

Úvod do robotiky a mechatroniky (URM)

Přednáška č. 5:

Přímý a inverzní kinematický model sériových manipulátorů, singulární polohy

M. Švejda

FAV, ZČU v Plzni, Katedra kybernetiky

poslední revize: 10. 12. 2013

- dosud uvažovány pouze polohové závislosti mezi kloubovými \mathbf{Q} a zobecněnými \mathbf{X} souřadnicemi (DGM, IGM)
- kompletní kinematický popis vyžaduje znát i závislosti mezi rychlostmi a zrychleními těchto souřadnic
- problematika závislostí mezi rychlostmi a zrychleními je nazývána často jako:
 - přímá/inverzní kinematická úloha (direct and inverse kinematics)
 - přímá/inverzní okamžitá kinematická úloha (direct/inverse instantaneous kinematics)
 - (velocity kinematics)
- možnosti využití závislostí rychlostí/zrychlení mezi \mathbf{Q} a \mathbf{X}
 - kaskádní algoritmy řízení s dopřednou vazbou (regulátor polohy-rychlosti-zrychlení)
 - analýzy plánované trajektorie pohybu (stanovení omezení na pohyb aktuátorů)
 - kinetostatická dualita \Rightarrow závislosti mezi silami/momenty konc. efektoru a aktuátorů
 - vyšetřování singulárních poloh manipulátorů
 - numerické algoritmy řešení IGM

Definice závislostí rychlostí a zrychlení (1/3)

- předpokládejme řešení DGM (formálně vynechána závislost na ξ):

$$\mathbf{T}_n^0 = \prod_{i=1}^n \mathbf{T}_i^{i-1}(q_i), \quad (\text{skládání transformací, } n \dots \# \text{ DoF})$$

- rychlostní závislosti lze získat přímou čas. derivací DGM ve tvaru:

$$\mathbf{T}_n^0 = \prod_{i=1}^n \mathbf{T}_i^{i-1}(q_i) \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt} \quad \rightarrow \quad \dot{\mathbf{T}}_n^0 = \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\prod_{i=1}^n \mathbf{T}_i^{i-1}(q_i) \right)}_{\text{funkce } q_i, \dot{q}_i}$$

- předpokládejme **min. reprezentaci zobecněných souřadnic \mathbf{X}** , tzn.:
 - pozici (3 nezávislé proměnné): \mathbf{O}_n^0
 - orientaci (3 nezávislé proměnné): α, β, γ Eulerovy úhly (v daném schématu, např. XYZ, atd.)

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_n^0 \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_n^0 \Rightarrow \alpha, \beta, \gamma \quad (\text{viz Přednáška č. 2}) \quad \Rightarrow \quad \text{DGM: } \mathbf{X} = \mathbf{F}(\mathbf{Q})$$

$\mathbf{O}_n^0 = \mathbf{T}_n^0[1 : 3, 4]$

Definice závislostí rychlostí a zrychlení (2/3)

Přímá okamžitá kinematická úloha (POKÚ) lze psát:

$$\text{Pro rychlosti: } \dot{\mathbf{X}} = \left. \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{Q})}{\partial \mathbf{Q}} \right|_{\mathbf{Q}=\mathbf{Q}_0} \cdot \dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{J}_A(\mathbf{Q}_0) \cdot \dot{\mathbf{Q}} \quad (1)$$

$$\text{Pro zrychlení: } \ddot{\mathbf{X}} = \dot{\mathbf{J}}_A(\mathbf{Q}_0, \dot{\mathbf{Q}}_0) \cdot \dot{\mathbf{Q}} + \mathbf{J}_A(\mathbf{Q}_0) \cdot \ddot{\mathbf{Q}} \quad (2)$$

kde \mathbf{Q}_0 reprezentuje *aktuální polohu* manip. v prostoru kloubových souř.

Inverzní okamžitá kinematická úloha (IOKÚ) lze psát:

$$\text{Pro rychlosti: } \dot{\mathbf{Q}} = \left. \frac{\partial \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \right|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_0} \cdot \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}_A^{-1}(\mathbf{X}_0) \cdot \dot{\mathbf{X}} \quad (3)$$

$$\text{Pro zrychlení: } \ddot{\mathbf{Q}} = \frac{d}{dt} \left(\mathbf{J}_A^{-1}(\mathbf{X}_0, \dot{\mathbf{X}}_0) \right) \cdot \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{J}_A^{-1}(\mathbf{X}_0) \cdot \ddot{\mathbf{X}} \quad (4)$$

$$\text{Alternativně: } \ddot{\mathbf{Q}} = \mathbf{J}_A^{-1}(\mathbf{Q}) \cdot \left(\ddot{\mathbf{X}} - \dot{\mathbf{J}}_A(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) \cdot \dot{\mathbf{Q}} \right) \quad (5)$$

kde \mathbf{X}_0 reprezentuje *aktuální polohu* manip. v prostoru zobecněných souř.

Pozn.: aktuální poloha manip. v kloubových a zobecněných souř. je vázána známými vztahy DGM a IGM, tzn. $\mathbf{X}_0 = \mathbf{F}(\mathbf{Q}_0)$ resp. $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{X}_0)$

Definice závislostí rychlostí a zrychlení (3/3)

- matici

$$\mathbf{J}_A(\mathbf{Q}_0) = \left. \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{Q})}{\partial \mathbf{Q}} \right|_{\mathbf{Q}=\mathbf{Q}_0} \quad \text{resp.} \quad \mathbf{J}_A^{-1}(\mathbf{X}_0) = \left. \frac{\partial \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \right|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_0}$$

nazýváme

analytickým jakobiánem resp. **inverzním analytickým jakobiánem**

v bodě (poloze manipulátoru) \mathbf{X}_0 resp. \mathbf{Q}_0 (někdy označeno jen \mathbf{X} , \mathbf{Q}).

- analytický jakobián $\mathbf{J}_A(\mathbf{Q})$ lze tedy získat formálním derivováním funkce DGM $\mathbf{F}(\mathbf{Q})$ podle času
- DGM pro sériové manipulátory, fce $\mathbf{F}(\mathbf{Q})$, lze nalézt vždy analyticky a je jednoznačná \Rightarrow analytický jakobián lze nalézt vždy analyticky a je jednoznačný (vyjma bodových singularit v převodu $\mathbf{R}_n^0 \rightarrow \alpha, \beta, \gamma$)

Definice závislostí rychlostí a zrychlení

Příklad: 2DoF planární manipulátor (1/3)

- známe DGM, viz Přednáška č. 3

$$\mathbf{T}_2^0(\mathbf{Q}) = \mathbf{T}_1^0(\theta_1) \cdot \mathbf{T}_2^1(\theta_2) = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & L_2 c_{12} + L_1 c_1 \\ s_{12} & c_{12} & 0 & L_2 s_{12} + L_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & \mathbf{O}_2^0 \\ & \mathbf{R}_2^0 & & \mathbf{O}_2^0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

- převod na minimální reprezentaci ($\alpha, \beta, \gamma \dots$ XYZ Euler. úhly)

$$\mathbf{X}^{\text{full}} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_2^0 \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} L_2 c_{12} + c_1 L_1 \\ L_2 s_{12} + s_1 L_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \theta_1 + \theta_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}(\mathbf{Q})}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

- \mathbf{X}^{full} označuje **úplnou 6DoF** polohu konc. ef.
- jelikož manipulátor má pouze 2DoF, lze nezávisle polohovat pouze 2 souřadnice z \mathbf{X}^{full} ($\mathbf{X} = \mathbf{X}^{\text{full}}[1 : 2]$, tzv. restrikce \mathbf{X}^{full})

Definice závislostí rychlostí a zrychlení

Příklad: 2DoF planární manipulátor (2/3)

- formální derivace $\mathbf{F}(\mathbf{Q})$ podle času \Rightarrow rychlostní závislosti:

$$\dot{\mathbf{X}}^{\text{full}} = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{O}}_2^0 \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_2 s_{12}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) - s_1 L_1 \dot{\theta}_1 \\ L_2 c_{12}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + c_1 L_1 \dot{\theta}_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -s_1 L_1 - L_2 s_{12} & -L_2 s_{12} \\ c_1 L_1 + L_2 c_{12} & L_2 c_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_A^{\text{full}}(\mathbf{Q})} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{Q}}}$$

- stejně jako v předešlém případě lze získat nezávislé zobecněné rychlosti $\dot{\mathbf{X}}$ restrikcí $\dot{\mathbf{X}} = \dot{\mathbf{X}}^{\text{full}}[1 : 2]$, tzn.:

$$\dot{\mathbf{X}} = \ddot{\mathbf{O}}_2^0[1 : 2] = \underbrace{\begin{bmatrix} -s_1 L_1 - L_2 s_{12} & -L_2 s_{12} \\ c_1 L_1 + L_2 c_{12} & L_2 c_{12} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_A(\mathbf{Q})} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{Q}}} \Rightarrow \textbf{POKÚ pro rychlosti}$$

- Pozn.:** obecně $\mathbf{J}_A^{\text{full}}$ není invertovatelný pro $n < 6$ (DoF) (nelze volit rychlosti \forall 6DoF manipulátoru pouze 2 kloubovými souřadnicemi)

Definice závislostí rychlostí a zrychlení

Příklad: 2DoF planární manipulátor (3/3)

