

Úvod do robotiky a mechatroniky (URM)

Přednáška č. 3:

# Úmluvy pro popis kinematiky manipulátorů

M. Švejda

FAV, ZČU v Plzni, Katedra kybernetiky

poslední revize: 2. 12. 2013

# Úmluvy pro popis kinematiky manipulátorů

- Jak systematickou cestou popsat pohyb mech. konstrukce manipulátoru?
- každé rameno manipulátoru je **pevně** spojeno se svým s.s.
- $\Rightarrow$  pohyb manipulátoru = transformace mezi s.s. jeho ramen
- dva typy parametrů ovlivňující pohyb manipulátoru:
  - geometrické (návrhové parametry) určují mechanickou konstrukci (tvar ramen, rozmístění kloubů)
  - kloubové souřadnice určují DoF manipulátoru (aktuátory)
- **obecně:** pro lib. transformaci polohy s.s. v prostoru je potřeba 6 nezávislých souřadnic (parametrů)
- **spec. případ:** vhodným definováním s.s. ve struktuře manipulátoru (omezení) možno redukovat počet parametrů na 4
- **účel úmluv:** jednoduchou, systematickou, rekurzivní (algoritmizovatelnou) cestou definovat s.s. ramen manipulátoru a jejich vzájemné transformace (s min. počtem parametrů)

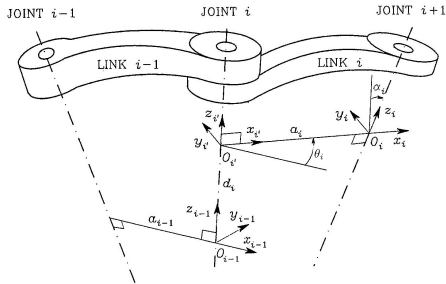


# Úmluvy pro popis kinematiky manipulátorů

## Denavit-Hartenbergova úmluva

**Umístění s.s. dle D-H úmluvy není jednoznačně definováno v případě:**

- pro  $F_0$  jednoznačně určena pouze osa  $\mathbf{z}_0$  (dle *Joint i*),  $\mathbf{x}_0$  a  $\mathbf{O}_0$  lze volit libovolně
- pro  $F_n$  ( $n \dots \# 1$  DoF kloubů) není jednoznačně určena osa  $\mathbf{z}_n$  (*Joint n + 1* neexistuje), osa  $\mathbf{x}_n$  však musí ležet ve směru  $\mathbf{z}_{n-1} \perp \mathbf{z}_n$
- dvě po sobě jdoucí osy kloubů ( $\mathbf{z}_{i-1}, \mathbf{z}_i$ ) jsou rovnoběžné  $\Rightarrow (\mathbf{z}_{i-1} \perp \mathbf{z}_i)$  není jednoznačně def. (může být volena libovolně ve směru os kloubů, např. aby  $d_i = 0$ )
- dvě po sobě jdoucí osy kloubů ( $\mathbf{z}_{i-1}, \mathbf{z}_i$ ) se protínají  $\Rightarrow (\mathbf{z}_{i-1} \perp \mathbf{z}_i)$  není def. (osa  $\mathbf{x}_i$  volena kolmo na rovinu tvořenou osami  $\mathbf{z}_{i-1}, \mathbf{z}_i$ , směr  $(\pm)$  libovolný)



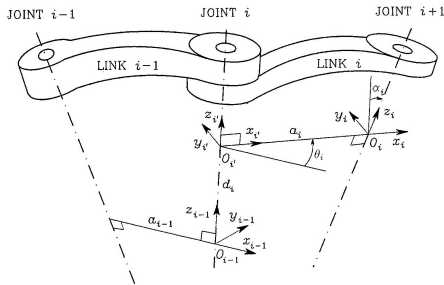
# Úmluvy pro popis kinematiky manipulátorů

## Denavit-Hartenbergova úmluva

### Význam geometrických parametrů:

- možné plně popsat 4 tzv. D-H geometrickými parametry

- $a_i$  ..... vzdálenost počátků  $O_i$  a  $O'_i$   
kolmá vzd. os  $z_{i-1}$  a  $z_i$
- $d_i$  ..... vzdálenost počátků  $O_{i-1}$  a  $O'_i$   
kolmá vzd. os  $x_{i-1}$  a  $x_i$
- $\alpha_i$  ..... úhel mezi osami  $z_{i-1}$ ,  $z_i$   
(pootočení s.s.  $F'_i$  okolo  $x'_i$  resp.  $x_i$ )  
úhel natočení mezi osami  $z_{i-1}$  a  $z_i$
- $\theta_i$  ..... úhel mezi osami  $x_{i-1}$ ,  $x_i$   
(pootočení s.s.  $F_{i-1}$  okolo  $z_{i-1}$ )  
úhel natočení mezi osami  $x_{i-1}$  a  $x_i$



### Role aktivních kloubů v popisu transformací:

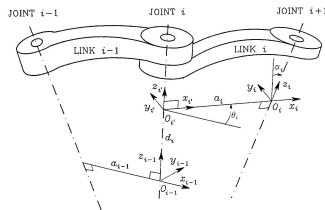
- kloub *Joint i* je typu **P**:
  - $d_i$  - proměnná definující pohyb kloubu
  - $a_i, \alpha_i, \theta_i$  - konst. def. geom. uspořádání ramene *Link i*
- kloub *Joint i* je typu **R**:
  - $\theta_i$  - proměnná definující pohyb kloubu
  - $a_i, \alpha_i, d_i$  - konst. def. geom. uspořádání ramene *Link i*

# Úmluvy pro popis kinematiky manipulátorů

## Denavit-Hartenbergova úmluva

**Definice vzájemných transformací dvou po sobě jdoucích s.s.  $F_{i-1}$ ,  $F_i$ :**

- vyber s.s.  $F_{i-1}$
- posuň s.s.  $F_{i-1}$  podél osy  $\mathbf{z}_{i-1}$  o vzd.  $d_i$  a otoč jej okolo osy  $\mathbf{z}_{i-1}$  o úhel  $\theta_i \Rightarrow$  s.s.  $F'_i$
- posuň s.s.  $F'_i$  podél osy  $\mathbf{x}'_i$  o vzd.  $a_i$  a otoč jej okolo osy  $\mathbf{x}'_i$  o úhel  $\alpha_i \Rightarrow$  s.s.  $F_i$



**Homogenní transformační matice  $F_{i-1} \rightarrow F'_i$ ,  $F'_i \rightarrow F_i$ :**

$$\mathbf{T}_{i'}^{i-1} = \text{Trans}(\mathbf{z}, d_i) \cdot \text{Rot}(\mathbf{z}, \theta_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} & 0 & 0 \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} & 0 & 0 \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_i^{i'} = \text{Trans}(\mathbf{x}, a_i) \cdot \text{Rot}(\mathbf{x}, \alpha_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{\alpha_i} & -s_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & c_{\alpha_i} & -s_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Pozn.:** video D-H úmluva

