Notes de cours et codes sur l'ACP

Zaineb Smida

Table des matières

Packages nécessaires :

```
install.packages(c("FactoMineR", "ggcorrplot", "kableExtra"))
```

1 Importation des données

Pour importer un fichier texte sous **R**, on utilise la fonction `read.table()`

```
regions <- read.table("data/regions.txt", header = TRUE)
```

Tableau 1 : Affichage des premières lignes du fichier

```
head(regions)
```

```
  NOM   REGION POPUL  TACT SUPERF NBENTR NBBREV CHOM TELEPH
1   A   Alsace  1624 39.14   8280  35976    241  5.2    700
2   Q Aquitain  2795 36.62  41308  85531    256 10.2   1300
3   U Auvergne  1320 37.48  26013  40494    129  9.3    600
4   N Bas-Norm  1390 38.63  17589  35888     91  9.0    600
5   O Bourgogn  1600 38.26  31582  40714    223  8.1    750
6   B Bretagne  2795 36.62  27208  73763    296  9.5   1300
```

Pour chaque région de France, on observe :

- POPUL : population de la région (en milliers d'individus)
- TACT : taux d'activité (population active / population totale de la région) en pourcentage
- SUPERF : superficie de la région (en kilomètres carrés)
- NBENTR : nombre d'entreprises de la région
- NBBREV : nombre de brevets déposés au cours de l'année
- CHOM : taux de chômage (en pourcentage)
- TELEPH : nombre de lignes téléphoniques en place dans la région (en milliers)

On ajoute le nom des individus au `data.frame` :

```r
row.names(regions) <- regions$REGION
```

2 Analyse Descriptive

2.1 Analyse Univariée

On considère dans un premier temps des outils statistiques utilisés pour décrire les variables quantitatives une par une.

- Résumé statistique des variables quantitatives (minium, maximum, moyenne, médiane, quartiles) :

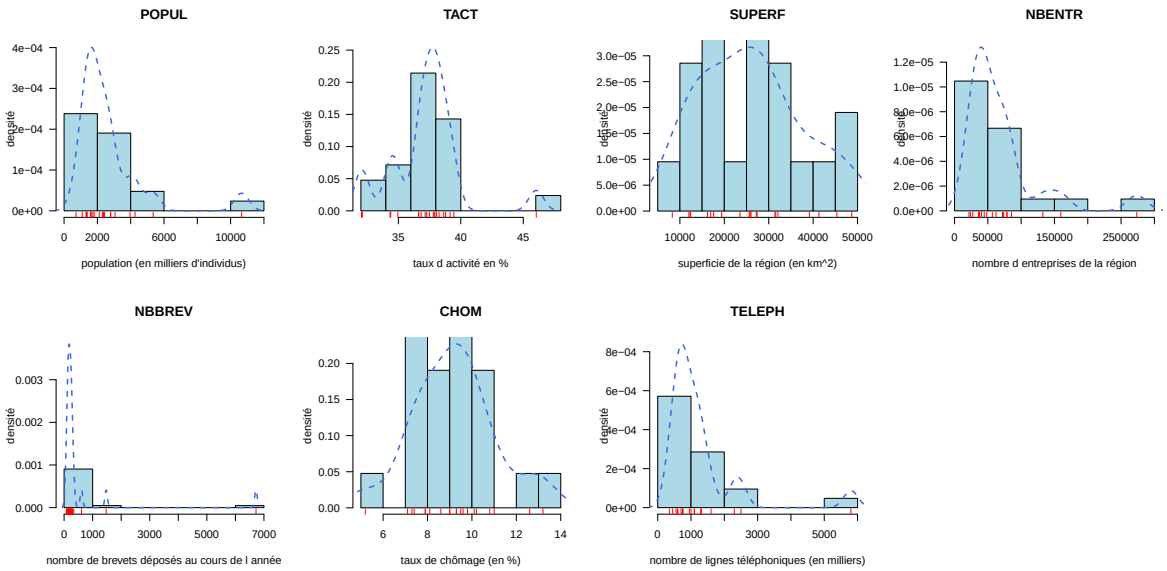
```r
summary(regions[, -c(1, 2)])
```

```
     POPUL            TACT           SUPERF          NBENTR
 Min.   :  720   Min.   :32.05   Min.   : 8280   Min.   : 21721
 1st Qu.: 1590   1st Qu.:36.62   1st Qu.:16942   1st Qu.: 36285
 Median : 2110   Median :37.48   Median :25809   Median : 48353
 Mean   : 2681   Mean   :37.23   Mean   :25728   Mean   : 69827
 3rd Qu.: 2795   3rd Qu.:38.26   3rd Qu.:31582   3rd Qu.: 78504
 Max.   :10660   Max.   :46.04   Max.   :48698   Max.   :273604
     NBBREV            CHOM           TELEPH
 Min.   :  73.0   Min.   : 5.200   Min.   : 350
 1st Qu.: 155.0   1st Qu.: 7.900   1st Qu.: 700
 Median : 223.0   Median : 9.300   Median : 950
 Mean   : 587.1   Mean   : 9.186   Mean   :1262
 3rd Qu.: 278.0   3rd Qu.:10.100   3rd Qu.:1300
 Max.   :6722.0   Max.   :13.200   Max.   :5800
```

- Affichage des distributions, en utilisant des histogrammes et densités non paramétriques:

Figure 1 : Histogrammes :

```
par(mfrow = c(2, 4), las = 1)
nom_var <- c("population (en milliers d'individus)",
  "taux d activité en %",
  "superficie de la région (en km^2)",
  "nombre d entreprises de la région",
  "nombre de brevets déposés au cours de l année",
  "taux de chômage (en %)",
  "nombre de lignes téléphoniques (en milliers)")
for(k in 3:9) {
  temp <- density(regions[, k])
  hist(regions[, k], main = names(regions)[k],
       xlab = nom_var[k-2], ylab = "densité", probability = T,
       col = "lightblue", ylim = range(temp$y))
  lines(temp, col = "royalblue", lty = 2, lwd = 1.5)
  rug(regions[, k], col = "red")
}
```



