



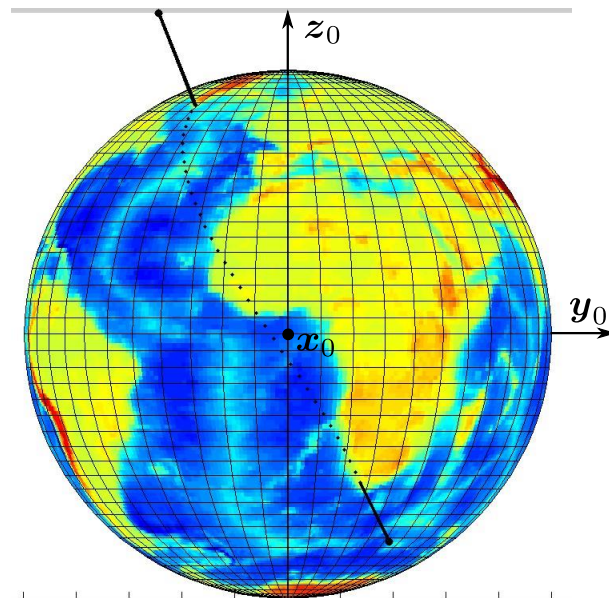
**FAKULTA
APLIKOVANÝCH VĚD
ZÁPADOČESKÉ
UNIVERZITY
V PLZNI**

**URM - SP
Globus a 3DoF planární manipulátor**

Semestrální práce z předmětu URM (zadání), 2014/2015:

1. Vyznačte na globusu cestu z jihu Grónska na jih Afriky, viz Obrázek 1. V počáteční a cílové destinaci bude „zapíchnutý špendlík“ směřující do středu zeměkoule. Zeměpisné souřadnice destinací jsou následující:

- **jih Grónska:** délka: -44.296875° , šířka: 60.152442°
- **jih Afriky:** délka: 19.467773° , šířka: -34.234512°



Obrázek 1: Glóbus a vyznačená trajektorie s s.s. F_0

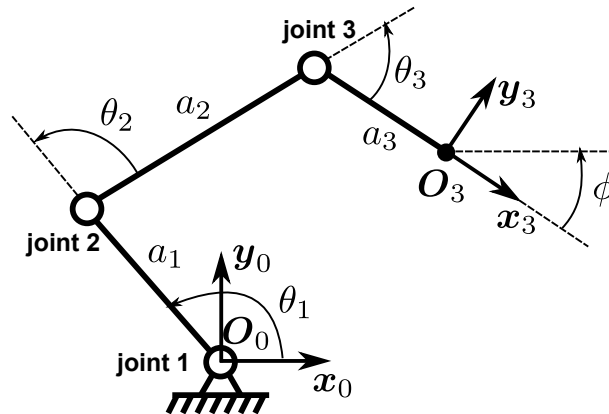
K výpočtu souřadnic bodů a vektorů využijte skládání homogenních transformačních matic. Pro vykreslení Zeměkoule v poloze, kde s.s. F_0 je zaveden s osou x_0 procházející nultým poledníkem a osou z_0 procházející póly, použijte následující kód v Matlabu:

```
% vykreslení globu
[x,y,z] = sphere(50);
x = -x;
y = -y;
load topo
props.FaceColor= 'texture';
props.Cdata = topo;
surface(x,y,z,props);
xlabel('x_0')
ylabel('y_0')
zlabel('z_0')
axis equal
```

2. Sestavte geometrický popis 3 DoF planárního manipulátoru, viz Obrázek 2, délky ramen budou voleny:

a_1	a_2	a_3
2	1.5	0.5

- (a) Vyřešte DGM pomocí D-H úmluvy s využitím homogenních transformačních matic.
 (b) Vyřešte IGM manipulátoru, diskutujte a znázorněte případná vícenásobná řešení úlohy.
 (c) Vytvořte simulační model v prostředí Matlab/Simulink/SimMechanics (k parametrům jednotlivých bloků můžete přímo využít prvky hom. trans. matic pro kloubové souřadnice v domovské poloze manipulátoru).



