

دانشگاه اصفهان دانشکده مهندسی کامپیوتر گروه فناوری اطلاعات

پروژه پایانی درس تجارت الکترونیکی ۲

> استاد درس دکتر آزاده محمدی

دانشجویان سیدمحمد هاشمی سجاد یزدان پرست

فهرست مطالب

۴	١- مقدمه
F(Community Detection by Information 1	۲- مقاله اول (Flow Simulation
۴	۲-۱- چکیده
۴	٢–٢– مقدمه
۵	۲–۳– مفاهیم مقدماتی
۵	۲–۴– مدل
Υ	۲–۵– رویکرد
۸	۱-۵-۲ پیادهسازی
۸	۲–۶– الگوريتم
٩	۲-۶-۲- پیادهسازی
11	۲-۷- آزمایشات
17	۲-۷-۲ - دادگان
17	۲-۷-۲ ارزیابی
١٣	۲–۸– نتایج
رست مسئله	۱-۸-۲ نتایج همراه با جواب د
اب درست مسئله	۲-۸-۲ نتایج بدون داشتن جو
18	۳٫۲. مقایسه زمان اجرا
بنده	۲-۹- محدودیتها و کارهای آ.
١٧	۲-۱۰ نحوهی اجرا
۱٧(A Novel Approach for Comm	۳- مقاله دوم (unity Detection
١٧	۳-۱- چکیده
١٧	٣-٢- مقدمه
١٨	۳-۳- کارهای مرتبط
ن مقالهن	۳-۴- روش طراحی شده در این

٣-۵- نتيجه گيري و كارهاي آينده

۱- مقدمه

محتوای کامل پروژه شامل کدهای پیادهسازی، مجموعهداده، pdf مقالهها، آدرس مقاله و مستند بر روی مخزن گیتهاب پروژه قرار دارد. مقالههای انتخاب شدهی ما هر دو مربوط به روش انتشار برچسب در تشخیص اجتماع هستند و علت انتخاب آنها شفافیت قابل قبول در بیان مطالب و بهخصوص الگوریتم مورد نظر و همچنین در مورد مقالهی پیادهسازی شده، صراحت در توضیح نحوهی ارزیابی و جزئیات مجموعهدادههای مورد استفاده بوده است.

Y- مقاله اول (Community Detection by Information Flow Simulation) مقاله اول

۲-۱- چکیده

آنچه نویسنده ی مقاله دنبال کرده است، به طور خلاصه بیان فقدان روشهای مقیاسپذیری برای تشخیص اجتماعات است که از جریان اطلاعات استفاده کرده باشند و همچنین ارائه ی یک روش سریع و مقیاسپذیر برای شبکههای اجتماعی در این زمینه را فارغ از وزن دار یا جهت دار بودن شامل می شود.

همچنین ضمن اشاره به پیچیدگی زمانی و فضایی مناسب رویکرد پیشنهادی (O(|E|)) ، به برتری این رویکرد نسبت به Markov Clustering Algorithm از نظر دقت و مقیاس پذیری (کاربر در شبکههای بزرگ) اشاره شده است.

۲-۲ مقدمه

ابتدا اشارهای بر تحقیقات ابتدایی بر روی شبکههای اجتماعی با موضوع دوستی بین افراد و قضیه ی small-world problem شده است که در مورد ارتباط نزدیک افراد جهان صحبت می کند (دسترسی افراد با حداکثر ۶ نفر دوست واسطه). عنوان می کند که تحلیل شبکههای اجتماعی در خرده فروشی، مدیریت بلاهای طبیعی، تبلیغات و بسیاری موارد دیگر کاربرد دارد.

معمولاً دید عمومی به شبکه، مانع مشاهده ساختارهای مهمی تحت عنوان اجتماعها می شود که با دید محلی به شبکه ی اجتماعی، قابل مشاهده و نقش مهم آنها ملموس و واضح است. اجتماعها یک زیرگراف یا زیرمجموعهای از رئوس داخل شبکه هستند که ارتباطات قوی تری با یکدیگر نسبت به سایر رئوس دارند.

کاربردهای شناسایی اجتماعها در تجارت الکترونیکی: از کاربردهای آن میتوان به بازاریابی هدفگذاری شده و ویروسی اشاره کرد که بر اجتماعها متمرکز باشد (هر اجتماع میتواند هدف یک کمپین تبلیغاتی ما قرار بگیرد و همچنین از نظر تبلیغات ویروسی، سرعت نشر تبلیغ ما بهصورت دهان به دهان در بین افراد هر اجتماع بسیار زیاد است). مورد دیگری از استفادهها، بحث ارائهی خدمات و اطلاعات یا آگاهسازی افراد (بهخصوص در مورد اخبار و اطلاعیههای کسبوکار ما یا خدمات و موارد مشابه) است که باز هم با انتشار آن در هر اجتماع، سرعت نشر و دسترسی بهتری خواهیم داشت. همچنین اگر بخواهیم تاثیرگذاری حداکثری بر مخاطبان خود در شبکهی اجتماعی داشته باشیم، بهترین کار، شناسایی اجتماعها و تمرکز بر آنهاست. زیرا ارتباطات عمیق و قوی بین افراد در این بخشها بیشتر از سایرین بوده و افراد می توانند تأثیر عمیق تری بر یکدیگر بگذارند.

² Community Detection

¹ Label propagation

این تأثیر عمیق میتواند به متقاعدسازی افراد برای استفاده از محصول ما یا موارد تجاری دیگر منجر شود.

تشخیص اجتماعها به سبب تعداد زیاد افراد در شبکه فرآیند سختی به دنبال دارد(کاما؟)، به طور مثال فیسبوک احدود ۱٫۹ میلیارد کاربر دارد و این یعنی مجموعهدادههای بسیار بزرگی که نیاز به یک الگوریتم بهینه دارند. اغلب رویکردهای موجود به سبب پیچیدگی زمانی یا حافظهای مقیاس پذیر نیستند اما رویکرد ارائه شده در این مقاله نه تنها از این نظر مناسب است بلکه با استفاده از دادهساختار بهتر، سبب کارایی بیشتر شده و برای شبکههای پویا نیز قابل بسط و توسعه است. این رویکرد ابتدا افراد مؤثر در شبکه را بهعنوان منشأ اطلاعات یافته و با شبیهسازی جریان احتمالی اطلاعات راطلاعات با احتمال مشخصی از هر یال و مسیر جریان می یابد) از این افراد به داخل شبکه، اجتماعها را با برچسبگذاری تشخیص می دهد. برای پیچیدگی زمانی رویکرد نیز یک حد بالا بر اساس ویژگیهای مورد استفاده ی شبکه اجتماعی که در ادامه ذکر خواهند شد، ارائه شده است.