# Úmluvy pro popis kinematiky manipulátorů

## Denavit-Hartenbergova úmluva

**Výsledná transformace přechodu ze s.s.  $F_{i-1}$  do s.s.  $F_i$ :**

$$\begin{aligned} T_i^{i-1} &= T_{i'}^{i-1} \cdot T_i^{i'} = \\ &= \text{Trans}(\mathbf{z}, d_i) \cdot \text{Rot}(\mathbf{z}, \theta_i) \cdot \text{Trans}(\mathbf{x}, a_i) \cdot \text{Rot}(\mathbf{x}, \alpha_i) = \\ &= \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} c_{\alpha_i} & s_{\theta_i} s_{\alpha_i} & a_i c_{\theta_i} \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i} c_{\alpha_i} & -c_{\theta_i} s_{\alpha_i} & a_i s_{\theta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- homogenní transformační matice  $T_i^{i-1}$  je závislá na geometrických parametrech ramen a na kloubových souřadnicích
- pro účely řešení kinematických úloh platí (geom. par. ramene jsou konstanty):

kloub *Joint*  $i$  je typu **P**: .....  $T_i^{i-1} = T_i^{i-1}(d_i)$

kloub *Joint*  $i$  je typu **R**: .....  $T_i^{i-1} = T_i^{i-1}(\theta_i)$

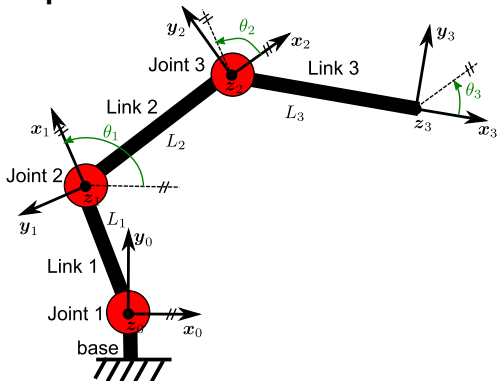
# Úmluvy pro popis kinematiky manipulátorů

## Denavit-Hartenbergova úmluva - Příklady

### Sériový planární 3 DoF manipulátor:

D-H parametry:

Joint $i$	$d_i$	$\theta_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	0	$\theta_1$	$L_1$	0
2	0	$\theta_2$	$L_2$	0
3	0	$\theta_3$	$L_3$	0





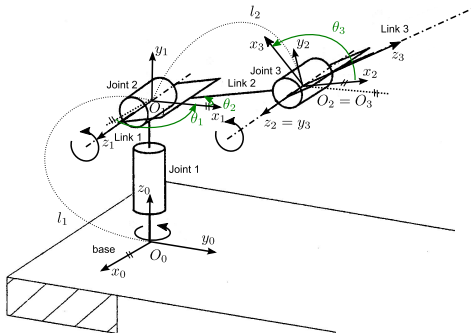
# Úmluvy pro popis kinematiky manipulátorů

## Denavit-Hartenbergova úmluva - Příklady

### Sériový prostorový antropomorfní 3 DoF manipulátor:

D-H parametry:

Joint $i$	$d_i$	$\theta_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	$l_1$	$\theta_1$	0	$\frac{\pi}{2}$
2	0	$\theta_2$	$l_2$	0
3	0	$\theta_3$	0	$\frac{\pi}{2}$



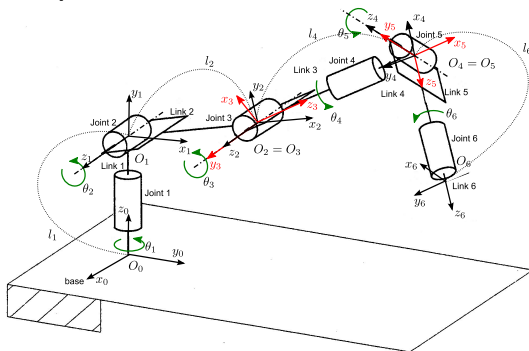
# Úmluvy pro popis kinematiky manipulátorů

## Denavit-Hartenbergova úmluva - Příklady

### Sériový prostorový antropomorfní manipulátor. se sférickým zápěstím (6 DoF):

D-H parametry:

Joint $i$	$d_i$	$\theta_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	$l_1$	$\theta_1$	0	$\frac{\pi}{2}$
2	0	$\theta_2$	$l_2$	0
3	0	$\theta_3$	0	$\frac{\pi}{2}$
4	$l_4$	$\theta_4$	0	$-\frac{\pi}{2}$
5	0	$\theta_5$	0	$\frac{\pi}{2}$
6	$l_6$	$\theta_6$	0	0

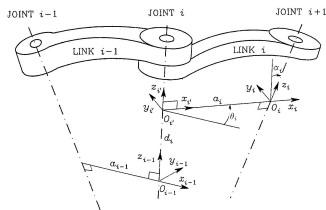


# Úmluvy pro popis kinematiky manipulátorů

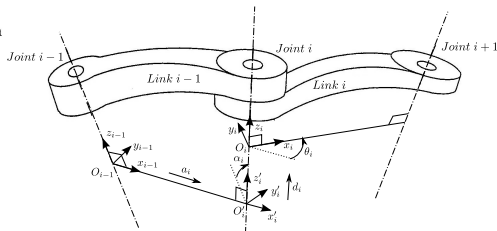
## Khalil-Kleinfingerova úmluva

### Khalil-Kleinfingerova (K-K) úmluva

- modifikací D-H úmluvy - rozdíl v přidělení s.s.
- **pro D-H:** s.s.  $F_i$  (pevně svázán s ramenem *Link i*) je umístěn v ose kloubu *Joint i + 1* (osa  $z_i$  shodná s osou rotace/translace *Joint i + 1*)
- **pro K-K:** s.s.  $F_i$  (pevně svázán s ramenem *Link i*) je umístěn *přímo v ose kloubu určující jeho pohyb*, tedy *Joint i* (osa  $z_i$  shodná s osou rotace/translace *Joint i*)
- pravděpodobně přirozenější vyjádření
- možnost jednoznačně popisovat rozvětvené kinematické řetězce



D-H úmluva



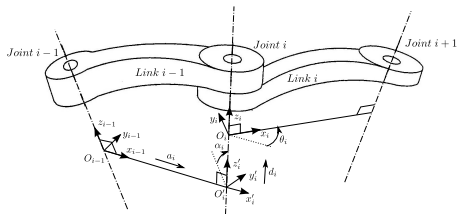
K-K úmluva

# Úmluvy pro popis kinematiky manipulátorů

## Khalil-Kleinfingerova úmluva

**Definice s.s.  $F_i$  a pomocného s.s.  $F'_i$  za předpokladu znalosti s.s.  $F_{i-1}$ :**

- osa  $\mathbf{z}_i$ ,  $\mathbf{z}'_i$  = osa rotace/translace kloubu *Joint*  $i$
- $\mathbf{O}_i \in \mathbf{z}_i \cap (\mathbf{z}_i \perp \mathbf{z}_{i+1})$   
 $\mathbf{O}'_i \in \mathbf{z}_i \cap (\mathbf{z}_{i-1} \perp \mathbf{z}_i)$
- $\mathbf{x}_i$  ve směru  $(\mathbf{z}_i \perp \mathbf{z}_{i+1})$ , z *Joint*  $i$  do *Joint*  $i + 1$
- $\mathbf{x}'_i$  ve směru  $(\mathbf{z}_{i-1} \perp \mathbf{z}_i)$ , z *Joint*  $i - 1$  do *Joint*  $i$
- pravotočivé s.s.  $\Rightarrow \mathbf{y}_i, \mathbf{y}'_i$

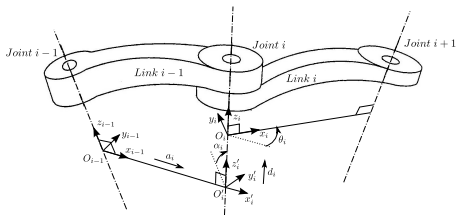


# Úmluvy pro popis kinematiky manipulátorů

## Khalil-Kleinfingerova úmluva

**Umístění s.s. dle K-K úmluvy není jednoznačně definováno v případě:**

- s.s.  $F_0$  lze volit libovolně (zpravidla totožný s  $F_1$  pro  $d_1 = 0$  resp.  $\theta_1 = 0$  tzn. nulová poloha kloubu *Joint 1*)
- pro  $F_n$  je jednoznačně určena pouze osa  $\mathbf{z}_n$  (*Joint  $n + 1$*  neexistuje),  $\mathbf{x}_n$  může být volena libovolně (zpravidla totožná s  $\mathbf{x}_{n-1}$  pro nul. polohu kloubu *Joint  $n$* )
- dvě po sobě jdoucí osy kloubů ( $\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_{i+1}$ ) jsou rovnoběžné  $\Rightarrow (\mathbf{z}_i \perp \mathbf{z}_{i+1})$  není def. (může být volena libovolně ve směru os kloubů, např. aby  $d_i = 0$ )
- dvě po sobě jdoucí osy kloubů ( $\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_{i+1}$ ) se protínají  $\Rightarrow (\mathbf{z}_i \perp \mathbf{z}_{i+1})$  není def. (osa  $\mathbf{x}_i$  volena kolmo na rovinu tvořenou osami  $\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_{i+1}$ , směr ( $\pm$ ) libovolný)