Obrázek 2: 3 DoF planární manipulátor

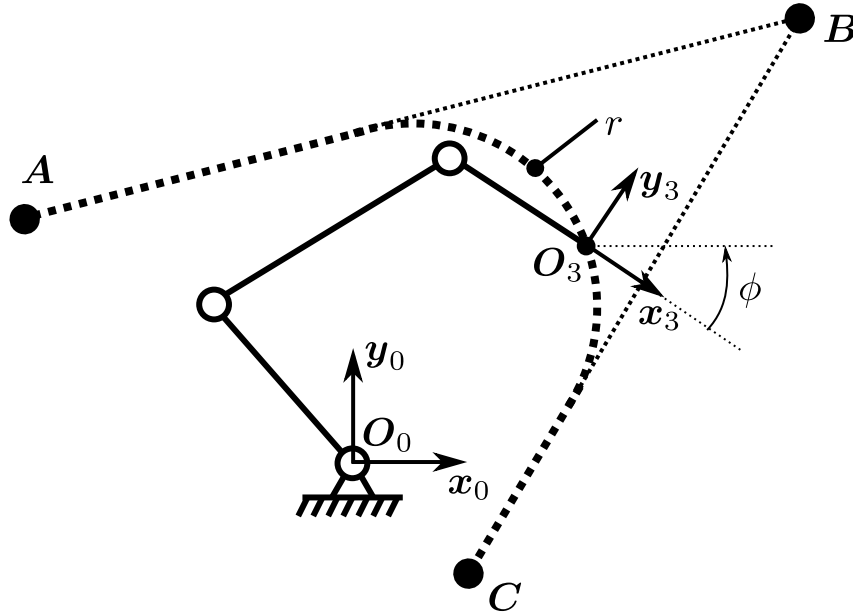
3. Sestavte kinematický popis manipulátoru - tzn. řešení POKÚ a IOKÚ okamžité kinematické úlohy (pro rychlosti i zrychlení)
- (a) Vypočtete symbolicky analytický (= kinematický) jakobián a jeho derivaci přímou derivací polohových závislostí a sestavte algoritmus pro výpočet POKÚ
 (b) Sestavte algoritmus pro výpočet IOKÚ (diskutujte problémy při řešení IOKÚ)
4. Vyřešte generátor trajektorie manipulátoru dle uvedeného schématu, viz Obrázek 3:
- Trajektorie se skládá z přímkových a kružnicových dráh, která určuje translační složku pohybu konc. efektoru (souřadnice x_3, y_3 $z_3 = 0$ bodu O_3), složka orientace (souřadnice ϕ) bude volena konstantní.
 - Trajektorie je určena 3 body $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ a poloměrem kružnice r . Napojení přímkových úseků obloukem o poloměru r umožňuje hladké projetí celé trajektorie (spojitost 1. derivace dle parametru trajektorie).
 - Pohyb koncového efektoru po trajektorii bude s konstantní rychlostí v_{max}
 - Blok generátoru trajektorie bude poskytovat časové závislosti polohy, rychlosti a zrychlení konc. efektoru (zobecněné souřadnice).

Parametry generátoru trajektorie:

$$\mathbf{A} = [2, 0.5]^T, \mathbf{B} = [0, 1]^T, \mathbf{C} = [2, 2.5]^T, r = 0.3, v_{max} = 1$$

- (a) Vykreslete časové průběhy zobecněných souřadnic generované generátorem trajektorie (x a y) a jejich příslušné časové derivace