- časovou derivaci analytického jakobiánu $\mathbf{J}_A^{\text{full}}$ lze opět získat formální derivací

$$\dot{\mathbf{J}}_A^{\text{full}}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) = \begin{bmatrix} (-L_2 c_{12} - c_1 L_1) \dot{\theta}_1 - L_2 c_{12} \dot{\theta}_2 & -L_2 c_{12} \dot{\theta}_1 - L_2 c_{12} \dot{\theta}_2 \\ (-L_2 s_{12} - s_1 L_1) \dot{\theta}_1 - L_2 s_{12} \dot{\theta}_2 & -L_2 s_{12} \dot{\theta}_1 - L_2 s_{12} \dot{\theta}_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- \Rightarrow závislosti zrychlení:

$$\ddot{\mathbf{X}}^{\text{full}} = \dot{\mathbf{J}}_A^{\text{full}}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) \cdot \dot{\mathbf{Q}} + \mathbf{J}_A^{\text{full}}(\mathbf{Q}) \cdot \ddot{\mathbf{Q}}$$

- a příslušnou restrikcí $\ddot{\mathbf{X}} = \ddot{\mathbf{X}}^{\text{full}}[1 : 2]$, dostáváme:

$$\ddot{\mathbf{X}} = \dot{\mathbf{J}}_A(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) \cdot \dot{\mathbf{Q}} + \mathbf{J}_A(\mathbf{Q}) \cdot \ddot{\mathbf{Q}} \quad \Rightarrow \quad \text{POKÚ pro zrychlení}$$

$$\mathbf{J}_A(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) = \begin{bmatrix} (-L_2 c_{12} - c_1 L_1) \dot{\theta}_1 - L_2 c_{12} \dot{\theta}_2 & -L_2 c_{12} \dot{\theta}_1 - L_2 c_{12} \dot{\theta}_2 \\ (-L_2 s_{12} - s_1 L_1) \dot{\theta}_1 - L_2 s_{12} \dot{\theta}_2 & -L_2 s_{12} \dot{\theta}_1 - L_2 s_{12} \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

Kompletní řídicí systém manipulátoru (kinematický)

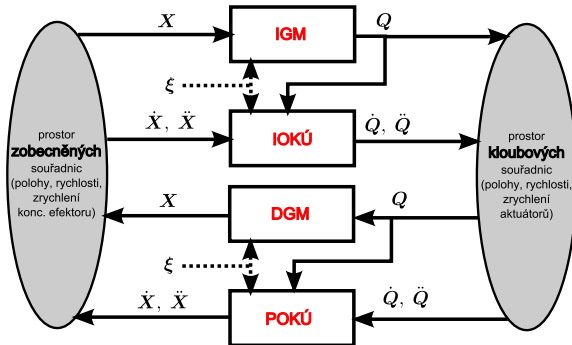
Pro libovolný sériový manipulátor nyní známe:

DGM: $\mathbf{X} = \mathbf{F}(\mathbf{Q})$

IGM: $\mathbf{Q} = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{X})$

POKÚ: $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}_A(\mathbf{Q}) \cdot \dot{\mathbf{Q}}, \quad \ddot{\mathbf{X}} = \dot{\mathbf{J}}_A(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) \cdot \dot{\mathbf{Q}} + \mathbf{J}_A(\mathbf{Q}) \cdot \ddot{\mathbf{Q}}$

IOKÚ: $\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{J}_A^{-1}(\mathbf{X}) \cdot \dot{\mathbf{X}}, \quad \ddot{\mathbf{Q}} = \dot{\mathbf{J}}_A^{-1}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) \cdot \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{J}_A^{-1}(\mathbf{X}) \cdot \ddot{\mathbf{X}}$



Kompletní řídicí systém manipulátoru (kinematický)

Plánování trajektorie (1/13)

- jak budou vypadat časové průběhy polohy, rychlosti a zrychlení kloubových souřadnic (\mathbf{Q} , $\dot{\mathbf{Q}}$, $\ddot{\mathbf{Q}}$) - nutné pro setpointy regulátorů
- plánování trajektorie v prostoru zobecněných souřadnic (poloha, rychlost a zrychlení konc. efektoru, \mathbf{X} , $\dot{\mathbf{X}}$, $\ddot{\mathbf{X}}$) - přirozené

Formulace problému: (Plánování trajektorie v prostoru zobecněných souř.)

- parametrické vyjádření trajektorie pohybu konc. efektoru (pozice, orientace) \Rightarrow parametr φ

$$\mathbf{X} = \Phi(\varphi) = \begin{bmatrix} \Phi_1(\varphi) \\ \Phi_2(\varphi) \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \varphi = \varphi(t) \quad (6)$$

- jak volit časové průběhy parametru $\varphi(t)$?
 - parametr $\varphi(t)$ nám jednoznačně určuje polohu bodu \mathbf{X} na plánované (parametrizované) trajektorii
 - jak měnit $\varphi(t)$ (rychlos, zrychlení) aby tečná rychlost, zrychlení bodu \mathbf{X} po trajektorii odpovídala požadovaným předpokladům (profilům)

Kompletní řídicí systém manipulátoru (kinematický)

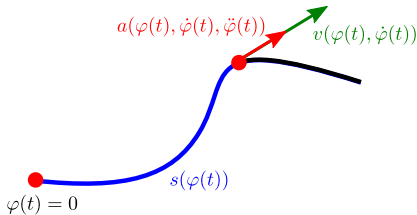
Plánování trajektorie (2/13)

Uvažujme, že budeme parametrizovat trajektorii polohy (pouze translace) koncového efektoru.

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \Phi_1(\varphi(t)) \\ \Phi_2(\varphi(t)) \\ \Phi_3(\varphi(t)) \end{bmatrix} \quad (7)$$

Délka oblouku parametrické křivky lze vyjádřit (obecně):

$$s(\varphi(t)) = \int_0^{\varphi(t)} \sqrt{\left(\frac{\partial \Phi_1(\varphi(t))}{\partial \varphi(t)}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_2(\varphi(t))}{\partial \varphi(t)}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_3(\varphi(t))}{\partial \varphi(t)}\right)^2} d\varphi(t)$$



- délka oblouku $s(\varphi(t))$
- tečná rychlost podél trajektorie

$$\frac{d}{dt}s(\varphi(t)) = v(\varphi(t), \dot{\varphi}(t))$$

- tečné zrychlení podél trajektorie

$$\frac{d^2}{dt^2}s(\varphi(t)) = a(\varphi(t), \dot{\varphi}(t), \ddot{\varphi}(t))$$

Kompletní řídicí systém manipulátoru (kinematický)

Plánování trajektorie (3/13)

Tečné zrychlení a a tečná rychlost v hraje klíčovou roli při pohybu manipulátoru po trajektorii:

- plynulost chodu
- časově optimální (minimální) přejezd po zadané trajektorii
- omezení na max. rychlost v_{max} a zrychlení a_{max} konc. ef.
- zavedení omezení \Rightarrow plynulost pohybu, potlačení možnosti vybudení nežádoucích vibrací

Problém 1: znalost relace mezi parametrem φ a ujetou dráhou po trajektorii s (a jejich vyšších čas. derivací)

Problém 2: generování časových průběhů parametru φ

Problém 1: relace $s(t) \leftrightarrow \varphi(t)$ (a vyšších derivací)

- $s(t) \mapsto \varphi(t)$ dána vztahem pro výpočet délky par. křivky (??) \Rightarrow formální derivací dostáváme $\dot{s}(t) \mapsto \dot{\varphi}(t)$ a $\ddot{s}(t) \mapsto \ddot{\varphi}(t)$
- bohužel relace $s(t) \mapsto \varphi(t)$ nemusí být analyticky naležitelná, nelze vypočítat integrál

Př.: (délka oblouku elipsy s hlavní osou a a vedlejší osou b)

$$\text{Parametrizace : } \mathbf{X} = \begin{bmatrix} a \cdot \cos(\varphi(t)) \\ b \cdot \sin(\varphi(t)) \end{bmatrix}$$

$$s(\varphi(t)) = \int_0^{\varphi(t)} \sqrt{a^2 + (b^2 - a^2) \sin^2(\varphi(t))} d\varphi(t) = ???$$

Neexistuje analytické řešení!

- pro přímku a kružnici jsou relace triviální
tzv. *přirozená parametrizace*: $v(t)$ a $a(t)$ jsou lineární funkce parametru $\dot{\varphi}(t)$, $\ddot{\varphi}(t)$

Kompletní řídicí systém manipulátoru (kinematický)

Plánování trajektorie (5/13)

Přímka z bodu **A** do bodu **B** (v rovině):

- parametrizace:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}[1] + k_1 \varphi(t) \\ \mathbf{A}[2] + k_2 \varphi(t) \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} k_1 = (\mathbf{B} - \mathbf{A})[1] \\ k_2 = (\mathbf{B} - \mathbf{A})[2] \end{matrix}, \quad \varphi(t) \in \langle 0, 1 \rangle \quad (8)$$

- relace $s(t) \leftrightarrow \varphi(t)$:

$$s(t) = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \cdot \varphi(t), \quad v(t) = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \cdot \dot{\varphi}(t), \quad a(t) = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \cdot \ddot{\varphi}(t) \quad (9)$$

Kružnice o poloměru **R** se středem **O** (v rovině):

- parametrizace:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}[1] + R \cos(\varphi(t)) \\ \mathbf{O}[2] + R \sin(\varphi(t)) \end{bmatrix}, \quad \varphi(t) \in \langle 0, 2\pi \rangle \quad (10)$$

- relace $s(t) \leftrightarrow \varphi(t)$

$$s(t) = R \cdot \varphi(t), \quad v(t) = R \cdot \dot{\varphi}(t), \quad a(t) = R \cdot \ddot{\varphi}(t) \quad (11)$$