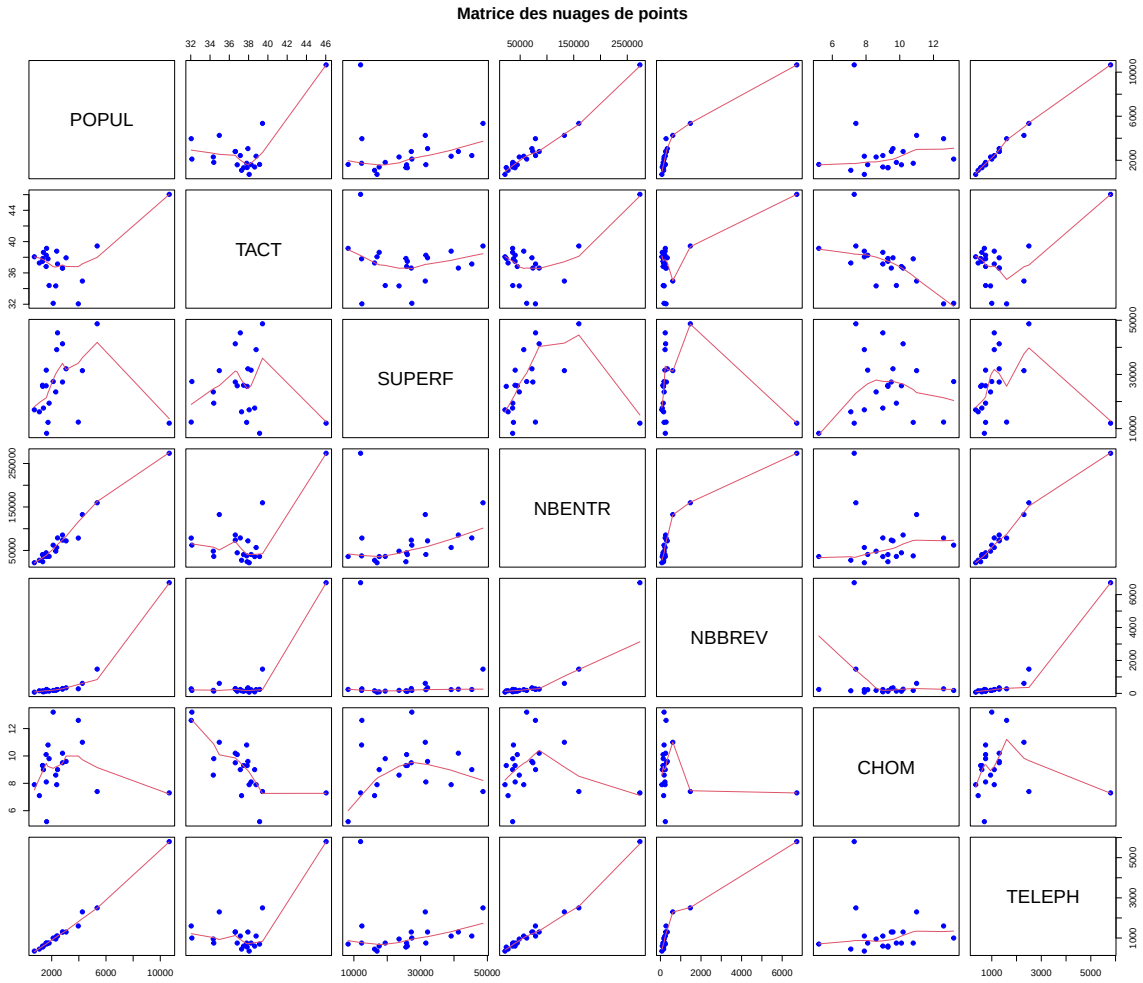
Remarque : les ordres de grandeurs sont parfois très différents d'une variable à une autre. En effet, certaines variables sont des comptages (POPUL, SUPERF), alors que d'autres sont des pourcentages (CHO); c'est pourquoi, il pourrait être intéressant de reproduire ce graphique sur les données centrées et réduites. Par ailleurs, on observe quelques valeurs atypiques (par exemple, NBBREV ou POPUL ont chacune une valeur extrêmement forte par rapport aux autres; il s'agit probablement de la région Ile-de-France)

2.2 Analyse Bivariée

- On trace les nuages de points entre chaque paire de variable, ce qui permet de détecter d'éventuels liens non linéaires entre les paires de variables ainsi que des valeurs atypiques. Par exemple, on constate que le lien entre certaines variables (comme SUPERF et NBENTR) n'est pas linéaire, à cause notamment d'une valeur (il s'agit de l'Ile-de-France dont la superficie est très faible comparitvement au nombre d'entreprises qu'elle possède).

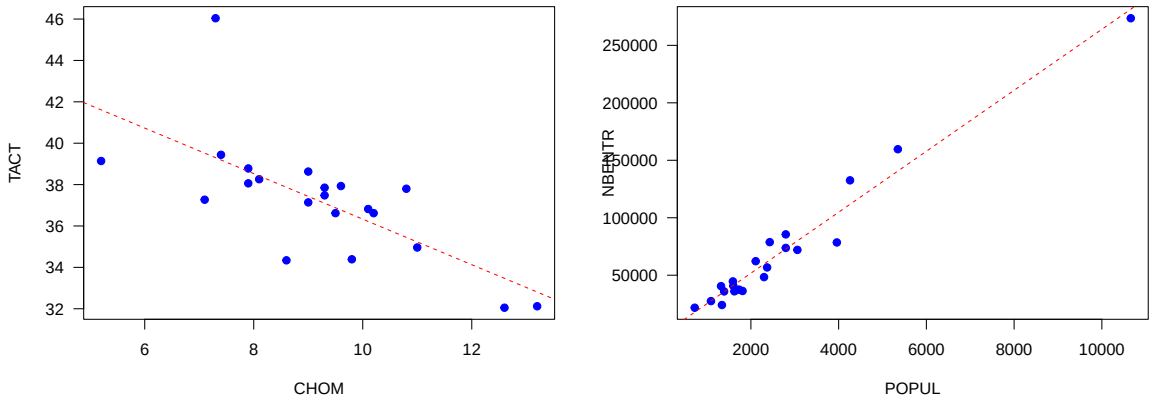
Figure 2 : Nuage de points :

```
pairs(regions[, 3:9], main = "Matrice des nuages de points",
      pch = 19, col = "blue", panel = panel.smooth)
```



