Verjetnostne metode v računalništvu

prva domača naloga

Naloga 1

Opazujemo naslednji algoritem:

Algoritem 1: PERMUTIRANJE(n)

Vhod: Naravno število $n > 1$
Izhod: Tabela števil $A[1 \dots n]$

A = tabela ničel velikosti n
i_0 = enakomerno naključno izbrano število iz množice $\{1, 2 \dots n\}$
for $i = 1, 2 \dots n$ **do**
  $A[i] = \big(i + i_0 \pmod n\big) + 1$
return A

---

a) Naj bosta $1 \leq i, j \leq n$. Kolikšna je verjetnost, da algoritem PERMUTIRANJE na vhodu n vrne tako tabelo A, da je $A[i] = j$? Odgovor utemelji.

b) Ali algoritem enakomerno vrača naključno permutacijo in zakaj?

Naloga 2

Opazujemo naslednji algoritem:

Algoritem 2: KOŠARA(n)

Vhod: Naravno število $n > 1$
Izhod: \

K = košara, ki vsebuje natanko eno belo in eno črno žogo
while K vsebuje $< n$ belih žog **do**
  $\check{Z}$ = enakomerno naključno izbrana žoga iz košare K
  if $\check{Z}$ je barve X **then**
    daj $\check{Z}$ nazaj v K in dodaj še eno (novo) belo žogo v K
  else
    daj $\check{Z}$ nazaj v K

---

1. Koliko je pričakovano število preverjanj pogoja zanke **while**, če je X bela barva?
2. Koliko je pričakovano število preverjanj pogoja zanke **while**, če je X črna barva?

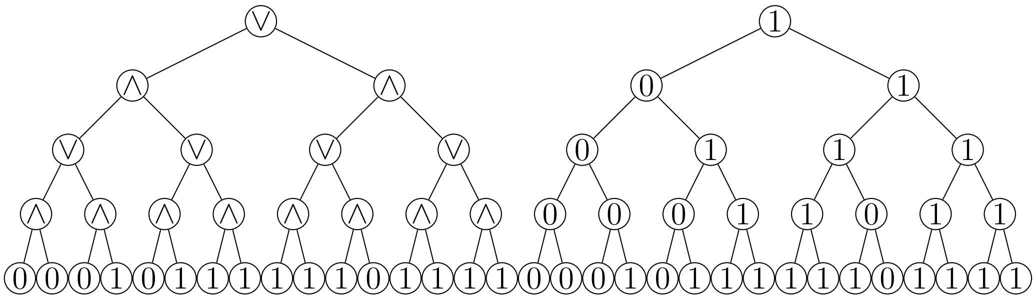
Nalogo reši natančno (brez notacije veliki O).

Naloga 3

Naj bo T drevo s korenom in naj bo h sodo število. Vsi listi drevesa T so na nivoju h in vsako notranje vozlišče tega drevesa ima natanko dva sinova. Naj bo $n = 2^h$(= število listov drevesa T). Vsa notranja vozlišča na lihih nivojih imajo označbo $\wedge$, vsa notranja vozlišča na sodih nivojih (torej tudi koren) imajo označbo $\vee$, vsak list pa ima podano vrednost 0 ali 1, kot kaže primer na sliki 1 levo.

Vrednost notranjega vozlišča je definirana rekurzivno. Če ima vozlišče oznako $\wedge$, je vrednost tega vozlišča enaka 1 natanko tedaj, ko je vrednost obeh sinov enaka 1. Sicer je vrednost tega vozlišča enaka 0. Če ima vozlišče oznako $\vee$, je vrednost tega vozlišča enaka 0 natanko tedaj, ko je vrednost obeh sinov enaka 0. Sicer je vrednost tega vozlišča enaka 1 (glej primer na sliki 1).

Opiši naključnostni algoritem, ki sprejme drevo T z lastnostmi, opisanimi v prvem odstavku, in izračuna vrednost korena. Pričakovano število listov, pri katerih algoritem pogleda vrednost, naj bo $O(\sqrt[6]{n}^5)$.