۲-۳- مفاهیم مقدماتی

اصلی ترین مفهوم، گراف شبکهی اجتماعی هست که در این مقاله بهصورت مجموعهای از رئوس و یالهای جهتدار وزندار در نظر گرفته شده که وزن یالها مرتبط با احتمال انتقال اطلاعات از طریق آنها است.

تعریفی از مجاورین رأس (N(v))، درجه کخروجی غیروزندار ($\delta(v)$)، درجه یورودی غیروزندار (N(v))، درجه کخروجی وزندار ($\delta^*(v)$) برای هر رأس و همچنین تعریفی برای قطر گراف یعنی طولانی ترین کوتاه ترین مسیر در آن ارائه شده است.

علاوه بر تعاریف فوق که در مقاله استفاده شده، خصوصیاتی از شبکههای اجتماعی نیز که در مقاله کاربرد داشته است، ذکر شده اند از جمله:

- communities یا همان جوامع که قرار است شناسایی شوند
- مفهوم اثر دنیای کوچک که به کوتاهی مسیر ارتباط هر دو فردی در جهان به واسطه ی ارتباطات اشاره دارد (به بحث مؤلفه های قویاً همبند و وجود مؤلفه ی غول آسا در اکثر شبکه های اجتماعی واقعی نیز اشاره شده که در محاسبه ی پیچیدگی زمانی رویکرد ارائه شده مورد استفاده قرار می گیرد)
- گشت تصادفی (random walk) که همان پیمایش گراف بر حسب احتمال است. به عبارتی هر یال با یک احتمالی پیمایش می شود.

۲–۴– مدل

در این بخش به توضیح نحوهی ذخیرهسازی و بازیابی گراف اشاره شده است.

در این مقاله به جای ماتریس مجاورت از یک ساختمان داده پویا مشابه به لیست مجاورت استفاده شده است.

ورودیها در هر خط به فرم u v w_w است که یک یال از u به v را با وزن v v را با وزن یا بزرگتر و مساوی v u u v v است، یا اگر مجموعه داده به این صورت نیست باید به این فرم در آید). یک جدول هش در نظر می گیریم که کلید آن v است، یا اگر مجموعه داده به این صورت نیست باید به این فرم در آید). یک جدول هش در نظر می گیریم که کلید آن v است و مقدار یک دوتایی است. هر کدام از اعضای این دوتایی یک لیست v است و مقدار یک دوتایی است. هر کدام از اعضای این دوتایی یک لیست v است و مقدار یک دوتایی است و دیگری وزن یالهای نظیر به نظیر یا v0.

این ساختمان داده و پیاده سازی دو ویژگی دارد؛ یک، پیچیدگی مناسب و دیگری ماهیت پویا.

در مورد پیچیدگی زمانی، بازیابی لیست مجاورین و وزنها برای هر u دارای پیچیدگی O(1) است. افزودن یک رأس به لیست نیز همینطور. دسترسی به وزن یال مشخص u نیز برابر O(k) طول می کشد. همچنین دسترسی های الگوریتم ما به این یالها معمولاً به ترتیب رخداد آنها اتفاق می افتد که تعداد پیمایش کامل لیست را کاهش می دهد.

از نظر حافظه، ساختار مورد استفاده ی ما مجموعه ای از رئوس به عنوان کلید دارد (|E| > |E| > 1) که تعداد آن ها نهایتاً برابر تعداد یال هاست. ذخیره ی مقدارهای جدول هش نیز شامل دو لیست مجاورین و وزن ها است که در مجموع O(|E| + 2|E| + 2|E| + 2|E| + 2|E|.

از نظر پویایی، اضافه کردن رأس به ماتریس، پیچیدگی O(n) دارد که n تعداد رئوس قبلی است. در حالی که برای رأسی مانند v پیچیدگی اضافه کردن یالهای آن به اندازه ی مجموع درجه ی خروجی و ورودی غیروزن دار آن است. که به نسبت |E| بسیار کم است. این به ما اجازه می دهد در آینده رویکرد را برای شبکههای پویا نیز بسط دهیم.

درمورد گشت احتمالی نیز معیار باید مشخص شود. در روش کلاسیک خوشهبندی گراف از احتمال پیمایش به شکل زیر استفاده می شود:

$$P(u,v) = \frac{w_{uv}}{\delta^*(u)}$$

این فرمول برابر وزن یال بر روی درجهی خروجی وزندار مبدأ آن است. اگر گراف بدون جهت باشد تقریباً میتواند مناسب باشد اما در کل دو کمبود و ایراد دارد:

اولین ایراد این است که در روش کلاسیک، گشت احتمالی صرفاً بر روی یکی از یالها در هر لحظه امکان پیشرفت دارد در حالی که در فضای واقعی، اطلاعات به صورت موازی، همزمان و مستقل می تواند انتقال یابد. مثال آن نیز پستهایی است که افراد در فضای مجازی می گذارند. بنابراین جمع احتمالات یالهای خروجی یک رأس دیگر الزامی ندارد برابر ۱ شود. پس برای بهتر شدن مدل، فرمول زیر یشنهاد شده است:

$$P(u,v) = \left(\frac{w_{uv}}{\delta^*(u)}\right)^{\beta} ; \beta \in (0,1)$$

با این کار مقدار احتمال برای هر یال را بالاتر میبریم و به واقعیت نزدیک میکنیم.

برای eta مقدار $rac{1}{4}$ در نظر گرفته شده که برای مجموعهدادههای مقاله، جریان پویای اطلاعاتی خوبی رقم میزند.

فرمول زير حالت نهايي احتمال يال هاست.

$$P(u,v) = \frac{\sqrt[4]{w_{uv}}}{\sqrt[4]{\delta^*(u)}}$$

دومین ایراد مربوط به متعادل و متوازن نبودن وزن یالها در قسمتهای مختلف گراف است که روش کلاسیک اصلا به آن توجه ندارد.

