



IEL – protokol k projektu

Yelyzaveta Ovsianikova
xovsia00

18. prosince 2022

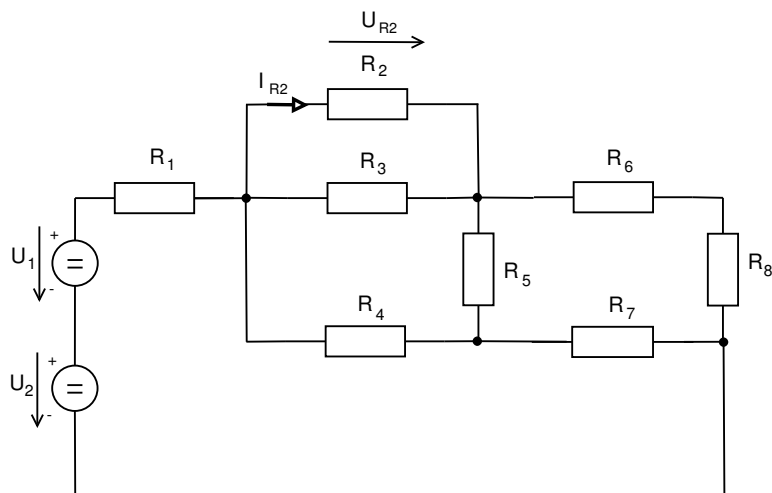
Obsah

1	Příklad 1	2
1.1	Výpočet R_{ekv} :	2
1.2	Výpočet U_2	4
1.3	Dosazení	7
2	Příklad 2	8
2.1	Výpočet I_i	8
2.2	Výpočet U_i	8
2.3	Výpočet R_i	8
2.4	Výpočet I_{R5} a U_5	10
2.5	Dosazení	10
3	Příklad 3	11
3.1	Nahrazení napětového zdroje	11
3.2	Dosazení	12
4	Příklad 4	13
4.1	Metoda smyčkových proudů	13
4.2	Výpočet napětí U_{C2}	14
4.3	Řešení	14
5	Příklad 5	16
5.1	Sestavení diferenciální rovnice	16
6	Shrnutí výsledků	18

Příklad 1

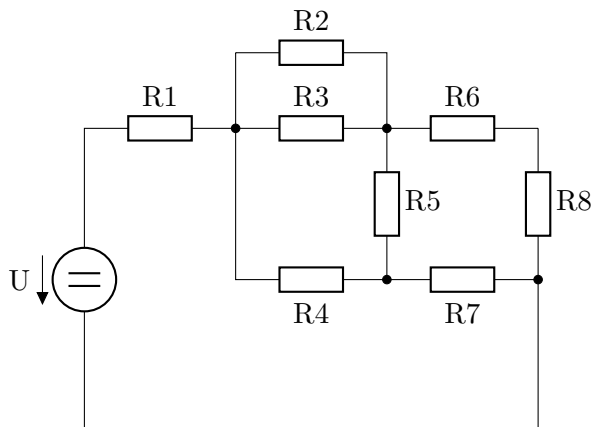
Stanovte napětí U_{R2} a proud I_{R2} . Použijte metodu postupného zjednodušování obvodu.

sk.	U_1 [V]	U_2 [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]	R_6 [Ω]	R_7 [Ω]	R_8 [Ω]
A	80	120	350	650	410	130	360	750	310	190



Vypočet R_{ekv} :

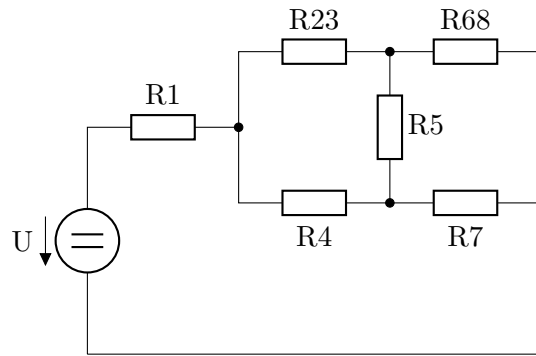
Sečtení U_1 a U_2 - sériové



Zjednodušení rezistoru: R_2 a R_3 na $R_{2,3}$; R_6 a R_8 na $R_{6,8}$:

$$R_{2,3} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}$$

$$R_{6,8} = R_6 + R_8$$

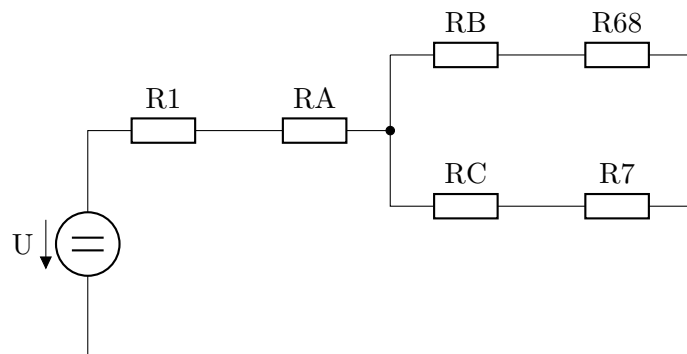
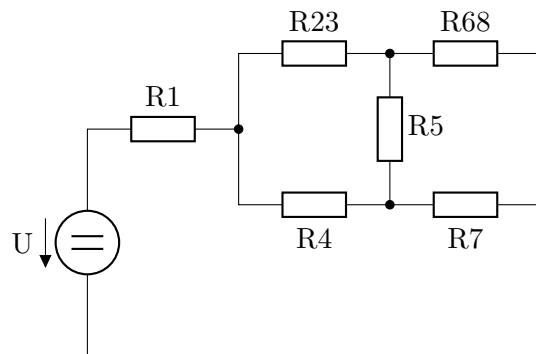


Transformace trojúhelník \rightarrow hvězda.

$$R_A = \frac{R_{2,3} \cdot R_4}{R_{2,3} + R_4 + R_5}$$

$$R_B = \frac{R_{2,3} \cdot R_5}{R_{2,3} + R_4 + R_5}$$

$$R_C = \frac{R_4 \cdot R_5}{R_{2,3} + R_4 + R_5}$$

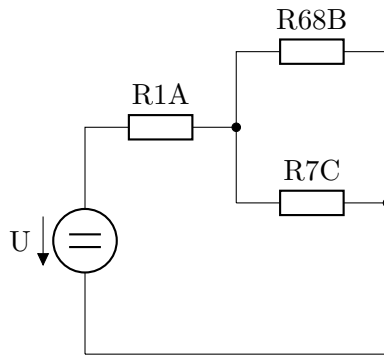


Zjednodušení rezistoru: R_1 a R_A na $R_{1,A}$; R_B a $R_{6,8}$ na $R_{6,8,B}$; R_C a R_7 na $R_{7,C}$:

$$R_{1,A} = R_A + R_1$$

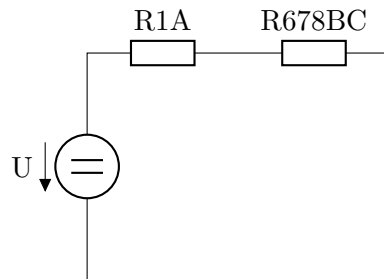
$$R_{6,8,B} = R_B + R_{6,8}$$

$$R_{7,C} = R_C + R_7$$



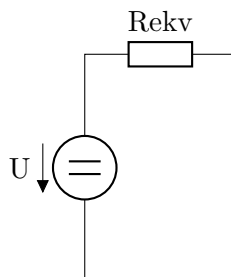
Zjednodušení rezistorů: $R_{6,8,B}$ a $R_{7,C}$ na $R_{6,7,8,B,C}$:

$$R_{6,7,8,B,C} = \frac{R_{6,8,B} \cdot R_{7,C}}{R_{6,8,B} + R_{7,C}}$$



Zjednodušení rezistoru: $R_{1,A}$ a $R_{6,7,8,B,C}$ na R_{ekv} :

$$R_{ekv} = R_{1,A} + R_{6,7,8,B,C}$$



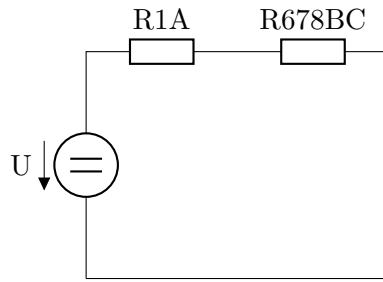
Vypočet U_2

S R_{ekv} budeme počítat celkový proud v obvodu s pomocí Ohmova zákona: $I = \frac{U}{R_{ekv}}$

Postupně rozkládáme obvod zpět a počítáme výsledné napětí (U_{R_r}):