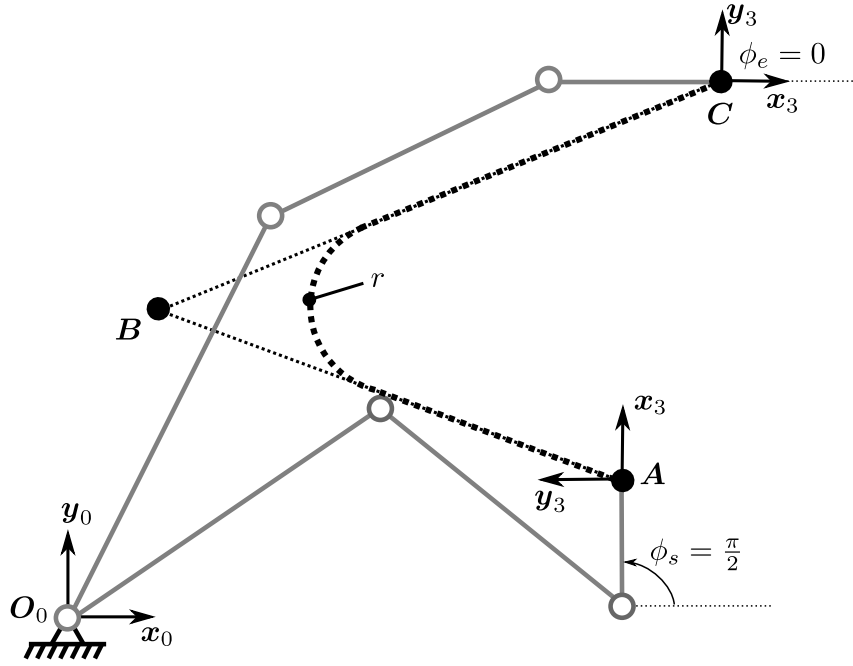
- (b) Vykreslete příslušné kloubové souřadnice a jejich derivace. Translační souřadnice x a y využijte z generátoru trajektorie, souřadnici ϕ volte konstantní $\phi = 0$.
- (c) Konstantní absolutní hodnotu v_{max} translační rychlosti koncového efektoru ověřte přímým odměřováním rychlosti tělesa (body) koncového efektoru v SimMechanicsu (pomocí bloku *Body Sensor*).
- (d) Ověřte funkci DGM a POKÚ (zpětný přepočít generovaných kloubových souřadnic, jejich rychlostí a zrychlení).



Obrázek 3: Generovaná trajektorie

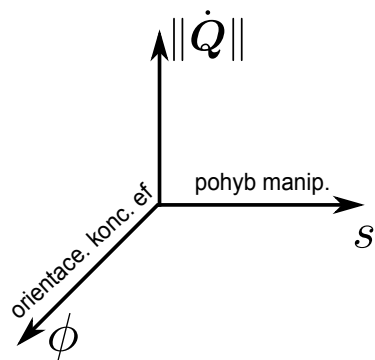
5. Vyšetřete singulární polohy manipulátoru:

- (a) Vypočtete podmínku pro kloubové souřadnice manipulátoru pro robot nacházející se v singulární poloze a diskutujte geometrické uspořádání robotu v této poloze.
 - (b) Znázorněte singulární polohu manipulátoru v prac. prostoru - rovině xy parametrizované zobecněnou souřadnicí ϕ .
6. Nyní předpokládejte, že konc. efektor manipulátoru reprezentuje pracovní nástroj (např. šroubovák), který na počátku a na konci pohybu má utáhnout šroub, tedy orientace konc. efektoru je jednoznačně určena počátečním úhlem $\phi_s = \frac{\pi}{2}$ (na začátku trajektorie pohybu) a koncovým úhlem $\phi_e = 0$ (na konci trajektorie pohybu), viz Obrázek 4.