On peut tracer directement les nuages de points qui nous intéressent et représenter par la même occasion la droite de régression linéaire. On représente ici les liens les plus forts.

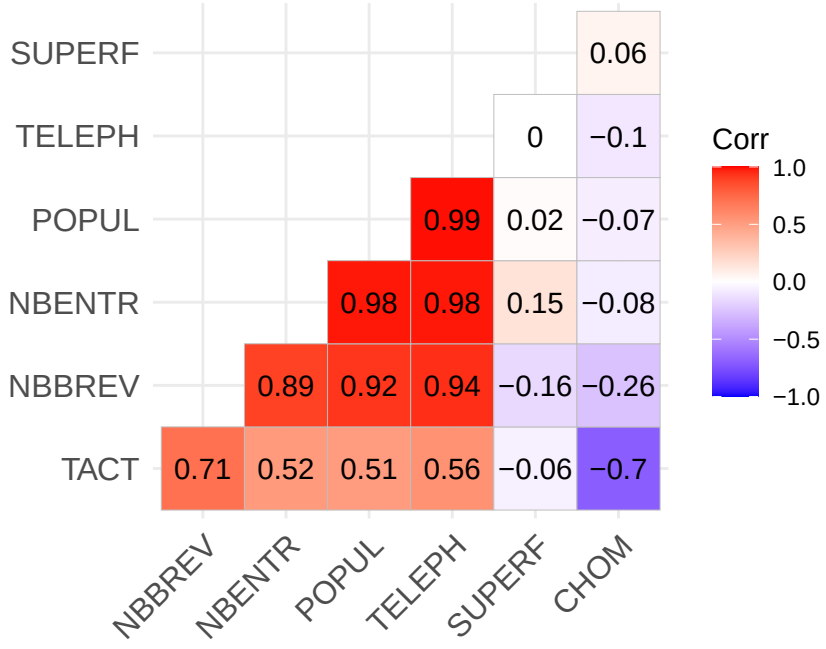
```
par(las = 1, mfrow = c(1, 2))
plot(TACT ~ CHOM, data = regions,
     pch = 19,
     col = "blue")
abline(lm(TACT ~ CHOM, data = regions), col = "red", lty = 2)

plot(NBENTR ~ POPUL, data = regions,
     pch = 19,
     col = "blue")
abline(lm(NBENTR ~ POPUL, data = regions), col = "red", lty = 2)
```



Enfin, on peut représenter la matrice de corrélations linéaires :

Figure 3 : Matrice des corrélations :

```
library("ggcorrplot")
cor <- cor(regions[3:9])
ggcorrplot(cor, hc.order = TRUE, type = "lower", lab = TRUE)
```



Remarque : la variable POPUL est très positivement (linéairement) corrélée à TELEPH et NBENTR, ce qui est logique, puisque plus une région est peuplée, plus il doit y avoir de lignes

téléphoniques et d'entreprises. On constate aussi que CHOM est négativement (linéairement) corrélée à TACT : plus il y a du chômage, moins le taux d'activité est élevé. L'ACP semble être une bonne méthode afin de bien appréhender l'ensemble de ces corrélations non nulles.

3 Analyse en Composantes Principales

La fonction `PCA()` du package **FactoMineR** retourne par défaut le graphique des individus et le graphique des variables. En utilisant l'option graph = FALSE, on empêche la représentation graphique. En effet, avant de regarder le graphique des individus et des variables, il peut être intéressant de regarder un certain nombre d'informations.

```
library("FactoMineR")
res <- PCA(regions[, 3:9], graph = FALSE)
```

On récupère les informations qui nous intéressent, à savoir les valeurs propres, mais aussi les informations relatives aux individus et aux variables ainsi.

```
eigenvalues <- res$eig
res_individus <- res$ind
res_variables <- res$var
```

3.1 ACP : Valeurs propres

A partir des informations retournées, on affiche les valeurs propres :

Tableau : ACP-Valeurs propres :