# Úmluvy pro popis kinematiky manipulátorů

Khalil-Kleinfingerova úmluva

## Význam geometrických parametrů:

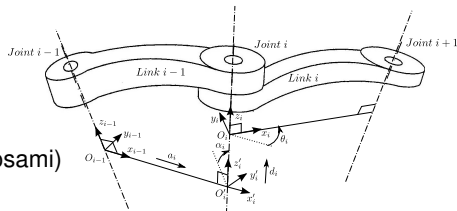
- možné plně popsat 4 tzv. K-K geometrickými parametry

$\alpha_i$  ..... úhel mezi osami  $\mathbf{z}_{i-1}$  a  $\mathbf{z}_i$   
kolem normály  $\mathbf{x}_{i-1}$

$a_i$  ..... vzdálenost mezi počátkem  $\mathbf{O}_{i-1}$   
a osou  $\mathbf{z}_i$  (kolmá vzdálenost mezi osami)

$d_i$  ..... vzdálenost mezi počátky  $\mathbf{O}'_i$  a  $\mathbf{O}_i$

$\theta_i$  ..... úhel mezi osami  $\mathbf{x}_{i-1}$  a  $\mathbf{x}_i$  daný  
kolem osy  $\mathbf{z}_i$



## Role aktivních kloubů v popisu transformací (totožná jako u D-H úmluvy):

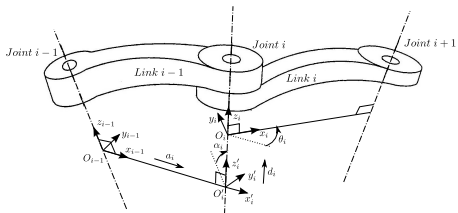
- kloub *Joint i* je typu **P**:  $d_i$  - proměnná definující pohyb kloubu  
 $a_i, \alpha_i, \theta_i$  - konst. def. geom. uspořádání ramene *Link i*
- kloub *Joint i* je typu **R**:  $\theta_i$  - proměnná definující pohyb kloubu  
 $a_i, \alpha_i, d_i$  - konst. def. geom. uspořádání ramene *Link i*

# Úmluvy pro popis kinematiky manipulátorů

Khalil-Kleinfingerova úmluva

**Definice vzájemných transformací dvou po sobě jdoucích s.s.  $F_{i-1}$ ,  $F_i$ :**

- vyber s.s.  $F_{i-1}$
- posuň tento systém podél osy  $\mathbf{x}_{i-1}$  o vzd.  $a_i$  a otoč jej okolo osy  $\mathbf{x}_{i-1}$  o úhel  $\alpha_i \Rightarrow$  s.s.  $F'_i$
- posuň s.s.  $F'_i$  podél osy  $\mathbf{z}'_i$  o vzd.  $d_i$  a otoč jej okolo osy  $\mathbf{z}'_i$  o úhel  $\theta_i \Rightarrow$  dostáváme s.s.  $F_i$



**Homogenní transformační matice  $F_{i-1} \rightarrow F'_i$ ,  $F'_i \rightarrow F_i$ :**

$$T_{i'}^{i-1} = \text{Trans}(\mathbf{x}, a_i) \cdot \text{Rot}(\mathbf{x}, \alpha_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{\alpha_i} & -s_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & c_{\alpha_i} & -s_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_i^{i'} = \text{Trans}(\mathbf{z}, d_i) \cdot \text{Rot}(\mathbf{z}, \theta_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} & 0 & 0 \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} & 0 & 0 \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Úmluvy pro popis kinematiky manipulátorů

Khalil-Kleinfingerova úmluva

**Výsledná transformace přechodu ze s.s.  $F_{i-1}$  do s.s.  $F_i$ :**

$$\begin{aligned} T_i^{i-1} &= T_{i'}^{i-1} \cdot T_i^{i'} = \\ &= \text{Trans}(\mathbf{x}, a_i) \cdot \text{Rot}(\mathbf{x}, \alpha_i) \cdot \text{Trans}(\mathbf{z}, d_i) \cdot \text{Rot}(\mathbf{z}, \theta_i) = \\ &= \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} & 0 & a_i \\ c_{\alpha_i} s_{\theta_i} & c_{\alpha_i} c_{\theta_i} & -s_{\alpha_i} & -s_{\alpha_i} d_i \\ s_{\alpha_i} s_{\theta_i} & s_{\alpha_i} c_{\theta_i} & c_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



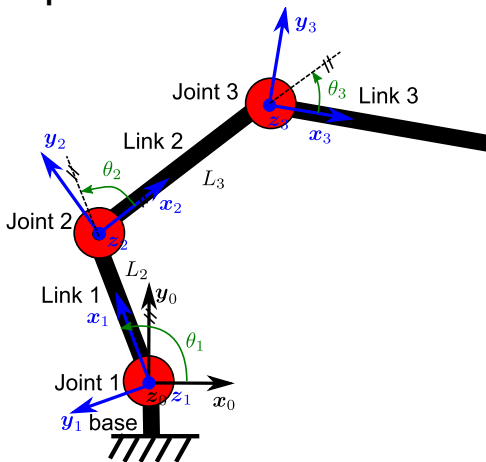
# Úmluvy pro popis kinematiky manipulátorů

## Khalil-Kleinfingerova úmluva - Příklady

### Sériový planární 3 DoF manipulátor:

K-K parametry:

Joint $i$	$d_i$	$\theta_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	0	$\theta_1$	0	0
2	0	$\theta_2$	$L_2$	0
3	0	$\theta_3$	$L_3$	0



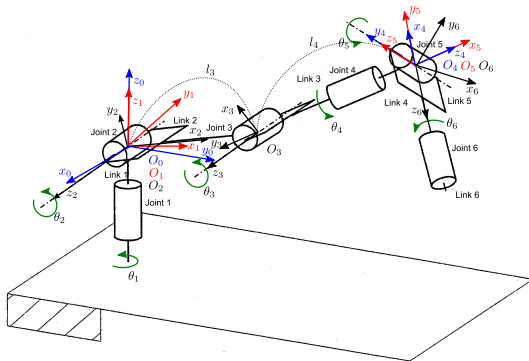
# Úmluvy pro popis kinematiky manipulátorů

## Khalil-Kleinfingerova úmluva - Příklady

### Sériový prostorový antropomorfní manip. se sférickým zápěstím (6 DoF):

K-K parametry:

Joint $i$	$d_i$	$\theta_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	0	$\theta_1$	0	0
2	0	$\theta_2$	0	$\frac{\pi}{2}$
3	0	$\theta_3$	$l_3$	0
4	$l_4$	$\theta_4$	0	$\frac{\pi}{2}$
5	0	$\theta_5$	0	$-\frac{\pi}{2}$
6	0	$\theta_6$	0	$\frac{\pi}{2}$

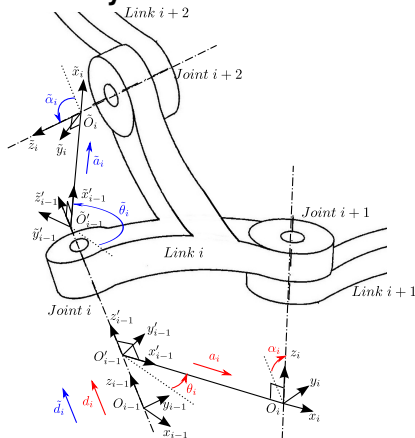


# Úmluvy pro popis kinematiky manipulátorů

Khalil-Kleinfingerova úmluva (rozvětvený kinematický řetězec)