Kompletní řídicí systém manipulátoru (kinematický)

Plánování trajektorie (6/13)

Problém 2: generování časových průběhů ujeté dráhy $s(t)$ po trajektorii a parametru $\varphi(t)$

- **Nechť požadujeme:**¹

Časově optimální pohyb konc. ef. po trajektorii o vzdálenost $s_{max}[m]$ (ujetá dráha) s omezením na:

- maximální tečnou rychlost $v_{max}[\frac{m}{s}]$
- maximální tečné zrychlení $a_{max}[\frac{m}{s^2}]$
- časově optimální průběh trajektorie předpokládá, že bude využíváno maximální možné zrychlení (zpomalení) a_{max} (vychází z tzv. *Pontryaginova principu minima* - optimalizační úloha)
- z relací (9, 11) plyne výsledná celková ujetá dráha po trajektorii:

$$\text{Přímka: } s_{max} = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}, \quad \text{Kružnice: } s_{max} = R \cdot 2\pi$$

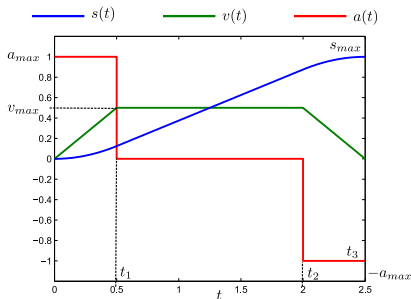
¹Lze pochopitelně požadovat i jiný průběh vývoje ujeté dráhy $s(t)$

Kompletní řídicí systém manipulátoru (kinematický)

Plánování trajektorie (7/13)

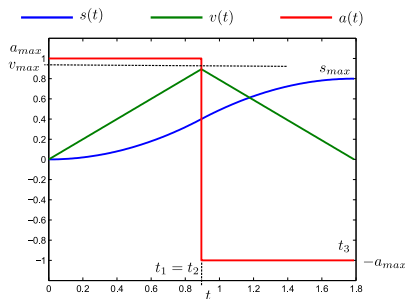
Generátor časově optimální trajektorie ujeté dráhy $s(t)$ a jejích časových derivací

- 2 varianty typického časově optimálního průběhu vývoje $s(t)$ (uspořádání časových okamžiků t_1, t_2, t_3 přepnutí $a_{max} \rightarrow 0 \rightarrow -a_{max}$)



Varianta 1

Zrychlení a_{max} **je** dostatečné, aby $v(t)$ dosáhlo maximální rychlosti v_{max}



Varianta 2

Zrychlení a_{max} **není** dostatečné, aby $v(t)$ dosáhlo maximální rychlosti v_{max}

Kompletní řídicí systém manipulátoru (kinematický)

Plánování trajektorie (8/13)

Varianta 1 $\Rightarrow t_1 < t_2 < t_3$

Časové průběhy $s(t)$, $v(t)$, $a(t)$:

- Pro $t \in \langle 0, t_1 \rangle$:

$$a(t) = a_{\max}, \quad v(t) = a_{\max} t, \quad s(t) = \frac{1}{2} a_{\max} t^2 \quad (12)$$

- Pro $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$:

$$a(t) = 0, \quad v(t) = a_{\max} t_1, \quad s(t) = a_{\max} t_1 t - \frac{1}{2} a_{\max} t_1^2 \quad (13)$$

- Pro $t \in \langle t_2, t_3 \rangle$:

$$\begin{aligned} a(t) &= -a_{\max}, \quad v(t) = -a_{\max} t + a_{\max} (t_1 + t_2), \\ s(t) &= -\frac{1}{2} a_{\max} t^2 + a_{\max} (t_1 + t_2) t - a_{\max} \frac{1}{2} (t_1^2 + t_2^2) \end{aligned} \quad (14)$$

- polynomy 0. resp. 1. resp 2. stupně pro $s(t)$ resp. $v(t)$ resp. $a(t)$

Kompletní řídicí systém manipulátoru (kinematický)

Plánování trajektorie (9/13)

Určení okamžiků přepnutí t_1, t_2, t_3 :

Z (12):

$$\underbrace{v(t_1)}_{v_{max}} = a_{max} t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{v_{max}}{a_{max}}$$

Z (14):

$$\underbrace{v(t_3)}_{=0} = -a_{max} t_3 + a_{max}(t_1 + t_2) \Rightarrow t_3 = t_1 + t_2$$

Z (14):

$$\underbrace{s(t_3)}_{=s_{max}} = a_{max} \left(-\frac{1}{2} t_3^2 + (t_1 + t_2) t_3 - \frac{1}{2} (t_1^2 + t_2^2) \right) \Rightarrow t_2 = \frac{s_{max}}{a_{max} t_1} \Rightarrow t_2 = \frac{s_{max}}{v_{max}}$$

$$\Rightarrow t_3 = \frac{v_{max}}{a_{max}} + \frac{s_{max}}{v_{max}}$$

Kompletní řídicí systém manipulátoru (kinematický)

Plánování trajektorie (10/13)

Varianta 2 $\Rightarrow t_1 = t_2 < t_3$

Časové průběhy $s(t)$, $v(t)$, $a(t)$:

- Pro $t \in \langle 0, t_1 = t_2 \rangle$:

$$a(t) = a_{\max}, \quad v(t) = a_{\max} t, \quad s(t) = \frac{1}{2} a_{\max} t^2 \quad (15)$$

- Pro $t \in \langle t_1 = t_2, t_3 \rangle$:

$$\begin{aligned} a(t) &= -a_{\max}, \quad v(t) = -a_{\max} t + 2a_{\max} t_1, \\ s(t) &= -\frac{1}{2} a_{\max} t^2 + 2a_{\max} t_1 t - a_{\max} t_1^2 \end{aligned} \quad (16)$$

- polynomy 0. resp. 1. resp 2. stupně pro $s(t)$ resp. $v(t)$ resp. $a(t)$

Určení okamžiků přepnutí $t_1 = t_2, t_3$:

Z (16):

$$\underbrace{v(t_3)}_0 = -a_{\max} t_3 + 2a_{\max} t_1 \Rightarrow t_3 = 2t_1$$

Z (16):

$$\underbrace{s(t_3)}_{=s_{\max}} = -\frac{1}{2} a_{\max} t_3^2 + 2a_{\max} t_1 t_3 - a_{\max} t_1^2 \Rightarrow s_{\max} = a_{\max} t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{s_{\max}}{a_{\max}}}$$

$$\Rightarrow t_3 = 2\sqrt{\frac{s_{\max}}{a_{\max}}}$$

Kompletní řídicí systém manipulátoru (kinematický)

Plánování trajektorie (12/13)

● Rozhodnutí o variantě:

- Pro $\frac{\dot{s}_{max}}{a_{max}} < \sqrt{\frac{s_{max}}{a_{max}}}$ (rychlost $v(t)$ dojde na \dot{s}_{max}) \Rightarrow **Varianta 1**
- Pro $\frac{\dot{s}_{max}}{a_{max}} \geq \sqrt{\frac{s_{max}}{a_{max}}}$ (rychlost $v(t)$ nedojde na \dot{s}_{max}) \Rightarrow **Varianta 2**
- nyní známe časově optimální průběh ujeté dráhy $s(t)$ po trajektorii a její časové derivace $v(t)$, $a(t)$ s ohledem na omezení max. rychlost v_{max} a zrychlení a_{max}
- časový vývoj parametru $\varphi(t)$ a jeho derivací $\dot{\varphi}(t)$, $\ddot{\varphi}(t)$ lze snadno určit z relací (9, 11) ... pouze **lineární** závislost!

$$\begin{array}{ll} \text{Přímka:} & \begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{s(t)}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \\ \dot{\varphi}(t) &= \frac{v(t)}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \\ \ddot{\varphi}(t) &= \frac{a(t)}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \end{aligned} \\ \text{Kružnice:} & \begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{s(t)}{R} \\ \dot{\varphi}(t) &= \frac{v(t)}{R} \\ \ddot{\varphi}(t) &= \frac{a(t)}{R} \end{aligned} \end{array}$$

Kompletní řídicí systém manipulátoru (kinematický)

Plánování trajektorie (13/13)

- výsledné hodnoty zobecněných souřadnic manipulátoru a jejich čas. derivací (\mathbf{X} , $\dot{\mathbf{X}}$, $\ddot{\mathbf{X}}$) lze získat formální časovou derivací parametrizačních vztahů (8, 10):

Přímka:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}[1] + k_1 \\ \mathbf{A}[2] + k_2 \end{bmatrix} \cdot \varphi(t), \quad \dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \cdot \dot{\varphi}(t), \quad \ddot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \cdot \ddot{\varphi}(t)$$

Kružnice:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}[1] + R \cos(\varphi(t)) \\ \mathbf{O}[2] + R \sin(\varphi(t)) \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} -R \sin(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t) \\ R \cos(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t) \end{bmatrix},$$
$$\ddot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} -R \cos(\varphi(t)) \cdot (\dot{\varphi}(t))^2 - R \sin(\varphi(t)) \cdot \ddot{\varphi}(t) \\ -R \sin(\varphi(t)) \cdot (\dot{\varphi}(t))^2 + R \cos(\varphi(t)) \cdot \ddot{\varphi}(t) \end{bmatrix}$$

kde $\varphi(t)$, $\dot{\varphi}(t)$, $\ddot{\varphi}(t)$ jsou nyní již známé průběhy