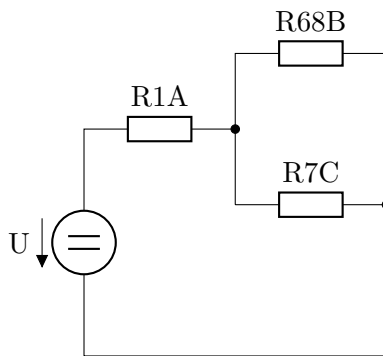
$$U_{R_{1,A}} = I \cdot R_{1,A}$$

$$U_{R_{6,7,8,B,C}} = I \cdot R_{6,7,8,B,C}$$



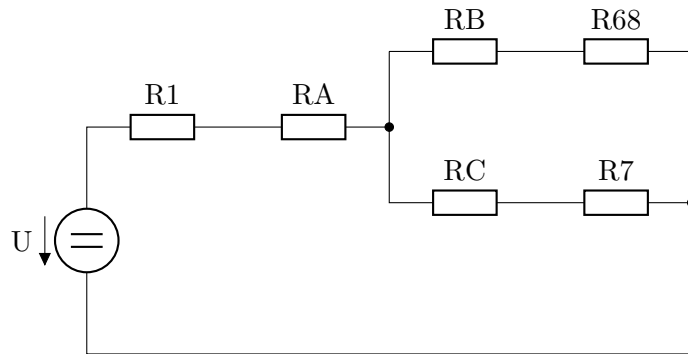
$$U_{R_{6,8,B}} = U_{R_{7,C}} = U_{R_{6,7,8,B,C}}$$

$$I_{R_{6,8,B}} = \frac{U_{R_{6,7,8,B,C}}}{R_{6,8,B}}$$



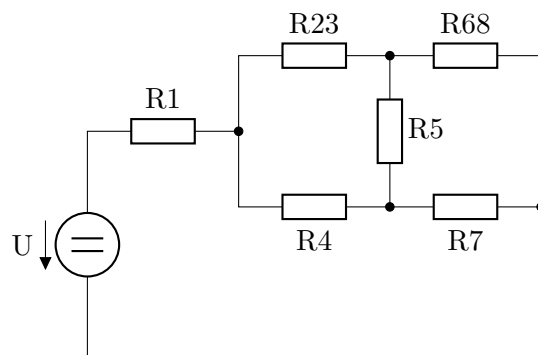
$$U_{R_{6,8}} = I_{R_{6,8,B}} \cdot R_{6,8}$$

$$U_{R_B} = I_{R_{6,8,B}} \cdot R_B$$



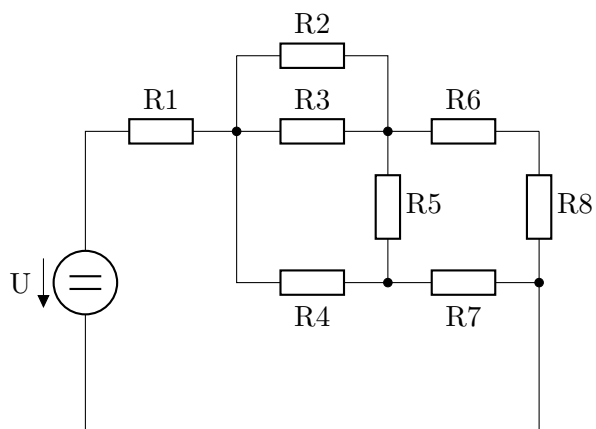
$$U_{R_{2,3}} + U_{R_{6,8}} - U - U_{R_1} = 0$$

$$U_{R_{23}} = U - U_{R_1} - U_{R_{6,8}}$$



$$U_{R_2} = U_{R_3} = U_{R_{2,3}}$$

$$I_{R_2} = \frac{U_{R_2}}{R_2}$$



Dosazení

$$R_{2,3} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = \frac{650 \cdot 410}{650 + 410} = 251.4151 \, \Omega$$

$$R_{6,8} = R_6 + R_8 = 750 + 190 = 940 \, \Omega$$

$$R_A = \frac{R_{2,3} \cdot R_4}{R_{2,3} + R_4 + R_5} = \frac{251.4151 \cdot 130}{251.4151 + 130 + 360} = 44.0832 \, \Omega$$