## D-H úmluva pro rozvětvený kinematický řetězec:

- **dle D-H úmluvy:**
  - s.s.  $F_i$  v kloubu *Joint i* (spřažen s ramenem *Link i*)
  - s.s.  $\tilde{F}_i$  v kloubu *Joint i + 2* (opět spřažen s ramenem *Link i*)
- **Otázka:** jaké parametry popisují polohu ramene *Link i* ( $d_i, \theta_i, a_i, \alpha_i$  či  $\tilde{d}_i, \tilde{\theta}_i, \tilde{a}_i, \tilde{\alpha}_i$ ) ???
- **Odpověď:** **Není jednoznačné!**
- **Řešení:** použití K-K úmluvy



# Úmluvy pro popis kinematiky manipulátorů

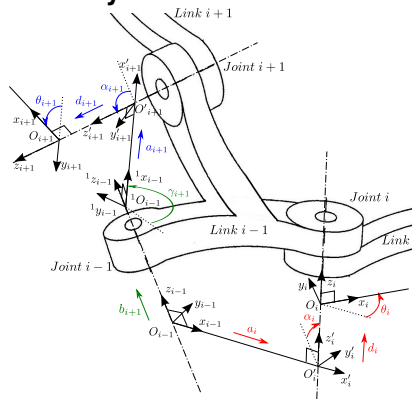
Khalil-Kleinfingerova úmluva (rozvětvený kinematický řetězec)

## K-K úmluva pro rozvětvený kinematický řetězec:

- transformace  $Joint\ i - 1 \rightarrow Joint\ i$  je popsána standardně dle K-K úmluvy 4 K-K parametry  $a_i, \alpha_i, d_i, \theta_i$  ( $F_{i-1}$  a  $F_i$  ve vzájemně specifické poloze)
- definujeme nový pom. s.s.  ${}^1F_{i-1}$  daný  $\mathbf{z}_{i-1} \perp \mathbf{z}_{i+1}$
- transformace  $F_{i-1} \rightarrow {}^1F_{i-1}$  určena pouze 2 parametry  $b_{i+1}, \gamma_{i+1}$

$b_{i+1}$  ... vzd. mezi počátky  $\mathbf{O}_{i-1}, \mathbf{O}'_{i-1}$

$\gamma_{i+1}$  ... úhel mezi osami  $\mathbf{x}_{i-1}$  a  $\mathbf{x}'_{i+1}$



### Definice vzájemné transformace $F_{i-1} \rightarrow F'_{i-1}$ :

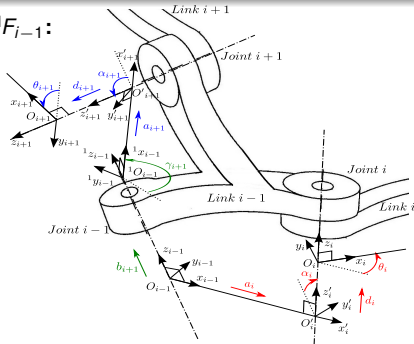
- posuň ss.  $F_{i-1}$  podél osy  $\mathbf{z}_{i-1}$  o vzd.  $b_{i-1}$  a otoč jej okolo osy  $\mathbf{z}_{i-1}$  o úhel  $\gamma_{i-1}$   
 $\Rightarrow$  s.s.  ${}^1F'_{i-1}$

# Úmluvy pro popis kinematiky manipulátorů

## Khalil-Kleinfingerova úmluva (rozvětvený kinematický řetězec)

**Homogenní transformační matice  $F_{i-1} \rightarrow {}^1F_{i-1}$ :**

$$\begin{aligned} T_{1_{i-1}}^{i-1} &= \text{Trans}(\mathbf{z}, b_{i+1}) \cdot \text{Rot}(\mathbf{z}, \gamma_{i+1}) = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b_{i+1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c\gamma_{i+1} & -s\gamma_{i+1} & 0 & 0 \\ s\gamma_{i+1} & c\gamma_{i+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} c\gamma_{i+1} & -s\gamma_{i+1} & 0 & 0 \\ s\gamma_{i+1} & c\gamma_{i+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b_{i+1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



**Transformace  ${}^1F_{i-1} \rightarrow F_{i+1}$  dána opět dle K-K úmluvy ( $a_{i+1}, \alpha_{i+1}, d_{i+1}, \theta_{i+1}$ ):**

$$\begin{aligned} T_{i+1}^{1_{i-1}} &= \text{Trans}(\mathbf{x}, a_{i+1}) \cdot \text{Rot}(\mathbf{x}, \alpha_{i+1}) \cdot \text{Trans}(\mathbf{z}, d_{i+1}) \cdot \text{Rot}(\mathbf{z}, \theta_{i+1}) = \\ &= \begin{bmatrix} c\theta_{i+1} & -s\theta_{i+1} & 0 & a_{i+1} \\ c\alpha_{i+1}s\theta_{i+1} & c\alpha_{i+1}c\theta_{i+1} & -s\alpha_{i+1} & -s\alpha_{i+1}d_{i+1} \\ s\alpha_{i+1}s\theta_{i+1} & s\alpha_{i+1}c\theta_{i+1} & c\alpha_{i+1} & c\alpha_{i+1}d_{i+1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

# Úmluvy pro popis kinematiky manipulátorů

Khalil-Kleinfingerova úmluva (rozvětvený kinematický řetězec)

**Výsledná transformace přechodu ze s.s.  $F_{i-1}$  do s.s.  $F_{i+1}$ :**

$$\begin{aligned} T_{i+1}^{i-1} &= T_{1j-1}^{i-1} \cdot T_{i+1}^{1j-1} = \\ &= \text{Trans}(\mathbf{z}, b_{i+1}) \cdot \text{Rot}(\mathbf{z}, \gamma_{i+1}) \cdot \text{Trans}(\mathbf{x}, a_{i+1}) \cdot \text{Rot}(\mathbf{x}, \alpha_{i+1}) \cdot \text{Trans}(\mathbf{z}, d_{i+1}) \cdot \text{Rot}(\mathbf{z}, \theta_{i+1}) = \\ &= \begin{bmatrix} c_{\gamma_{i+1}} c_{\theta_{i+1}} - s_{\gamma_{i+1}} c_{\alpha_{i+1}} s_{\theta_{i+1}} & -c_{\gamma_{i+1}} s_{\theta_{i+1}} - s_{\gamma_{i+1}} c_{\alpha_{i+1}} c_{\theta_{i+1}} & s_{\gamma_{i+1}} s_{\alpha_{i+1}} & \\ s_{\gamma_{i+1}} c_{\theta_{i+1}} + c_{\gamma_{i+1}} c_{\alpha_{i+1}} s_{\theta_{i+1}} & -s_{\gamma_{i+1}} s_{\theta_{i+1}} + c_{\gamma_{i+1}} c_{\alpha_{i+1}} c_{\theta_{i+1}} & -c_{\gamma_{i+1}} s_{\alpha_{i+1}} & \\ s_{\alpha_{i+1}} s_{\theta_{i+1}} & s_{\alpha_{i+1}} c_{\theta_{i+1}} & c_{\alpha_{i+1}} & \\ 0 & 0 & 0 & \\ & s_{\gamma_{i+1}} s_{\alpha_{i+1}} d_{i+1} + c_{\gamma_{i+1}} a_{i+1} & & \\ & -c_{\gamma_{i+1}} s_{\alpha_{i+1}} d_{i+1} + s_{\gamma_{i+1}} a_{i+1} & & \\ & c_{\alpha_{i+1}} d_{i+1} + b_{i+1} & & \\ & 1 & & \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**Pozn.:** parametry  $b_{i+1}$ ,  $\gamma_{i+1}$  jsou konst. geom. parametry (tvar *Link*  $i - 1$ )

# Přímý geometrický model pro SM (DGM)

- **Obecně:**

Jaká bude poloha koncového efektoru manipulátoru (zobecněné souřadnice  $\mathbf{X}$ ), pokud známe polohy jeho kloubů (kloubové souřadnice  $\mathbf{Q}$ )?