- generování požadovaných poloh, rychlostí a zrychlení aktuátorů

$$\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, \ddot{\mathbf{X}} \rightarrow \mathbf{IGM}, \mathbf{IOKÚ} \rightarrow \mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, \ddot{\mathbf{Q}}$$

Kompletní řídicí systém manipulátoru (kinematický)

Příklad: 2DoF planární manip. - trajektorie přímka a kružnice

Pro 2DoF planární manip. známe **DGM** (Přednáška č. 3), **IGM** (Přednáška č. 4), **POKÚ**, **IOKÚ** (viz výše)

Pohyb manipulátoru po přímce

Pohyb manipulátoru po kružnici

Uvedený případ plánování čas. opt. trajektorie $s(t)$ lze dále zobecňovat

- akcelerace a decelerace uvažovány stejně velké opačně orientované (obecně můžeme chtít brzdit jinak než zrychlovat)
- uvažován pohyb z klidu do klidu (obecně můžeme požadovat pohyb z nenulové polohy/rychlosti do nenulové polohy/rychlosti)
- uvažovány skokové změny zrychlení \Rightarrow skokové změny síly, které musí vyvinout konc. ef. manip \Rightarrow potenciální možnost vybuzení nemodelované dynamiky (vibrace)
Obecně lze model rozšířit o tzv. jerk (derivace zrychlení) a uvažovat skokovou změnu jerku \Rightarrow lineární změna zrychlení (síly) \Rightarrow plynulejší (ale pomalejší i když čas. opt.) pohyb
- \Rightarrow komplikace řešení

Kompletní řídicí systém manipulátoru (kinematický)

Shrnutí (2/3)

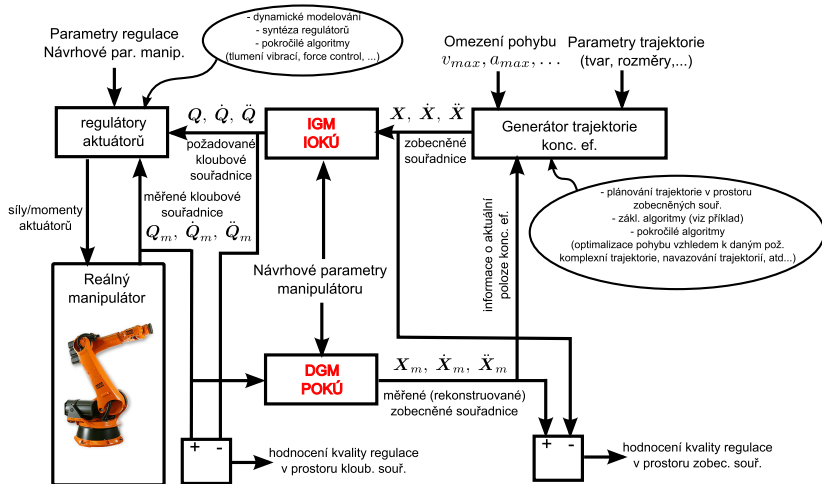
Kompletní řídicí systém manipulátoru sestává z následujících částí:

- Algoritmy plánování trajektorie pohybu koncového efektoru
 - parametrizace trajektorie pohybu konc. efektoru (např. parametrem φ)
 - generování požadovaného parametru φ a jeho příslušných čas. derivací k zajištění pohybu konc. efektoru s ohledem na uvažovaná omezení (max. rychlost, zrychlení, jerk, atd. konc. efektoru)²
- řešení **IGM**, **IOKÚ** \Rightarrow zobecněné souřadnice \rightarrow kloubové souřadnice (a jejich čas. derivace) \Rightarrow generování požadovaných setpointů polohy/rychlosti a zrychlení pro regulátory aktuátorů
- návrh (syntéza) regulátorů
- řešení **DGM**, **POKÚ** \Rightarrow kloubové souřadnice \rightarrow zobecněné souřadnice \Rightarrow odečtení skutečné polohy konc. efektoru z měřených poloh aktuátorů (chyb regulace v prostoru zobecněných souřadnic)

²U komplikovaných trajektorií často obtížné stanovit transformaci $s(t) \leftrightarrow \varphi(t)$

Kompletní řídicí systém manipulátoru (kinematický)

Shrnutí (3/3)



Zařazení a klíčový význam DGM, IGM, POKÚ, IOKÚ v řídicím systému průmyslového manipulátoru

Systematická geometrická met. výpočtu POKÚ, IOKÚ

Dosud výpočet POKÚ, IOKÚ vycházel z explicitní 1. a 2. časové derivace polohových závislostí (DGM, IGM) $\Rightarrow \mathbf{J}_A(\mathbf{Q}), \dot{\mathbf{J}}_A(\mathbf{X})$, to však přináší následující:

- nutno symbolicky derivovat složité nelineární vztahy $\mathbf{X} = \mathbf{F}(\mathbf{Q})$ resp. $\mathbf{Q} = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{X})$
- relativně jednoduché pro jednoduché manipulátory (viz výše) ALE obecně složité, mnohačlenné vztahy
- sice existují možnosti symbolického derivování (software Maple, Mathematica,...)
- ALE výsledné vztahy jsou téměř nepoužitelné (zejména v implementaci do řídicích algoritmů)

$$\mathbf{T}_6^0 \rightarrow \text{min. reprezentace} \rightarrow \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_6^0 \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \rightarrow \frac{d}{dt} \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{vyjádření } \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}_A(\mathbf{Q}) \cdot \dot{\mathbf{Q}} \rightarrow \frac{d}{dt} \mathbf{J}_A(\mathbf{Q}) \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{vyjádření } \ddot{\mathbf{X}} = \dot{\mathbf{J}}_A(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) \cdot \dot{\mathbf{Q}} + \mathbf{J}_A(\mathbf{Q}) \cdot \ddot{\mathbf{Q}}$$

Příklad: Pouze první 3 řádky $\mathbf{J}_A(\mathbf{Q})$ antropomorfního manipulátoru se sférickým zápěstím, tzn.: $\dot{\mathbf{O}}_6^0 = \mathbf{J}_A(\mathbf{Q})[1 : 3, :] \cdot \dot{\mathbf{Q}}$