به عنوان مثال، ۳ مورد از این عدم توازن ذکر مورد بررسی قرار گرفته است:

۱- رأسی با یالهای با وزن بالا: در این مورد در روش کلاسیک فقط یکی از یالها در هر زمان احتمال پیمایش داشت

- در حالی که وزن آنها نشان میدهد همگی مستعد انتشار اطلاعات در یک زمان هستند. و همچنین طبق فرمول احتمال انتشار برای همهی آنها به دلیل نزدیک بودن وزنهایشان توزیع شده و بسیار پایین است.
- 7- رأسی با یالهای بسیار ولی وزن کم: در این حالت با افزایش تعداد یالها احتمال به شدت در روش کلاسیک پایین می آید. درحالی که طبق جداول ارائه شده از محاسبه ی احتمال با فرمول ارائه شده این یالها همگی احتمال مناسبی دارند. در این مورد باید به مثال پست گذاشتن در فضای مجازی اشاره کرد. وقتی پستی گذاشته می شود افراد حتی کم ارتباط هم احتمال زیادی دارد آن پست را ببینند. بنابراین زمان خلق اطلاعات در شبکه مهم است و باید در نظر گرفته شود.
- ۳- رأسی با تعداد یال زیاد و تعداد اندکی یال سنگین وزن: بر اساس محاسبات روش کلاسیک به یالهای سنگین وزن هم احتمالی کمتر از ۰٫۵ میدهد. در حالی که در فرمول ارائه شده کاملاً برعکس است و احتمال مناسبی برای آنها در نظر گرفته میشود.

۲-۵- رویکرد

تشخیص اجتماع در یک گراف، یافتن یک مجموعه از k زیرگراف است که هر یک ساختاری بهخوبی متصل دارند. راه حل این مسئله بهصورت بهینه با استفاده از معیارهای اتصال یک مسئلهی NP-hard است، یعنی در پیچیدگی چند جملهای قابل حل نیست. بنابراین رویکرد در این مقاله نیز یک رویکرد تقریبی است.

ابتدا افراد مؤثر در شبکه را می یابیم و از آنها به عنوان مبدأ انتشار اطلاعات استفاده می کنیم. یعنی جریان یافتن اطلاعات یا همان برچسبها را به احتساب احتمال هر یال شبیه سازی می کنیم تا زمانی که کل گراف برچسبگذاری شود یا بعد از تعداد مشخصی (۸) تکرار که حالت پایداری پیدا کند یعنی دیگر برچسبی منتشر نشود.

بر خلاف همهی رویکردها، رویکرد این مقاله پیدا کردن برچسب و اجتماع مشخص برای هر رأس را ضمانت نمی کند. در واقع این انتخاب آگاهانهای است که با توجه به شرایط شبکههای واقعی در نظر گرفته شده است. در شبکه های واقعی افرادی هستند که فعالیت منظمی ندارند و اطلاعات تولید یا منتشر نمی کنند. با این حال با پذیرش نتیجهی غیردقیق می توان نتایجی به دست آورد و در ارزیابی، رئوس غیرفعال را اجتماع تکعضوی در نظر می گیریم. با این حال در مجموع این مقاله، به مسئله به مورت بهینهسازی بر اساس یک سری معیار اتصال نگاه نکرده است، زیرا هر کدام از این معیارها به تنهایی محدودیتهایی را باعث می شوند. در عوض از انتشار برچسب استفاده کرده است و برچسبها را با معیارهای مختلف مورد سنجش قرار داده است. به بطور کلی مقاله شامل دو الگوریتم مهم است که رویکرد را تشکیل می دهند. اولین الگوریتم، برای یافتن افراد تاثیر گذار در شبکه است که به آنها آلفا گفته می شود. این افراد می توانند منبع خوبی برای انتشار اطلاعات باشند زیرا معمولاً دارای تعداد در شبکه است که به آنها آلفا گفته می شود. این افراد می توانند منبع خوبی برای انتشار اطلاعات باشند زیرا معمولاً دارای تعداد زیادی دوست یا دنبال کننده هستند و همچنین ارتباطات قوی با این افراد دارند. به بیان دیگر تعداد یال های خروجی آنها و همچنین مجموع وزن این یال ها زیاد است. وجود چنین افرادی در شبکه اثبات شده است.

الگوریتم یافتن آلفاها، گراف G و پارامتر k را دریافت می کند و مجموعه رئوس آلفا را خروجی می دهد.

این کار را با استفاده از دو لیست NumRank و DegRank انجام می دهد که شامل رئوس G هستند. اولی را بر حسب می کند. سپس از بین k درصد برتر این دو لیست، تعداد یال خروجی و دومی را بر حسب مجموع وزن یال های خروجی مرتب می کند.

مشترکها را به عنوان آلفا تشخیص داده و مجموعه آلفاها را باز می گرداند.

نکته در مورد پارامتر k: یکی از مشکلاتی که خود نویسنده نیز به آن اشاره کرده است یافتن مقدار بهینه برای k است که در این مقاله به آن پرداخته نشده و حل آن دشوار است. برای مجموعه داده های مقاله نیز صرفاً حدسهای آزموده شده ای برای مجموعه داده های مقاله نیز صرفاً حدسهای آزموده شده است.

۲-۵-۱ پیادهسازی

الگوریتم یافتن آلفاها در فایل <u>alpha_detection.py</u> در مخزن گیتهاب پروژه که آدرس آن در ابتدای مستند آورده شده، ییاده سازی شده است.

پیاده سازی این الگوریتم منطبق با شبه کد و به صورت بهینه پیاده سازی شده است. به این صورت که از توابعی با پیچیدگی زمانی بهتر برای افزودن به لیست استفاده شده یا در اشتراک گیری انتهای الگوریتم مطابق با مرتبه ی زمانی بیان شده در بخشهای بعدی مقاله، با مرتبه ی (|V|log|V|) انجام شده است.

٢-۶- الگوريتم

رویکرد اصلی ارائه شده به این صورت است که پس از به دست آوردن افراد مؤثر، این افراد را منبع اطلاعات در نظر u می گیریم و نشر اطلاعات (برچسبها) را شبیه سازی می کنیم. یعنی اگر α_i اولین آلفایی باشد که u از آن اطلاعات می گیرد. u به اجتماع u ام تعداد اجتماعها در نهایت برابر تعداد آلفاها است. اگر آلفایی به یک رأس مثل u دسترسی نداشته به اجتماعی تعلق ندارد. (ما در ارزیابی خود این رئوس را یک اجتماع مستقل در نظر گرفتیم)

ابتدا به هر آلفا یک برچسب داده می شود، سپس به صورت موازی از هر آلفا به مجاورینش بر حسب احتمال (P(u, v) که در بخشهای قبل توضیح دادیم، برچسب انتشار می دهیم. در گام بعدی، هر رأس دیده شده در تکرار قبلی برچسب دریافتی اش را به مجاورین به شکل مشابه انتشار می دهد. رأسی دیده شده که برچسب دریافت کرده باشد. برای هر تکرار، یالهایی که قبلاً جریان داده از آنها عبور نکرده است، مسیرهای فعال باقی خواهند ماند. یعنی در ادامه شاید اطلاعات در تکرارهای بعدی از آنها عبور کند. به شکل مشابه رئوسی که مجاور دیده نشده دارند، فعال باقی می مانند. این روند تا برچسب گذاری شدن همه ی رئوس یا رسیدن گراف به یک حالت پایدار (۳ تکرار پیاپی بدون برچسب گذاری جدید) ادامه می یابد.

