Clase # 8 de Análisis 3

Equipo clases a LaTeX

20 de noviembre de 2020

Índice

1. Definicion

Diferenciales para campos vectoriales:

Sea $\mathbf{f} : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, S abierto, $\mathbf{x}_0 \in S$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Entonces se le llama a:

$$\mathbf{f'}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}{h} \qquad \text{(Si el limite existe)}$$

Derivada de $\mathbf{f}$ en $\mathbf{x}_0$ respecto a $\mathbf{y}$. $\boxed{\text{Atención: } \mathbf{f'}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n}$

Observación:

Notemos que:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

Con $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, en consecuencia:

$$\mathbf{f'}(\mathbf{y}, \mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} f_1'(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}) \\ f_2'(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}) \\ \vdots \\ f_n'(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}) \end{bmatrix}$$

En otras palabras, Trabajando con los campos escalares componentes, se deducen las propiedades para el case de los campos vectoriales.

2. Definicion

$\mathbf{f}$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ si existe transformacion lineal $T_{\mathbf{x}_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{w}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + T_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{w}) + ||\mathbf{w}||E(\mathbf{x}_0, \mathbf{w})$$

Donde $E(\mathbf{x}_0, \mathbf{w}) \to \mathbf{0}$ cuando $\mathbf{w} \to \mathbf{0}$
Se dira que $T_{\mathbf{x}_0}$ es la diferencial de $\mathbf{f}$ en $\mathbf{x}_0$.

3. Teorema

Supongamos que $\mathbf{f}$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ con diferencial $T_{\mathbf{x}_0}$, entonces existe la derivada $\mathbf{f'}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y})$ para todo $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ y se cumple que:

$$T_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{y}) = \mathbf{f'}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y})$$

Mas aun: si $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ con $f_i : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y si $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)'$ entonces:

$$T_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} \nabla f_1(\mathbf{x}_0) \\ \nabla f_2(\mathbf{x}_0) \\ \vdots \\ \nabla f_n(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

En forma matricial resulta $T_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{y}) = Df(\mathbf{x}_0)\mathbf{y}$.

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{y}) &= \begin{bmatrix} D_1 f_1(\mathbf{x}_0) & D_2 f_1(\mathbf{x}_0) & \ldots & D_n f_1(\mathbf{x}_0) \\ D_1 f_2(\mathbf{x}_0) & D_2 f_2(\mathbf{x}_0) & \ldots & D_n f_2(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_m(\mathbf{x}_0) & D_1 f_m(\mathbf{x}_0) & \ldots & D_n f_m(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}_{\text{Matriz Jacobiana}} \quad \mathbf{y} \end{aligned}$$

4. Teorema

Si un campo vectorial $\mathbf{f}$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ entonces es continuo en $\mathbf{x}_0$

5. Teorema

Regla de la cadena

Sean $\mathbf{f} : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $\mathbf{g} : T \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$

S abierto en $\mathbb{R}^n$, T abierto en $\mathbb{R}^p$, $\mathbf{x}_0 \in T$, $\mathbf{w}_0 = \mathbf{g}(\mathbf{x}_0)$, $\mathbf{h} = \mathbf{f} \circ \mathbf{g}$ definida en un entorno de $\mathbf{x}_0$.

Supongamos $\mathbf{g}$ diferenciable en $\mathbf{x}_0$ con diferencial $\mathbf{g}'(\mathbf{x}_0)$ y $\mathbf{f}$ diferenciable en $\mathbf{w}_0$. Con diferencial $\mathbf{f}$'$(\mathbf{w}_0)$

Entonces $\mathbf{h}$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ con diferencial:

$$\mathbf{h}'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{f}\text{'}(\mathbf{w}_0) \circ \mathbf{g}'(\mathbf{x}_0)$$

En notación matricial:

$$D\mathbf{h}(\mathbf{x}_0) = \underbrace{D\mathbf{f}(\mathbf{w}_0)}_{n \times m} \underbrace{D\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)}_{p \times n}$$

Puesto la composición de transformaciones lineales corresponde al producto de sus matrices correspondientes.