- **Matematicky:**

$$\mathbf{X} = \mathbf{F}(\mathbf{Q}, \xi)$$

kde  $\xi$  ... návrhové (geometrické) parametry manipulátoru

- **S ohledem na zavedené úmluvy pro popis kin. řetězců (D-H, K-K úmluva):**

Vyjádření postupné transformace mezi s.s. jednotlivých ramen manipulátoru + skládání transformací

- Předpokládejme  $n$  kloubových souřadnic  $\mathbf{Q}$  ve tvaru:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}, \quad \text{kde } q_i = \begin{cases} \theta_i, & \text{pokud } Joint\ i \text{ je typu } \mathbf{R} \\ d_i, & \text{pokud } Joint\ i \text{ je typu } \mathbf{P} \end{cases}$$

# Využití přímého geometrického modelu

- téměř vždy lze měřit pouze polohy aktuátorů  $\mathbf{Q}$  (enkodery pohonů) nikoli polohu konc. efektoru  $\mathbf{X}$  - DGM:  $\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{X}$
- určení polohy koncového efektoru po zapnutí manipulátoru ze známé polohy z enkodérů aktuátorů
- plánování trajektorie z aktuálně dosažené polohy konc. efektoru do nové zadané polohy  
Např.: k naplánování translačního pohybu po přímce z akt. polohy konc. efektoru potřebujeme znát počáteční (rekonstruovaný z  $\mathbf{Q}$ ) a koncový bod přímky (zadaný)
- v kalibračních algoritmech (metody opravy geometrických parametrů manipulátoru podle skutečného měření)  
Např.: Přesné specializované kalibrační zařízení dokáže měřit polohu (pozici a orientaci) konc. efektoru  $\mathbf{X}^*$ , pomocí DGM lze z odpovídající měřené polohy aktuátorů  $\mathbf{Q}$  určit předpokládanou polohu konc. efektoru  $\mathbf{X}$  (závislou na hodnotách geometrických parametrů  $\xi$ ). Porovnání  $\mathbf{X}$  a  $\mathbf{X}^* \Rightarrow$  korekce  $\xi$
- atd.



# Přímý geometrický model pro SM

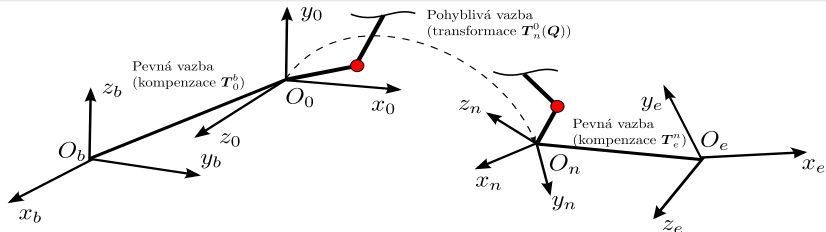
## Kompensace polohy základny a koncového efektoru

### Kompensace polohy koncového základny a koncového efektoru:

- první ( $F_0$ ) a poslední ( $F_n$ ) s.s. manipulátoru určen (alespoň částečně) dle úmluvy pro zavedení s.s. (počátky s.s. nemusí ani ležet ve středech kloubů!)
- **kompensace polohy základny** - hom. transform. matice  $T_0^b$  nebo  $T_0^{-1}$   
 $\Rightarrow$  umístění celého manipulátoru (s.s.  $F_0$ ) vzhledem k báзовému s.s.  $F_b$  nebo  $F_0^{-1}$   
**Např.:** umístění manipulátoru na výrobní lince ( $F_b, F_{-1} \dots$  s.s. výrobní linky)
- **kompensace polohy konc. efektoru** - hom. transform. matice  $T_e^n$  nebo  $T_{n+1}^n$   
 $\Rightarrow$  umístění s.s. konc. efektoru (s.s.  $F_e$  nebo  $F_{n+1}$ ) vzhledem k poslednímu s.s.  $F_n$   
**Např.:** umístění pracovního nástroje na koncovém efektoru ( $F_e, F_{n+1} \dots$  s.s. pracovního nástroje)
- hom. transform. matice  $T_0^b$  nebo  $T_0^{-1}$  a  $T_e^n$  nebo  $T_{n+1}^n$  jsou **konstantní** matice (vyjma např. mobilních robotů)

# Přímý geometrický model pro SM

## Kompensace polohy základny a koncového efektoru



**Přímý geometrický model lze tedy vyjádřit:**

$$\mathbf{X} = \mathbf{T}_0^b \cdot \prod_{i=1}^n \mathbf{T}_i^{i-1}(q_i, \xi) \cdot \mathbf{T}_e^n = \mathbf{F}(\mathbf{Q}, \xi)$$

- $\mathbf{T}_i^{i-1}(q_i, \xi)$  je hom. trans. matice definující polohu s.s.  $F_i$  vzhledem k s.s.  $F_{i-1}$  (proměnná matice závislá na aktuální poloze kloubové souřadnice  $q_i$ )
- $\mathbf{T}_0^b, \mathbf{T}_e^n$  jsou konst. hom. trans. matice (kompensace polohy základny a konc. ef.)
- $\xi$  jsou geometrické návrhové parametry manipulátoru (D-H respektive K-K parametry nereprezentující polohy aktuátorů)
- výsledná polohy konc. efektoru  $\mathbf{T}_e^b = \mathbf{X} \Rightarrow$  hom. transform matice:  
 $\mathbf{r}_e^b = \mathbf{T}_e^b[1 : 3, 4] \dots$  pozice,  $\mathbf{R}_e^b = \mathbf{T}_e^b[1 : 3, 1 : 3] \dots$  orientace

# Přímý geometrický model pro SM

## Příklady (D-H úmluva), Sériový planární 2DoF manipulátor (1/3)

### Sériový planární 2DoF manipulátor:

D-H parametry:

Joint $i$	$d_i$	$\theta_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	0	$\theta_1$	$L_1$	0
2	0	$\theta_2$	$L_2$	0

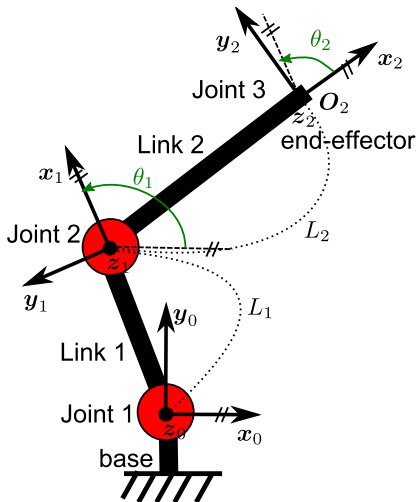
Kloubové souřadnice:  $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$

Zobecněné souřadnice:  $\mathbf{X} = \mathbf{O}_2^{\mathbf{O}_1}[1 : 2]$

Geometrické parametry:  $\xi = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}$

Hom. trans. matice:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_i^{i-1} &= \text{Trans}(\mathbf{z}, d_i) \cdot \text{Rot}(\mathbf{z}, \theta_i) \cdot \\ &\quad \cdot \text{Trans}(\mathbf{x}, a_i) \cdot \text{Rot}(\mathbf{x}, \alpha_i) = \\ &= \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} c_{\alpha_i} & s_{\theta_i} s_{\alpha_i} & a_i c_{\theta_i} \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i} c_{\alpha_i} & -c_{\theta_i} s_{\alpha_i} & a_i s_{\theta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



