(x)\frac{\Delta x^2}{2} = \max_{x\in[a,b]} f'(x)\frac{(b-a)^2}{2n},$$ но т.к. у нас ф-ия $-\sin(x)$, то $\Rightarrow E = \max|f'(x)|\frac{(b-a)^2}{2n}$.

2) ~~Из геом. с~~

Из геометрии видно, что площадь трапеции, это S прямоугольника. Прямая $g=L(x)$ – касат к $f(x)$ в т. c, середина $[x_k, x_k+\Delta x]$ $\Rightarrow E_k = \int_{x_k}^{x_k+\Delta x} |f(x)-L(x)|\,dx$

Можно заметить, что $L(x)$ – разложение $f(x)$ в ряд тейлора $f(x)$ степени 1 вокруг c, где верно, что $f(x)-T_n < k\frac{|x-c|^{n+1}}{(n+1)!}$, $|f^{(n+1)}(\xi)| \le k$, $\xi \in (a,x)$, =>

$$\Rightarrow \int_{x_k}^{x_k+\Delta x} |f(x)-L(x)| < k\int_{x_k}^{x_k+\Delta x}\frac{(x-c)^2}{2}dx = \frac{k\Delta x^3}{24},$$ выберем $k = \max\limits_{x\in[a,b]} f''(x)$

$$\Rightarrow E < \max_{x\in[a,b]} f''(x)\frac{n\Delta x^3}{24} = \max_{x\in[a,b]} f''(x)\frac{(b-a)^3}{24n^2} \Rightarrow \max_{x\in[a,b]}|f''(x)|\frac{(b-a)^3}{24n^2}$$

Рисунок 5вывод формулы теоретической погрешности

(я устал набирать текст поэтому картинка)

6. Выводы

Таким образом было установлено, что в зависимости, в данном случае, от левого и правого оснащения не зависит сумма интеграла, но меняется, если выбрать центральное оснащение. Также если увеличить количество точек оснащения, то можно увеличить точность работы программы, но тогда теряется скорость исполнения программы.