Clase # 9 de Análisis 3

Equipo clases a $\LaTeX$

20 de noviembre de 2020

1. Definición

Sea $f : S \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ y $\vec{a} \in S$. Diremos que f tiene un máximo absoluto en $\vec{a}$ si

$$f(\vec{x}) \leqslant f(\vec{a}) \tag{1}$$

Por otra parte, decimos que f tiene un máximo relativo en $\vec{a}$ si existe $B(\vec{a}, r) \subset S$ tal que $\vec{a}$ es un máximo absoluto en $B(\vec{a}, r)$. Llamamos a $f(\vec{a})$ máximo relativo de f en S.

Nota: se deduce de manera análoga la definición de mínimo absoluto y mínimo relativo de f. Basta con hacer $f(\vec{a}) \leqslant f(\vec{x})$ en (1).

2. Definición

Sea $f : S \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, S abierto, $\vec{a} \in S$, y f diferenciable en $\vec{a}$. Si $\nabla f(\vec{a}) = \vec{0}$ entonces diremos que $\vec{a}$ es un punto estacionario de f.

Si para todo $B(\vec{a}, r)$ existen puntos $\vec{x}$ para los cuales $f(\vec{x}) < f(\vec{a})$ y otros puntos $\vec{y}$ para los cuales $f(\vec{x}) > f(\vec{a})$ diremos que $\vec{a}$ es un punto de ensilladura.

3. Definición

Sea $f : S \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, S abierto, f con derivadas parciales de segundo orden $D_{ij}f = D_i[D_j f]$. Llamamos a $\mathcal{H}(\vec{x}) = [D_{ij}f(\vec{x})]_{i,j=1}^n$ matriz hessiana de f en $\vec{x}$.

4. Teorema

Fórmula de Taylor de segundo orden para campos escalares.

Sea $f : S \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, S abierto, $\vec{a} \in S$, f con derivadas parciales segundas continuas en $B(\vec{a}, r) \subset S$. Entonces para todo $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\vec{a} + \vec{y} \in B(\vec{a}, r)$ se cumple que:

$$f(\vec{a} + \vec{y}) \ = \ f(\vec{a}) + \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{y} + \frac{1}{2!} \vec{y}\, \mathcal{H}(\vec{a})\, \vec{y}^{\,t} + ||\vec{y}|| E_2(\vec{a}, \vec{y})$$

donde $E_2(\vec{a}, \vec{y}) \to 0$ cuando $\vec{y} \to 0$.

Nota: recordemos que $\vec{y}\, \mathcal{H}(\vec{a})\, \vec{y}^{\,t}$ es una forma cuadrática

5. Definición

Definición de valores característicos y vectores característicos

Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ y $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ satisface

$$Av = \lambda v \tag{2}$$

entonces λ se denomina **valor característico** de A y el vector v se denomina **vector característico** de A correspondiente a λ.

Nota: Los valores y vectores característicos también se denominan autovalores y autovectores o eigenvalores y eigenvectores.

6. Ejemplo

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ y el vector $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 + 3i \\ -5 \end{pmatrix}$, entonces

$$\begin{aligned} A\vec{v}_1 &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + 3i \\ -5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -7 + 9i \\ -10 - 15i \end{pmatrix} \\ &= (2 + 3i) \begin{pmatrix} 1 + 3i \\ -5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En virtud de la definición anterior, tenemos que $\lambda_1 = 2 + 3i$ es un valor característico de A y $\vec{v}_1$ es un vector característico de A correspondiente a λ_1.

De manera analoga, si $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 - 3i \\ -5 \end{pmatrix}$, entonces

$$\begin{aligned} A\vec{v}_2 &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - 3i \\ -5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -7 - 9i \\ -10 + 15i \end{pmatrix} \\ &= (2 - 3i) \begin{pmatrix} 1 - 3i \\ -5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por lo que $\lambda_2 = 2 - 3i$ también es un valor característico de A y $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 - 3i \\ -5 \end{pmatrix}$ es un vector característico de A correspondiente a λ_2.

7. Definición

Sea $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ y $\mathfrak{I}$ la matriz identidad $n \times n$, decimos que

$$p(\lambda) = det|A - \lambda\mathfrak{I}| \tag{3}$$

es el **polinomio característico** de la matriz A.

La ecuación (3) se denomina **ecuación característica** de A.

8. Ejemplo

Consideremos nuevamente la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ y el polinomio característico de A. Entonces

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -5 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= \lambda^2 - 4\lambda + 13 \end{aligned}$$

Ahora si $p(\lambda) = 0$ entonces $\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$, lo que implica que $\lambda = 2 \pm 3i$. Por tanto, $\lambda_1 = 2 + 3i$ y $\lambda_2 = 2 - 3i$ son valores característicos de la matriz A.

9. Teorema

Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz simétrica $n \times n$ consideremos

$$Q(\vec{y}) = \vec{y} A \vec{y}^{\,t} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i y_j$$

Entonces:

1. $Q(\vec{a}) > 0$ para todo $\vec{y} \neq 0$ si y solo si todos los autovalores de A son positivos.
2. $Q(\vec{a}) < 0$ para todo $\vec{y} \neq 0$ si y solo si todos los autovalores de A son negativos.

10. Teorema

Sea $f : S \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, S abierto, $\vec{a} \in S$ tal que $\nabla f(\vec{a}) = \vec{0}$, f con derivadas parciales segundas <u>continuas</u> en $B(\vec{a}, r) \subset S$, $\mathcal{H}(\vec{a})$ la matriz hessiana de f en $\vec{a}$. Entonces:

1. Si todos los autovalores de $\mathcal{H}(\vec{a})$ son positivos, f tiene un mínimo relativo en $\vec{a}$.
2. Si todos los autovalores de $\mathcal{H}(\vec{a})$ son negativos, f tiene un máximo relativo en $\vec{a}$.
3. Si $\mathcal{H}(\vec{a})$ tiene autovalores positivos y negativos, entonces f tiene un punto ensilladura en $\vec{a}$.