Slika 1: Drevo iz naloge 3.

Verjetnostne metode v računalništvu
druga domača naloga

Naloga 1

Definirajmo razred problemov $BPP(p)$ tako:

$$L \in BPP(p) \iff \text{obstaja naključnostni algoritem } M \text{ polinomske časovne zahtevnosti, tako da za vsak vhod } w \text{ velja } \Pr(M(w) = L(w)) \geq p.$$

Torej velja $BPP = BPP(\frac{3}{4})$.

a) Pokaži, da za vsak $p \leq \frac{1}{2}$ in za vsak odločitveni problem L velja $L \in BPP(p)$.

b) Pokaži, da za vsak $1 > p > \frac{1}{2}$ velja $BPP = BPP(p)$.

Naloga 2

Naj bosta T_1 in T_2 drevesi s korenom. Pravimo, da sta T_1 in T_2 izomorfni, če obstaja bijektivna preslikava f iz množice vozlišč drevesa T_1 v množico vozlišč drevesa T_2, tako da velja: za vsako notranje vozlišče v drevesa T_1 s sinovi $v_1, v_2 \ldots v_k$ ima vozlišče $f(v)$ natanko sinove $f(v_1), f(v_2) \ldots f(v_k)$.

S pomočjo polinomov opišite Monte Carlo algoritem z enostransko napako, ki na vhodu dobi drevesi s korenom T_1 in T_2 ter vrne odgovor na vprašanje: "Ali sta T_1 in T_2 izomorfni?" Naj algoritem uporablja le met poštenega kovanca kot naključni proces in naj na vsakem vhodu vrne pravilni odgovor z verjetnostjo vsaj 80%.

Kakšna je časovna zahtevnost vašega algoritma (v notaciji veliki O), če se za en korak šteje ena aritmetična operacija (oz. ena ponovitev zanke, če zanka ne vsebuje aritmetičnih operacij)[1]? Podajte zgornjo mejo za število naključnih bitov (tj. število metov kovanca), ki jih uporabi vaš algoritem.

Namig: Vozlišču v priredite polinom P_v, tako da za liste velja $P_v(x_0, x_1 \ldots) = x_0$. Za vozlišča, ki mejijo na liste, definirajte polinom z uporabo spremenljivke x_1 in že definiranih polinomov … Najelegantneje je podati definicijo rekurzivno.

[1] Predpostavite lahko tudi, da je računanje $\lfloor \log x \rfloor$ (in podobnih izrazov) za $x \in \mathbb{N}$ zahtevnosti $O(1)$. Algoritem eksponentne časovne zahtevnosti ne prinaša točk. Ne zanima nas pričakovana časovna zahtevnost, temveč časovna zahtevnost "v najslabšem primeru".

Naloga 3

Naj bo W naključen niz, enakomerno izbran med nizi ničel in enic dolžine n. Dokaži:

a) $\Pr$(v W obstaja $2\log n$ zaporednih ničel) $\leq \frac{1}{n}$.

b) $\Pr$(v W je največ $\frac{\log n}{2}$ zaporednih ničel) $\leq \frac{K}{n}$ za neko konstanto K.
Namig: Asistent si je pri rešitvi pomagal z naslednjo identiteto:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}.$$

c) $\mathbb{E}$(maksimalno število zaporednih ničel v W) $= \Theta(\log n)$. To pomeni, da obstajata pozitivni konstanti C_1 in C_2, da velja

$$C_1 \log n \leq \mathbb{E}(\text{maksimalno število zaporednih ničel v } W) \leq C_2 \log n$$

za vse dovolj velike n.

Namig: Nalogo 3 gre rešiti brez uporabe "težkih" izrekov iz predavanj oz. vaj.

