Numerična aproksimacija in interpolacija, 2019/2020

1. domača naloga

Nalogo rešite v programu Matlab ali Octave. Datoteke, uporabljene pri reševanju, oddajte v ZIP datoteki `ime_priimek_vpisnastevilka_dn1.zip` v spletni učilnici najkasneje do 9. decembra 2019.

1. Dani sta funkciji $f_1(x) = \cos(2x)$ in $f_2(x) = |x|\cos(x^2)$ na intervalu $[-1, 1]$.

   (a) Implementirajte metodo, ki dani funkciji f priredi Bernsteinov polinom $\mathcal{B}_n f$ stopnje n na intervalu $[-1, 1]$. Metodo preizkusite z izračunom $\mathcal{B}_n f_1$ in $\mathcal{B}_n f_2$ za $n = 2k$, $k = 1, 2, \ldots, 10$.

   (b) Implementirajte metodo, ki dani funkciji f priredi zvezno odsekoma linearno funkcijo $\mathcal{I}_{1,\boldsymbol{x}_n} f$, ki je določena z zahtevo $\mathcal{I}_{1,\boldsymbol{x}_n} f(x_i) = f(x_i)$ za vsak $x_i \in \boldsymbol{x}_n$. Pri tem je $\boldsymbol{x}_n = \{(2i - n)/n;\ i = 0, 1, \ldots, n\}$ za izbran $n \in \mathbb{N}$. Metodo preizkusite z izračunom $\mathcal{I}_{1,\boldsymbol{x}_n} f_1$ in $\mathcal{I}_{1,\boldsymbol{x}_n} f_2$ za $n = 2k$, $k = 1, 2, \ldots, 10$.

   (c) Množico $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_{200}$ vzamemo za gosto delitev intervala $[-1, 1]$. Primerjajte napake $a_{n,j} = \|f_j - \mathcal{B}_n f_j\|_{\infty,\boldsymbol{x}}$ in $b_{n,j} = \|f_j - \mathcal{I}_{1,\boldsymbol{x}_n} f_j\|_{\infty,\boldsymbol{x}}$, $j = 1, 2$, za $n = 2k$, $k = 1, 2, \ldots, 10$.

   (d) Predpostavite, da za neke konstante C_j, α_j in D_j, β_j, $j = 1, 2$, velja

   $$\|f_j - \mathcal{B}_n f_j\|_{\infty,[-1,1]} = C_j\, n^{\alpha_j}, \quad \|f_j - \mathcal{I}_{1,\boldsymbol{x}_n} f_j\|_{\infty,[-1,1]} = D_j n^{\beta_j}.$$

   Ocenite α_j in β_j s pomočjo napak $a_{n,j}$ in $b_{n,j}$ oziroma zaporedja njihovih razmerij, izračunanih na podlagi parov $(a_{2(k-1),j}, a_{2k,j})$ in $(b_{2(k-1),j}, b_{2k,j})$, $k = 2, 3, \ldots, 10$.

2. Funkcija f je podana s predpisom $f(x) = |x|\sin(2e^{\frac{3}{2}x} - 1)$. S petimi koraki Remesovega postopka na začetni množici $\{\pm 0.2, \pm 0.6, \pm 1\}$ poiščite polinom $p \in \mathbb{P}_4$ in trigonometrični polinom $q \in \mathbb{T}_2$, ki predstavljata približka za elementa najboljše enakomerne aproksimacije za f na intervalu $[-1, 1]$ iz prostorov $\mathbb{P}_4$ in $\mathbb{T}_2$. Pri reševanju naloge sledite naslednjim navodilom.

   (a) Pripravite metodo, ki za dano množico baznih funkcij moči 5 (splošneje: $n + 1$) in seznam točk E dolžine 6 (oziroma $n + 2$) poišče posplošeni polinom g, čigar residual $f - g$ alternirajoče doseže enako (nenegativno) vrednost v točkah iz seznama E.

   (b) Sestavite metodo za iskanje približka za absciso na danem intervalu, pri kateri je absolutna vrednost podane funkcije enaka njeni enakomerni normi. Natančneje, za funkcijo r in interval $[a, b]$ naj metoda interval razdeli z $N+1$ ekvidistantnimi delilnimi točkami iz $\boldsymbol{x} = \{a + k(b - a)/N;\ k = 0, 1, \ldots, N\}$ (vzemite na primer N = 1000) in poišče absciso $y \in \boldsymbol{x}$, za katero velja $|r(y)| = \|r\|_{\infty,\boldsymbol{x}}$.

   (c) Implementirajte metodo, ki sprejme funkcijo, urejen seznam točk, na katerem funkcija alternirajoče spreminja predznak, ter še eno dodatno točko; vrne pa urejen seznam točk, ki je enake dolžine kot vhodni, a namesto ene izmed prvotnih točk vsebuje podano dodatno točko. Izhodni seznam mora ohraniti lastnost, da funkcija na njem alternirajoče spreminja predznak.

   (d) Nazadnje pripravite iteracijsko metodo, ki izvede Remesov postopek. Metoda naj sprejme funkcijo, interval, množico baznih funkcij in število korakov iteracije, vrne pa koeficiente posplošenega polinoma glede na podano množico baznih funkcij. Metoda naj se na vsakem koraku iteracije opre na funkcionalnost metod iz točk 2a, 2b in 2c.

   Narišite grafe f, p in q na intervalu $[-1, 1]$ ter primerjajte napaki $\|f - p\|_{\infty,\boldsymbol{x}}$ in $\|f - q\|_{\infty,\boldsymbol{x}}$. Spremljajte tudi razlike med normo residuala in minimaksom residuala na posameznih korakih postopka.