Clase # n de Análisis 3

Equipo clases a LaTeX

9 de diciembre de 2020

Índice

1. Definicion: Particiones de rectángulos y funciones escalonadas

1.1. Particiones

$$Q[a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^3$$

Sea P_1 una partición de $[a,b]$, es decir: $P_1 : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$
Sea P_2 una partición de $[c,d]$, es decir: $P_2 : c = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = d$
También se escribe $P_1 = \{x_0, \ldots, x_n\}$ y $P_2 = \{y_0, \ldots, y_m\}$
Diremos que $P = P_1 \times P_2$ (Producto cartesiano) es una partición de Q.
P' se llama refinamiento de P si $P \subseteq P'$.

1.2. Función escalonada

Una función definida en un rectángulo Q se llama escalonada si existe una partición P de Q tal que f es constante en cada uno de los rectángulos abiertos de P (Conviene introducir función indicatriz)

2. Definicion: Integral doble de una función escalonada

Sea f una funcion escalonada que toma el valor constante c_{ij} en el sub-rectángulo abierto $(x_i, \ldots, x_i) \times (y_j, \ldots, y_j)$ de un rectangulo Q. Se define la integral doble de f en Q como:

$$\iint\limits_Q f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \tag{1}$$

<u>Notación:</u> $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$
Se escribe:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} \Delta x_i \Delta y_j = \iint\limits_Q f(x,y)dxdy \tag{2}$$

Nota:

En lo que sigue, $s(x,y)$ y $t(x,y)$ son funciones escalonadas definidas en un rectángulo Q.

3. Teorema: Linealidad

Para todo $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$:

$$\iint\limits_Q [c_1 s(x,y) + c_2 t(x,y)]dxdy = c_1 \iint\limits_Q s(x,y)dxdy + c_2 \iint\limits_Q t(x,y)dxdy \tag{3}$$

4. Teorema: Subdivisión de intervalos

Si Q esta dividido en dos sub-rectángulos Q_1 y Q_2:

$$\iint_Q s(x,y)dxdy = \iint_Q s(x,y)dxdy + \iint_Q s(x,y)dxdy \tag{4}$$

5. Teorema: Desigualdad de integrales

Si $s(x,y) \leq t(x,y)$ para todo $(x,y) \in Q$:

$$\iint_Q s(x,y)dxdy \leq \iint_Q t(x,y)dxdy \tag{5}$$

6. Definicion: Integrabilidad en regiones rectangulares

Sea Q un rectángulo en $\mathbb{R}^2$ y sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $|f(x,y)| < M$ si $(x,y) \in Q$
Entonces si existe un unico numero I tal que:

$$\iint_Q s \leq I \leq \iint_Q t \tag{6}$$

Para todo par de funciones escalonadas que satisfacen:

$$s(x,y) \leq f(x,y) \leq t(x,y) \text{ Para todo } (x,y) \in Q \tag{7}$$

Diremos que f es integrable en Q y su integral doble sobre Q es I.

7. Definicion: Integrales superiores e inferiores

Sean:

$$S = \left\{ \iint_Q s : \; s \text{ es funcion escalonada en } Q, \; s(x,y) \leq f(x,y) \text{ en } Q \right\}$$

$$T = \left\{ \iint_Q t : \; t \text{ es funcion escalonada en } Q, \; f(x,y) \leq s(x,y) \text{ en } Q \right\}$$

Diremos que la integral inferior de S en Q es $\underline{I}(f) = \sup S$
Diremos que la integral superior de S en Q es $\overline{I}(f) = \inf T$

8. Teorema: Condición para Integrabilidad

Si una función fz acotada en un rectángulo Q tiene una integral inferior $\underline{I}(f)$ y una integral superior $\bar{I}(f)$ que satisfacen:

$$\iint\limits_Q s \leq \underline{I}(f) \leq \bar{I}(f) \leq \iint\limits_Q f \tag{8}$$

Para todas las funciones escalonadas en Q, s y t que cumplan $s(x,y) \leq f(x,y) \leq t(x,y)$ para todo $(x,y) \in Q$ entonces f es integrable en Q si y solo si $\underline{I}(f) = \bar{I}(f)$ en cuyo caso:

$$\iint\limits_Q f = \underline{I}(f) = \bar{I}(f) \tag{9}$$

9. Teorema: Computo de integrales dobles sobre regiones rectangulares

Sea $Q = [a,b] \times [c,d]$, $f : Q \to \mathbb{R}$, acotada y supongamos que f es integrable en Q. Supongamos también que para cada y fija en $[c,d]$ la integral $\int_a^b f(x,y)dx$ existe y escribamos $A(y) = \int_a^b f(x,y)dx$. Si existe la integral $\int_a^b A(y)dy$, entonces sera igual a $\iint\limits_Q f$.

Atención: entonces tendremos la formula:

$$\iint\limits_Q f(x,y)dxdy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy \tag{10}$$

que aplica bajo ciertas condiciones.

10. Teorema: Fubini

Sea $Q = [a,b] \times [c,d]$, $f : Q \to \mathbb{R}$, Si f es continua en Q entonces f es integrable en Q. Ademas se cumple:

$$\iint\limits_Q f(x,y)dxdy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx \tag{11}$$

11. Definicion: Conjunto de contenido nulo

Sea A un conjunto acotado del plano. Se dice que el conjunto A tiene contenido nulo, si para todo $\epsilon > 0$ existe un conjunto finito de rectángulos cuya unión contiene el conjunto A y cuya suma de áreas no supera ϵ

12. Teorema: Condición de Integrabilidad para funciones con discontinuidades

Sea $Q = [a,b] \times [c,d]$, $f : Q \to \mathbb{R}$, f acotada en Q. Si el conjunto de discontinuidades de f en Q, es un conjunto de contenido nulo, entonces existe $\iint\limits_Q f$

13. Ejercicios

1. *Demuestre que el conjunto de funciones escalonadas definidas en un rectángulo Q es un espacio lineal*

2. *Demostrar que el valor de (1) no depende de la elección de la partición P*

3. *Sea $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ con:*

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & x \neq y \end{cases}$$

   Demuestre la existencia de la integral doble $\iint\limits_Q f$ y que su valor es cero.

4. *Sea $f : [1,2] \times [2,4] \to \mathbb{R}$ con:*

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)^{-2} & x \leq y \leq 2x \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

   Suponiendo la existencia de $\iint\limits_Q f$ calcule su valor.

5. *Calcular las siguientes integrales, suponiendo su existencia:*

   a) $\iint\limits_Q |\cos(x+y)| dxdy$ con $Q = [0,\pi] \times [0,\pi]$

   b) $\iint\limits_Q f(x,y) dxdy$ con $Q = [0,2] \times [0,2]$ y $f(t) =$ mayor entero $\leq t$