Verjetnostne metode v računalništvu
tretja domača naloga

Naloga 1

Imamo 10 košar in n žog. Vsako žogo posebej vržemo v enakomerno naključno izbrano košaro. Naj bo X število žog v košari, ki ki ima največ žog in naj bo Y število žog v košari, ki ima najmanj žog. Pokaži, da za vsak $\epsilon > 0$ obstaja konstanta c, ki zadošča

$$\Pr\left[X - Y \geq c\sqrt{n}\right] \leq \epsilon.$$

Naloga 2

Opazujemo naslednji algoritem.

Algoritem 1: MERJENJE(k)

```
Vhod: Naravno število k
x = 0
for i = 1, 2 ... k do
    vržemo pošteno igralno kocko
    if dobimo 2, 4 ali 6 then
        izberemo točko (a, b) ∈ [0, 2] × [0, 2] enakomerno naključno
        if a^2 < b then
            x = x + 1
return 6 x/k
```

1. Določi pričakovano vrednost števila, ki ga vrne algoritem.

2. Izračunaj vrednost parametra k, za katerega je

$$\Pr\left[\left|6\frac{x}{k} - \sqrt{2}\right| < 10^{-5}\right] \geq 0.99$$

3. Spremeni oba pogoja v *if* stavkih, tako da bo nov algoritem izračunal (ϵ, δ) aproksimacijo $ln\, 2$ za dovolj velik k. Koliko je ta k?
Namig: $\int \frac{1}{x} dx = ln\, x + konst.$

Verjetnostne metode v računalništvu
četrta domača naloga

Naloga 1

Opiši algoritem, ki na vhodu sprejme množico S **navpičnih** daljic v ravnini[1] in v pričakovanem linearnem času vrne premico z največjim smernim koeficientom, ki seka vsako daljico v S, ali pove, da taka premica ne obstaja.
Namig: linearno programiranje

Naloga 2

Dan je problem Parabole$(a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \dots a_n, b_n, c_n)$:

Vhod: realna števila $a_i > 0, b_i, c_i$, ki določajo območje $P_i \subseteq \mathbb{R}^2$ z neenakostjo $y \geq a_i(x - b_i)^2 + c_i$, za $i = 1, 2 \dots n$.

Naloga: Najdi točko $v \in \bigcap_i P_i$ z najmanjšo y-koordinato.

Predpostavimo, da so parabole v naslednji splošni legi: nobeni dve paraboli nista enaki in se ne dotikata ter nobene tri parabole se ne sekajo v isti točki.

a) V koliko različnih točkah se lahko sekata paraboli ∂P_i in ∂P_j in kako lahko izračunamo njuna presečišča in temena? Ali lahko to storimo v konstantnem času (predpostavi, da so aritmetične operacije, vključno s korenjenjem, $O(1)$)?

b) V koliko različnih točkah se lahko sekata paraboli ∂P_i in ∂P_j, če je $a_i = a_j$? Podaj algoritem pričakovane linearne časovne zahtevnosti, ki reši problem Parabole za primer $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

c) Naj se paraboli ∂P_i in ∂P_j sekata v točki v in naj bosta l_1 in l_2 smerna koeficienta tangent na ∂P_i in ∂P_j v točki v. Ali iz $l_1 l_2 > 0$ sledi, da v ni točka z najmanjšo y-koordinato v $P_i \cap P_j$?

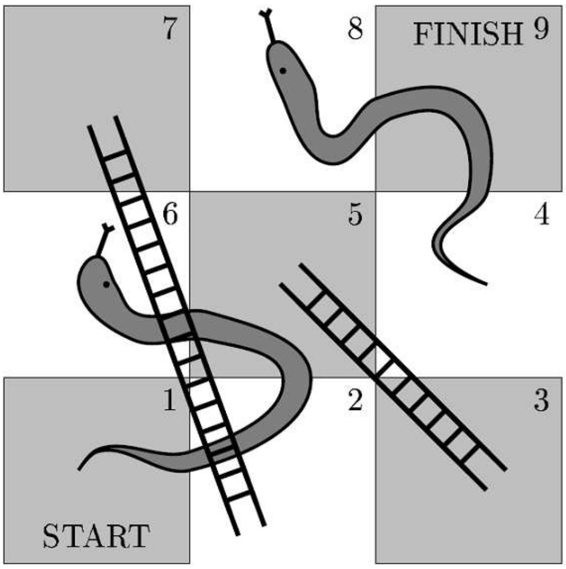
   Dokaži ali najdi protiprimer (za oboje je dovolj jasna slika z razlago).

d) Podaj algoritem pričakovane linearne časovne zahtevnosti, ki reši problem Parabole.