در هر تکرار، رئوس فعال را به زیرمجموعههایی تقسیم میکنیم و با استفاده از چند نخی بهطور موازی فرایند انتشار انجام می شود.

نکته: انتخاب تعداد این زیرمجموعهها بستگی به سختافزار دارد و در صورت زیاد در نظر گرفتن آنها باعث افزایش زمان انتظار نخها برای استفاده از منابع خواهد شد.

به طور جزئی تر الگوریتم انتشار برچسب، گراف G، آلفاها و آستانه تکرار (λ) را دریافت می کند و یک جدول هش که شامل رئوس و برچسبهای آنهاست خروجی می دهد.

ابتدا مبدأ انتشار را با آلفاها مقداردهی می کند و رئوس دیده شده را تهی در نظر می گیرد. به هر رأس نیز ابتدا مقدار 0 را

به عنوان مقدار پیش فرض برچسب می دهد. یک شمارنده با نام add در نظر می گیرد.

در جدول هش، برچسب آلفاها را برابر خودشان قرار می دهد. یک حلقه با شرط رسیدن شمارنده ی add به مقدار λ در نظر می گیرد. هر دور به add یک واحد اضافه می شود و به طور موازی رئوس داخل لیست مبداها، وارد پروسه ی انتشار می شوند. اگر رأس مبدا u مجاوری نداشته باشد، از لیست مبدأ حذف شده و به لیست دیده شده ها اضافه می شود. اگر داشته باشد به ازای هر مجاور v آن، اگر تا به حال دیده نشده باشد یا به عبارتی برچسب v داشته باشد، در صورت بیشتر بودن احتمال یال v از یک مقدار رندوم بین v و v به لیست مبداها اضافه می شود، برچسب v را به عنوان برچسب خود می پذیرد (این قسمت در شبه کد اشتباه ذکر شده بود) و مقدار v همان دیده شده ها اضافه می شود. اگر v v دیگر رأس برچسب خوده یا همان دیده نداشته باشد، از لیست مبدأها حذف می شود و به لیست دیده شده ها اضافه می شود.

۲-۶-۱ پیادهسازی

پیادهسازی این الگوریتم در قالب دو تابع در فایل label_propagation در مخرن گیتهاب پروژه انجام شده است.

در تابع label_propagator، ساختار گراف، آلفاها، مقدار آستانه، لیستی از اعداد تصادفی برای استفاده در انتشار احتمالی به همراه سه پارامتر برای تقسیم بندی لیست مبدأها:

- آستانهی سایز لیست مبدأها: اگر از یک مقدار مشخصی کمتر بود تعداد زیرمجموعهها برابر حاصل تقسیم تعداد مبدأها بر پارامتر اندازهی پیشفرض زیرمجموعه، است. و در غیر این صورت به اندازه پارامتر تعداد پیشفرض زیرمجموعه، زیرمجموعه داریم.
- تعداد پیشفرض زیر مجموعهها: این تعداد درصورت بیشتر بودن تعداد مبدأها از آستانهی سایز، به این صورت که ۱۰۰ تا ۱۰۰ تا نمونهبرداری کند مبدأها را زیرمجموعه می کند. به طور مثال مبدأ ۱ با ۱۰۱ با ۲۰۱ با هم در یک زیرمجموعه می افتند.
- اندازه ی پیشفرض زیرمجموعه ها: در صورتی که تعداد مبدأها کمتر از آستانه باشد. هر زیر مجموعه، این تعداد مبدأ خواهد داشت.

ضمن مقداردهیهای گفتهشده بر طبق شبه کد الگوریتم، یک شمارندهی rand_it برای استفاده از لیست اعداد تصادفی مقداردهی اولیه می شود. یک سمافور نیز برای کنترل نخها و جلوگیری از مشکل استفادهی موازی از منابع یکسان نیز مقداردهی می شود.

حال بر طبق الگوریتم، حلقه شروع می شود. بر اساس آنچه در توضیح پارامترها گفته شد زیرمجموعه اتشکیل می شوند و تابع propagator با ورودی هر زیرمجموعه و سمافور به هر نخ تخصیص می یابد. سپس نخها شروع به اجرا می کنند و پس از خاتمه ی انتشار موازی در این گام حلقه به گام بعدی می رود. تا در نهایت جدول هش به عنوان نتیجه از این الگوریتم بازگردانی شود.

تابع propagator نیز با دو ورودی زیرمجموعهای از مبدأها و سمافور و بدون خروجی به شکل زیر کار می کند:

هر مبدأ u مشابه شبه کد در صورت مجاور نداشتن از لیست مبدأها حذف و به لیست دیده شده ها اضافه می شود. در صورت مجاور داشتن تعداد مجاورین برچسب نخورده را با یک شمارنده نگه می داریم که در صورت u ماندن، u را از مبدأها حذف و به

دیده شده ها اضافه کنیم. به ازای هر مجاور u مثل رأس v، شمارنده ی برچسبنخورده ها را یک واحد اضافه کرده، احتمال انتشار را بر اساس فرمول محاسبه می کنیم و اگر از عدد تصادفی v اتمال بیشتر باشد اقدام به انتشار می کنیم. یعنی ضمن قفل کردن سمافور، v را برچسب زده و به لیست مبدأها اضافه می کنیم تا در دورهای بعدی انتشار دهد. v می کنیم. سپس سمافور را آزاد می کنیم. برای هر مجاور v rand_it یک واحد کم می کنیم. سپس سمافور را آزاد می کنیم. برای هر مجاور v می واحد افزوده می شود.

v نکته: شرط v بودن برچسب v داخل محدودهی قفل سمافور باید تکرار شود زیرا ممکن است یک مبدأ بهصورت موازی v را اضافه کرده باشد و نخ فعلی صرفاً پشت قفل، منتظر افزودنش مانده باشد.

يكى از مهمترين مسائل، بحث پيچيدگى الگوريتم ارائه شده است.

برای مرتبه ی زمانی این رویکرد، یک حد بالا با ارائه Δ لم و اثبات آنها ارائه شده است.

۱. لم اول: امید ریاضی تعداد امتحان لازم برای رسیدن به حداقل یک موفقیت در امتحان موازی n رویداد مستقل برنولی برابر است با:

$$E = \frac{1}{\min p_i, i \in [1, n], i \in Z}$$

طبق اثبات مقاله برای هر p به فرمول زیر میرسیم:

$$E = \frac{1}{p}$$

سپس به ازای pهای موازی به این نتیجه میرسیم که در بدترین حالت کمترین p حادث میشود و لم اثبات میشود.