$$R_B = \frac{R_{2,3} \cdot R_5}{R_{2,3} + R_4 + R_5} = \frac{251.4151 \cdot 360}{251.4151 + 130 + 360} = 122.0766 \, \Omega$$

$$R_C = \frac{R_4 \cdot R_5}{R_{2,3} + R_4 + R_5} = \frac{130 \cdot 360}{251.4151 + 130 + 360} = 63.1225 \, \Omega$$

$$R_{6,8,B} = R_B + R_{6,8} = 122.0766 + 940 = 1062.0766 \, \Omega$$

$$R_{1,A} = R_A + R_1 = 44.0832 + 350 = 394.0832 \, \Omega$$

$$R_{7,C} = R_C + R_7 = 63.1225 + 310 = 373.1225 \, \Omega$$

$$R_{6,7,8,B,C} = \frac{R_{6,8,B} \cdot R_{7,C}}{R_{6,8,B} + R_{7,C}} = \frac{1062.0766 \cdot 373.1225}{1062.0766 + 373.1225} = 276.1183 \, \Omega$$

$$R_{\text{ekv}} = R_{1,A} + R_{6,7,8,B,C} = 394.0832 + 276.1183 = 670.2015 \, \Omega$$

$$I = \frac{U}{R_{\text{ekv}}} = \frac{200}{670.2015} = 0.2984 \, \text{A}$$

$$U_{R6,7,8,B,C} = I \cdot R_{6,7,8,B,C} = 0.2984 \cdot 276.1183 = 82.3986 \, \text{V}$$

$$U_{R1,A} = I \cdot R_{1,A} = 0.2984 \cdot 394.0832 = 117.5944 \, \text{V}$$

$$I_{R6,8,B} = \frac{U_{R6,7,8,B,C}}{R_{6,8,B}} = \frac{82.3986}{1062.0766} = 0.0776 \, \text{A}$$

$$I_{R7,C} = \frac{U_{R6,7,8,B,C}}{R_{7,C}} = \frac{82.3986}{373.1225} = 0.2208 \, \text{A}$$

$$U_{RB} = I_{R6,8,B} \cdot R_B = 0.0776 \cdot 122.0766 = 9.4710 \, \text{V}$$

$$U_{R6,8} = I_{R6,8,B} \cdot R_{6,8} = 0.0776 \cdot 940 = 72.9276 \, \text{V}$$

$$U_{R1} = I \cdot R_1 = 0.2984 \times 350 = 104.4462 \, \text{V}$$

$$U_{R2,3} = U - U_{R1} - U_{R6,8} = 200 - 104.4462 - 72.9276 = 22.6262 \, \text{V}$$

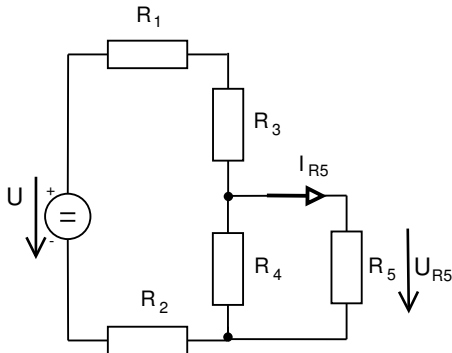
$$U_{R2} = U_{R3} = U_{R2,3} = 22.6262 \, \text{V}$$

$$I_{R2} = \frac{U_{R2}}{R_2} = \frac{22.6262}{650} = 0.0348 \, \text{A}$$

Příklad 2

Stanovte napětí U_{R5} a proud I_{R5} . Použijte metodu Théveninovy věty.

sk.	U [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]
E	250	150	335	625	245	600

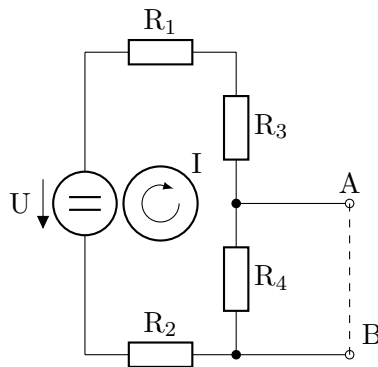


Výpočet I_i

Sestavíme rovnici použitím 2 Kirchhoffova zákona pro výpočet celkového proudu:

$$-I \cdot R_1 - I \cdot R_3 - I \cdot R_4 - I \cdot R_2 + U = 0$$

$$I_i = \frac{U}{R_1 + R_3 + R_4 + R_2}$$



Výpočet U_i

U_i dosadíme namísto R_4 aby bylo možné počítat podmíněný zdroj napětí a pak používáme 2 Kirchhoffův zákon:

$$-U_i + I \cdot R_4 = 0$$

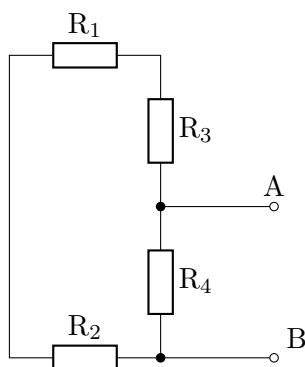
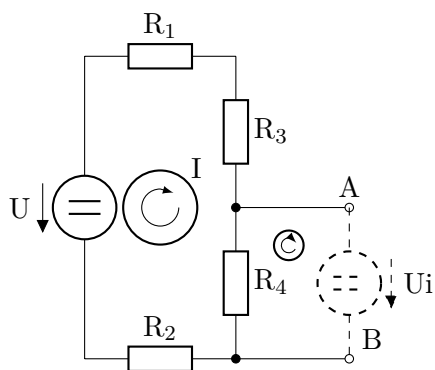
$$U_i = I \cdot R_4$$

Výpočet R_i

Odpojíme rozhodný odpor, zkratujeme napěťový zdroj a označíme si uzly jako uzel A a uzel B namísto uzlů na které byl odpor R_5 napojen

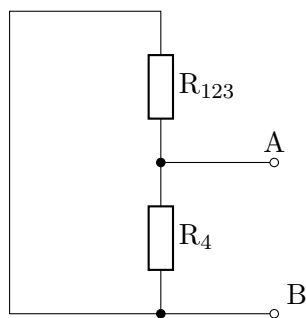
Zjistíme odpor R_i :

Výpočet $R_{1,2,3}$:



Vypočítáme součet všechny rezistoru sériové :

$$R_{1,2,3} = R_1 + R_2 + R_3$$

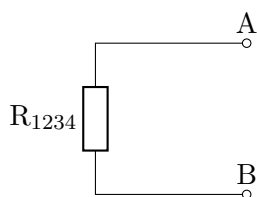


Výpočet $R_{1,2,3,4}$:

Spočítáme paralelně zapojene rezistory:

$$R_{1,2,3,4} = \frac{R_{1,2,3} \cdot R_4}{R_{1,2,3} + R_4}$$

$$R_i = R_{1,2,3,4}$$

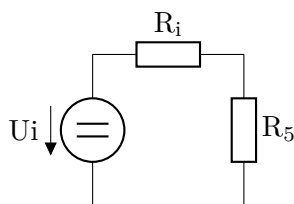


Výpočet I_{R5} a U_5

Použitím náhradního obvodu počítáme I_{R5} a U_{R5} použitím Ohmova zákona:

$$I_{R5} = \frac{U_i}{R_i + R_5}$$

$$U_5 = I_5 \cdot R_5$$



Dosazení

$$I_i = \frac{U}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = \frac{250}{150 + 335 + 625 + 245} = \frac{250}{1355} = 0.1845 \text{ A}$$

$$U_i = I_i \cdot R_4 = 0.1845 \cdot 245 = 45.2025 \text{ V}$$

$$R_{1,2,3} = R_1 + R_2 + R_3 = 150 + 335 + 625 = 1110 \Omega$$

$$R_{1,2,3,4} = \frac{R_{1,2,3} \cdot R_4}{R_{1,2,3} + R_4} = \frac{1110 \cdot 245}{1110 + 245} = 200.7011 \Omega$$

$$R_i = R_{1234} = 200.7011 \Omega$$

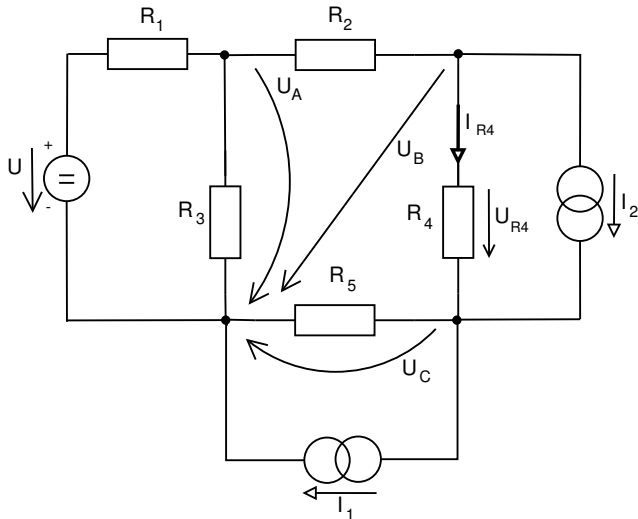
$$I_{R5} = \frac{U_i}{R_i + R_5} = \frac{45.2025}{200.7011 + 600} = 0.0565 \text{ A}$$