[1] daljice so podane s spodnjo in zgornjo točko

Naloga 3

Igra *Kače in lestve* se igra na šahovnici 3×3, ki je prikazana na sliki. Igra je



namenjena enemu igralcu. Le-ta začne na polju 1, nato pa zaporedoma meče pošten kovanec: če vrže grb, se premakne za 1 naprej, če vrže cifro, pa za 2 naprej. Če pristane na polju, kjer se začne lestev, spleza po lestvi navzgor do vrha. Če pa pristane na polju z glavo kače, pa zdrsne po kači vse do njenega repa. Igra se zaključi, ko igralec pride do polja 9.

Primer: Igralec lahko zaključi igro v dveh potezah, če najprej vrže grb, nato pa cifro. Če pa vrže dva grba, pristane na polju 4.

1. Koliko je pričakovano število korakov v igri?

2. Igro malenkost spremenimo: Če je igralec na polju 9, se igra ne zaključi, ampak igralec ponovno meče kovanec. Če zadane grb, ostane na polju 9, sicer pa gre na polje 4. Tako se igra nikoli ne konča.

   Predpostavimo, da začnemo na enakomerno naključno izbranem polju iz množice $\{1, 4, 5, 7, 9\}$. Na katerem polju bomo najverjetneje po 1296 korakih? Navedi vsa taka polja (če jih je več). Predpostavi, da igralec nikoli ni na poljih $2, 3, 6, 8$, saj se na teh poljih takoj premakne navzgor/navzdol.

VMR – 1. izpit

25. januar 2016

Čas pisanja je 180 minut. Možno je doseči 105 točk, za 100% se šteje 100 točk. Vse odgovore je treba dobro utemeljiti. Veliko uspeha!

1. naloga (25 točk)

Dana je Markovska veriga s stanji $1, 2, \dots, n$ in s prehodno matriko P, ki je zgornje trikotna (tj. $p_{ij} = 0$ za $i > j$). Naj velja še $p_{11}, p_{22}, p_{33}, \dots, p_{n-1n-1} < 1$.

a) (5 točk) Kaj je stacionarna porazdelitev? Ali je ena sama?

b) (10 točk) Podaj algoritem časovne zahtevnosti $O(n^2)$, ki izračuna pričakovano število korakov iz stanja 1 do stanje n. Naj bo to število h_{1n}.
Nasvet: Najprej reši naslednji dve podnalogi.

c) (5 točk) Spremenimo zadnjo vrstico P tako, da postavimo $p_{n1} = p_{nn} = 0,5$. Kakšen je pričakovani čas prve vrnitve v stanje n, izražen s h_{1n}?

d) (5 točk) Koliko je h_{13}, če je

$$P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0 & 0,2 & 0,8 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}?$$

2. naloga (25 točk)

Opazujemo naslednji algoritem.

Algoritem 1: MERJENJE(k)

Vhod: Naravno število k
$x = 0$
for $i = 1, 2 \dots k$ **do**
  izberemo točko $(a, b) \in [0, 2] \times [0, 2]$ enakomerno naključno
  if $(a-1)^2 + (b-1)^2 < 1$ **then**
    izberemo novo točko $(a, b) \in [0, 2] \times [0, 2]$ enakomerno naključno
    if $a^2 < b$ **then**
      $x = x + 1$
return $12\frac{x}{k}$

---

a) (5 točk) Določi pričakovano vrednost števila, ki ga vrne algoritem. Naj bo odgovor enak a.

b) (10 točk) Izračunaj vrednost parametra k, za katerega je

$$\Pr\left[\left|12\frac{x}{k} - a\right| < 10^{-5}\right] \geq 0.99.$$

Rezultata ne rabiš vstaviti v kalkulator.

