Clase # 10 de Análisis 3

Equipo clases a LaTeX

20 de noviembre de 2020

Índice

1. Teorema

Sea $\vec{f} : S \subset R^n \to R$, S abierto un campo vectorial continuamente diferenciable y supongamos que el jacobiano $J(\vec{x}_0) = det[D\vec{f}(\vec{x}_0)] \neq 0$ en un punto $\vec{x}_0 \in S$. Entonces existe un entorno $\mathcal{B}_r(\vec{x}_0)$ en el que $\vec{f}$ es uno a uno.

2. Teorema

Sea $\vec{f} = (f_1, f_2, ..., f_n)$ tal que $f_i = S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, S$ abierto, f_i con derivadas parciales continuas en S. Sea $T = \vec{f}(S)$ y supongamos que el jacobiano de $\vec{f}$ evaluado en $\vec{x}_0 \in S$ no se anula $J(\vec{x}_0) \neq 0$ Entonces existen: una función $\vec{g}$ determinada de forma única y dos conjuntos abiertos $H \subset S$ y $V \subset F$ tales que:

1. $\vec{x}_0 \in H$, $\vec{f}(\vec{x}_0) \in V$
2. $V = f(H)$
3. $\vec{f}$ es uno a uno en H
4. $\vec{g}$ está definida en V, $g(V) = H$ y, además, $\vec{g}(\vec{f}(\vec{x}_0)) = \vec{x}, \quad \forall \vec{x} \in H$
5. $\vec{g}$ es continuamente diferenciable en V

3. Teorema

Sean K una esfera abierta en $\mathbb{R}^n$ con centro en $\vec{x}_0$ y $\overline{K}$ su correspondiente esfera cerrada. Sea $\vec{f} = (f_1, ..., f_n)$ una función vectorial $\vec{f} : K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y supongamos que $D_j f_i(\vec{x})$ existen si $\vec{x} \in K$. Supongamos también que $\vec{f}$ es uno a uno en $\overline{K}$ y que el jacobiano $J_{\vec{f}}(\vec{x}_0) \neq 0$ en K. Entonces $f(K)$ contiene un entorno del punto $\vec{f}(\vec{x}_0)$.

4. Teorema

Sea $\vec{f}$ una función vectorial continua en un entorno conjunto compacto S de $\mathbb{R}^m$ y supongamos $\vec{f}(S) \subset \mathbb{R}^n$. Supongamos, además que $\vec{f}$ es uno a uno en S. En estas condiciones, f^{-1} es contínua en $\vec{f}(S)$.

5. Teorema

Sea $\vec{f}$ una función continua en un conjunto compacto S de $\mathbb{R}^m$ y supongamos que $\vec{f}(S) \subset \mathbb{R}^k$. Entonces $\vec{f}(S)$ es un conjunto compacto .

6. Teorema

Sea $\vec{f} = (f_1, ..., f_n)$ una función vectorial definida en un conjunto abierto S de $\mathbb{R}^{n+k}$ cuyos valores pertenecen a $\mathbb{R}^n$. ($\vec{f} : S \subseteq \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^n$).

Supongamos que $\vec{f}$ es continuamente diferenciable en S. Sea $(\vec{x}_0, \vec{t}_0) \in S$ tal que $\vec{f}(\vec{x}_0, \vec{t}_0) = 0$. Supongamos que $det[D_j f_i(\vec{x}_0, \vec{t}_0)] \neq 0$. Entonces existe un entorno $k-$dimencional $T_\bullet$ de $\vec{t}_0$ y una y solo una función vectorial $\vec{g} : T_\bullet \subset \mathbb{R}^k\mathbb{R}^n$, tal que

1. $\vec{g}$ es continuamente diferenciable en $T_\bullet$
2. $\vec{g}(\vec{t}_0) = \vec{x}_0$
3. $\vec{f}(\vec{g}(\vec{t}_0), \vec{t}) = 0$, $\forall \vec{t} \in T_\bullet$