ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

Projekt 4

KKY $-PRJ4$

Řízení 2DoF modelu helikoptéry pomocí MPC

Autor:
Šmíd Matěj

23.7.2020

FAKULTA
APLIKOVANÝCH VĚD
ZÁPADOČESKÉ
UNIVERZITY
V PLZNI

Pro návrh MPC regulátoru jsme použili spojitý přenos $F(p) = \frac{2.3192}{p^2+3.274p+124.2}$, který jsme diskretizovali metodou ZOH se vzorkovacím intervalem $T_s = 0.1s$. Získaný diskretizovaný přenos je $Fd(z) = \frac{0.009415z+0.008402}{z^2-0.7666z+0.7208}$

Určili jsme si parametry MPC controlleru. Prediction horizon $n_p = 5$. Control horizon $n_c = 2$. Váhu odchylky ek pro cost function J: $Q = 1$. Váhu akčního zásahu pro cost function J: $R = 0$.

Pro návrh MPC controlleru, který minimalizuje regulační odchylku e převedeme přenos regulovaného systému do stavové reprezentace.

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \tag{1}$$
$$y_k = Cx_k + Du_k \tag{2}$$

V našem případě:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.7666 & -0.7208 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0.125 \\ 0 \end{bmatrix} u_k \tag{3}$$
$$y_k = \begin{bmatrix} 0.0753 & 0.0672 \end{bmatrix} x_k \tag{4}$$

Model rozšíříme o stav představující referenční hodnotu w. Tento stav neovlivňuje a není ovlivňován ostatními stavy vlivem rozšířené matice $\tilde{A}$. Není ovlivňován vstupem u vlivem rozšířené vstupní matice $\tilde{B}$ a neovlivňuje výstup systému vlivem rozšířené výstupní matice $\tilde{C}$.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ w_{k+1} \end{bmatrix}}_{\tilde{x}_{k+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix}}_{\tilde{x}_k} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{B}} u_k \tag{5}$$
$$y_k = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{C}} x_k \tag{6}$$

Regulační odchylku e jsme schopni získat z modelu použitím upravené výstupní matice C_e

$$e_k = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C} & -1 \end{bmatrix}}_{\tilde{C}_e} \tilde{x}_k \tag{7}$$

Rozšířené matice $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}_e$ jsme použili pro výpočet matic předpovědi stavu $\mathbf{P}_x$ a $\mathbf{H}_x$, a pro výpočet matic předpovědi výstupu $\mathbf{P}$ a $\mathbf{H}$. Tyto matice umožňují přímý výpočet vývoje systému na n_p kroků dopředu za předpokladu znalosti vektoru budoucích vstupů.

Pro predikci stavu platí:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_{k+1} \\ \tilde{\mathbf{x}}_{k+2} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{x}}_{k+n_p} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{x}}_{k+1,n_p}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{A}^2 \\ \vdots \\ \tilde{A}^{n_p} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{P}}_x} \tilde{\mathbf{x}}_k + \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{B} & 0 & \cdots \\ \tilde{A}\tilde{B} & \tilde{B} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ \tilde{A}^{n_p-1}\tilde{B} & \tilde{A}^{n_p-1}\tilde{B} & \cdots \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{H}}_x} \underbrace{\begin{bmatrix} u_k \\ u_{k+1} \\ \vdots \\ u_{k+n_p-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_{k,n_p-1}} \tag{8}$$

Pro predikci výstupu platí podobný vztah:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{y}_k \\ \tilde{y}_{k+1} \\ \vdots \\ \tilde{y}_{k+n_p-1} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{y}}_{k,n_p-1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C}\tilde{A} \\ \tilde{C}\tilde{A}^2 \\ \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{n_p-1} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{P}}} \tilde{\mathbf{x}}_k + \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{D} & 0 & 0 & \cdots \\ \tilde{C}\tilde{B} & \tilde{D} & 0 & \cdots \\ \tilde{C}\tilde{A}\tilde{B} & \tilde{C}\tilde{B} & \tilde{D} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{n_p-2}\tilde{B} & \tilde{C}\tilde{A}^{n_p-3}\tilde{B} & \tilde{C}\tilde{A}^{n_p-4}\tilde{B} & \cdots \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{H}}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_k \\ u_{k+1} \\ u_{k+2} \\ \vdots \\ u_{k+n_p-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_{k,n_p-1}} \tag{9}$$