c) (10 točk) Zamenjaj konstanto 12 v zadnji vrstici algoritma z novo celoštevilsko konstanto ter spremeni oba pogoja v *if* stavkih, tako da bo nov algoritem izračunal (ε, δ) aproksimacijo $(\ln 2)^2$ za dovolj velik k. Koliko je ta k?
Namig: $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + konst.$

3. naloga (30 točk)

Znani so rezultati drugega kroga predsedniških volitev. V tem krogu sta se za položaj predsednika pomerila kandidata A in B. Glasovalo je milijon (10^6) volilcev in vse glasovnice so bile veljavne. Vsak volilec je z verjetnostjo $p = 0,02$ glasoval za kandidata, za katerega ni želel (tj. zmotil se je pri obkroževanju).

a) (15 točk) Dokaži, da je verjetnost, da se je več kot 4% volilcev zmotilo, manjša od 10^{-2000}.
Namig: Velja ocena $e^{10} > 22000 > 10000$*, ki je uporabna tudi pri naslednji podnalogi.*

b) (15 točk) Recimo, da je 510 000 volilcev želelo voliti kandidata A in da je 490 000 volilcev želelo voliti kandidata B. Dokaži, da je verjetnost, da je zmagal B, manjša od 10^{-50}.
Namig: Naj bo X število volilcev kandidata A, ki so glasovali (pomotoma) za B in naj bo Y število volilcev B, ki so glasovali za A. Za ustrezne k in ℓ omeji $\Pr[X > k \text{ in } Y < \ell]$*. Na koncu bo najbrž prišlo do tečnega ocenjevanja. Za končni rezultat zadostujejo zelo grobe ocene.*

4. naloga (25 točk)

Naj bo T drevo s korenom in naj bo h sodo število. Vsi listi drevesa T so na nivoju h in vsako notranje vozlišče tega drevesa ima natanko tri sinove. Naj bo $n = 3^h$(= število listov drevesa T). Vsa notranja vozlišča na lihih nivojih imajo označbo $\oplus$, vsa notranja vozlišča na sodih nivojih (torej tudi koren, ki je na nivoju 0) imajo označbo $\otimes$, vsak list pa ima podano vrednost 0 ali 1, kot kaže primer na sliki 1 levo.

Vrednost notranjega vozlišča je definirana rekurzivno. Če ima vozlišče oznako $\oplus$, je vrednost tega vozlišča enaka 1 natanko tedaj, ko je vrednost vsaj enega od sinov enaka 1. Sicer je vrednost tega vozlišča enaka 0. Če ima vozlišče oznako $\otimes$, je vrednost tega vozlišča enaka 0 natanko tedaj, ko je vrednost vsaj enega od sinov enaka 0. Sicer je vrednost tega vozlišča enaka 1 (glej primer na sliki 1).

Opiši naključnostni algoritem, ki sprejme drevo T z lastnostmi, opisanimi v prvem odstavku, in izračuna vrednost korena. Pričakovano število listov, pri katerih algoritem pogleda vrednost, naj bo $O(n^{(\log_3 6)/2})$, kar je $O(n^{0,82})$.

Slika 1: Drevo (levo) in vrednosti njegovih vozlišč (desno).

Pozor! Koliko ničel oz. enic je pod vsakim notranjim vozliščem ni naključna spremenljivka ampak konstanta (odvisna od vhoda)!

Vsak algoritem, ki pogleda $\mathrm{O}(n^c)$ *listov za* $(\log_3 6)/2 < c < 1$*, je vreden kar nekaj točk, ni pa dovolj za vse točke.*

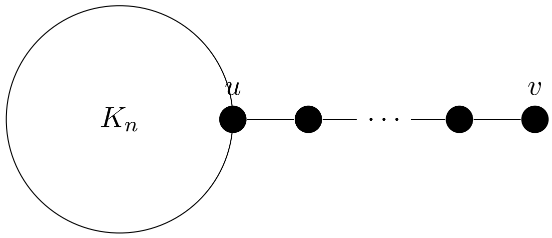
VMR – 2. izpit

15. februar 2016

Čas pisanja je 180 minut. Možno je doseči 110 točk, za 100% se šteje 100 točk. Vse odgovore je treba dobro utemeljiti. Veliko uspeha!

