

Задача о пропавших цифрах

$$\begin{array}{r} \oplus 23?1? \\ ?59?1 \\ \hline 78?9? \end{array}$$



$$\begin{array}{r} \oplus 23010 \\ 55981 \\ \hline 78991 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \oplus ?3?119 \\ ??9??1 \\ \hline 7????2? \end{array}$$



$$\begin{array}{r} \oplus 230119 \\ 559201 \\ \hline 789320 \end{array}$$

Постановка задачи

Заданы два числа и результат их сложения.
Значения некоторых разрядов чисел
неизвестны – их необходимо восстановить.

Вход: $\{a_i\}_{i=1}^n, \{b_i\}_{i=1}^n, \{c_i\}_{i=1}^n$ – значения разрядов чисел a, b, c ,
записанных в системе счисления с основанием p
 $N = \{1, 2, \dots, n\}$

$$\sum_{i=1}^n a_i p^i + \sum_{i=1}^n b_i p^i = \sum_{i=1}^n c_i p^i$$

$$N_a = \{i \in N \mid a_i = ?\}, N_b = \{i \in N \mid b_i = ?\}, N_c = \{i \in N \mid c_i = ?\}$$

Выход: $\{a_i\}_{i \in N_a}, \{b_i\}_{i \in N_b}, \{c_i\}_{i \in N_c}$

Подходы к решению

- Перебор возможных значений для неизвестных разрядов:
 - Экспоненциальная временная сложность в худшем случае – $\theta(p^{|N_a|+|N_b|+|N_c|})$
- Поиск в ширину:
 - Полиномиальная временная сложность – $\theta(n)$

Основная идея

Для нахождения решения задачи необходимо знать лишь возможен ли перенос единицы в $i+1$ -ый разряд при выполнении сложения в i -ом разряде

$$\begin{array}{r} \curvearrowright +1? \\ \dots a_{i+1} a_i \dots \\ \dots b_{i+1} b_i \dots \\ \hline \dots c_{i+1} c_i \dots \end{array}$$

Вспомогательная структура данных (1)

- Граф G_0

1) Каждой тройке (a_i, b_i, c_i) соответствует пара $(s_1^{(i)}, s_2^{(i)})$, $i \in N$

2) G_0 — вполне несвязный граф $V_{G_0} = \{s_1^{(i)}\}_{i=1}^n \cup \{s_2^{(i)}\}_{i=1}^n$

$$\begin{array}{c}
 a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 \\
 b_n b_{n-1} \dots b_2 b_1 \\
 \hline
 c_n c_{n-1} \dots c_2 c_1
 \end{array}
 \quad \sim \quad
 G_0 : \quad
 \begin{array}{cccccc}
 s_1^{(n)} & s_1^{(n-1)} & \dots & s_1^{(2)} & s_1^{(1)} \\
 \circ & \circ & & \circ & \circ \\
 s_2^{(n)} & s_2^{(n-1)} & \dots & s_2^{(2)} & s_2^{(1)} \\
 \circ & \circ & & \circ & \circ
 \end{array}$$

Вспомогательная структура данных (2)

- Орграф переносов G^*

G^* – орграф переносов, $s_1^{(1)} \in V_{G^*}$

$(s_j^{(i)}, s_1^{(i+1)}) \in E_{G^*}$, если сложение

в i -ом разряде возможно

выполнить с переносом единицы

$(s_j^{(i)}, s_2^{(i+1)}) \in E_{G^*}$, если сложение

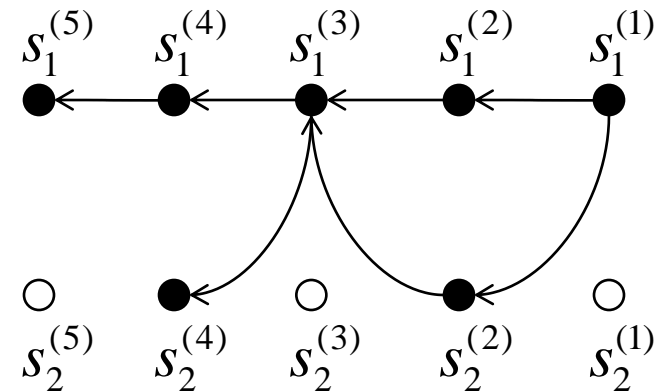
в i -ом разряде возможно

выполнить без переноса единицы

23?1?

?59?1

78?9?



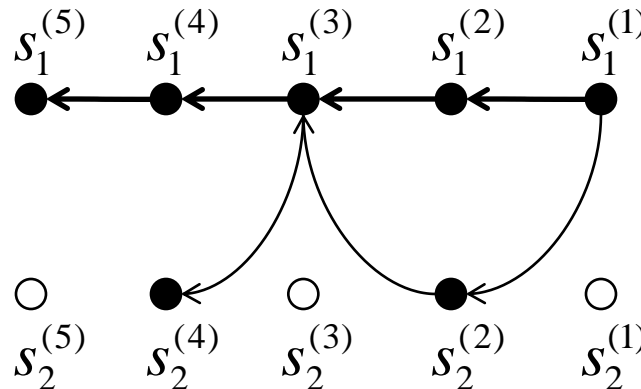
Путь в орграфе переносов

Путь из вершины $s_1^{(1)}$ в вершину $s_j^{(n)}$, $j = 1, 2$ позволит найти некоторое решение задачи

23?1?

?59?1

78?9?



23010

55981

78991

Алгоритм

- 1 $V_{G^*} \leftarrow \emptyset$
- 2 \triangleright К первому разряду перейдем без переноса
- 3 $V_{G^*} \leftarrow V_{G^*} \cup \{s_1^{(1)}\}$
- 4 Построение графа G^*
- 5 $F \leftarrow \overrightarrow{\langle s_1^{(1)}, s_j^{(n)} \rangle} \triangleright$ Нахождение пути в G^*
- 6 **if** $F = \emptyset \triangleright$ Путь не найден
- 7 print "Решения не существует"
- 8 **else**
- 9 Восстановление $\{a_i\}_{i \in N_a}, \{b_i\}_{i \in N_b}, \{c_i\}_{i \in N_c}$

Выводы

- Более тщательный анализ задачи, выявление простых закономерностей позволяет порой существенно снизить временную сложность
- Следует помнить хорошо изученные простые алгоритмы на графах