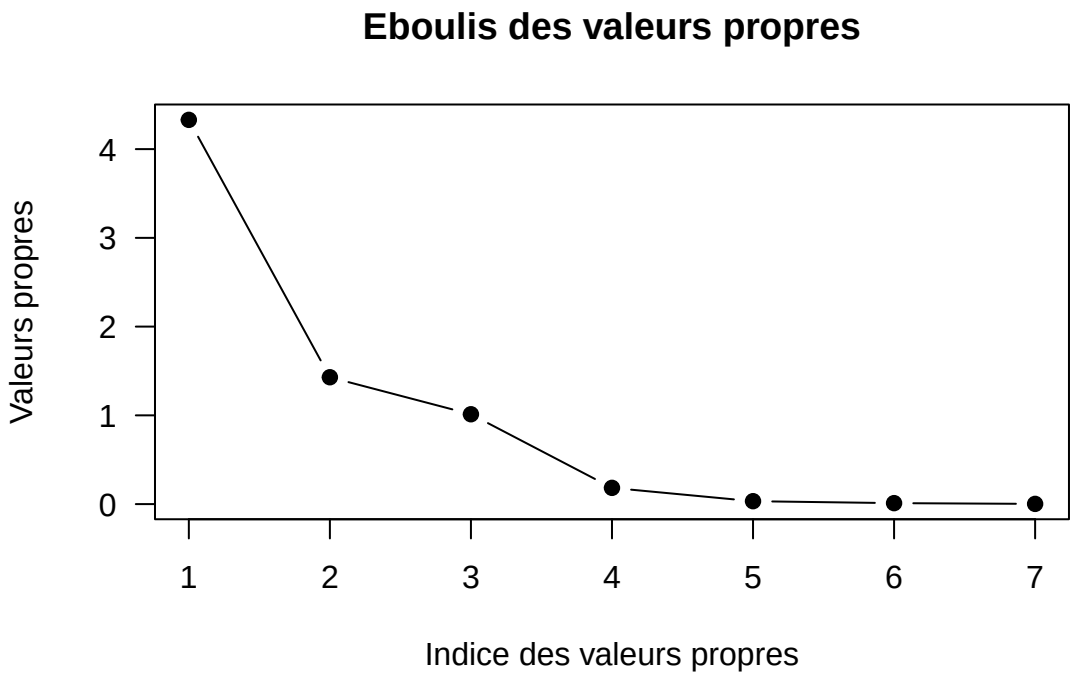
```
eigenvalues
```

```
        eigenvalue percentage of variance cumulative percentage of variance
comp 1 4.329675886            61.85251266                            61.85251
comp 2 1.429382161            20.41974516                            82.27226
comp 3 1.012436783            14.46338261                            96.73564
comp 4 0.182765737             2.61093910                            99.34658
comp 5 0.032756318             0.46794741                            99.81453
comp 6 0.010720602             0.15315145                            99.96768
comp 7 0.002262513             0.03232161                           100.00000
```

On trace l'éboulis des valeurs propres :

Figure : ACP-Eboulis des valeurs propres :

```
par(las = 1)
plot(eigenvalues[,1], type = "b", pch = 19,
     xlab = "Indice des valeurs propres",
     ylab = "Valeurs propres",
     main = "Eboulis des valeurs propres")
```



Commentaires : d'après l'éboulis des valeurs propres, on voit un coude à k = 4. Donc, par ce critère, on retient uniquement les trois premières composantes principales.

3.2 ACP : Interprétation des variabes

- On affiche les informations relatives aux variables :

Tableau : ACP-Variables :

```
res_variables
```

```
$coord
             Dim.1       Dim.2       Dim.3       Dim.4       Dim.5
POPUL   0.95783293  0.25547751 -0.04443395 -0.08882877 -0.04217485
TACT    0.72719947 -0.59263111  0.14930416  0.30773685 -0.05438998
SUPERF -0.01552123  0.33187207  0.94202679  0.03199371  0.03341067
NBENTR  0.94885018  0.27975109  0.08090534 -0.07645690 -0.05962944
NBBREV  0.97349367 -0.02238409 -0.15753009  0.06195308  0.15175965
CHOM   -0.29985584  0.88117115 -0.25791205  0.25882737 -0.01061849
TELEPH  0.97224065  0.21803299 -0.05362987 -0.04974105 -0.01427041

$cor
             Dim.1       Dim.2       Dim.3       Dim.4       Dim.5
POPUL   0.95783293  0.25547751 -0.04443395 -0.08882877 -0.04217485
TACT    0.72719947 -0.59263111  0.14930416  0.30773685 -0.05438998
SUPERF -0.01552123  0.33187207  0.94202679  0.03199371  0.03341067
NBENTR  0.94885018  0.27975109  0.08090534 -0.07645690 -0.05962944
NBBREV  0.97349367 -0.02238409 -0.15753009  0.06195308  0.15175965
CHOM   -0.29985584  0.88117115 -0.25791205  0.25882737 -0.01061849
TELEPH  0.97224065  0.21803299 -0.05362987 -0.04974105 -0.01427041

$cos2
              Dim.1        Dim.2       Dim.3       Dim.4        Dim.5
POPUL  0.9174439224 0.0652687574 0.001974376 0.007890550 0.0017787178
TACT   0.5288190696 0.3512116276 0.022291733 0.094701967 0.0029582695
SUPERF 0.0002409085 0.1101390690 0.887414480 0.001023598 0.0011162730
NBENTR 0.9003166591 0.0782606742 0.006545675 0.005845657 0.0035556707
NBBREV 0.9476899200 0.0005010477 0.024815730 0.003838185 0.0230309906
CHOM   0.0899135264 0.7764626006 0.066518627 0.066991609 0.0001127524
TELEPH 0.9452518801 0.0475383848 0.002876163 0.002474172 0.0002036445

$contrib
              Dim.1       Dim.2      Dim.3      Dim.4      Dim.5
POPUL  21.189667460  4.56622163  0.1950122  4.3173024  5.4301516
TACT   12.213825781 24.57086965  2.2017901 51.8160400  9.0311415
SUPERF  0.005564123  7.70536194 87.6513473  0.5600599  3.4078098
NBENTR 20.794089045  5.47513998  0.6465268  3.1984427 10.8549154
NBBREV 21.888241635  0.03505345  2.4510893  2.1000570 70.3100704
CHOM    2.076680306 54.32155386  6.5701512 36.6543586  0.3442158
TELEPH 21.831931650  3.32579950  0.2840832  1.3537394  0.6216954
```

- On affiche les coordonnées des variables dans les trois premiers axes :

Tableau : ACP-Variables-Coordonnées :

```
res_variables$coord[, 1:3]
```

```
             Dim.1       Dim.2       Dim.3
POPUL    0.95783293  0.25547751 -0.04443395
TACT     0.72719947 -0.59263111  0.14930416
SUPERF  -0.01552123  0.33187207  0.94202679
NBENTR   0.94885018  0.27975109  0.08090534
NBBREV   0.97349367 -0.02238409 -0.15753009
CHOM    -0.29985584  0.88117115 -0.25791205
TELEPH   0.97224065  0.21803299 -0.05362987
```