$$U_{R5} = I_{R5} \cdot R_5 = 0.0565 \cdot 600 = 33.8725 \text{ V}$$

Příklad 3

Stanovte napětí U_{R4} a proud I_{R4} . Použijte metodu uzlových napětí (U_A, U_B, U_C).

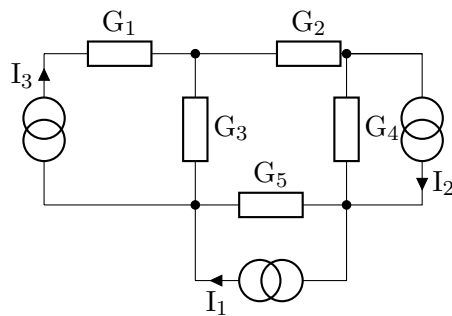
sk.	U [V]	I_1 [A]	I_2 [A]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]
A	120	0.9	0.7	53	49	65	39	32



Nahrazení napětového zdroje

Nahradíme se napětový zdroj za proudový pro zjednodušení výpočtu vodivostí a následného dosazení do matice

Pro náhradu napětového zdroje platí: $I_3 = G_1 U$



Pomocí metody uzlového napětí:

$$A : U_A(G_1 + G_2 + G_3) + U_B(-G_5) = -I_3$$

$$B : U_A(-G_2) + U_B(G_2 + G_4) + U_C(-G_4) = -I_2$$

$$C : U_B(-G_4) + U_C(G_4 + G_5) = I_2 - I_1$$

$$\begin{pmatrix} G_1 + G_2 + G_3 & -G_2 & 0 \\ -G_2 & G_2 + G_4 & -G_4 \\ 0 & -G_4 & G_4 + G_5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_3 \\ -I_2 \\ I_2 - I_1 \end{pmatrix}$$

Dosazení

$$\begin{pmatrix} 0,0547 & -0.0204 & 0 \\ -0.0204 & 0.0460 & -0.0256 \\ 0 & -0.0256 & 0,0568 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.2642 \\ -0.7000 \\ -0.2000 \end{pmatrix}$$

$$U_B = 2.0543 \text{ V}$$

$$U_C = -2.5896 \text{ V}$$

$$U_{R4} = U_B - U_C = 2,0543 - (-2.5896) = 4.6439 \text{ V}$$

$$I_{R4} = \frac{U_{R4}}{R_4} = \frac{4.6439}{39} = 0.1191 \text{ A}$$

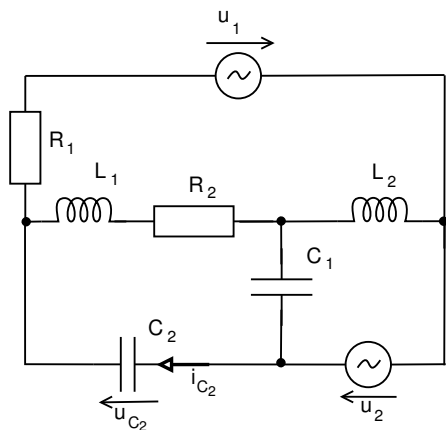
Příklad 4

Pro napájecí napětí platí: $u_1 = U_1 \cdot \sin(2\pi ft)$, $u_2 = U_2 \cdot \sin(2\pi ft)$.

Ve vztahu pro napětí $u_{C_2} = U_{C_2} \cdot \sin(2\pi ft + \varphi_{C_2})$ určete $|U_{C_2}|$ a φ_{C_2} . Použijte metodu smyčkových proudů.