MPC regulátor vypočítává optimální řízení o n_p kroků do budoucna, ale pro zjednodušení výpočtů hledá chtěnou posloupnost řízení dlouhou pouze n_c kroků, kde $n_c \leq n_p$. Řízení v krocích vzdálenějších než n_c se nastaví totožné jako n_c-tý krok vypočteného vektoru řízení $\mathbf{u}$. Toto zjednodušení vychází z předpokladu, že první kroky řízení budou mít silnější vliv na vývoj systému než ty pozdější. Tato strategie se nazývá **Move blocking** a my ho realizujeme tak, že upravíme predikční matice následujícím způsobem:

$$\mathbf{H}_{b,x} = \mathbf{H}_x \mathbf{M}_b \tag{10}$$

$$\mathbf{H}_b = \mathbf{H}\mathbf{M}_b \tag{11}$$

Kde matice $\mathbf{M}_b$ má rozměr $n_p \times n_c$

$$\mathbf{M}_b = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & & \vdots \\ & & 1 \end{bmatrix} \tag{12}$$

MPC regulátoru zvolíme *cost function* J v kroku k, která kvantifikuje celkovou odchylku od požadované odchylky pro zvolený prediktivní horizont.

$$J = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=k}^{k+n_p-1} \mathbf{e}_i^T Q \mathbf{e}_i + \sum_{i=k}^{k+n_c-1} \mathbf{u}_i^T R \mathbf{u}_i\right) \tag{13}$$

S našemi zvolenými parametry se tato funkci zjednodušuje do tvaru:

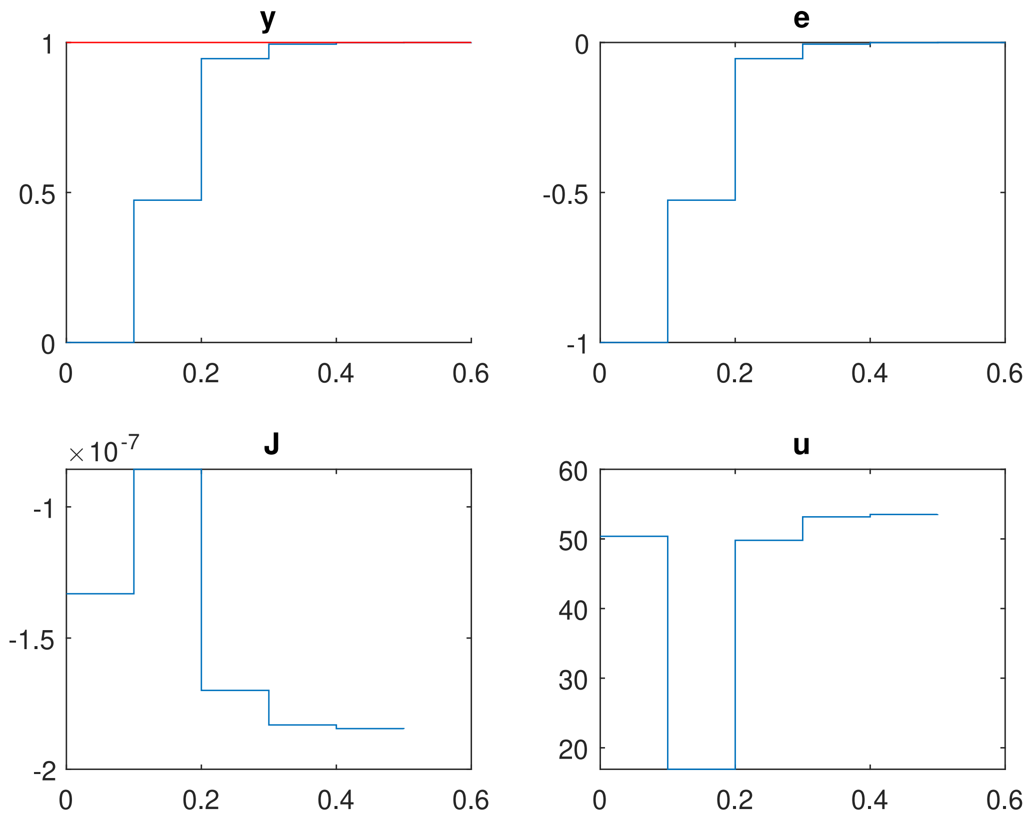
$$J = \frac{1}{2}\sum_{i=k}^{k+4} \mathbf{e}_i^T \mathbf{e}_i \tag{14}$$