- On peut ajouter des couleurs afin de visualiser les variables les plus corrélées aux axes, en utilisant une petite fonction créée par nous-mêmes :

```
library(kableExtra)
print_table <- function(my_tab, position = "H") {
  my_tab[, 1:ncol(my_tab)] <- lapply(my_tab[, 1:ncol(my_tab)],
                function(x) {
    cell_spec(round(x, 3), bold = T, color = spec_color(abs(x), end = 0.9),
              font_size = spec_font_size(abs(x)))
                })
  kbl(my_tab, escape = F, align = "c", position = position) %>%
    kable_classic("striped", full_width = F)
}
```

- On affiche le tableau avec les couleurs pour visualiser correctement les corrélations :

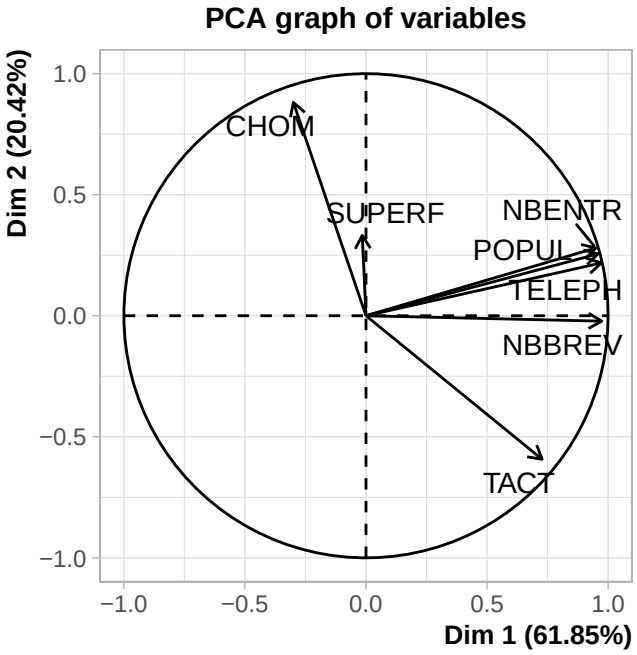
```
print_table(as.data.frame(res_variables$coord)[, 1:3], position = "H")
```

- on représente le graphique des variables sur les deux premiers axes de l'ACP :

Figure : ACP-Graphique des variables (dim 1 - dim 2) :

```
plot(res, axes = c(1, 2), choix = "var")
```

	Dim.1	Dim.2	Dim.3
POPUL	0.958	0.255	-0.044
TACT	0.727	-0.593	0.149
SUPERF	-0.016	0.332	0.942
NBENTR	0.949	0.28	0.081
NBBREV	0.973	-0.022	-0.158
CHOM	-0.3	0.881	-0.258
TELEPH	0.972	0.218	-0.054

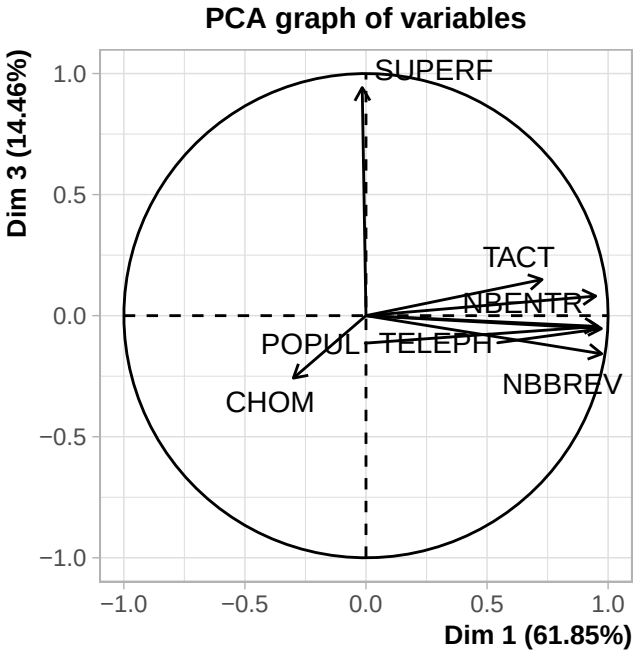


- on représente le graphique des variables sur les axes 1 et 3 de l'ACP :

Figure : ACP-Graphique des variables (dim 1 - dim 3) :

```
plot(res, axes = c(1, 3), choix = "var")
```

	Dim.1	Dim.2	Dim.3
POPUL	21.19	4.566	0.195
TACT	12.214	24.571	2.202
SUPERF	0.006	7.705	87.651
NBENTR	20.794	5.475	0.647
NBBREV	21.888	0.035	2.451
CHOM	2.077	54.322	6.57
TELEPH	21.832	3.326	0.284



- on peut aussi regarder les contributions des variables. Une forte contribution sera une contribution supérieure à $100/7 = 14.29$.

Tableau: ACP-Variables-Contributions :

```
print_table(as.data.frame(res_variables$contrib)[, 1:3], position = "h!")
```

On constate que la contribution de TACT est plus importante sur l'axe 2 que sur l'axe 1. On interprétera donc cette variable sur l'axe 2 uniquement (bien que cette variable soit aussi corrélée à l'axe 1).

Commentaires :

- on voit que l'axe 1 représente près de 62% de l'inertie totale et le deuxième axe représente 20%. Autrement dit, ces deux variables expliquent à elles seules plus de 80% de l'inertie totale. L'axe 3 représente environ 15% de l'inertie totale.
- L'axe 1 est fortement corrélé positivement aux variables NBENTR, POPUL, TELEPH et NBBREV. Il s'agit de toutes les variables qui représentent à la base des comptages, à l'exception de SUPERF. On peut supposer que cette dernière variable se comporte différemment des autres. Autrement dit, on observera des coordonnées fortes positives sur l'axe 1 pour les régions qui ont les plus grandes valeurs de NBENTR, POPUL, TELEPH et NBBREV et au contraire, on observera des coordonnées fortes négatives pour les départements ayant des plus petites valeurs pour NBENTR, POPUL, TELEPH et NBBREV.
- L'axe 2 est quant à lui fortement corrélé positivement à la variable CHOM et négativement à la variable TACT.
- L'axe 3 est corrélé à la variable SUPERF. Autrement dit, cet axe va opposer les régions de grande taille avec les régions de petites tailles.