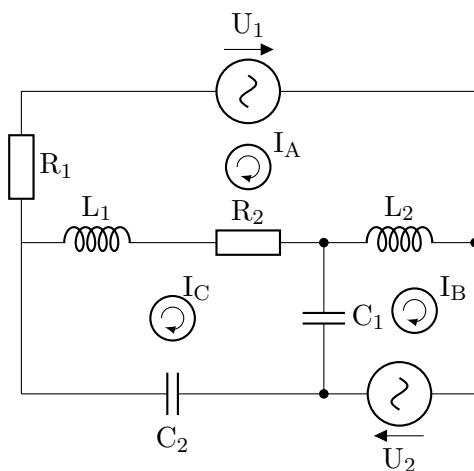
Pozn: Pomocné směry šipek napájecích zdrojů platí pro speciální časový okamžik ($t = \frac{\pi}{2\omega}$).

sk.	U_1 [V]	U_2 [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	L_1 [mH]	L_2 [mH]	C_1 [μ F]	C_2 [μ F]	f [Hz]
A	3	5	12	14	120	100	200	105	70



Metoda smyčkových proudů

Definujeme smyčkové proudy v obvodu a vytvoříme 3 rovnici (máme 3 smyčky):



Použitím Ohmova zákona (je-li napětí na koncích vodiče stálé, je proud nepřímě úměrný odporu vodiče) a impedance ne lineárních součástek počítáme smyčkové proudy použitím matice:

$$\omega = 2\pi f$$

$$Z_C = \frac{-j}{\omega C}$$

$$Z_L = j\omega L$$

$$I_A : U_1 + U_{L2} + U_{R2} + U_{L1} + U_{R1} = 0$$

$$I_B : -U_{L2} + U_2 + U_{C1} = 0$$

$$I_C : -U_{L1} - U_{R2} - U_{C1} + U_{C2} = 0$$

$$I_A : -I_B(Z_{L2}) - I_C(Z_{R2} + Z_{L1}) = 0$$

$$I_B : -I_A(Z_{L2}) + I_B(Z_{L2} + Z_{C1}) + U_2 - I_C(Z_{C1}) = 0$$

$$I_C : -I_A(Z_{R2} + Z_{L1}) - I_B(Z_{C1}) + I_C(Z_{L1} + Z_{R2} + Z_{C1} + Z_{C2}) = 0$$

$$\begin{pmatrix} Z_{L2} + Z_{R2} + Z_{L1} + Z_{R1} & -Z_{L2} & -Z_{R2} - Z_{L1} \\ -Z_{L2} & Z_{L2} + Z_{C1} & -Z_{C1} \\ -Z_{R2} - Z_{L1} & -Z_{C1} & Z_{L1} + Z_{R2} + Z_{C1} + Z_{C2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -U_1 \\ -U_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Výpočet napětí U_{C2}

Napětí vypočítáme použitím Ohmova zákona a také použijeme modul komplexního čísla (kvůli imaginární části):

$$U_{C2} = I_{C2} \cdot Z_{C2} = I_C \cdot \left(\frac{-j}{\omega C_2}\right)$$

$$|U_{L2}| = \sqrt{Re(U_{C2})^2 + Im(U_{C2})^2}$$

Fázový posun počítáme ako arktangens (kde x je reálná část imaginárního čísla a y je imaginární část imaginárního čísla):

$$\varphi_{L2} = \arctan\left(\frac{Im(U_{C2})}{Re(U_{C2})}\right) \times \frac{\pi}{180}$$

Řešení

$$\omega = 2\pi f$$

$$Z_{C1} = \frac{-j}{\omega C_1}$$

$$Z_{C2} = \frac{-j}{\omega C_2}$$

$$Z_{L1} = j\omega L_1$$

$$Z_{L2} = j\omega L_2$$

$$\begin{pmatrix} 26 + 96.7611j & -22.6195j & -12 - 52.7788j \\ -439823j & 32.6141j & 11.3682j \\ -14 - 52.7788j & 11.3682j & 14 + 19.7569j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$I_A = (-0.1025 - 0.1024j) \text{ A}$$

$$I_B = (-0.1185 + 0.1245j) \text{ A}$$

$$I_C = (-0.0568 - 0.3126j) \text{ A}$$

$$I_{C2} = I_C$$

$$U_{C2} = I_{C2} \cdot Z_{C2} = (-0.0568 - 0.3126j) \cdot (-21.6537j) = (-6.7697 + 1.2291j) \text{ V}$$