# Přímý geometrický model pro SM

## Příklady (D-H úmluva), Sériový planární 2DoF manipulátor (2/3)

Homogenní transformační matice:

$$\mathbf{T}_1^0 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & c_1 \cdot L_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & s_1 \cdot L_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_2^1 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & c_2 \cdot L_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & s_2 \cdot L_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} s_i &= \sin(\theta_i) \\ c_i &= \cos(\theta_i) \end{aligned}$$

$$\mathbf{T}_2^0 = \mathbf{T}_1^0 \cdot \mathbf{T}_2^1 = \begin{bmatrix} c_1 c_2 - s_1 s_2 & -c_1 s_2 - s_1 c_2 & 0 & c_1 c_2 L_2 - s_1 s_2 L_2 + c_1 L_1 \\ s_1 c_2 + c_1 s_2 & c_1 c_2 - s_1 s_2 & 0 & s_1 c_2 L_2 + c_1 s_2 L_2 + s_1 L_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

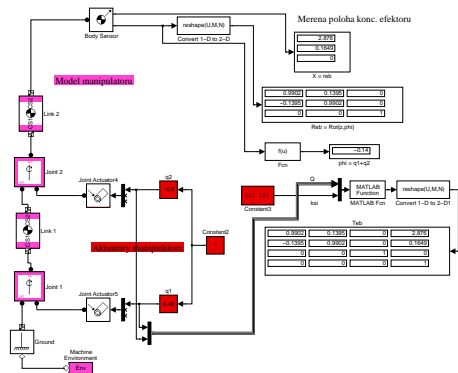
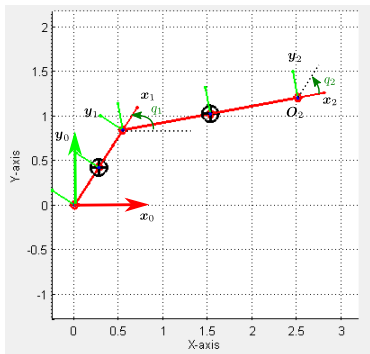
aplikace součtových vzorců:  $s_{x+y} = s_x c_y + c_x s_y$ ,  $c_{x+y} = c_x c_y - s_x s_y$

$$\mathbf{T}_2^0 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & L_2 c_{12} + L_1 c_1 \\ s_{12} & c_{12} & 0 & L_2 s_{12} + L_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_2^0 & \mathbf{r}_{0,2}^0 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} s_{ij} &= \sin(\theta_i + \theta_j) \\ c_{ij} &= \cos(\theta_i + \theta_j) \end{aligned}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{r}_{0,2}^0[1 : 2] = \begin{bmatrix} L_2 c_{12} + L_1 c_1 \\ L_2 s_{12} + L_1 s_1 \end{bmatrix}$$

## Příklady (D-H úmluva), Sériový planární 2DoF manipulátor (3/3)

### Model v SimMechanics:



# Přímý geometrický model pro SM

## Příklady (D-H úmluva), Sériový cylindrický 3DoF manipulátor (1/3)

### Sériový cylindrický 3DoF manipulátor:

D-H parametry:

Joint $i$	$d_i$	$\theta_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	$L_1$	$\theta_1$	0	0
2	$d_2$	0	0	$-\frac{\pi}{2}$
3	$d_3$	0	0	0

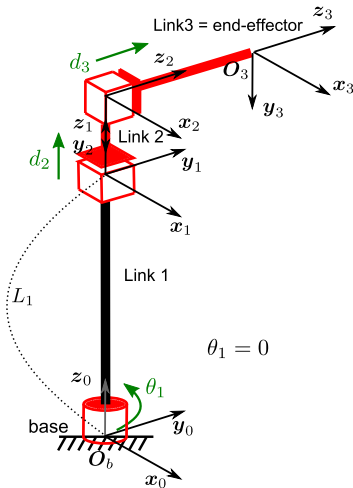
Kloubové souřadnice:  $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$

Zobecněné souřadnice:  $\mathbf{X} = \mathbf{O}_3^0$

Geometrické parametry:  $\xi = [L_1]$

Hom. trans. matice:

$$\begin{aligned} T_i^{i-1} = & \text{Trans}(\mathbf{z}, d_i) \cdot \text{Rot}(\mathbf{z}, \theta_i) \cdot \\ & \cdot \text{Trans}(\mathbf{x}, a_i) \cdot \text{Rot}(\mathbf{x}, \alpha_i) \end{aligned}$$



# Přímý geometrický model pro SM

## Příklady (D-H úmluva), Sériový cylindrický 3DoF manipulátor (2/3)

Homogenní transformační matice:

$$\mathbf{T}_1^0 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_2^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_3^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

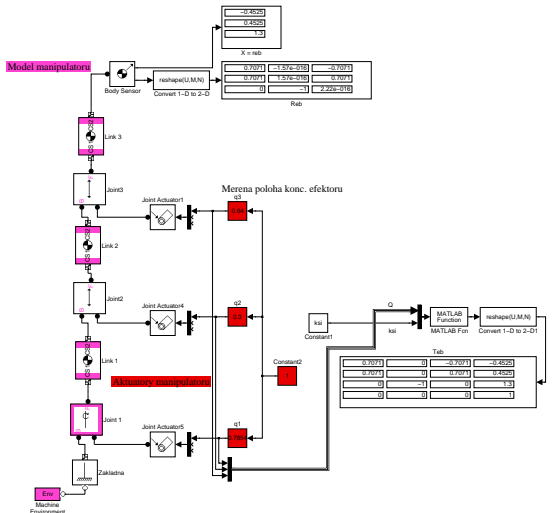
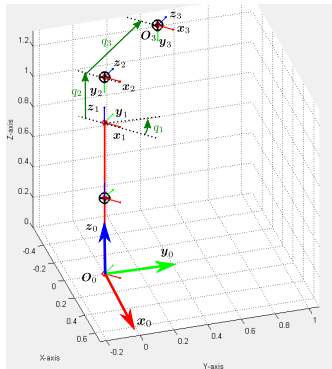
$$\mathbf{T}_3^0 = \mathbf{T}_1^0 \cdot \mathbf{T}_2^1 \cdot \mathbf{T}_3^2 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & -s_1 d_3 \\ s_1 & 0 & c_1 & c_1 d_3 \\ 0 & -1 & 0 & d_2 + L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{r}_{0,3}^0 = \begin{bmatrix} -s_1 d_3 \\ c_1 d_3 \\ d_2 + L_1 \end{bmatrix}$$

# Přímý geometrický model pro SM

## Příklady (D-H úmluva), Sériový cylindrický 3DoF manipulátor (3/3)

### Model v SimMechanics:





# Přímý geometrický model pro SM

## Příklady (D-H úmluva), Sériový antropomorfní 3DoF manipulátor (1/3)

### Sériový antropomorfní 3DoF manipulátor:

D-H parametry:

Joint $i$	$d_i$	$\theta_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	$L_1$	$\theta_1$	0	$\frac{\pi}{2}$
2	0	$\theta_2$	$L_2$	0
3	0	$\theta_3$	0	$\frac{\pi}{2}$

Kloubové souřadnice:

$$\mathbf{Q} = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3]^T$$

Zobecněné souřadnice:  $\mathbf{X} = \mathbf{O}_e^0$

Geometrické parametry:

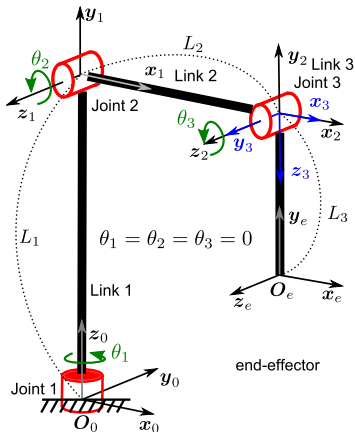
$$\xi = [L_1 \quad L_2 \quad L_3]^T$$

Komp. polohy konc. efektoru.:  $\mathbf{T}_e^3$

$$\mathbf{T}_e^3 = \text{Trans}(\mathbf{z}, L_3) \cdot \text{Rot}(\mathbf{x}, -\frac{\pi}{2})$$

**Pozn.:** Proč kompenzovat polohu konc. efektoru?

→  $F_3$  má pevně určený počátek dle D-H úmluvy, ale např. pracovní nástroj je umístěn ve vzd.  $L_3$  ve směru osy  $z_3$  s jinou orientací.