3.3 ACP : Interprétation des individus

- Dans un premier temps, on affiche les coordonnées des individus dans les trois premières composantes principales :

Tableau : ACP-individus-Coordonnées :

```
df <- as.data.frame(res_individus$coord)[, 1:3]
print_table(df)
```

- On va ensuite réprésenter le graphique des individus sur les deux premiers axes de l'ACP, ainsi que sur les axes 1 et 3 :

Figure : ACP-Graphique des individus (dim 1 - dim 2) :

```
plot(res, axes = c(1, 2), choix = "ind")
```

	Dim.1	Dim.2	Dim.3
Alsace	-0.281	-2.735	-0.768
Aquitain	-0.11	0.998	1.196
Auvergne	-0.934	-0.349	0.09
Bas-Norm	-0.797	-0.895	-0.523
Bourgogn	-0.59	-0.785	0.749
Bretagne	-0.126	0.309	0.083
Centre	-0.073	-0.568	1.435
Champ-Ar	-1.027	-0.498	0.051
Fr-Comte	-0.983	-1.56	-0.447
Hte-Norm	-0.861	-0.082	-1.29
Ile-de-F	8.524	-0.366	-1.204
Lang-Rou	-1.381	2.451	-0.64
Limousin	-1.147	-1.428	-0.443
Lorraine	-0.824	0.038	-0.215
Midi-Pyr	-0.175	0.421	1.745
Nord-PdC	-0.518	2.192	-1.878
Pays-Loi	0.083	0.263	0.536
Picardie	-1.212	0.286	-0.726
Poit-Cha	-0.925	0.157	-0.083
Pr-Cte-A	0.851	1.864	0.108
Rh-Alpes	2.506	0.284	2.226

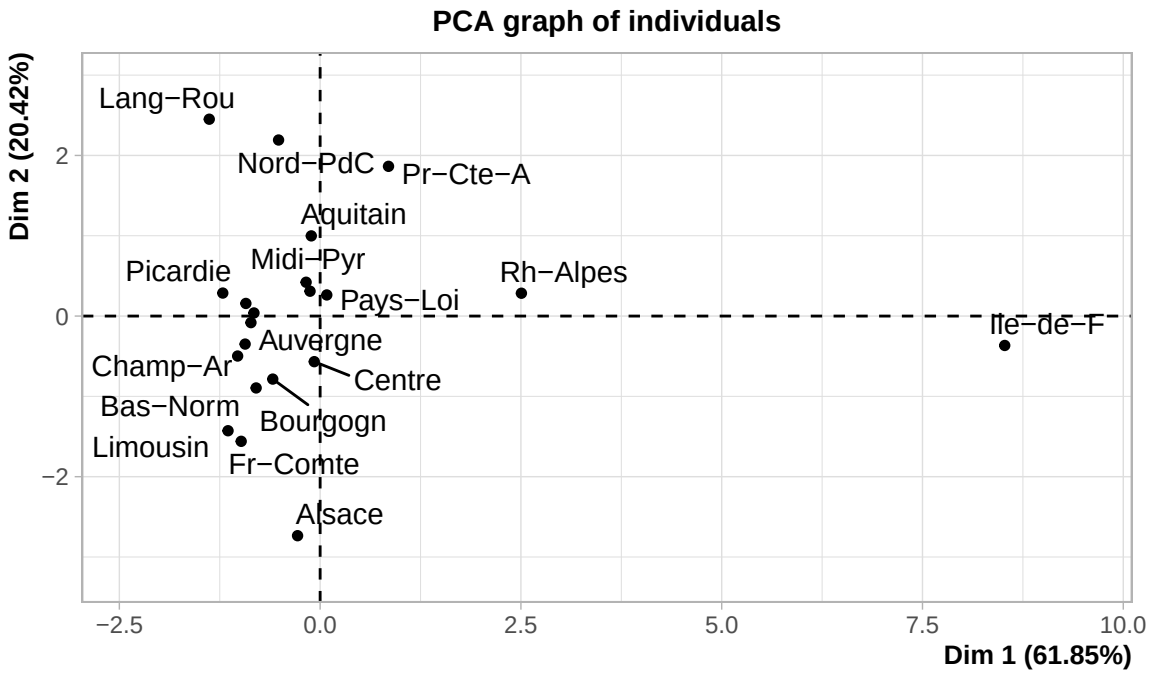
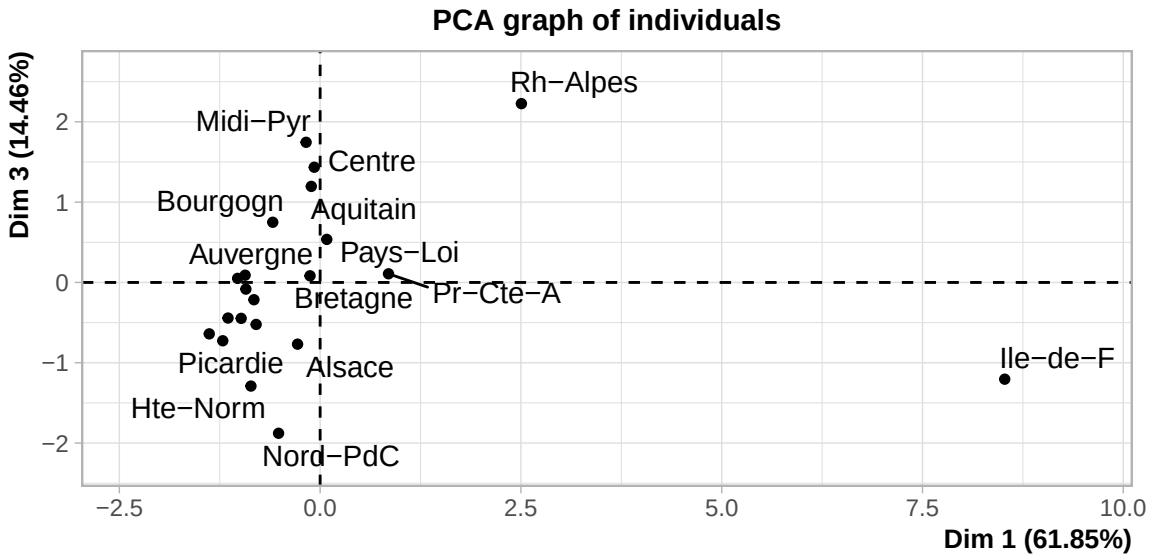