۲. لم دوم: در گراف همبند با قطر d با شروع از هر رأس دلخواه می توان با d پیمایش همسایه پشت سر هم به رأس دلخواه دیگری در گراف رسید.

اثبات این لم نیز بسیار ساده است. طبق تعریف قطر طول بلندترین کوتاهترین مسیر بین دو رأس در گراف است. بنابراین فاصله ی هر دو راس دلخواه نهایتا d است.

۳. لم سوم: در هر گراف n راسی G با قطر d و کمترین مقدار ممکن برای حداکثر درجهی رئوس:

$$\left[n^{\frac{1}{\lfloor d/2 \rfloor}}\right] + 1$$
: بیشترین درجهی بهینه برابر

$$k = \left[n^{rac{1}{[d/2]}}
ight] + 1$$
 دارد که k دارد که $n - \left((k-1)^{\left|rac{d}{2}
ight|} - 1
ight) imes K$ حداقل k

 $|V|\log|V| = O(|E|)$. برای هر شبکهی اجتماعی داریم:

اثبات این لم با استفاده از ضریب خوشهبندی انجام می شود. ضریب خوشهبندی برابر است با تعداد مثلث های حول رئوس گراف به تعداد مسیرهای به طول ۲ یا همان سه تایی های به هم متصل غیرمثلث است. مدل Barabasi-Albert یک مدل است که گراف های تصادفی با توزیع درجهی power-law تولید می کند. در شبکه های واقعی معمولاً ضریب خوشهبندی

از مقدار به دست آمده برای گرافهای مدل BA بسیار بیشتر است. بنابراین از مقدار ضریب خوشه بندی آنها به عنوان یک حد پایین استفاده می کنیم و برابر است با:

$$CC(G) = \frac{(\ln |V|)^2}{|V|}$$

 $CC(u) \approx 1$ به طور تقریبی، میانگین ضریب خوشهبندی محلی با ضریب خوشهبندی سراسری در شبکه برابر است. بنابراین $CC(u) \approx 1$ به طور تقریبی، میانگین ضریب خوشهبندی محلی با ضریب خوشهبندی CC(G)

$$\frac{2|\{(u,v) \in E|v \in N(u)\}|}{|N(u)| * (|N(u)| - 1)} = \frac{(\ln|N(u)|)^2}{|N(u)|}$$

و در نهایت:

$$|\{(u,v) \in E | v \in N(u)\}| = \frac{|N(u)|(\ln |N(u)|)^2}{2}$$

با توجه به این که شبکه ما باید حدوداً به این اندازه یال داشته باشد تا طبق power-law توزیع درجه داشته باشد. تعداد یالهای شبکه حداقل برابر فرمول فوق است یعنی:

$$|E| \ge c|V|(\ln|V|)^2$$

$$|V|\log|V| = O(|E|)$$
 يس به عبارتي:

۵. زمان مورد انتظار اجرای الگوریتم در بدترین حالت برابر O(|E|) است.

پیچیدگی زمانی الگوریتم ارائه شده برای یافتن آلفاها، مرتبسازی با مرتبه ی $|V|\log|V|$ است و همچنین اشتراک گیری که همانطور که در بخش پیاده سازی این الگوریتم گفته شد با مرتبه ی $|V|\log|V|$ پیاده شده یعنی با مرتبسازی و جست و جوی خطی. پس در مجموع O(|E|) می شود.

برچسبگذاری تنها در بزرگترین مؤلفهی همبندی در عمل انجام می شود و بدترین زمان اجرا برای اجرای متوالی تا پوشش کامل گراف و برچسبگذاری کامل است. با این حساب اگر در هر مرحله مثل i، iامین محله مورد پیمایش پشت سر هم قرار گیرد، تعداد یالهای بین 1-iامین و iامین محله در بدترین حالت برای هر یال uw برابر امید ریاضی محاسبه شده در لم اول ضرب در تعداد یالهای آن هاست که در بدترین حالت برابر کل تعداد یالهاست. بنابراین زمان اجرا با توجه به مرتبهی ثابت امید ریاضی و حداکثر طول مسیر بین رأسها که قطر است، برابر ضریبی از |E| است. بنابراین پیچیدگی زمانی رویکرد برابر (|E|) است.

٧-٧- آزمایشات

در بخش آزمایشات لازم است علاوه بر معرفی دادههای مورد استفاده در مقالهی اصلی، معیارهای ارزیابی جهت سنجش

كيفيت عملكرد الگوريتم را نيز بررسي كنيم.

۲-۷-۲ دادگان

خروجی الگوریتم برای ۱۴ مجموعهداده ارزیابی شده است. اولین مجموعهداده، شبکه ی اعضای یک باشگاه کاراته دانشگاهی است که ۳۴ نود و ۷۸ یال دارد. در اصل این مجموعهداده، مربوط به یک گراف بدون جهت و بدون وزن است که ما آن را با قرار دادن دو یال به جای هر یال و اعطای وزن ۱ به هر یال، به یک گراف جهتدار و وزندار تبدیل کردیم. شبکه ی تعامالات فیسبوک، ۴ داده از پروژه ی تحلیل شبکههای اجتماعی استنفورد، شبکه ی مؤلفان آثار علمی، گراف شبکه ی اجتماعی یوتیوب، شبکهای از ایمیلهای یک مرکز علمی در اروپا و ۸ مجموعهداده ی دیگر که هر ۱۸تای آنها توسط ToreOpsahl منتشر شدهاند، دیگر دادههایی هستند که در این مقاله استفاده شدهاند.

۲-۷-۲ ارزیابی

به جهت نشان دادن کارایی الگوریتم، برای هر مجموعهدادهای که امکان مقایسه وجود داشته باشد، مقاله ی اصلی عملکرد خودش را با الگوریتم MCL مقایسه کرده است. زیرا MCL که بر اساس الگوریتم خوشهبندی کارکوف کار می کند، در بسیاری از زمینه ها مورد استفاده قرار می گیرد. علاوه بر این، شبیه ترین روش به الگوریتم طراحی شده در این مقاله نیز هست. این مقایسه هم برای داده های دارای برچسب درست انجام شده و هم برای داده هایی که برچسب نداشتند. علاوه بر مقایسه در نتیجه و دقت، مقایسه در زمان لازم برای انجام الگوریتم نیز صورت پذیرفته است که در بخش نتایج، به آن خواهیم پرداخت.

