Numerična aproksimacija in interpolacija, 2019/2020

2. domača naloga

Nalogo rešite v programu Matlab. Datoteke, uporabljene pri reševanju, oddajte v ZIP datoteki `ime_priimek_vpisnastevilka_dn2.zip` v spletni učilnici najkasneje do 20. januarja 2020.

1. Diskretni skalarni produkt funkcij g in h na intervalu $[-1,1]$ je podan z
$$\langle g,h\rangle = \frac{1}{50}\sum_{i=0}^{100} g(\boldsymbol{x}_i)h(\boldsymbol{x}_i), \qquad \boldsymbol{x} = \left(\frac{i}{50}-1\right)_{i=0}^{100}.$$
Naj bodo $Q_0, Q_1, Q_2, \ldots$ ortonormirani polinomi, ki so določeni s tričlensko rekurzivno zvezo
$$Q_k(x) = \frac{x-\alpha_k}{\beta_{k+1}}Q_{k-1}(x) - \frac{\beta_k}{\beta_{k+1}}Q_{k-2}(x), \qquad k=1,2,\ldots.$$
Pri tem je $Q_{-1}=0$ in Q_0 konstanten pozitiven polinom z (inducirano) normo 1. Implementirajte postopek za računanje koeficientov α_k in β_k ter pripravite metodo, ki za dane koeficiente $a_0, a_1, \ldots, a_n$ izračuna vrednost polinoma $a_0Q_0 + a_1Q_1 + \ldots + a_nQ_n$ brez njegove pretvorbe v drugo bazo.

   (a) Izračunajte koeficiente α_k in β_k, $k=1,\ldots,6$, ter narišite polinome Q_k, $k=0,1,\ldots,5$.

   (b) S pomočjo ortonormiranih polinomov iz prejšnje točke določite polinome, ki predstavljajo elemente najboljše aproksimacije po metodi najmanjših kvadratov za funkcijo $f(x) = x\sin(3x) - e^{\sin(x)}$ v $\mathbb{P}_n$, $n \in \{0,1,\ldots,5\}$. Primerjajte napake aproksimacij glede na inducirano normo in glede na diskretno enakomerno normo na $\boldsymbol{x}$.

2. Naj bo $\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ seznam točk, ki določa delitev $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ intervala $[a,b]$. Naj $\mathbb{S}^1_{3,\boldsymbol{x}}$ označuje prostor zvezno odvedljivih odsekoma kubičnih funkcij s stičnimi točkami $\boldsymbol{x}$. Bazne funkcije $B_{i,r}$, $(i,r) \in \{0,1,\ldots,n\}\times\{-1,1\}$, za $\mathbb{S}^1_{3,\boldsymbol{x}}$ so enolično določene kot rešitve interpolacijskih problemov
$$B_{i,r}(x_j) = \frac{x_i - x_{i-r}}{x_{i+r}-x_{i-r}}\delta_{i,j}, \quad B'_{i,r}(x_j) = \frac{3}{x_{i+r}-x_{i-r}}\delta_{i,j}, \qquad j=0,1,\ldots,n,$$
kjer $\delta_{i,j}$ označuje Kroneckerjevo delto ter je $x_{-1}=a$ in $x_{n+1}=b$.

   (a) Sestavite metodo, ki izračuna vrednost $B_{i,r}(x)$ za $x \in [a,b]$. Oprite se na odsekoma polinomsko predstavitev $B_{i,r}$ v Newtonovi bazi. S pomočjo te metode narišite bazne funkcije na intervalu $[0,10]$ za $\boldsymbol{x} = (0,2,3,6,7,10)$.

   (b) Interpolacijski operator $\mathcal{I}^1_{3,\boldsymbol{x}}$, ki je projektor na $\mathbb{S}^1_{3,\boldsymbol{x}}$, odvedljivi funkciji f priredi odsekoma kubično funkcijo
$$\mathcal{I}^1_{3,\boldsymbol{x}}f = \sum_{i=0}^{n}\sum_{r\in\{-1,1\}}\left(f(x_i) + \frac{1}{3}f'(x_i)(x_{i+r}-x_i)\right)B_{i,r}.$$
Narišite $\mathcal{I}^1_{3,\boldsymbol{x}}f$ in izračunajte napako $\|f - \mathcal{I}^1_{3,\boldsymbol{x}}f\|_{\infty,\boldsymbol{u}}$ za funkcijo $f(x) = x\sin(x)$ na $[0,10]$, kjer je $\boldsymbol{x}$ seznam stičnih točk iz prejšnje točke in $\boldsymbol{u} = (\frac{i}{100})_{i=0}^{1000}$.

   (c) Naj bo
$$\mathcal{I}^2_{3,\boldsymbol{x}}f = \sum_{i=0}^{n}\sum_{r\in\{-1,1\}}\left(f(x_i) + \frac{1}{3}s_i(x_{i+r}-x_i)\right)B_{i,r}$$
aproksimacijski operator, ki funkciji f priredi odsekoma kubično funkcijo s stičnimi točkami $\boldsymbol{x}$ iz prostora $\mathbb{S}^2_{3,\boldsymbol{x}} = \mathbb{S}^1_{3,\boldsymbol{x}} \cap C^2([a,b])$ s parametri $s_i \in \mathbb{R}$, $i=0,1,\ldots,n$, ki so enolično določeni z interpolacijskimi pogoji
$$\mathcal{I}^2_{3,\boldsymbol{x}}f(x_i) = f(x_i), \quad i=0,1,\ldots,n,$$
ter $(\mathcal{I}^2_{3,\boldsymbol{x}}f)'(a) = f'(a)$ in $(\mathcal{I}^2_{3,\boldsymbol{x}}f)'(b) = f'(b)$. Narišite $\mathcal{I}^2_{3,\boldsymbol{x}}f$ in primerjajte vrednost norme residuala $\|f - \mathcal{I}^2_{3,\boldsymbol{x}}f\|_{\infty,\boldsymbol{u}}$ z normo residuala iz prejšnje točke.