Clase # 7 de Análisis 3

Equipo clases a LaTeX

20 de noviembre de 2020

Índice

1. Teorema

Condición suficiente de diferenciabilidad

Sea $f : S \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, S abierto, $\vec{x} \in S$. $D_1 f, \cdots, D_n f$ existen y son continuas en $B(\vec{x}, r) \subset S$. Entonces f es diferenciable en $\vec{x}$

2. Teorema

Regla de la cadena

Consideremos $f : S \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, S abierto, $\vec{r} : I \subset \mathbb{R} \mapsto S$, y $g(t) = f(\vec{r}(t))$, $t \in I$. Sea $t \in I$ donde $\vec{r}\,'(t)$ existe y supongamos que f es diferenciable en $\vec{r}(t)$, entonces existe $g'(t)$ y tenemos que

$$g'(t) = \nabla f(\vec{x}) \cdot \vec{r}\,'(t)$$

donde $\vec{x} = \vec{r}(t)$.

3. Ejercicios

1. *Halle el vector gradiente si*

   a) $f(x,y) = x^2 + y^2 \sin(xy)$.

   b) $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + 2z^2$.

2. *Calcule la derivada direccional de* $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ *en* $(1,1,0)$ *en la dirección de* $\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$.

3. *Hallar los puntos (x,y) y las direcciones para las que la derivada direccional de* $f(x,y) = 3x^2 + y^2$ *tiene valor máximo, si (x,y) pertenece a la circunferencia* $x^2 + y^2 = 1$.

4. *Supóngase que f es diferenciable en cada punto de* $B(\vec{x}, r)$. *Demuestre:*

   a) Si $\nabla f(\vec{y}) = \vec{0}$ para todo $\vec{y} \in B(\vec{x}, r)$ entonces f es constante en $B(\vec{x}, r)$.

   b) Si $f(\vec{y}) \leqslant f(\vec{x})$ para todo $\vec{y} \in B(\vec{x}, r)$ entonces $\nabla f(\vec{x}) = \vec{0}$.

5. *Hallar la derivada direccional de* $f(x,y) = x^2 - x + 2$ *a lo largo de* $y = x^2 - x + 2$ *en el punto (1,2). Use regla de la cadena.*

6. *Sea f un campo escalar no constante diferenciable en todo el plano y c una constante. Supongamos que la ecuación* $f(x,y) = c$ *describe una curva* $\mathcal{C}$ *que tiene tangente en cada uno de sus puntos. Demuestre que f tiene las siguientes propiedades en cada punto de* $\mathcal{C}$

   a) ∇f es un vector normal a $\mathcal{C}$.

   b) La derivada direccional de f a lo largo de $\mathcal{C}$ es cero.

   c) La derivada direccional de f tiene su valor máximo en la dirección del vector normal a $\mathcal{C}$.

7. *Sea* $f : S \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$, *S es abierto, f es diferenciable en S. Sea c una constante y consideremos la superficie de nivel* $\mathcal{H} = \{\vec{y} \in S\,;\, f(\vec{y}) = c\}$. *Sea* $\vec{a} \in \mathcal{H}$. *Demuestre que la ecuación del plano tangente a la superficie* $\mathcal{H}$ *satisface la ecuación*

$$\nabla f(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$$

8. *Sea* $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$. *Compruebe que* $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ *en (0,0) ¿Tiene la superficie* $z = f(x,y)$ *plano tangente en (0,0)?*

4. Solución

1. *a*) Sea $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = x^2 + y^2 \sin(xy)$. Como $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y^3 cos(xy)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2ysen(xy) + y^2 xcos(xy)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\nabla f(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j \\
&= (\, 2x + y^3 cos(xy) \,)\, i + (\, 2ysen(xy) + y^2 xcos(xy) \,)\, j
\end{aligned}$$

$\square$

   b) Sea $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ tal que $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + 2z^2$. Entonces

$$\begin{aligned}
\nabla f(x,y,z) &= \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial y} k \\
&= 2x\, i - 2y\, j + 4z\, k
\end{aligned}$$

$\square$

2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ la función definida por $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$, consideremos el punto P(1,1,0) y el vector $\vec{v} = e_1 - e_2 + 2e_3 = (1,-1,2)$. Entonces tenemos que el vector unitario $\vec{u}$ en dirección del vector $\vec{v}$ es

$$\vec{u} = \frac{1}{||\vec{v}||}\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{-\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3} \right)$$

Ahora, como $D_{\vec{v}}(x,y,z) = \nabla f(x,y,z) \cdot \vec{u}$ tenemos que

$$D_{\vec{v}}(x,y,z) = \frac{\sqrt{6}}{6} x - \frac{-2\sqrt{6}}{3} y + 2\sqrt{6} z.$$

Por tanto,

$$D_{\vec{v}}(1,1,0) = \frac{\sqrt{6}}{6} - \frac{-2\sqrt{6}}{3} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$\square$

3.

4. *a*) Sea $\vec{y} \in B(\vec{x}, r)$, consideremos la función $g : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ definida por $g(t) = f(\,(1-t)\vec{x} + t\vec{y}\,)$. Como f es diferenciable en el conjunto convexo $B(\vec{x}, r)$, tenemos que g es continua en [0,1] y diferenciable en (0, 1).

Si aplicamos que teorema del valor medio para funciones de un variable, tendremos que

$$g(1) - g(0) \;=\; g'(\theta), \;\;\; \theta \in (0,1)$$

Como $g(1) = f(\vec{y})$ y $g(0) = f(\vec{x})$, tenemos que

$$f(\vec{y}) - f(\vec{x}) = g'(\theta)$$

Ahora, si aplicamos la regla de la cadena a $g(\theta) = f(\,(1-\theta)\vec{x} + \theta\vec{y}\,)$ tendremos que

$$g'(\theta) \;=\; \nabla f(\vec{r}(\theta)) \cdot (\vec{y} - \vec{x})$$

donde $\vec{r}(\theta) = \;(1-\theta)\vec{x} + \theta\vec{y}$. Por lo que

$$f(\vec{y}) - f(\vec{x}) \;=\; \nabla f(\vec{r}(\theta)) \cdot (\vec{y} - \vec{x})$$

Como $\vec{r}(\theta) \in B(\vec{x}, r)$ para toda $\theta \in (0,1)$, tenemos que $\nabla f(\vec{r}(\theta)) = \vec{0}$, y en consecuencia

$$f(\vec{y}) - f(\vec{x}) \;=\; \vec{0} \cdot (\vec{y} - \vec{x}) \;\Longrightarrow\; f(\vec{y}) \;=\; f(\vec{x})$$

Por tanto, para todo $\vec{y} \in B(\vec{x}, r)$ f es constante. $\square$