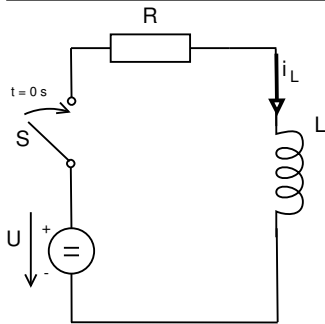
$$\varphi_{C2} = \arctan\left(\frac{\text{Im}(U_{C2})}{\text{Re}(U_{C2})}\right) \cdot \frac{\pi}{180} = \left(\arctan \frac{1.2291}{-6.7697} + \pi\right) \cdot \frac{180}{\pi} = 169.7093^\circ$$

$$|U_{C2}| = \sqrt{\text{Re}(U_{C2})^2 + \text{Im}(U_{C2})^2} = \sqrt{(-6.7697)^2 + 1.2291^2} = 6.8804 \text{ V}$$

Příklad 5

V obvodu na obrázku níže v čase $t = 0$ [s] sepne spínač S . Sestavte diferenciální rovnici popisující chování obvodu na obrázku, dále ji upravte dosazením hodnot parametrů. Vypočítejte analytické řešení $i_L = f(t)$. Proveďte kontrolu výpočtu dosazením do sestavené diferenciální rovnice.

sk.	U [V]	L [H]	R [Ω]	$i_L(0)$ [A]
E	50	30	40	10



Sestavení diferenciální rovnice

Sestavíme rovnici pro proud na cívce i_L :

$$i'_L = \frac{U_L}{L}$$

Vyjádříme napětí na cívce pomocí druhého Kirchhoffova zákona:

$$U = U_R + U_L$$

$$U_L = U - U_R$$

$$i'_L = \frac{U - U_R}{L}$$

$$i'_L = \frac{U - Ri_L}{L}$$

$$Li'_L + Ri_L = U$$

$$30i'_L + 40i_L = 50$$

Obecný tvar pro cívku:

$$i_L(t) = K(t) \cdot e^{\lambda t}$$

Najdeme a vypočítáme λ a $K(t)$:

$$30\lambda + 40 = 0$$

$$\lambda = -1\frac{1}{3}$$

Nyní λ zobrazena v obecném tvaru, který následně upravíme, a získáme diferenciální rovnici cívky

Upravíme tento tvar:

$$\begin{aligned}i_L(t) &= K(t) \cdot e^{\lambda t} \\i_L(t) &= K(t) \cdot e^{-2t} \\i_L(t)' &= K(t)' \cdot e^{-2t} - 2K(t)e^{-2t}\end{aligned}$$

Dosadíme to do diferenciální rovnice:

$$\begin{aligned}(K(t)' \cdot e^{-2t} - 2K(t) \cdot e^{-2t}) + 40(K(t) \cdot e^{-2t}) &= 50 \\30K(t)' \cdot e^{-2t} - 40K(t) \cdot e^{-2t} + 40K(t) \cdot e^{-2t} &= 50 \\30K(t)' \cdot e^{-2t} &= 50 \\K(t)' \cdot e^{-2t} &= 1\frac{2}{3} \\K(t)' &= 1\frac{2}{3} \cdot e^{2t},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}K(t) &= \int 1\frac{2}{3} \cdot e^{2t} dt \\K(t) &= \frac{5}{6} \cdot e^{2t} + C\end{aligned}$$

Dosadíme to do analytické rovnice, zkontrolujeme řešení:

$$\begin{aligned}i_L(t) &= K(t) \cdot e^{\lambda t} \\i_L(t) &= (\frac{5}{6} \cdot e^{2t} + C) \cdot e^{-2t}\end{aligned}$$

$$i_L(t)' = \frac{2 \cdot C}{e^{2t}}$$

Vypočítáme C podle $t = 0$:

$$i_L(0) = \frac{2 \cdot C}{e^{2 \cdot 0}}$$

$$\begin{aligned}30 &= 2 \cdot C \\C &= 15\end{aligned}$$

Konečná rovnice vypadá tak:

$$i_L(t) = \frac{2 \cdot 15}{e^{2t}}$$

Shrnutí výsledků

Příklad	Skupina	Výsledky	
1	A	$U_{R2} = 22.6262$	$I_{R2} = 0.0348$
2	E	$U_{R5} = 33.8725$	$I_{R5} = 0.0565$
3	A	$U_{R4} = 4.6439$	$I_{R4} = 0.1191$
4	A	$ U_{C2} = 6.8804$	$\varphi_{C2} = 169.7093$
5	E	$i_L = \frac{2 \cdot 15}{e^{2t}}$	