$$\begin{aligned} & \left[\left((-L_4 \cos(\theta_4(t)) \sin(\theta_5(t)) \cos(\theta_6(t)) + (-\cos(\theta_5(t)) L_4 - L_3) \sin(\theta_5(t)) - L_2) \cos(\theta_5(t)) - ((\cos(\theta_5(t)) L_4 + L_3) \cos(\theta_5(t)) - L_4 \cos(\theta_4(t)) \sin(\theta_5(t)) \sin(\theta_6(t))) \sin(\theta_5(t)) \sin(\theta_6(t)) + L_4 \sin(\theta_4(t)) \cos(\theta_5(t)) \sin(\theta_6(t)), \right. \right. \\ & -\cos(\theta_5(t)) ((L_4 \cos(\theta_4(t)) \sin(\theta_5(t)) \cos(\theta_6(t)) + (\cos(\theta_5(t)) L_4 + L_3) \sin(\theta_5(t)) + L_2) \sin(\theta_5(t)) - ((\cos(\theta_5(t)) L_4 + L_3) \cos(\theta_5(t)) - L_4 \cos(\theta_4(t)) \sin(\theta_5(t)) \sin(\theta_6(t))) \cos(\theta_5(t))), ((\cos(\theta_5(t)) L_4 + L_3) \cos(\theta_5(t)) \\ & - L_4 \cos(\theta_4(t)) \sin(\theta_5(t)) \sin(\theta_6(t))) \cos(\theta_5(t)) - (L_4 \cos(\theta_4(t)) \sin(\theta_5(t)) \cos(\theta_6(t)) + (\cos(\theta_5(t)) L_4 + L_3) \sin(\theta_5(t))) \sin(\theta_5(t))) \cos(\theta_5(t)), -(\sin(\theta_4(t)) (-\sin(\theta_5(t)) \sin(\theta_6(t)) + \cos(\theta_5(t)) \cos(\theta_6(t))) \cos(\theta_5(t)) \\ & - \sin(\theta_5(t)) \cos(\theta_4(t)) \sin(\theta_6(t)) L_4 ((\cos(\theta_4(t)) \cos(\theta_5(t)) (-\sin(\theta_5(t)) \sin(\theta_6(t)) + \cos(\theta_5(t)) \cos(\theta_6(t))) - \sin(\theta_5(t)) (\sin(\theta_5(t)) \cos(\theta_6(t)) + \cos(\theta_5(t)) \sin(\theta_6(t)))) \cos(\theta_5(t)) + \cos(\theta_5(t)) \sin(\theta_4(t)) \sin(\theta_6(t))) L_4, 0]. \\ & \left[((L_4 \cos(\theta_4(t)) \sin(\theta_5(t)) \cos(\theta_6(t)) + (\cos(\theta_5(t)) L_4 + L_3) \sin(\theta_5(t)) + L_2) \cos(\theta_5(t)) - (L_4 \cos(\theta_4(t)) \sin(\theta_5(t)) \sin(\theta_6(t)) - L_4 \cos(\theta_4(t)) \sin(\theta_5(t)) \sin(\theta_6(t))) \sin(\theta_5(t)) \cos(\theta_6(t)) + L_4 \sin(\theta_4(t)) \sin(\theta_5(t)) \sin(\theta_6(t))), \right. \\ & -\sin(\theta_5(t)) ((L_4 \cos(\theta_4(t)) \sin(\theta_5(t)) \cos(\theta_6(t)) + (\cos(\theta_5(t)) L_4 + L_3) \sin(\theta_5(t)) + L_2) \sin(\theta_5(t)) - ((\cos(\theta_5(t)) L_4 + L_3) \cos(\theta_5(t)) - L_4 \cos(\theta_4(t)) \sin(\theta_5(t)) \sin(\theta_6(t))) \cos(\theta_5(t))), ((\cos(\theta_5(t)) L_4 + L_3) \cos(\theta_5(t)) \\ & - L_4 \cos(\theta_4(t)) \sin(\theta_5(t)) \sin(\theta_6(t))) \cos(\theta_5(t)) - (L_4 \cos(\theta_4(t)) \sin(\theta_5(t)) \cos(\theta_6(t)) + (\cos(\theta_5(t)) L_4 + L_3) \sin(\theta_5(t))) \sin(\theta_5(t))) \sin(\theta_5(t)), -(\sin(\theta_4(t)) (-\sin(\theta_5(t)) \sin(\theta_6(t)) + \cos(\theta_5(t)) \cos(\theta_6(t))) \sin(\theta_5(t)) \\ & + \cos(\theta_5(t)) \cos(\theta_4(t)) \sin(\theta_6(t)) L_4 - L_4 ((-\cos(\theta_4(t)) \cos(\theta_5(t)) (-\sin(\theta_5(t)) \sin(\theta_6(t)) + \cos(\theta_5(t)) \cos(\theta_6(t))) + \sin(\theta_5(t)) (\sin(\theta_5(t)) \cos(\theta_6(t)) + \cos(\theta_5(t)) \sin(\theta_6(t)))) \sin(\theta_5(t)) + \cos(\theta_5(t)) \cos(\theta_4(t)) \sin(\theta_6(t))) \sin(\theta_4(t)), 0]. \\ & [0, (L_4 \cos(\theta_4(t)) \sin(\theta_5(t)) \cos(\theta_6(t)) + (\cos(\theta_5(t)) L_4 + L_3) \sin(\theta_5(t)) + L_2) \cos(\theta_5(t)) + ((\cos(\theta_5(t)) L_4 + L_3) \cos(\theta_5(t)) - L_4 \cos(\theta_4(t)) \sin(\theta_5(t)) \sin(\theta_6(t))) \sin(\theta_5(t)), (L_4 \cos(\theta_4(t)) \sin(\theta_5(t)) \cos(\theta_6(t)) + (\cos(\theta_5(t)) L_4 \\ & + L_3) \sin(\theta_5(t))) \cos(\theta_5(t)) + ((\cos(\theta_5(t)) L_4 + L_3) \cos(\theta_5(t)) - L_4 \cos(\theta_4(t)) \sin(\theta_5(t)) \sin(\theta_6(t))) \sin(\theta_5(t))), -(\sin(\theta_5(t)) \cos(\theta_5(t)) + \cos(\theta_5(t)) \sin(\theta_5(t)) \sin(\theta_6(t)) L_4 ((\sin(\theta_5(t)) \cos(\theta_6(t)) \\ & + \cos(\theta_5(t)) \sin(\theta_6(t))) \cos(\theta_4(t)) \cos(\theta_5(t)) + (-\sin(\theta_5(t)) \sin(\theta_6(t)) + \cos(\theta_5(t)) \cos(\theta_6(t))) \sin(\theta_5(t))) L_4, 0] \end{aligned}$$

a co teprve druhá časová derivate, atd.

Systematická geometrická met. výpočtu POKÚ, IOKÚ

Hlavní idea (1/6)

- předpokládejme minimální reprezentaci rychlosti a zrychlení konc. ef. manipulátoru s pomocí vektoru úhlové rychlosti ω_n^0 , $n \dots \# \text{ DoF}$
- transformace mezi vektorem úhlové rychlosti ω_n^0 a derivací Eulerových úhlů $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}$ je dán **Eulerovými kinematickými rovnicemi**, viz Přednáška č. 2
- Pro rychlosti a zrychlení koncového efektoru tedy uvažujeme:

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \dot{\omega}_n^0 \\ \omega_n^0 \end{bmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \ddot{\omega}_n^0 \\ \dot{\omega}_n^0 \end{bmatrix}$$

- POKÚ a IOKÚ lze potom psát jako:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}} &= \mathbf{J}(\mathbf{Q}) \cdot \dot{\mathbf{Q}} & \dot{\mathbf{Q}} &= \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{X}) \cdot \dot{\mathbf{X}} \\ \ddot{\mathbf{X}} &= \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{J}(\mathbf{Q}) \cdot \ddot{\mathbf{Q}} & \ddot{\mathbf{Q}} &= \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{Q}) \cdot \left(\ddot{\mathbf{X}} - \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) \cdot \mathbf{Q} \right) \end{aligned} \quad (17)$$

- matici $\mathbf{J}(\mathbf{Q})$ resp. $\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{X})$ nazýváme

kinematickým jakobiánem resp. **inverzním kinematickým jakobiánem**

- **anal. a kin. jakobián** se liší pouze v **reprezentaci rychlosti orientace!**

Systematická geometrická met. výpočtu POKÚ, IOKÚ

Hlavní idea (2/6)

POKÚ pro rychlosti lze rozepsat s respektováním maticového násobení jako (předpokládejme n DoF a $i = n$, platí: $\mathbf{J}_n(\mathbf{Q}) = \mathbf{J}(\mathbf{Q})$):

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{o}}_i^0 \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_i^0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{j}_1^P & \mathbf{j}_2^P & \cdots & \mathbf{j}_j^P & \cdots & \mathbf{j}_i^P \\ \mathbf{j}_1^O & \mathbf{j}_2^O & \cdots & \mathbf{j}_j^O & \cdots & \mathbf{j}_i^O \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_i(\mathbf{Q})} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_j \\ \vdots \\ \dot{q}_i \end{bmatrix} \quad (18)$$

Tedy zřejmě platí:

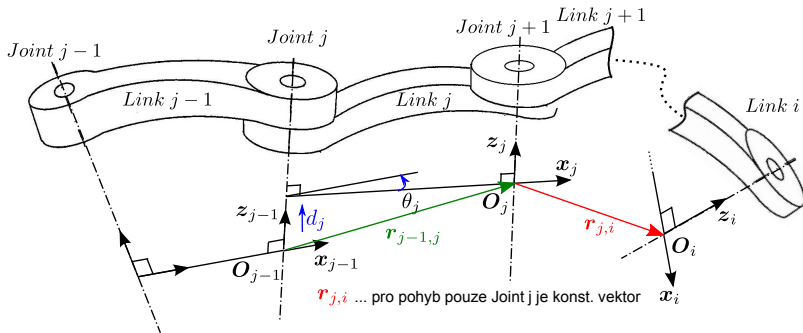
$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{o}}_i^0 &= \mathbf{j}_1^P \cdot \dot{q}_1 + \mathbf{j}_2^P \cdot \dot{q}_2 + \cdots + \mathbf{j}_j^P \cdot \dot{q}_j + \cdots + \mathbf{j}_i^P \cdot \dot{q}_i, & \mathbf{j}_j^P &\in \mathbb{R}^{3 \times 1} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_i^0 &= \mathbf{j}_1^O \cdot \dot{q}_1 + \mathbf{j}_2^O \cdot \dot{q}_2 + \cdots + \mathbf{j}_j^O \cdot \dot{q}_j + \cdots + \mathbf{j}_i^O \cdot \dot{q}_i, & \mathbf{j}_j^O &\in \mathbb{R}^{3 \times 1} \end{aligned} \quad (19)$$

- \mathbf{j}_j^P ... mapuje příspěvek rychlosti j -tého kl. do celk. trans. rychlosti $\dot{\mathbf{o}}_i^0$
- \mathbf{j}_j^O ... mapuje příspěvek rychlosti j -tého kl. do celk. úhlové rychlosti $\dot{\boldsymbol{\omega}}_i^0$

Systematická geometrická met. výpočtu POKÚ, IOKÚ

Hlavní idea (3/6)

- předpokládáme D-H úmluvu pro zavedení s.s.
- příspěvek trans. rychlosti $\mathbf{v}_{j,i}^0$ a úhlové rychlosti $\omega_{j,i}^0$ do s.s. F_i (s.s. konc. efektoru) lze vyjádřit z obrázku



D-H úmluva pro popis kinematických řetězců

Systematická geometrická met. výpočtu POKÚ, IOKÚ

Hlavní idea (4/6)

- translační $\mathbf{v}_{j-1,j}$ a úhlová $\omega_{j-1,j}$ rychlost s.s. F_j vzhledem k s.s. F_{j-1} vyjádřené v s.s. F_0 !