# Přímý geometrický model pro SM

## Příklady (D-H úmluva), Sériový antropomorfní 3DoF manipulátor (2/3)

Homogenní transformační matice:

$$\begin{aligned} T_1^0 &= \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & -c_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_2^1 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & L_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & L_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ T_3^2 &= \begin{bmatrix} c_3 & 0 & s_3 & 0 \\ s_3 & 0 & -c_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_e^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

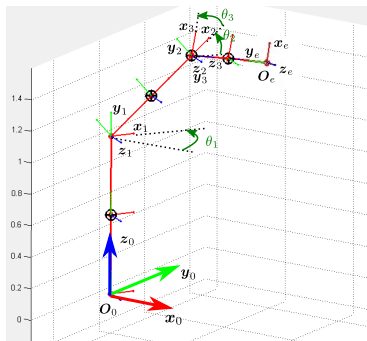
$$T_e^0 = T_1^0 \cdot T_2^1 \cdot T_3^2 \cdot T_e^3 =$$

$$\begin{bmatrix} -c_1 (s_2 s_3 - c_2 c_3) & -c_1 (s_2 c_3 + c_2 s_3) & s_1 & c_1 (L_3 c_2 s_3 + L_3 s_2 c_3 + c_2 L_2) \\ -s_1 (s_2 s_3 - c_2 c_3) & -s_1 (s_2 c_3 + c_2 s_3) & -c_1 & s_1 (L_3 c_2 s_3 + L_3 s_2 c_3 + c_2 L_2) \\ s_2 c_3 + c_2 s_3 & -s_2 s_3 + c_2 c_3 & 0 & L_3 s_2 s_3 - L_3 c_2 c_3 + s_2 L_2 + L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$X = r_{0,e}^0 = \begin{bmatrix} c_1 (L_3 c_2 s_3 + L_3 s_2 s_3 + c_2 L_2) \\ s_1 (L_3 c_2 s_3 + L_3 s_2 s_3 + c_2 L_2) \\ L_3 s_2 s_3 - L_3 c_2 c_3 + s_2 L_2 + L_1 \end{bmatrix}$$

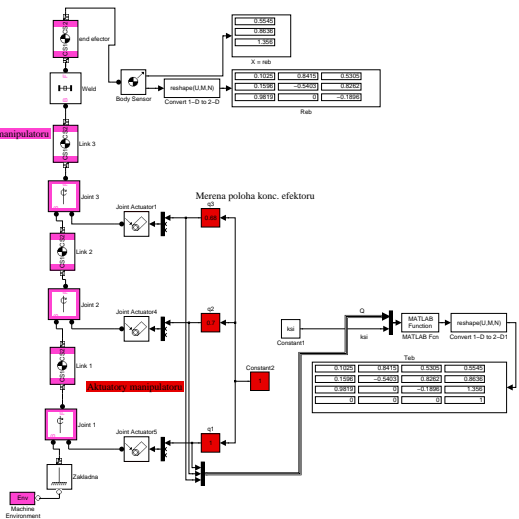
# Přímý geometrický model pro SM

## Příklady (D-H úmluva), Sériový antropomorfní 3DoF manipulátor (3/3)

### Model v SimMechanics:



Model manipulátoru



# Přímý geometrický model pro SM

Příklady (D-H úmluva), 3DoF manipulátor typu sférického zápěstí (1/4)

**3DoF manipulátor typu sférického zápěstí ( $z_0 \cap z_1 \cap z_2$  v 1 bodě!):**

D-H parametry:

Joint $i$	$d_i$	$\theta_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	$L_1$	$\theta_1$	0	$-\frac{\pi}{2}$
2	0	$\theta_2$	0	$\frac{\pi}{2}$
3	$L_2$	$\theta_3$	0	0

Kloubové souřadnice:  $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$

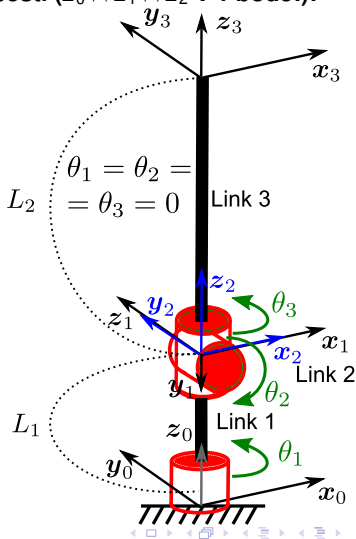
Zobecněné souřadnice:

$$\mathbf{X} = \mathbf{R}_3^0$$

Geometrické parametry:  $\xi = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}$

Hom. trans. matice:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_i^{i-1} &= \text{Trans}(\mathbf{z}, d_i) \cdot \text{Rot}(\mathbf{z}, \theta_i) \cdot \\ &\quad \cdot \text{Trans}(\mathbf{x}, a_i) \cdot \text{Rot}(\mathbf{x}, \alpha_i) \end{aligned}$$



# Přímý geometrický model pro SM

## Příklady (D-H úmluva), 3DoF manipulátor typu sférického zápěstí (2/4)

Homogenní transformační matice:

$$\mathbf{T}_1^0 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_2^1 = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 & 0 \\ s_2 & 0 & -c_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_3^2 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_3^0 = \mathbf{T}_1^0 \cdot \mathbf{T}_2^1 \cdot \mathbf{T}_3^2 = \begin{bmatrix} c_1 c_2 c_3 - s_1 s_3 & -c_1 c_2 s_3 - s_1 c_3 & c_1 s_2 & c_1 s_2 L_2 \\ s_1 c_2 c_3 + c_1 s_3 & -s_1 c_2 s_3 + c_1 c_3 & s_1 s_2 & s_1 s_2 L_2 \\ -s_2 c_3 & s_2 s_3 & c_2 & c_2 L_2 + L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zobecněné souřadnice (neminimální reprezentace maticí rotace):

$$\mathbf{X} = \mathbf{R}_3^0 = \begin{bmatrix} c_1 c_2 c_3 - s_1 s_3 & -c_1 c_2 s_3 - s_1 c_3 & c_1 s_2 \\ s_1 c_2 c_3 + c_1 s_3 & -s_1 c_2 s_3 + c_1 c_3 & s_1 s_2 \\ -s_2 c_3 & s_2 s_3 & c_2 \end{bmatrix}$$

# Přímý geometrický model pro SM

## Příklady (D-H úmluva), 3DoF manipulátor typu sférického zápěstí (3/4)

Zobecněné souřadnice (v minimální reprezentaci - Eulerovy úhly):

*Předpokládejme postupnou rotaci ve schématu ZYZ o úhly  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$ :*

$$\begin{aligned} R_z(\theta_1) \cdot R_y(\theta_2) \cdot R_z(\theta_3) = \\ = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_2 & 0 & c_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = R_3^0 \end{aligned}$$