برای مجموعه داده هایی که برچسب واقعی آن ها در دسترس بوده است (مانند شبکه ایمیل ها و صفحات ویکیپدیا)، نویسنده از دو معیار FPR و FPR استفاده کرده است. به این صورت که به ازای هر کلاس (برچسب) این دو معیار رو محاسبه کرده و برای کل الگوریتم، از آن ها میانگین گرفته است. این دو معیار طبق روابط زیر تعریف می شوند.

$$FPR = \frac{FP}{FP + TN}$$

$$FNR = \frac{FN}{FN + TP}$$

اما برای آن دسته از دادههایی که جواب درست مسئله برایشان نامشخص بود از معیاری به اسم رسانایی (conductance) استفاده شده که طبق رابطهی زیر تعریف می شود.

$$\Phi = \frac{c_s}{c_s + 2m_s}$$

در این رابطه c_s تعداد یالهای مرزی یک اجتماع m_s تعداد یالهای درون یک اجتماع است. به گفتهی مقاله هر مقدار رسانایی کمتر باشد، الگوریتم بهتر عمل کردهاست.

'Youtube

'Wikipedia

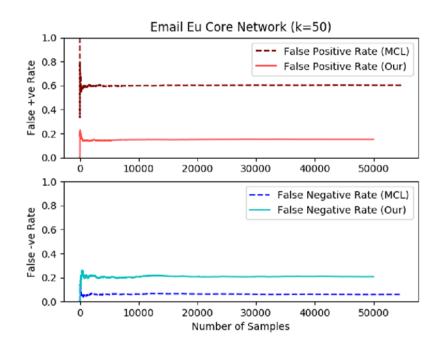
^۳ مقاله اصلی در اینجا از واژه «خوشه» استفاده کردهاست.

۲–۸- نتایج

مقالهی اصلی نتایج را در سه بخش ارائه میدهد. در بخش اول به ارائه و تحلیل نتایج اجرای الگوریتم روی دادههایی است که جواب درست مسئله را به ازای آنها که جواب درست مسئله را به ازای آنها نداشته است. در بخش سوم نیز زمان اجرای الگوریتم طراحی شده در این مقاله و MCL را مقایسه کرده است.

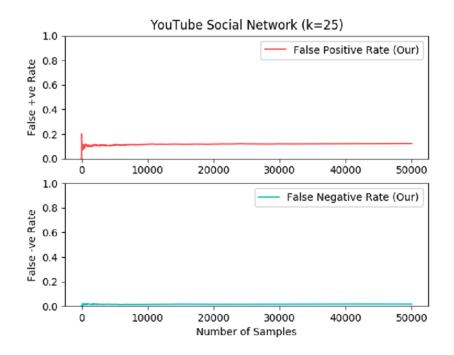
۲-۸-۱ نتایج همراه با جواب درست مسئله

از بین ۴ مجموعهدادهای که مقاله به ارائه و تحلیل نتایج آنها پرداخته است، ما صرفاً نتایج اجرای الگوریتم بر روی دادهی شبکهی ایمیلهای مرکز علمی اروپا و شبکهی اجتماعی یوتیوب را آوردهایم. چون تعداد یالهای بعضی گرافها بسیار زیاد است، ارزیابی همه آنها ممکن نیست؛ بنابراین به شکل تصادفی از مجموعهی یالها نمونهبرداری شدهاست. با افزایش اندازه نمونهها تا حدی پیش می رویم که اندازه FPR و FNR به مقدار واقعی همگرا شوند.



در شکل بالا که عملکرد دو الگوریتم را برای مجموعهداده ی ایمیل، مقایسه شدهاست، همانطور که میبینیم در معیار FPR الگوریتم طرح شده در این مقاله، بسیار بهتر از MCL عمل کردهاست، اما در FNR ضعیف تر ظاهر شده است. اگر ماتریس در همریختگی را در نظر بگیریم، متوجه می شویم برای این مجموعه داده، الگوریتم روی کلاس T متعصب (bias) شدهاست. بنابراین نسبت به کلاس N عملکرد جالب توجهی نداشته است.

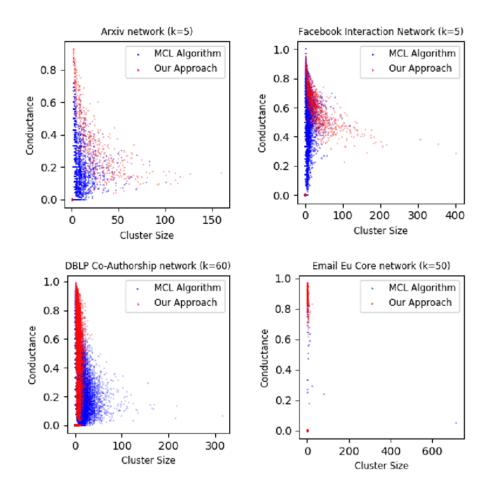
اما نتایج الگوریتم روی مجموعه داده ی یوتیوب، خارق العاده است. زیرا پردازش مجموعه داده ای به بزرگی یوتیوب، به شدت سخت و چالش برانگیز است و کمتر الگوریتمی، عملکردش را در مواجهه با این مجموعه داده محک می زند. همانطور که در شکل زیر پیداست، الگوریتم این مقاله، FPR و FPR را همزمان کاهش داده است. علاوه بر این، شکل زیر نشان از مقیاس پذیری بالای الگوریتم دارد، به شکلی که الگوریتم کاره بردازش کند.



۲-۸-۲ نتایج بدون داشتن جواب درست مسئله

همانطور که پیشتر گفته شد، برای ارزیابی و تحلیل دادههایی که جواب درست را برای آنها در اختیار نداریم، از معیار رسانایی استفاده می کنیم. درست است که در مجموعهدادههایی که جواب درست را در اختیار داریم، عمدتاً عملکرد الگوریتم این مقاله بهتر از MCL عمل کرده است، اما در دادههایی بدون جواب درست، بهصورت کلی می توان گفت، MCL عمکلرد بهتری را به نمایش گذاشته است. البته به گفته نویسنده مقاله، این دلیلی برای ضعف الگوریتم ما نیست، بلکه معیار رسانایی به تنهایی برای ارزیابی چنین دادههای کافی نیست.

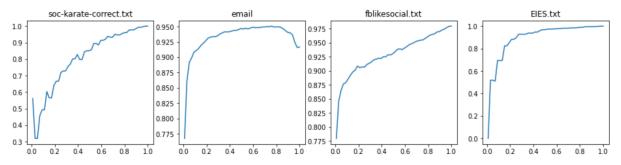
تصویر زیر، مقادیر مختلف این معیار را به ازای kها و مجموعه داده های متفاوت نشان می دهد. با توجه به این تصویر و نتایج استفاده از رسانایی برای هر ۱۴ مجموعه داده، می توانیم استدلال کنیم ، برای مقادیر بزرگ k، عملکرد دو الگوریتم نزدیک به یکدیگر هستند. اما برای مقادیر کوچک k، الگوریتم این مقاله می تواند با رسانایی کمتر (عملکرد بهتر) تعداد زیادتری از اجتماعات بزرگ را شناسایی کند.



