HW1

Smetanin Aleksandr

21 февраля 2020 г.

1. Коэффициент эксцесса:

$$\gamma_4 = \frac{\int_{\mathbb{R}} (z - m_1)^4 \mathscr{P}(dz)}{\sigma^4} - 3 = \frac{m_4^*}{\sigma^4} - 3$$

Тогда для равномерного распределения на $[-a, a]$:

$$\gamma_4 = \frac{\int_{-a}^{a} (z-0)^4 \frac{1}{2a} dz}{(\frac{(2a)^2}{12})^2} - 3 = \frac{12^2 \int_{-a}^{a} z^4 dz}{(2a)^5} - 3 = \frac{9a^5}{5a^5} - 3 = -\frac{6}{5}$$

Для распределения Лапласа с плотностью $f(x) = \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha|x|}, \quad -\infty < x < +\infty$:

$$\gamma_4 = \frac{\int_{-a}^{a} (z-0)^4 \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha|z|} dz}{(\frac{2}{\alpha^2})^2} - 3 = \frac{\alpha^5 \int_{-\infty}^{\infty} z^4 e^{-\alpha|z|} dz}{8} - 3 =$$
$$= \frac{\alpha^5 \cdot 2(-e^{-az}(24 + 24az + 12a^2z^2 + 4a^3z^3 + a^4z^4)|_0^{\infty})}{\alpha^5 8} - 3 = \frac{-2 \cdot 24 e^{-a \cdot 0}}{8} - 3 = 3$$

2. Пусть $X_1, ..., X_n$ —выборка из распределения $\mathscr{F}$ с функцией распределения F и пусть F_n^* — эмпирическая функция распределения, построенная по этой выборке. Тогда $F_n^*(y) \xrightarrow{\text{p}} F(y)$ при $n \to \infty$ для любого $y \in \mathbb{R}$.
Доказательство.

$$F_n^*(y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{I}(X_i < y)$$

Случайные величины $\mathrm{I}(X_1 < y), \mathrm{I}(X_2 < y), \ldots$ независимы и одинаково распределены, их математическое ожидание конечно:

$$\mathrm{EI}(X_1 < y) = 1 \cdot \mathrm{P}(X_1 < y) + 0 \cdot \mathrm{P}(X_1 \geqslant y) = \mathrm{P}(X_1 < y) = F(y) < \infty,$$

поэтому можно применить ЗБЧ Хинчина:

$$F_n^*(y) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{I}(X_i < y)}{n} \xrightarrow{\text{p}} \mathrm{EI}(X_1 < y) = F(y)$$

3. Так как $X_1, \ldots, X_n$ - независимы и одинакого расспределены, $F(x)$ - их функция распределения. Тогда случайная величина $\varphi_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ на каждом элементарном исходе совпадает с одной из величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$, но не совпадает с одной и той же величиной при всех исходах. Из соображений симметрии $P(\max(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \xi_1) = P(\xi_1 \geq \xi_2, \ldots, \xi_1 \geq \xi_n) = \frac{1}{n}$

$$F_{\varphi_n}(x) = P(\max\{\xi_1, \ldots, \xi_n\} < x) = P(\xi_1 < x, \ldots, \xi_n < x) =$$
$$= P(\xi_1 < x) \cdot \cdots \cdot P(\xi_n < x) = (P(\xi_1 < x))^n = (F_{\xi_1}(x))^n$$

То есть функция распределения максимума не будет распределена так же как и выборка.

4. Заметим, что $I(X_1 < y)$ имеет распределение Бернулли $BF(y)$, поэтому

$$\mathrm{EI}\,(X_1 < y) = F(y), \qquad \mathrm{DI}\,(X_1 < y) = F(y)(1 - F(y))$$

a) Случайные величины $I(X_i < y)$ одинаково распределены, поэтому

$$\mathrm{E}F_n^*(y) = \mathrm{E}\frac{\sum_{i=1}^n \mathrm{I}\,(X_i < y)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n \mathrm{EI}\,(X_i < y)}{n} = \frac{n\mathrm{EI}\,(X_1 < y)}{n} = F(y)$$

b) Случайные величины $I(X_i < y)$ независимы и одинаково распределены, поэтому

$$\mathrm{D}F_n^*(y) = \mathrm{D}\frac{\sum_{i=1}^n \mathrm{I}\,(X_i < y)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n \mathrm{DI}\,(X_i < y)}{n^2} = \frac{n\mathrm{DI}\,(X_1 < y)}{n^2} = \frac{F(y)(1 - F(y))}{n}$$

c) Пусть $y > z$, тогда

$$\begin{aligned}\mathrm{D}(F_n^*(y) - F_n^*(z)) = \mathrm{D}\frac{\sum_{i=1}^n \mathrm{I}\,(X_i < y) - \sum_{i=1}^n \mathrm{I}\,(X_i < z)}{n} = \\ = \frac{\sum_{i=1}^n \mathrm{D}\,(\mathrm{I}\,(X_i < y) - \mathrm{I}\,(X_i < z))}{n^2} = \frac{n\mathrm{D}\,(\mathrm{I}\,(X_1 < y) - \mathrm{I}\,(X_1 < z))}{n^2} = \\ = \frac{(F(y) - F(z))(1 - F(y) + F(z))}{n}\end{aligned}$$

Так как полученная с.в. равна 1 на (z, y), и 0 вне этого интервала, т.е. имеет распределение Бернулли с вероятностью $p = F(y) - F(z)$. При $y < z$ с.в. равна -1 на (y, z), но дисперсия остнется прежней. При $y = z$, $\mathrm{D}(F_n^*(y) - F_n^*(z)) = 0$.

5. Так как $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из распределения Бернулли с параметром p, X_i принимает значение 1 с вероятностью p и значение 0 с вероятностью $1-p$. А функция распределения имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1 - p, & x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

Тогда, $Y_i = F(X_i)$. С вероятностью p Y_i будет принимать значение $F(1) = 1 - p$, и с вероятностью $1 - p$ – $F(0) = 0$. Значит Y_i имеет функцию распределения

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1 - p, & x \le 1 - p \\ 1, & x > 1 - p \end{cases}$$