Figure : ACP-Graphique des individus (dim 1 - dim 3) :

```
plot(res, axes = c(1, 3), choix = "ind")
```



- on vérifie la qualité de représentation des individus sur les trois permiers axes (ACP7) : ici, on voit les individus qu'il faudrait commenter. Sur l'axe 1, les valeurs doivent être supérieures à 0.5, sur l'axe 2, les valeurs doivent êtres upérieures à 0.25 et sur l'axe 3, les valeurs doivent être supérieures à 0.15.

```
df <- as.data.frame(res_individus$cos2)[, 1:3]
print_table(df)
```

Ici, c'est le cas de l'Ile-de-France qu'on pourrait mettre en individu supplémentaire.

	Dim.1	Dim.2	Dim.3
Alsace	0.009	0.855	0.068
Aquitain	0.005	0.402	0.577
Auvergne	0.766	0.107	0.007
Bas-Norm	0.319	0.403	0.138
Bourgogn	0.222	0.392	0.358
Bretagne	0.109	0.656	0.047
Centre	0.002	0.132	0.844
Champ-Ar	0.664	0.156	0.002
Fr-Comte	0.254	0.639	0.053
Hte-Norm	0.238	0.002	0.533
Ile-de-F	0.977	0.002	0.02
Lang-Rou	0.225	0.71	0.048
Limousin	0.367	0.57	0.055
Lorraine	0.449	0.001	0.031
Midi-Pyr	0.009	0.054	0.931
Nord-PdC	0.03	0.54	0.396
Pays-Loi	0.013	0.135	0.563
Picardie	0.649	0.036	0.233
Poit-Cha	0.815	0.023	0.007
Pr-Cte-A	0.16	0.769	0.003
Rh-Alpes	0.543	0.007	0.428

Commentaires :

- Les régions d'Ile-de-France et Rhône-Alpes sont celles qui ont les coordonnées les plus fortes sur l'axe 1. Autrement dit, il s'agit des régions qui ont les plus fortes valeurs de NBENTR, POPUL, TELEPH et NBBREV. Au contraire, les régions Picardie, Poitou-Charrentes, Auvergne, Champagne-Ardennes ont des valeurs plutôt faibles sur l'axe 2, ce qui en fait des régions avec des valeurs plus faibles de NBENTR, POPUL, TELEPH et NBBREV.
- Sur l'axe 2, on constate que les régions Langudoc-Roussillon et Nord-Pas-de-Calais ont des valeurs élevées, ce qui impliquent des valeurs fortes de CHOM et faible de TACT. Au contraire, l'Alsace a une valeur élevée négative, ce qui indique que la variable TACT a une valeur élevée alors que CHOM a une valeur faible.
- La région Provence-Côte d'Azur a des valeurs plutôt fortes sur les deux axes, ce qui semble indiquer que c'est une grosse région en terme de NBENTR, POPUL, TELEPH et NBBREV et avec du chômage.
- Sur l'axe 3, on voit que les régions Rhône-Alpes, Midi-Pyrénées et Centre ont les plus grandes valeurs et correspondent aux régions avec les plus grandes superficies. Au contraire, les régions Ile-de-France et Pas-de-Calais ont des valeurs négatives fortes sur l'axe 3 et correspondent à des petites régions en terme de superficie

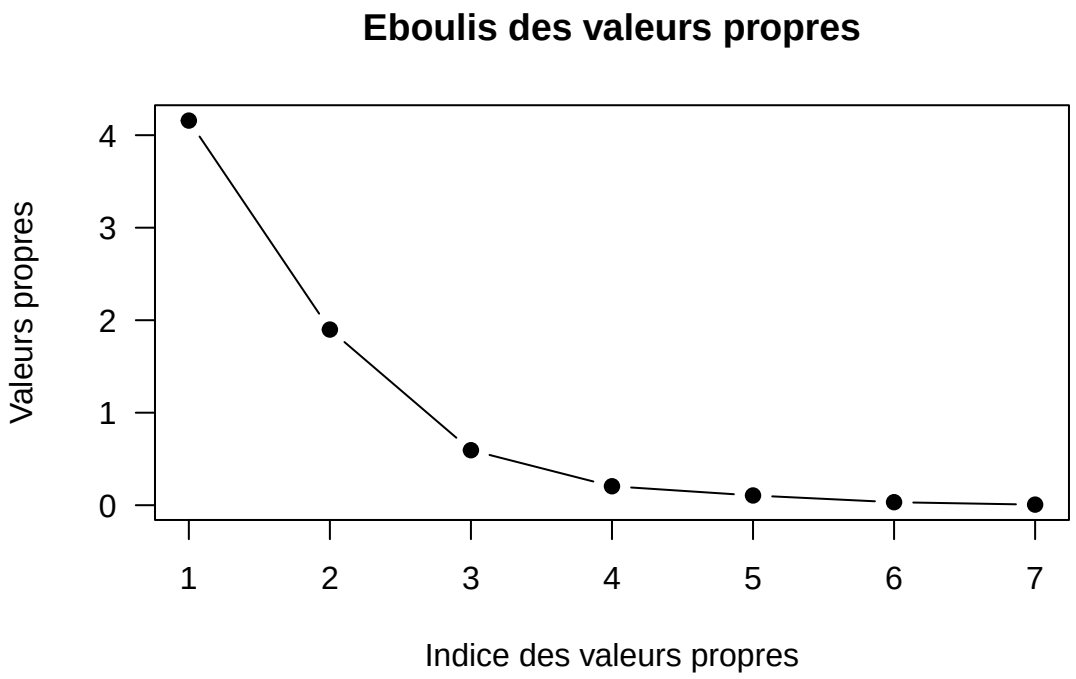
3.4 Ne pas inclure une observation dans l'ACP