به دلیل اینکه ما دقیقا همان نسخه از دادههایی که نویسنده استفاده کردهاست را در اختیار نداشتیم، نتوانستیم دادههایی را پیدا کنیم که برچسب درست را داشته باشند، بنابراین تنها ملاک ارزیابی ما استفاده از معیار رسانایی بود. کدی که برای محاسبه معیار رسانایی توسعه دادیم را در این پیوند از مخزن گیتهاب میتوانید مشاهده کنید.

با مراجعه به نمودارهای بالا، یکی از مجموعه داده ها را انتخاب و به ازای همان الی که در مقاله ذکر شده بود، مقدار رسانایی را محاسبه کردیم. نتیجه ی مقایسه ی نتیجه ی ما با نتایج موجود در مقاله، اعداد مشابهی را نشان می دادند. این مشابهت دال بر پیاده سازی صحیح الگوریتم های مقاله است.

برای مشاهده ی تأثیر k در الگوریتم، از ۴ داده ی باشگاه کاراته، ایمیلها، تعاملات فیسبوک و شبکه ی محققان اطلاعات الکترونیکی استفاده کردیم تا نمودار زیر را رسم کنیم.



تصویر بالا معیار رسانایی الگوریتم را به ازای ۵۰ مقدار متفاوت k که به فاصله خطی از ۰/۰۱ تا ۱ پراکنده شدهاند، نشان

می دهد که برای مجموعه داده های مختلفی محاسبه شده است.

۳٫۲. مقایسه زمان اجرا

همانطور که پیشتر دیدیم، الگوریتم MCL برای برخی مجموعهدادهها نظیر یوتیوب، اصلا مقیاسپذیر نیست. اما خوب است به صورت واضح تر، تفاوت این دو الگوریتم را در زمان اجرا نیز مشاهده کنیم. با استناد به جدول زیر و متن مقاله، می توانیم نتیجه بگیریم پیچیدگی زمانی الگوریتم نسبت به تعداد یالها، به شکل خطی است.

Dataset	No. of Edges	MCL	Our Approach
EIES network	830	0.009s	0.081s
Fb-like Social	20296	0.924s	0.234s
Email	25571	0.810s	0.190s
Arxiv	95188	1.957s	1.102 s
Fb-like forum	142760	0.949s	0.492s
FB-Interaction	253831	20.643s	4.903s
DBLP	1.05 M	8m 33s	6m 28s
YouTube	5.98 M	Does not scale	1hr 7min
Wikipedia	28.5 M	Does not scale	3hr 4min

۹-۲ محدودیتها و کارهای آینده

یکی از محدودیتهایی که نویسنده ی مقاله برای آن برشمرده است، سختی و چالشبرانگیز بودن انتخاب k است. در متن مقاله عنوان شدهاست که بهتر بود انتخاب k را به عهده ی کاربر نگذاریم، بلکه با روشهای هوشمند، مقادیر بهتری از k را انتخاب کنیم. روشهای هوشمند می توانند بر اساس نوع شبکه تعیین شوند. مثلا در گرافی که ارتباط بین مؤلفان مختلف مقالات علمی را مدل کرده بود، هر نود با تعداد اندکی از نودهای دیگر در ارتباط بوده است. پس بهتر است در این مجموعه داده مقادیر بزرگتری برای k انتخاب کنیم که بتوانیم اجتماعات بیشتری را پیدا کنیم.

یکی دیگر از محدودیتهایی که مقاله هیچ صحبتی از آن نکرد، عدم توجه به ادغام اجتماعات است. به این معنی که در الگوریتم alph_detection هیچگاه کنترل نشد که چه نودهایی انتخاب میشوند. چه بسا نودهایی به عنوان مؤلفههای اصلی انتخاب شوند که مجاوران مشترک بسیار زیادی داشته باشند و در نهایت منجر به تشکیل یک rich club شوند.

یکی دیگر از محدودیتهای مقاله استفاده از معیار رسانایی است. در متن مقاله اشاره شد که این معیار به تنهایی، معیار کاملی برای بررسی عملکرد الگوریتمها نیست، اما هیچ جایگزینی برای آن معرفی نشد. معیاری که ما پیشنهاد می کنیم استفاده از اینرسی است که طبق فرمول پایین تعریف می شود.

$$inertia = \sum_{S \in S} \sum_{v_i \in S} \frac{1}{d(v_{alpha}, v_i)}$$

که در رابطه بالا، $d(v_{alpha}, v_i)$ هزینه کوتاهترین مسیر از نود آلفا یک خوشه به نود v_i موجود در آن خوشه است. البته معیار اینرسی فقط برای شبکههایی خاصی جوابگو خواهد بود.

۲-۱۰ نحوهی اجرا

مانند هر پروژه پایتونیک دیگری نیاز است بهعنوان اولین گام، یک محیط مجازی بسازیم و پس از فعالسازی آن، با صدور دستور زیر در خط فرمان، نیازمندیهای پروژه را درون محیط مجازی نصب کنیم.

pip install -r requirements.txt

حال برای اجرای کد، در ابتدا باید پوشهای به اسم output درون پوشه اصلی بسازیم تا گرافهایی که برچسبگذاری شده اند در این پوشه ذخیره شوند. سپس V است فایل V است فایلی را به کد می دهیم که می خواهیم گراف برچسبگذاری شده را در آن ذخیره کنیم.

۳- مقاله دوم (A Novel Approach for Community Detection) مقاله دوم

۳-۱- چکیده

نویسنده در این مقاله با استفاده از روش انتشار برچسب، سعی در ارائهی یک الگوریتم برای تشخیص اجتماع پویایی که با هم همپوشانی داشته باشند. در این روش ابتدا به هر نود در یک شبکه، برچسبی معادل با شناسه آن نود داده می شود و در ادامه می تواند برچسبهای مختلفی را از همسایگانی که تأثیر گذاری بیشتری دارند نیز دریافت کند.