Joint j je typu P:

$$\mathbf{v}_{j-1,j}^0 = \mathbf{z}_{j-1}^0 \cdot \dot{d}_j$$

$$\omega_{j-1,j}^0 = \mathbf{0}$$

Joint j je typu R:

$$\mathbf{v}_{j-1,j}^0 = \mathbf{z}_{j-1}^0 \cdot \dot{\theta}_j \times \mathbf{r}_{j-1,j}^0$$

$$\omega_{j-1,j}^0 = \mathbf{z}_{j-1}^0 \cdot \dot{\theta}_j$$

- protože \forall klouby vyjma uvažovaného *Joint j* jsou v klidu, lze předchozí vztahy využít k popisu příspěvku tohoto kloubu do trans. a úhl. rychlosti s.s. F_i konc. ef.:

Joint j je typu P:

$$\mathbf{v}_{j-1,i}^0 = \mathbf{z}_{j-1}^0 \cdot \dot{d}_j$$

$$\omega_{j-1,i}^0 = \mathbf{0}$$

Joint j je typu R:

$$\mathbf{v}_{j-1,i}^0 = \mathbf{z}_{j-1}^0 \cdot \dot{\theta}_j \times \mathbf{r}_{j-1,i}^0$$

$$\omega_{j-1,i}^0 = \mathbf{z}_{j-1}^0 \cdot \dot{\theta}_j$$

Systematická geometrická met. výpočtu POKÚ, IOKÚ

Hlavní idea (5/6)

- příspěvek translační a úhlové rychlosti do s.s. konc. efektoru způsobený rychlostí kl. souřadnice q_j lze tedy psát:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{j-1,i}^0 \\ \boldsymbol{\omega}_{j-1,i}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{z}_{j-1}^0 \cdot \sigma_j + (\mathbf{z}_{j-1}^0 \times \mathbf{r}_{j-1,i}^0) \cdot \bar{\sigma}_j) \\ \mathbf{z}_{j-1}^0 \cdot \bar{\sigma}_j \end{bmatrix} \cdot \dot{q}_j \quad (20)$$

$\sigma_j = 0$ pokud *Joint j* je typu **R** ($q_j = \theta_j$)

$\sigma_j = 1$ pokud *Joint j* je typu **P** ($q_j = d_j$)

$\bar{\sigma}_j = 1 - \sigma_j$

- porovnáním příspěvku (20) a po složkách rozepsaného vztahu (19) dostáváme přímo sloupce kin. jakobiánu $\mathbf{J}_i(\mathbf{Q})$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{j}_j^P \\ \mathbf{j}_j^O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{j-1}^0 \cdot \sigma_j + (\mathbf{z}_{j-1}^0 \times \mathbf{r}_{j-1,i}^0) \cdot \bar{\sigma}_j \\ \mathbf{z}_{j-1}^0 \cdot \bar{\sigma}_j \end{bmatrix}, \quad j = 1 \dots i \quad (21)$$

Systematická geometrická met. výpočtu POKÚ, IOKÚ

Hlavní idea (6/6)

- proměnné vystupující v takto vyjádřeném sloupci kin. jakobiánu $\mathbf{J}_i(\mathbf{Q})$ lze snadno získat přímo z homogenních transform. matic:

$$\mathbf{z}_{j-1}^0 = \mathbf{T}_{j-1}^0[1 : 3, 3], \quad \mathbf{T}_{j-1}^0 = \prod_{k=1}^j \mathbf{T}_k^{k-1}(q_k)$$
$$\mathbf{r}_{j-1,i}^0 = \mathbf{O}_i^0 - \mathbf{O}_{j-1}^0 = \mathbf{T}_i^0[1 : 3, 4] - \mathbf{T}_{j-1}^0[1 : 3, 4]$$

- Výhody:**

- kin. jakobián $\mathbf{J}_i(\mathbf{Q})$ lze získat přímým analytickým výpočtem z prvků známých hom. transform. matic (získaných při řešení **DGM**)
- není vyžadována exaktní časová derivace polohových závislostí
- výrazné zjednodušení výpočtu pro složité architektury manip.
- jednoduše algoritmizovatelný postup
- výpočet lze převést na rekurzivní algoritmus (postupný výpočet)

$$\boldsymbol{\omega}_j^0 = \boldsymbol{\omega}_{j-1}^0 + \mathbf{z}_{j-1}^0 \bar{\sigma}_j \dot{q}_j$$

$$\dot{\mathbf{O}}_j^0 = \dot{\mathbf{O}}_{j-1}^0 + \boldsymbol{\omega}_j^0 \times \mathbf{r}_{j-1,j}^0 + \mathbf{z}_{j-1}^0 \sigma_j \dot{q}_j$$

- analogicky lze rychlostní vztahy odvodit pro K-K úmluvu

Systematická geometrická met. výpočtu POKÚ, IOKÚ

Příklad: 2DoF planární manipulátor

Na tabuli.

Systematická geometrická met. výpočtu POKÚ, IOKÚ

Rozšíření na výpočet čas. derivace kin. jakobiánu (1/2)

- časovou derivací vztahu (18) získáváme nutnost znát čas. derivaci kin. jakobiánu $\mathbf{J}_n(\mathbf{Q})$ ($i = n$ DoF), tedy čas. derivace prvků (sloupců) matice $\mathbf{J}_n(\mathbf{Q})$.

- z (21) plyne:

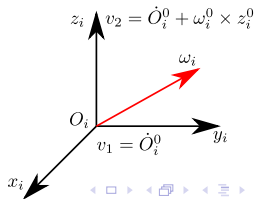
$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{j}}_j^P \\ \dot{\mathbf{j}}_j^O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}}_{j-1}^0 \cdot \sigma_j + \left[(\dot{\mathbf{z}}_{j-1}^0 \times \mathbf{r}_{j-1,i}^0) + (\mathbf{z}_{j-1}^0 \times \dot{\mathbf{r}}_{j-1,i}^0) \right] \cdot \bar{\sigma}_j \\ \dot{\mathbf{z}}_{j-1}^0 \cdot \bar{\sigma}_j \end{bmatrix}, \quad j = 1 \dots i$$

$$\text{kde } \dot{\mathbf{r}}_{j-1,i}^0 = \dot{\mathbf{O}}_i^0 - \dot{\mathbf{O}}_{j-1}^0$$

- translační rychlosti $\dot{\mathbf{O}}_i^0$ počátků s.s. jejich úhlové rychlosti ω_i^0 lze získat z relace (19) pro $i = 1 \dots n$ (postupné vyjádření rychlostí s.s.)

Čas. derivaci \mathbf{z}_i^0 lze vyjádřit jako:

$$\dot{\mathbf{z}}_i^0 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \dot{\mathbf{O}}_i^0 + \omega_i^0 \times \mathbf{z}_i^0 - \dot{\mathbf{O}}_i^0 = \omega_i^0 \times \mathbf{z}_i^0$$



Systematická geometrická met. výpočtu POKÚ, IOKÚ

Rozšíření na výpočet čas. derivace kin. jakobiánu (2/2)

POKÚ pro zrychlení tedy bude ($i = n$):

$$\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{O}}_i^0 \\ \dot{\omega}_i^0 \end{bmatrix} = \mathbf{J}_i(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_j \\ \vdots \\ \dot{q}_i \end{bmatrix} + \mathbf{J}_i(\mathbf{Q}) \cdot \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \vdots \\ \ddot{q}_j \\ \vdots \\ \ddot{q}_i \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{J}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}})$ lze opět sestavit přímo z prvků hom. trans. matic
- opět existuje rekurzivní varianta výpočtu

$$\dot{\omega}_j^0 = \dot{\omega}_{j-1}^0 + \omega_{j-1}^0 \bar{\sigma}_j \dot{q}_j \times \mathbf{z}_{j-1}^0 + \mathbf{z}_{j-1}^0 \bar{\sigma}_j \ddot{q}_j$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{O}}_j^i &= \ddot{\mathbf{O}}_{j-1}^0 + \dot{\omega}_j^0 \times \mathbf{r}_{j-1,j}^0 + \omega_j^0 \times (\omega_j^0 \times \mathbf{r}_{j-1,j}^0) + \omega_j^0 \times \mathbf{z}_{j-1}^0 \sigma_j \dot{q}_j + \\ &+ (\omega_{j-1}^0 \times \mathbf{z}_{j-1}^0) \sigma_j \dot{q}_j + \mathbf{z}_{j-1}^0 \sigma_j \ddot{q}_j \end{aligned}$$

Systematická geometrická met. výpočtu POKÚ, IOKÚ

Příklad: 2DoF planární manipulátor

Na tabuli.

Singulární polohy sériových manipulátorů

Singulární poloha n DoF manipulátoru:

- poloha koncového efektoru („vnitřní“ uspořádání manipulátoru závislé na \mathbf{Q})
- lze vyhodnotit prostřednictvím **analytického** resp. **kinematického** jakobiánu:

Analytický jakobián \mathbf{J}_A :

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{O}}_n^0 \\ \dot{\mathbf{EA}} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_A \cdot \dot{\mathbf{Q}}, \mathbf{EA} \dots \text{min. repre. orientace Euler. úhly, např. XYZ}$$

Kinematický jakobián \mathbf{J} :

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{O}}_n^0 \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_n^0 \end{bmatrix} = \mathbf{J} \cdot \dot{\mathbf{Q}}, \boldsymbol{\omega}_n^0 \dots \text{vektor úhlové rychlosti}$$

- relace mezi \mathbf{J}_A a \mathbf{J} lze získat prostřednictvím Eulerových kinematických rovnic, viz Přednáška č. 2

Např. pro schéma rotace XYZ, $\mathbf{EA} = [\alpha \quad \beta \quad \gamma]^T$

$$\boldsymbol{\omega}_n^0 = \mathbf{H}(\mathbf{EA}) \cdot \dot{\mathbf{EA}}, \quad \mathbf{H}(\mathbf{EA}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sin \beta \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \cos \beta \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix}$$

Singulární polohy sériových manipulátorů

- tedy určitě platí:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{O}}_n^0 \\ \omega_n^0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{J} \cdot \dot{\mathbf{Q}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{H}(\mathbf{EA}) \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{O}}_n^0 \\ \dot{\mathbf{EA}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_A \cdot \dot{\mathbf{Q}}} \Rightarrow \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{H}(\mathbf{EA}) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{J}_A$$