1. naloga (30 točk)

Naj bo G graf na $2n-1$ vozliščih, sestavljen iz polnega grafa K_n ter poti P_n, ki imata natanko eno skupno točko, tako da izgleda kot "lizika":



Spomnimo se, da smo na vajah pokazali, da je čas pokritja poljubnega grafa (V, E) navzgor omejen s $4|V||E|$ in da je pričakovano število korakov za prehod med dvema sosednjima vozliščema navzgor omejeno z $2|E|$.

a) (10 točk) Izračunaj pričakovani čas pokritja (cover time) polnega grafa K_n. To je pričakovano število korakov naključnega sprehoda po grafu K_n, da obiščemo vsa vozlišča. Zaradi simetrije je vseeno, v katerem vozlišču začnemo.

b) (5 točk) Dokaži, da je pričakovani čas pokritja za pot P_n reda $\mathrm{O}(n^2)$.

c) (5 točk) Dokaži, da je pričakovani čas pokritja za graf G, če začnemo v vozlišču u, reda $\mathrm{O}(n^3)$.

d) (10 točk) (težje) Dokaži, da je pričakovani čas pokritja za graf G, če začnemo v vozlišču v, reda $\mathrm{O}(n^2)$.

2. naloga (25 točk)

Imamo n košar in n^3 žog, kjer je $n > 15$. Vsako žogo posebej vržemo v enakomerno naključno izbrano košaro. Naj bo X_i število žog v košari, ki ima i-ta največ žog (tj. X_1 je število žog v košari, ki ima največ žog in X_n je število žog v košari, ki ima najmanj žog). Pokaži, da obstaja konstanta c, ki zadošča

$$\Pr\left[X_5 - X_{n-10} \geq cn\sqrt{\ln n}\right] \leq 10^{-10}$$

in poišči nek ustrezen c.

3. naloga (25 točk)

Opiši algoritem, ki na vhodu sprejme množico S navpičnih daljic v $\mathbb{R}^3$ in v pričakovanem linearnem času pove, ali obstaja ravnina, ki seka vsako daljico v S. Predpostavi, da so daljice podane z zgornjo in spodnjo točko (ki se razlikujeta le v z koordinati).

Predpostaviš lahko, da sta na vhodu vsaj dve daljici in da nobeni dve daljici nista na isti premici.

4. naloga (30 točk)

Cilj te naloge je opisati Monte Carlo algoritem z enostransko napako, ki za dani graf G pove, ali ima popolno prirejanje. Popolno prirejanje grafa je takšna množica povezav, da je vsako vozlišče sosednje z natanko eno povezavo iz te množice. Omejimo se na neusmerjene enostavne grafe (brez vzporednih povezav in zank).

Za graf $G = (V, E)$ definirajmo $V \times V$ matriko:

$$A_G[i,j] = \begin{cases} x_{ij} & ;\ ij \in E \text{ in } i < j \\ -x_{ji} & ;\ ij \in E \text{ in } i > j \\ 0 & ;\ \text{sicer.} \end{cases}$$

Namig: Najbrž? je točka a) *težja. Lahko jo uporabiš pri* b).

a) (15 točk) Pokaži, da ima G popolno prirejanje natanko tedaj, ko $\det A_G$ ni ničelni polinom spremenljivk x_{ij}.
Namig: Definicija determinante z vsoto po permutacijah. Opazuj lihe in sode cikle.

b) (15 točk) Opiši Monte Carlo algoritem z enostransko napako, ki za dani graf G pove, ali ima popolno prirejanje ali ne. Verjetnost napake naj bo največ 1%, časovna zahtevnost pa $O(n^3)$, kjer je $n = |V|$. Pri tem lahko predpostaviš, da gre determinanto $n \times n$ matrike izračunati v času $O(n^3)$ (npr. z LU razcepom). Algoritma za računanje determinante ni potrebno napisati, lahko pa ga uporabiš kot podprogram.