Tuto funkci lze algebraickými úpravami vyjádřit pomocí predikčních matic:

$$J = \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{x}}_k + \tilde{\mathbf{H}}_b\mathbf{u})^T(\tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{x}}_k + \tilde{\mathbf{H}}_b\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\mathbf{u}^T \underbrace{\mathbf{H}_b^T\mathbf{H}_b}_{\mathbf{G}} \mathbf{u} + \underbrace{\mathbf{x}_k^T\mathbf{P}^T\mathbf{H}_b}_{\mathbf{f}^T} \mathbf{u} + \underbrace{\mathbf{x}_k^T\tilde{\mathbf{P}}_x^T\tilde{\mathbf{P}}_x\mathbf{x}_k}_{c} \tag{15}$$

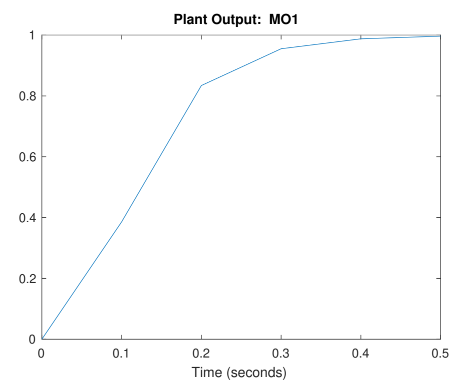
Pro nalezení optimálního řízení stačí tedy v každém kroku k najít takové u, které minimalizuje J. Funkce J představuje kvadriku, k nalezení jejího minima lze tedy použít analytické metody hledání minima, např. Matlab makro *quadprog*.

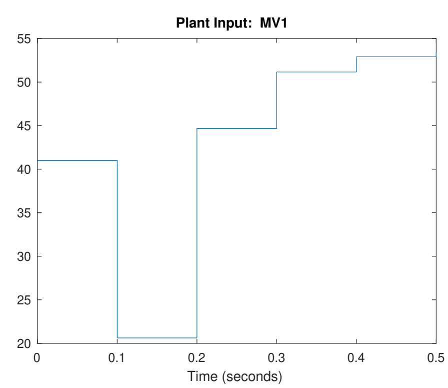
V každém kroku simulace přepočítáváme matice $\mathbf{G}$ a $\mathbf{f}$ a hledáme nové optimální řízení $\mathbf{u}$, jehož první prvek poté použijeme pro řízení. Výstupem Matlab skriptu realizující popsaný postup je následující graf:



Obrázek 1: MPC regulátor realizován matlab skriptem

Pro porovnání jsme použili MPC regulátor navržený pomocí Matlab toolboxu mpcDesigner. Regulátor jsme navrhli se stejnými parametry ($n_p = 5, n_c = 2, R = 0, Q = 1$. Vypočítaný výstup i řízení obou systému je velmi podobný, ale nejsou přesně identické.


Plant Output: MO1
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
Time (seconds)


Plant Input: MV1
55
50
45
40
35
30
25
20
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
Time (seconds)