On part du code suivant et on refait l'analyse en entier :

```
res <- PCA(regions[, 3:9], ind.sup = 11, graph = FALSE)
```

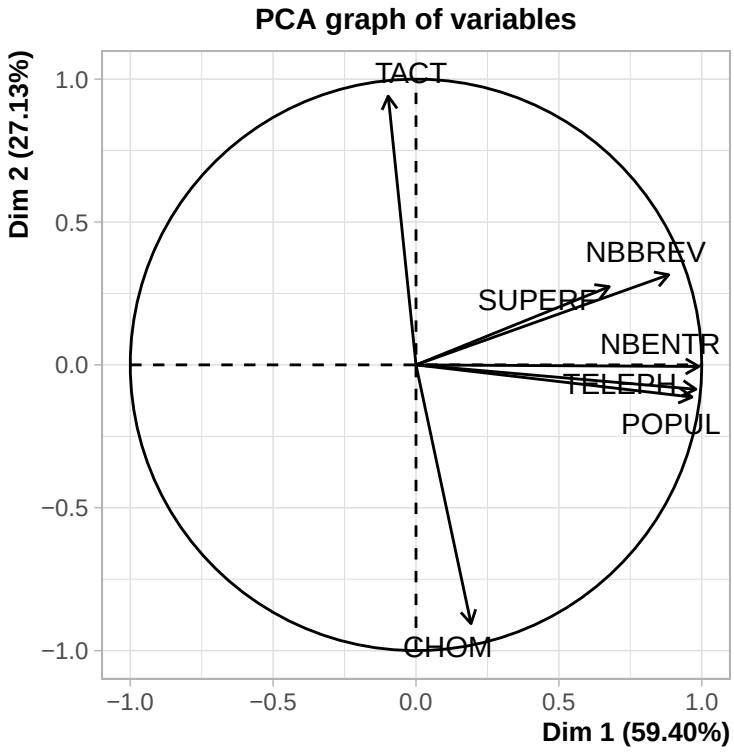
Eboulis des valeurs propres :

```
par(las = 1)
plot(res$eig[ ,1], type = "b", pch = 19,
     xlab = "Indice des valeurs propres",
     ylab = "Valeurs propres",
     main = "Eboulis des valeurs propres")
```



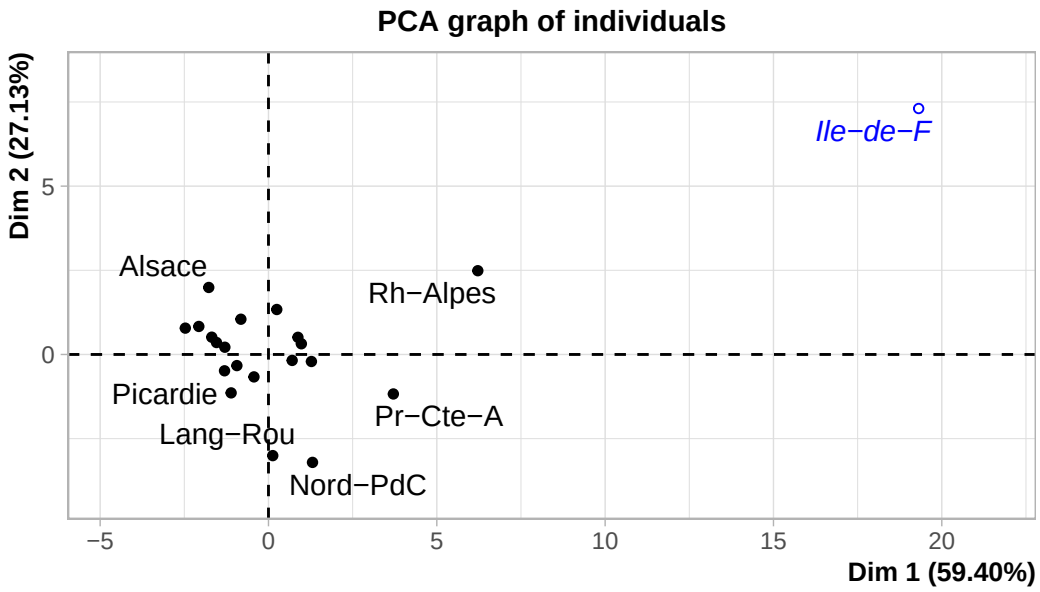
Graphique des variables :

```
plot(res, axes = c(1, 2), choix = "var")
```



Graphique des individus :

```
plot(res, axes = c(1, 2), choix = "ind")
```



Commentaires :

On se rend compte ici qu'il était utile d'enlever une observation atypique. Dans ce cas, il est réaliste de ne garder que les deux premiers axes qui expliquent 87% de l'inertie totale. L'axe 1 oppose les régions avec les plus grandes valeurs pour NBENTR, POPUL, TELEPH et NBBREV, alors que le deuxième axe oppose les régions avec une forte proportion de travailleurs v.s. un fort taux de chômage.