٣-٢- مقدمه

در ابتدا هدف تحلیل شبکههای اجتماعی این طور بیان شده است که ما با تحلیل روابط بین افراد و گروهها سعی در شناخت فراز و فرود آنها و پیبردن به طبعات آنها را داریم. در بخش مقدمه، نویسنده یک اجتماع در شبکههای اجتماعی را دستهای از نودها معرفی می کند که خصوصیات مشابه زیادی دارند که بهصورت متداول با هم در ارتباط هستند. به عبارت بهتر دستهای از نودها درون یک اجتماع قرار می گیرند که یالهای درونی زیاد و یالهای بیرونی کمتری داشته باشند. نویسنده اجتماعات را به دو دستهی کلی تقسیم کرده است. در دستهی اول اجتماعاتی قرار دارند که از یکدیگر مجزا و دستهی دوم متعلق به اجتماعاتی است که با یکدیگر همپوشانی دارند.

الگوریتمهای مختلفی برای تشخیص اجتماعات در یک شبکه اجتماعی وجود دارد که نویسنده به انتشار برچسب، الگوریتم ژنتیک، بخشبندی گراف و خوشهبندی اشاره کرده است؛ همچنین ذکر شده که روش انتشار برچسب، بیش از سایر روشها مورد توجه واقع شده است.

'Dynamic

Overlapping

۳-۳- کارهای مرتبط

در ۱۰ سال گذشته الگوریتمهای مختلفی برای تشخیص اجتماع طراحی شدهاند که اکثر آنها به دلیل پیچیدگی زیاد زمان و حافظه، کارایی مناسبی ندارند و در عمل برای استفاده در کاربردهای روزمره قابل اتکا نیستند. اولین مقالهی مرتبطی که نویسنده به آن اشاره می کند، مقالهای است که برای اولین بار، الگوریتم انتشار برچسب در آن مطرح شد. این الگوریتم تنها با استفاده از ساختار شبکه، اجتماعات همپوشا و مجزا را در مرتبه خطی نسبت به تعداد یال، تشخیص می دهد. البته برای این الگوریتم دو عیب نیز ذکر شده است. ایراد اول آن است که در ابتدا به همه نودها بهصورت تصادفی برچسب و بهروزرسانی باعث ایجاد کارکرد غیرقابل پیشبینی خواهد شد. ایراد دوم در انتخاب روش حریصانه آبرای انتصاب برچسب و بهروزرسانی نودهاست که به تشکیل اجتماعات بسیار بزرگ و نادیده گرفته شدن اجتماعات کوچک می انجامد. دومین مقالهای که مورد بررسی قرار می گیرد، مقالهای است که برای بار اول، تشخیص اجتماعات همپوشا را مطرح کرد. به گفتهی نویسنده، الگوریتم ACOPRA در هر بار به همهی نودها اجازه می دهد به شکل همزمان، ضرایب خود را با توجه به میانگین ضرایب همسایهها، بهروز کنند. این الگوریتم با معرفی متغیر ۷ تحت عنوان بیشینه ی اجتماعاتی که یک نود می تواند به آنها تعلق داشته باشد، به برخی نودها اجازه می دهد عضو تعداد زیادی اجتماع باشند، در حالی که برخی نودها به تعداد اجتماع کمتری تعلق دارند؛ که البته استفاده اجزه می دهد و نوع نود را بتواند پشتیبانی کند.

۳-۴- روش طراحی شده در این مقاله

روش معرفی شده در این مقاله، با استفاده از همسایه های مشترک و شباهت همسایه های مشترک که بر اساس شاخص جاکارد شت، اجتماعات را تشخیص می دهد. الگوریتم برای اینکه بتواند پویایی شبکه را نیز در نظر بگیرد، میزان تغییر درجه ی نودها را با توجه به زمان، در الگوریتم اثر داده است. علاوه بر این، الگوریتم از نوع تکراری است و در هر تکرار، تغییر زمان نیز مؤثر خواهد بود.

در این مقاله تأکید بر استفاده از برچسب یکتا برای هر نود است؛ یعنی در ابتدا به هر نود، برچسبی معادل با شناسه آن نود می زند و حین اجرا، اگر نیاز بود، نودها به برچسبهای دیگری نیز منتسب می شوند. بنابراین در ابتدا هر نود، برچسب مشخصی می گیرد. در ادامه به صورت تصادفی نودی را از شبکه انتخاب می کند که عضو هیچ اجتماعی نباشد و درجهی آن بزرگتر یا مساوی T باشد. سپس همسایه ای از این نود که نام آن را T گذاشته است، به شکلی انتخاب می شود که بیشترین درجه را داشته و آزاد باشد و اسم آن را T می گذارد. سپس الگوریتم، همسایههای مشترک نود T ام و T استفاده از این دو فرمول، معیار شباهت همسایههای مشترک را چنین به

ا مقاله در سال ۲۰۱۹ منتشر شده است؛ بنابراین بهتر است در زمان حال بگویم :«در ۱۲ سال گذشته ...»

² Greedy

³ Common Neighbors

⁴ Common Neighbor Similarity

⁵ Jaccard Index

⁶ Itterative

دست مي آوريم.

$$\label{eq:cnst} CNS_t(v_i,v_j) = L_t(v_i,v_j). \sum_{v_m \in CN_t(v_i,v_j)} D_t(v_c).$$

اگر دو نود در شبکه، مشترکاً دارای بیشترین CNS باشند، آنها را به یک گروه منتقل میکنیم، اما اگر CNS نودی بیشتری از نود دیگری باشد، نود با CSN کمتر را درون گروه نود با CNS بیشتر قرار میدهیم. اگر نودی بیش از یک همسایه داشت که هر چند تای آنها، مشترکاً بیشترین CNS موجود را داشتند، برچسب همهی آن همسایهها به نود مورد بررسی، منتسب میشود. در این حالت است که یک نود می تواند عضو بیش از یک اجتماع باشد.

در شرایطی ممکن است شبکه با اجتماعات کوچک ولی پر تعداد تقسیم شود. در این حالت الگوریتم با ادغام اجتماعات کوچک در اجتماعات بزرگتر، یک اجتماع واحد بزرگ میسازد. فرایند ادغام تا زمانی ادامه خواهد داشت که یک نود برچسبی را بگیرد که اکثر نودهای همسایهاش دارند.

۳-۵- نتیجهگیری و کارهای آینده

به دلیل کاربرد زیاد شبکههای اجتماعی، تحلیل آنها به مسئلهی مهمی تبدیل شده است. در این مقاله، روشی معرفی شد که با در نظر گرفتن بهروزشدن درجهی نودها با گذشت زمان، اجتماعات مختلف از نوع همپوشا و مجزا را تشخیص دهد. البته این الگوریتم فضای زیادی را اشغال می کند که به عنوان یکی از حوزههایی که در آینده می توان در آن به تحقیق و نوآوری پرداخت، کاهش دادن هزینه ی فضایی الگوریتم است. علاوه بر بهبود پیچیدگی فضایی، می توان این الگوریتم را به شبکههای وزن دار و دوبخشی نیز تعمیم داد.