Notación alternativa

$$\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

6. Definicion

Derivación de funciones definidas implícitamente.

Sea $F : T \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ con $F(x, y, z) = 0$ superficie de nivel.

Por ejemplo: $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, entonces $F(x, y, z) = 0$ es $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

En la ecuación $F(x, y, z) = 0$ se podría despejar una variable en función de las otras, por ejemplo $z = f(x, y)$. Diremos que $F(x, y, z) = 0$ define de manera implícita a $z = f(x, y)$. Sin conocer implícitamente a $f(x, y)$, podemos deducir propiedades de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ usando la regla de la cadena.

Si existe la función f, dado que $F(x, y, z) = 0$ entonces se debe cumplir que $F(x, y, f(x, y)) = 0$ con $(x, y) \in S$, S abierto en $\mathbb{R}^2$. Hagamos $g : S \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x, y) = F(x, y, f(x, y))$. Entonces:

$$F(x, y, f(x, y)) = 0 \implies g(x, y) = 0 \text{ en } S$$

Y por lo tanto $\dfrac{\partial g}{\partial x} = 0$,$\dfrac{\partial g}{\partial y} = 0$

Hagamos:

$$g(x, y) = F(u_1(x, y), u_2(x, y), u_3(x, y))$$

Donde $u_1(x, y) = x$, $u_2(x, y) = y$ y $u_3(x, y) = f(x, y)$
Entonces:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = D_1 F \underbrace{\frac{\partial u_1}{\partial x}}_{=1} + D_2 F \underbrace{\frac{\partial u_2}{\partial x}}_{=0} + D_3 F \underbrace{\frac{\partial u_3}{\partial x}}_{=f_x}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = D_1 F \underbrace{\frac{\partial u_1}{\partial y}}_{=0} + D_2 F \underbrace{\frac{\partial u_2}{\partial y}}_{=1} + D_3 F \underbrace{\frac{\partial u_3}{\partial y}}_{=f_y}$$

$D_1 F$ y $D_3 F$ calculadas en $(x, y, f(x, y))$.

Entonces tendremos:

$$D_1 F + D_3 F \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{D_1 F(x, y, f(x, y))}{D_3 F(x, y, f(x, y))}$$

$$D_2 F + D_3 F \frac{\partial f}{\partial y} = 0n \implies \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{D_2 F(x, y, f(x, y))}{D_3 F(x, y, f(x, y))}$$

Valido en los puntos donde $D_3 F(x, y, f(x, y)) \neq 0$

También se escribe:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial z} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial f/\partial y}{\partial f/\partial z}$$

7. Ejercicios

1. *Sea f una función diferenciable de (u, v, w) y sea g una función de (x, y) definida por:*

$$g(x, y) = f(x - y, x + y, 2x)$$

   Calcular g_x y g_y en terminos de f_u, f_v y f_w.

2. *Las dos ecuaciones $2x = v^2 - u^2$, $y = uv$ definen u y v como funciones de (x, y). Hallar las formulas correspondientes a $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}$*

3. *Las tres ecuaciones:*

$$x^2 - y\cos(uv) + z^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - \sin(uv) + 2z^2 = 2$$

$$xy - \sin(u)\cos(v) + z = 0$$

Definen x, y, z *como funciones de* u *y* v.

Calcular $\dfrac{\partial x}{\partial u}$ *y* $\dfrac{\partial x}{\partial v}$ *en* $x = y = 1$, $u = \pi/2$, $v = z = 0$

4. *La ecuación* $f(y/x, z/x) = 0$ *define* z *implícitamente como función de* (x, y) *, Supongamos que esa función es* $z = g(x, y)$. *Demuestre que:*

$$x\frac{\partial g}{\partial x} + y\frac{\partial g}{\partial y} = g(x, y)$$

5. *La ecuación* $x + y + (y + z)^2 = 6$ *define* z *como función implícita de* (x, y). *Calcular* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *y* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ *en función de* x, y, z.