Zobecněné souřadnice koncového efektoru sférického zápěstí lze vyjádřit **Eulerovými úhly dle schématu ZYZ**:

$$\mathbf{X} = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3]^T$$

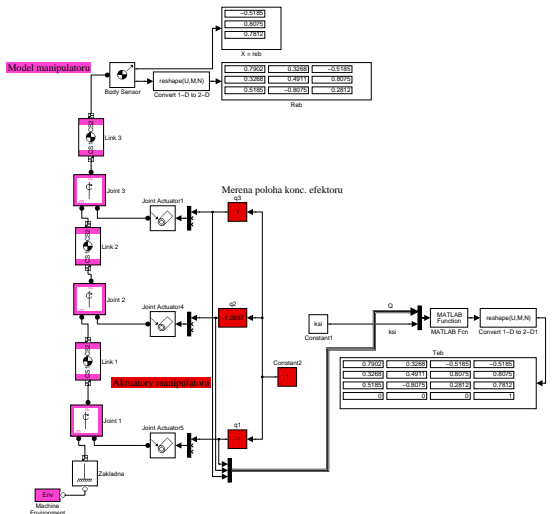
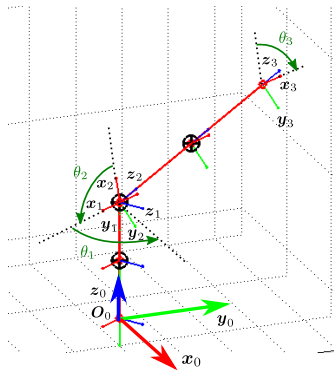
**Pozn.:** Singularita v reprezentaci Eulerovými úhly ( $\theta_2 = 0$  resp.  $\theta_2 = \pi$ ):

$$R_3^0 = \begin{bmatrix} c_{\theta_1+\theta_3} & -s_{\theta_1+\theta_3} & 0 \\ s_{\theta_1+\theta_3} & c_{\theta_1+\theta_3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ resp. } R_3^0 = \begin{bmatrix} -c_{\theta_1-\theta_3} & -s_{\theta_1-\theta_3} & 0 \\ -s_{\theta_1-\theta_3} & c_{\theta_1-\theta_3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

# Přímý geometrický model pro SM

Příklady (D-H úmluva), 3DoF manipulátor typu sférického zápěstí (4/4)

## Model v SimMechanics:



# Přímý geometrický model pro SM

## Příklady (D-H úmluva), 6DoF cylin. manipulátor se sférickým zápěstím (1/2)

### 6DoF cylin. manipulátor se sférickým zápěstím:

- napojení 3DoF cylindrického manipulátoru na 3DoF sférické zápěstí
- sfér. zápěstí  $\theta_{1...3} \rightarrow \theta_{4...6}$ ,  $L_1 = 0$  (střed kloubů zápěstí v jediném bodě)

D-H parametry:

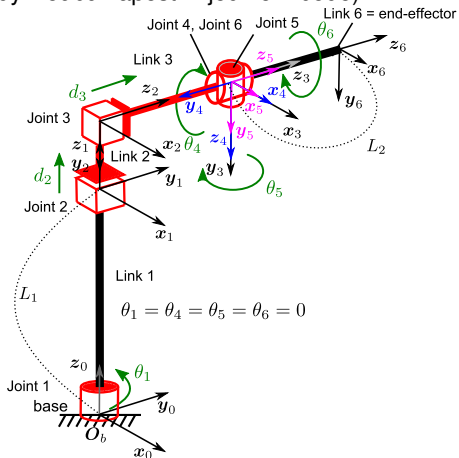
Joint $i$	$d_i$	$\theta_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	$L_1$	$\theta_1$	0	0
2	$d_2$	0	0	$-\frac{\pi}{2}$
3	$d_3$	0	0	0
4	0	$\theta_4$	0	$-\frac{\pi}{2}$
5	0	$\theta_5$	0	$\frac{\pi}{2}$
6	$L_2$	$\theta_6$	0	0

Kloubové souřadnice:

$$\mathbf{Q} = [\theta_1 \ d_2 \ d_3 \ \theta_4 \ \theta_5 \ \theta_6]^T$$

Zobecněné souřadnice:  $\mathbf{X} = \{\mathbf{O}_6^0, \mathbf{R}_6^0\}$

Geometrické parametry:  $\xi = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}$





# Přímý geometrický model pro SM

## Příklady (D-H úmluva), 6DoF cylin. manipulátor se sférickým zápěstím (2/2)

- homogenní trans. matice  $T_3^0$  odpovídá cylindrickému manipulátoru (viz výše)
- homogenní transformační matice  $T_6^3$  je formálně shodná s maticí 3DoF sférického zápěstí (viz výše)

$$T_3^0 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & -s_1 d_3 \\ s_1 & 0 & c_1 & c_1 d_3 \\ 0 & -1 & 0 & d_2 + L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_6^3 = \begin{bmatrix} C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6 & -C_4 C_5 S_6 - S_4 C_6 & C_4 S_5 & C_4 S_5 L_2 \\ S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6 & -S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6 & S_4 S_5 & S_4 S_5 L_2 \\ -S_5 C_6 & S_5 S_6 & C_5 & C_5 L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Výsledná homogenní transformační matice = zobecněné souřadnice:

$$X = T_6^0 = T_3^0 \cdot T_6^3$$

# Přímý geometrický model pro SM

## Příklady (D-H úmluva), 6DoF antrop. manipulátor se sférickým zápěstím (1/2)

### 6DoF antrop. manipulátor se sférickým zápěstím:

- napojení 3DoF antropomorfního manipulátoru na 3DoF sférické zápěstí
- sfér. zápěstí  $\theta_{1...3} \rightarrow \theta_{4...6}$ ,  $L_1 \rightarrow L_3$ ,  $L_2 \rightarrow L_4$  (střed kloubů zápěstí v jediném bodě)

D-H parametry:

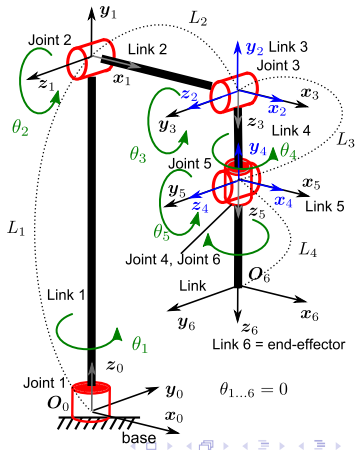
Joint $i$	$d_i$	$\theta_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	$L_1$	$\theta_1$	0	$\frac{\pi}{2}$
2	0	$\theta_2$	$L_2$	0
3	0	$\theta_3$	0	$\frac{\pi}{2}$
4	$L_3$	$\theta_4$	0	$-\frac{\pi}{2}$
5	0	$\theta_5$	0	$\frac{\pi}{2}$
6	$L_4$	$\theta_6$	0	0

Kloubové souřadnice:

$$\mathbf{Q} = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3 \quad \theta_4 \quad \theta_5 \quad \theta_6]^T$$

Zobecněné souřadnice:  $\mathbf{X} = \{\mathbf{O}_6^0, \mathbf{R}_6^0\}$

Geom. par.:  $\xi = [L_1 \quad L_2 \quad L_3 \quad L_4]^T$



# Přímý geometrický model pro SM

## Příklady (D-H úmluva), 6DoF antrop. manipulátor se sférickým zápěstím (2/2)

- homogenní trans. matice  $T_3^0$  odpovídá antropomorfnímu manipulátoru (viz výše, bez uvažování kompenzace  $T_\theta^3$ )
- homogenní transformační matice  $T_6^3$  je formálně shodná s maticí 3DoF sférického zápěstí (viz výše)

$$T_3^0 = \begin{bmatrix} -C_1 (S_2 S_3 - C_2 S_3) & S_1 & C_1 (S_2 S_3 + C_2 S_3) & C_1 C_2 L_2 \\ -S_1 (S_2 S_3 - C_2 S_3) & -C_1 & S_1 (S_2 S_3 + C_2 S_3) & S_1 C_2 L_2 \\ S_2 S_3 + C_2 S_3 & 0 & S_2 S_3 - C_2 S_3 & S_2 L_2 + L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_6^3 = \begin{bmatrix} C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6 & -C_4 C_5 S_6 - S_4 C_6 & C_4 S_5 & C_4 S_5 L_4 \\ S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6 & -S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6 & S_4 S_5 & S_4 S_5 L_4 \\ -S_5 C_6 & S_5 S_6 & C_5 & C_5 L_4 + L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Výsledná homogenní transformační matice = zobecněné souřadnice:

$$X = T_6^0 = T_3^0 \cdot T_6^3$$

Děkuji za pozornost.

Dotazy?