- \mathbf{J}_A či \mathbf{J} singulární matice \Rightarrow singulární poloha manipulátoru
- protože:

$$\mathbf{J}_A = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{EA}) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{J}$$

- \mathbf{J}_A zahrnuje singularity způsobené \mathbf{J} (násobení matic) \Rightarrow sing. polohy manip. lze počítat vyšetřováním \mathbf{J} i \mathbf{J}_A
- pokud $\mathbf{H}(\mathbf{EA})$ je singulární (pro Euler. úhly XYZ tzn. $\beta = \pm \frac{\pi}{2}$) nastávají singularity v min. reprezentaci (viz Přednáška č. 2) \Rightarrow nelze vyjádřit \mathbf{J}_A z \mathbf{J}

Singulární polohy sériových manipulátorů

- jakobián (kinematický) \mathbf{J} (obecně matice $6 \times n$) mapuje rychlosti kl. souřadnic $\dot{\mathbf{Q}}$ do rychlostí konc. efektoru $\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} (\mathbf{O}_n^0)^T & (\boldsymbol{\omega}_n^0)^T \end{bmatrix}^T$

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{O}}_n^0 \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_n^0 \end{bmatrix} = \mathbf{J} \cdot \dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{j}_1 \dot{q}_1 + \mathbf{j}_2 \dot{q}_2 + \cdots + \mathbf{j}_n \dot{q}_n$$

- hodnost \mathbf{J} , $\text{rank}(\mathbf{J}) = \#$ lin. nezávislých sloupců \mathbf{j}_i
 - $\text{rank}(\mathbf{J}) \leq \min(6, n)$, $n \dots \#$ DoF manipulátoru
 - $\text{rank}(\mathbf{J}) = \min(6, n) \dots \text{rank}(\mathbf{J})$ **má plnou hodnost**
 - je **regulární**, tzn. např. $\det(\mathbf{J}) \neq 0$
 - $\text{rank}(\mathbf{J}) < \min(6, n) \dots \text{rank}(\mathbf{J})$ **nemá plnou hodnost**
 - je **singulární**, tzn. např. $\det(\mathbf{J}) = 0$
- $\text{rank}(\mathbf{J})$ určuje **okamžitý** (závislý na akt. poloze) počet DoF
 $\forall \mathbf{Q} : \text{rank}(\mathbf{J}) = \min(6, n) \Rightarrow \mathbf{J}$ má plnou hodnost \Rightarrow manip. má n DoF koncového efektoru na pracovním prostoru určeným kl. souřadnicemi \mathbf{Q}
- pokud $\exists \mathbf{Q} : \text{rank}(\mathbf{J}) < \min(6, n) \Rightarrow \mathbf{J}$ nemá plnou hodnost \Rightarrow manip. má singulární polohu v \mathbf{Q}

Singulární polohy sériových manipulátorů

Příklad: 2DoF planární manipulátor (1/8)

- shodný analytický i kinematický jakobián, viz výše (neboť $\alpha = \beta = 0$, XYZ Euler. úhly)

$$\mathbf{J}^{\text{full}} = \begin{bmatrix} -s_1 L_1 - L_2 s_{12} & -L_2 s_{12} \\ c_1 L_1 + L_2 c_{12} & L_2 c_{12} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- $n = 2$, $\text{rank}(\mathbf{J}^{\text{full}}) = \min(6, n) = 2 \Rightarrow$ genericky má manip. max. 2DoF
Zvoleno polohování v rovině xy :

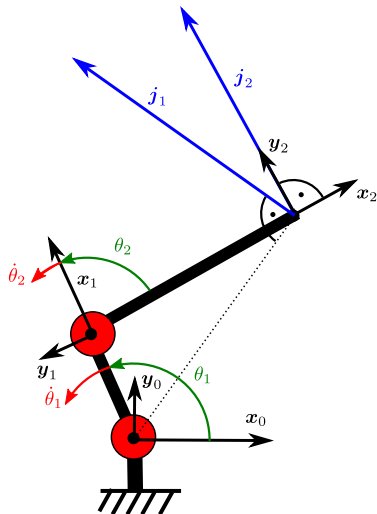
$$\dot{\mathbf{X}} = \dot{\mathbf{O}}_2^0[1 : 2] = \underbrace{\begin{bmatrix} -s_1 L_1 - L_2 s_{12} & -L_2 s_{12} \\ c_1 L_1 + L_2 c_{12} & L_2 c_{12} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J} = [\mathbf{j}_1 \quad \mathbf{j}_2]$$

$$\text{Tedy platí: } \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{j}_1 \cdot \dot{\theta}_1 + \mathbf{j}_2 \cdot \dot{\theta}_2$$

- Pokud \mathbf{J} je **regulární**, potom:
 - $\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2$ jsou **lin. nezávislé** sloupce
 - $\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2$ tvoří **2 nezávislé generátory (bázi dimenze 2)** prostoru rychlostí zobecněných souřadnic $\dot{\mathbf{X}}$
 - $\text{rank}(\mathbf{J}) = 2 \Rightarrow$ konc. efektor má 2DoF

Singulární polohy sériových manipulátorů

Příklad: 2DoF planární manipulátor (2/8)



Bázové vektory j_1, j_2 (lin. nezávislé sloupce J) generující rychlost koncového efektoru pro manipulátor **mimo singulární polohu Q**

$$\dot{X} = j_1 \cdot \dot{\theta}_1 + j_2 \cdot \dot{\theta}_2$$

$$\Rightarrow 2\text{DoF}$$

Singulární polohy sériových manipulátorů

Příklad: 2DoF planární manipulátor (3/8)

Inverze \mathbf{J} :

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{L_1 L_2 s_2} \begin{bmatrix} L_2 c_{12} & L_2 s_{12} \\ -c_1 L_1 - L_2 c_{12} & -s_1 L_1 - L_2 s_{12} \end{bmatrix}$$

Inverze \mathbf{J}^{-1} neexistuje pokud $\theta_2 = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases} \Rightarrow \mathbf{J}$ je v tomto bodě **singulární**

$$\text{Např. pro } \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{J} = \begin{bmatrix} -s_1(L_2 + L_1) & -L_2 s_1 \\ c_1(L_2 + L_1) & L_2 c_1 \end{bmatrix}$$

• pokud \mathbf{J} je **singulární**, potom:

• $\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2$ jsou **lin. závislé sloupce**, tzn. pro $a \in \mathbb{R}$:

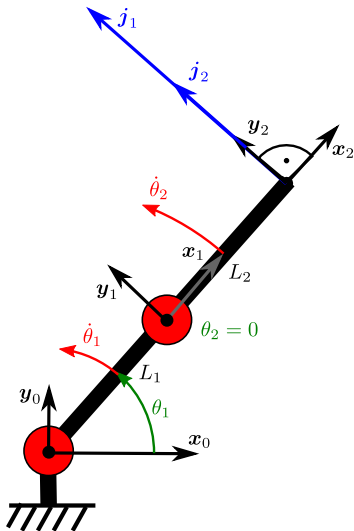
$$\mathbf{j}_2 = a \cdot \mathbf{j}_1 \Rightarrow \dot{\mathbf{X}} = \dot{\theta}_1 \cdot \mathbf{j}_1 + a \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \mathbf{j}_1 = (\dot{\theta}_1 + a \cdot \dot{\theta}_2) \cdot \mathbf{j}_1$$

$$a = \frac{L_2}{L_1 + L_2}$$

- \mathbf{j}_1 tvoří **jeden generátor (báze dimenze 1)** prostoru rychlostí zobecněných souřadnic $\dot{\mathbf{Q}}$
- $\text{rank}(\mathbf{J}) = 1 < 2 \Rightarrow$ konc. efektor má 1DoF (lokálně v poloze \mathbf{Q})

Singulární polohy sériových manipulátorů

Příklad: 2DoF planární manipulátor (4/8)



Bázové vektory j_1, j_2 (lin. závislé sloupce J)

$$j_2 = \frac{L_2}{L_1 + L_2} j_1$$

generující rychlost koncového efektoru pro manipulátor
v singulární poloze Q

$$\dot{X} = (\dot{\theta}_1 + \frac{L_2}{L_1 + L_2} \dot{\theta}_2) \cdot j_1$$

$$\Rightarrow 1\text{DoF}$$

(manipulátor ztrácí **lokálně** 1DoF)

Singulární polohy sériových manipulátorů

Příklad: 2DoF planární manipulátor (5/8)

- navíc pro singulární matici \mathbf{J} platí:

$$\exists \dot{\mathbf{Q}} \neq \mathbf{0}_{2 \times 1} : \mathbf{J} \cdot \dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{0}_{2 \times 1}$$

- \Rightarrow pro danou polohu manip. \mathbf{Q} existuje **nenulový pohyb** kloubů $\dot{\mathbf{Q}}$, které způsobí **nulový pohyb** konc. ef. $\dot{\mathbf{X}}$
- tento nenulový pohyb kloubů $\dot{\mathbf{Q}}$ lze určit z podmínky:

$$\mathbf{J} \cdot \dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{0}_{2 \times 2} \Rightarrow \begin{bmatrix} -s_1(L_2 + L_1) & -L_2 s_1 \\ c_1(L_2 + L_1) & L_2 c_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