VMR – 3. izpit

24. avgust 2016

Čas pisanja je 180 minut. Možno je doseči 100 točk. Vse odgovore je treba dobro utemeljiti. Veliko uspeha!

1. naloga (25 točk)

Opazujemo naslednji algoritem:

Algoritem 1: KOŠARA(n)

Vhod: Naravno število $n > 1$
Izhod: \

K = košara, ki vsebuje natanko eno belo in eno črno žogo
while K vsebuje $< n$ belih žog **do**
  $\check{Z}$ = enakomerno naključno izbrana žoga iz košare K
  if $\check{Z}$ je barve X **then**
    daj $\check{Z}$ nazaj v K in dodaj še eno (novo) belo in dve (novi) črni žogi v K
  else
    daj $\check{Z}$ nazaj v K

---

a) (10) Koliko je pričakovano število preverjanj pogoja zanke **while**, če je X bela barva?

b) (10) Koliko je pričakovano število preverjanj pogoja zanke **while**, če je X črna barva?

c) (5) Utemelji, da je v obeh primerih pričakovano število preverjanj pogoja zanke **while** reda $O(n)$.
Prvi dve podnalogi reši natančno (brez notacije veliki O).

2. naloga (25 točk)

Avstroogrska izumitelja Jurij in Miha sta izumila nov tip topa in sta ga sklenila preizkusiti. Postavila sta ga na vrh hriba in z njim streljala v dolino proti zapuščenemu otočku sredi jezera. Vedno sta streljala enako, zabeležila pa sta si, ali krogla zadane otok, leti čez otok ali pristane pred otokom. Verjetnost, da pristane na otoku, je bila $p_1 = 0,5$, verjetnost, da leti čez otok $p_2 = 0,1$ in verjetnost, da pristane pred otokom, $p_3 = 0,4$. Izumitelja sta morala za vsako ponovitev poskusa plačati 20 goldinarjev.

- Če je krogla zadela otok, jima je monarh za tisti poskus 20 goldinarjev povrnil,
- če je krogla preletela otok, jima je za tisti poskus plačal 120 goldinarjev (in sta imela od tistega poskusa 100 goldinarjev dobička),
- če je krogla pristala pred otokom, nista dobila povrnjenih stroškov za tisti poskus.

Naj bo X_n dobiček izumiteljev po n poskusih. Dokaži, da je verjetnost $\Pr[X_n < 1,9n]$ eksponentno majhna.

3. naloga (25 točk)

Ančika se je igrala s šestilom in babičinim šivalnim priborom. Najprej je na mizo narisala krožnico, nato pa je začela z iglo pikati po krogu, ki ga je ta krožnica obdajala. Pri tem je naredila n majhnih luknjic v mizo, vse v notranjosti kroga. Za tem je prišel v sobo njen brat, ki študira matematiko, in se razveselil velike množice naključnih točk znotraj kroga. Razmislil je, kako bi lahko s tem ocenil število π in je v krog včrtal (največji možen) kvadrat. Naj bo X_a število vbodljajev znotraj kvadrata.

a) (5) Opiši, kako lahko iz X_a in n ocenimo π.

b) (20) Podaj spodnjo mejo za n, da dobimo (ε, δ)-aproksimacijo za π?

4. naloga (25 točk)

Naj bo X_n vsota vseh vrednosti, ki jih dobimo, ko pošteno kocko vržemo n krat. Dokaži, da za vsak $k \geq 2$ velja:

$$\lim_{n\to\infty} \Pr(X_n \text{ je deljiv s } k) = \frac{1}{k}.$$

Namig: To je enostavno dokazati s pomočjo ustrezne Markovske verige. Če se odločiš nalogo rešiti s pomočjo tega namiga, ustrezno Markovsko verigo jasno definiraj.