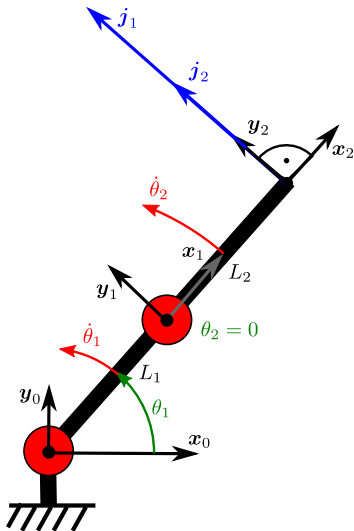
- tedy kl. rychlosti splňující podmínku

$$\dot{\theta}_1 = -\frac{L_2}{L_1 + L_2} \cdot \dot{\theta}_2$$

pro manipulátor v singulární poloze nevyvodí **žádnou** rychlost konc. efektoru

Singulární polohy sériových manipulátorů

Příklad: 2DoF planární manipulátor (6/8)



Manipulátor v sing. poloze:

$$j_2 = \frac{L_2}{L_1 + L_2} j_1$$

Za podmínky:

$$\dot{\theta}_1 = -\frac{L_2}{L_1 + L_2} \cdot \dot{\theta}_2$$

Tedy:

$$\dot{X} = j_1 \cdot \dot{\theta}_1 + j_2 \cdot \dot{\theta}_2 = \mathbf{0}_{2 \times 1}$$

Singulární polohy sériových manipulátorů

Příklad: 2DoF planární manipulátor (7/8)

- singulární polohy manipulátoru mají klíčový vliv na řízení manipulátoru s ohledem na řešení IOKÚ!
- pro inverzi jakobiánu \mathbf{J} platí:

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{L_1 L_2 s_2} \begin{bmatrix} L_2 c_{12} & L_2 s_{12} \\ -c_1 L_1 - L_2 c_{12} & -s_1 L_1 - L_2 s_{12} \end{bmatrix}$$

- IOKÚ:

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{J}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{X}}$$

Tedy pro **malé** požadované rychlosti konc. efektoru $\dot{\mathbf{X}}$ v blízkosti sing. polohy můžeme dostávat **obrovské** hodnoty požadovaných rychlostí kl. souřadnic $\dot{\mathbf{Q}}$

Singulární polohy sériových manipulátorů

Příklad: 2DoF planární manipulátor (8/8)

Průběh rychlostí kloub. souřadnic $\dot{\mathbf{Q}}$ při pohybu manipulátoru do blízkosti
singulární polohy
($\dot{\theta}_1$... žlutá, $\dot{\theta}_2$... fialová)

Singulární polohy sériových manipulátorů

Příklad: 3DoF cylindrický manipulátor (1/4)

Přímou aplikací výpočtu (21) dostáváme kinematický jakobián 3DoF cylindrického manipulátoru (restrikce na 3DoF):

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -c_1 d_3 & 0 & -s_1 \\ -s_1 d_3 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Mimo sing. polohu } \mathbf{j}_i \text{ lin. nezávislé:}$$
$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{j}_1 \cdot \dot{\theta}_1 + \mathbf{j}_2 \cdot \dot{d}_2 + \mathbf{j}_3 \cdot \dot{d}_3$$

Inverze kinematického jakobiánu:

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{d_3} \begin{bmatrix} -c_1 & -s_1 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \\ -d_3 s_1 & d_3 c_1 & 0 \end{bmatrix}$$

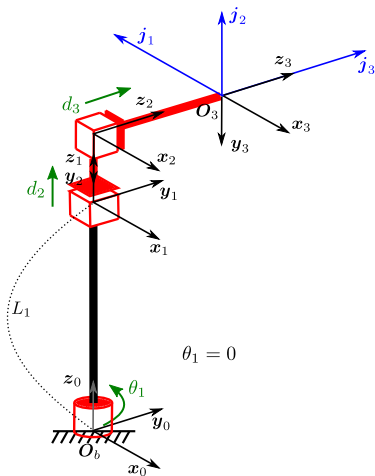
Pro $d_3 = 0$ inverze \mathbf{J}^{-1} neexistuje \Rightarrow singulární poloha manipulátoru:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -s_1 \\ 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{V sing. poloze } \mathbf{j}_i \text{ lin. závislé:}$$
$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{0}_{2 \times 1} \cdot \dot{\theta}_1 + \mathbf{j}_2 \cdot \dot{d}_2 + \mathbf{j}_3 \cdot \dot{d}_3$$

\Rightarrow pouze 2 DoF (2 lin. nezávislé vektory - generátory prostoru rychlostí konc. ef.)

Singulární polohy sériových manipulátorů

Příklad: 3DoF cylindrický manipulátor (2/4)



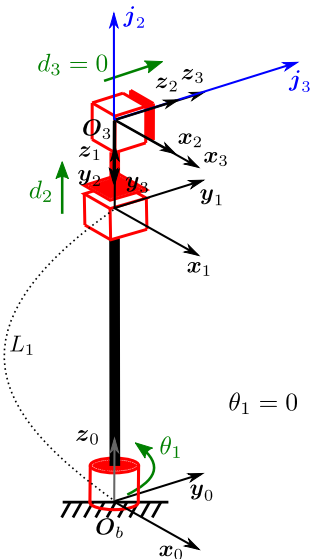
Bázové vektory j_1, j_2, j_3 (lin. nezávislé sloupce J , $\text{rank}(J) = 3$) generující rychlost koncového efektoru pro manipulátor
mimo singulární polohu Q

$$\dot{X} = j_1 \cdot \dot{\theta}_1 + j_2 \cdot \dot{d}_2 + j_3 \cdot \dot{d}_3$$

$$\Rightarrow 3\text{DoF}$$

Singulární polohy sériových manipulátorů

Příklad: 3DoF cylindrický manipulátor (3/4)



Bázové vektory j_1, j_2, j_3 (lin. závislé sloupce J) generující rychlost koncového efektoru pro manipulátor v **singulární poloze Q**

$$\dot{X} = \mathbf{0}_{3 \times 1} \cdot \dot{\theta}_1 + j_2 \cdot \dot{d}_2 + j_3 \cdot \dot{d}_3$$

$$\Rightarrow 2\text{DoF}$$

(manipulátor ztrácí **lokálně** 1DoF)

Navíc opět platí:

$$\exists \dot{Q} \neq \mathbf{0}_{3 \times 1} : J \cdot \dot{Q} = \mathbf{0}_{3 \times 1}$$

Např. pro $\dot{\theta}_1 \neq 0 \wedge \dot{d}_2 = \dot{d}_3 = 0$ platí:

$$J \cdot \dot{Q} = \mathbf{0}_{3 \times 1}$$

Opět pozor na vysoké požadavky na kl. rychlosti v blízkosti singularit.

Singulární polohy sériových manipulátorů

Příklad: 3DoF cylindrický manipulátor (4/4)

Průběh rychlostí kloub. souřadnic $\dot{\mathbf{Q}}$ při pohybu manipulátoru do blízkosti
singulární polohy
($\dot{\theta}_1$... žlutá, \dot{d}_2 ... fialová, \dot{d}_3 ... modrá)

Singulární polohy sériových manipulátorů

Příklad: 3DoF manipulátor typu sférického zápěstí (1/2)

Přímou aplikací výpočtu (21) dostáváme kinematický jakobián 3DoF manipulátoru typu sférického zápěstí (restrikce na 3DoF):

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & -s_1 & c_1 s_2 \\ 0 & c_1 & s_1 s_2 \\ 1 & 0 & c_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Mimo sing. polohu } \mathbf{j}_i \text{ lin. nezávislé:}$$
$$\dot{\mathbf{X}} = \boldsymbol{\omega}_3^0 = \mathbf{j}_1 \cdot \dot{\theta}_1 + \mathbf{j}_2 \cdot \dot{\theta}_2 + \mathbf{j}_3 \cdot \dot{\theta}_3$$

Inverze kinematického jakobiánu:

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{s_2} \begin{bmatrix} -c_1 c_2 & -s_1 c_2 & s_2 \\ -s_1 s_2 & c_1 s_2 & 0 \\ c_1 & s_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pro $s_2 = 0$, tedy $\theta_2 = k \cdot \pi$, $k = 0, 1, 2, \dots$, inverze \mathbf{J}^{-1} neexistuje \Rightarrow singulární poloha manipulátoru:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & -s_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 \\ 1 & 0 & c_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{V sing. poloze } \mathbf{j}_i \text{ lin. závislé:}$$
$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{j}_1 \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + \mathbf{j}_3 \cdot \dot{\theta}_3, \text{ pro } k = 0, 2, 4, \dots$$
$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{j}_1 \cdot (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + \mathbf{j}_3 \cdot \dot{\theta}_3, \text{ pro } k = 1, 3, 5, \dots$$

\Rightarrow pouze 2 DoF (2 lin. nezávislé vektory - generátory prostoru úhlových rychlostí konc. ef.)

Singulární polohy sériových manipulátorů

Příklad: 3DoF manipulátor typu sférického zápěstí (2/2)

- výsledná úhlová rychlost konc. efektoru je opět lineární kombinací báзовých vektorů
- opět pozor na vysoké požadavky na kloubové rychlosti v blízkosti singularit
- analýza singulárních poloh pro 3DoF antropomorfní manipulátor bude analogická
- stejným způsobem, jako u řešení IGM pro 6DoF cylindrický (antropomorfní) manipulátor se sférickým zápěstím lze hledání singularit pro tyto manipulátory také řešit zvlášť pro 3DoF cylindrický (antropomorfní) manipulátor a 3DoF manipulátor typu sférického zápěstí

Děkuji za pozornost.

Dotazy?