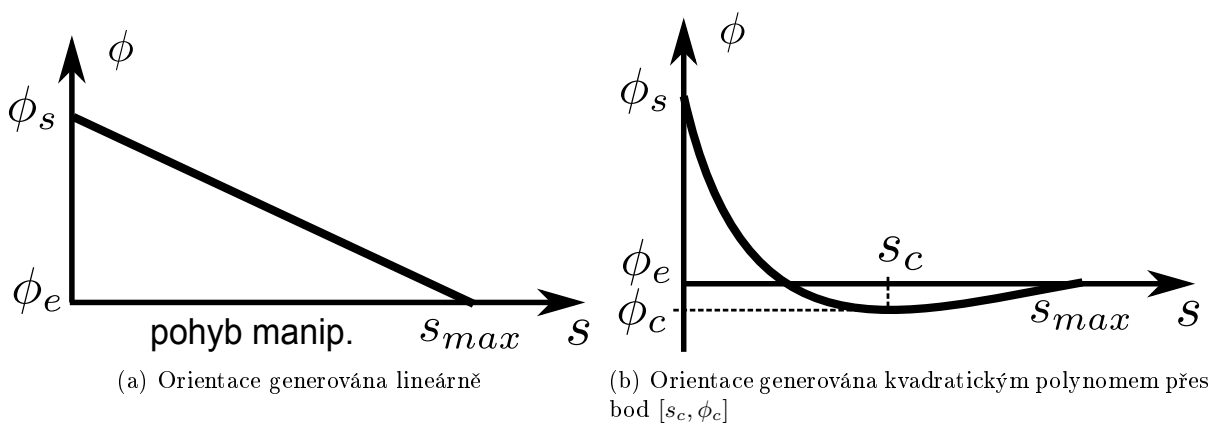


Obrázek 4: Požadovaná trajektorie manipulátoru včetně počáteční a koncové orientace konc. efektoru

- Graficky znázorněte chování normy vektoru rychlostí kl. souřadnic, tzn. $\|\dot{\mathbf{Q}}\|$, podél trajektorie $s \in \langle 0, s_{max} \rangle$ pro hodnoty orientace konc. efektoru v intervalu $\phi \in \langle -0.5, \frac{\pi}{2} \rangle$, viz Obrázek 5.
- Upravte generátor trajektorie tak, aby se na místo konstantní orientace konc. efektoru jeho orientace měnila lineárně podél trajektorie z hodnoty ϕ_s do hodnoty ϕ_e , tzn. generovaný průběh zobecněné souřadnice ϕ je dán Obrázkem 6(a). Znázorněte tento průběh do grafu na Obrázku 5 a znázorněte graficky časové průběhy zobecněných a kloubových souřadnic.
- Diskutujte závislosti singulární polohy manipulátoru se získanými výsledky (časové průběhy kl. souřadnice) a problémy, které v tomto důsledku mohou nastat při řízení reálného systému.
- Vzhledem k faktu, že nás zajímá pouze počáteční ϕ_s a koncová orientace ϕ_e konc. efektoru, navrhnete kvadratickou interpolaci, zobec. souřadnice ϕ tak, abyste zajistili plynulý pohyb manipulátoru (vyvarování se projetí v blízkosti sing. polohy), tzn. generovaný průběh zobecněné souřadnice ϕ je dán Obrázkem 6(b), kde $[s_c, \phi_c]$ je vhodně zvolený interpolační bod. Opět znázorněte interpolovanou křivku do grafu, viz Obrázek 5 a znázorněte graficky časové průběhy zobecněných a kloubových souřadnic. Porovnejte výsledky pro lineární a kvadratickou interpolaci úhlu ϕ , včetně absolutních hodnot rychlostí a zrychleních kl. souřadnic.



Obrázek 5: Grafické znázornění rychlostí kl. souřadnic podél trajektorie pro různé hodnoty orientace konc. ef.



Obrázek 6: Dvě možnosti generování orientace konc. ef

1 Globus

V tomto úkolu bylo naším cílem vyznačit cestu z bodu A do bodu B. K tomu použijeme transformaci souřadnic. Jedná se o transformaci z 2D do 3D prostoru. Tzn. že převedeme vektor [šířka, délka] na [x,y,z]. Toho docílíme pomocí dvou rotací a jedné translace. Rotace kolem osy z podle zeměpisné délky, ta je daná úhlem γ . Rotace kolem osy y podle zeměpisné šířky je dána úhlem β . Translace ve směru osy x o délku L. Výslednou transformaci tedy získáme složením těchto tří transformací. Rovnice výsledné transformace má následující tvar:

$$T_3^0 = T_1^0 \cdot T_2^1 \cdot T_3^2.$$

Tvar jednotlivých transformačních matic vypočteme pomocí následujícího předpisu:

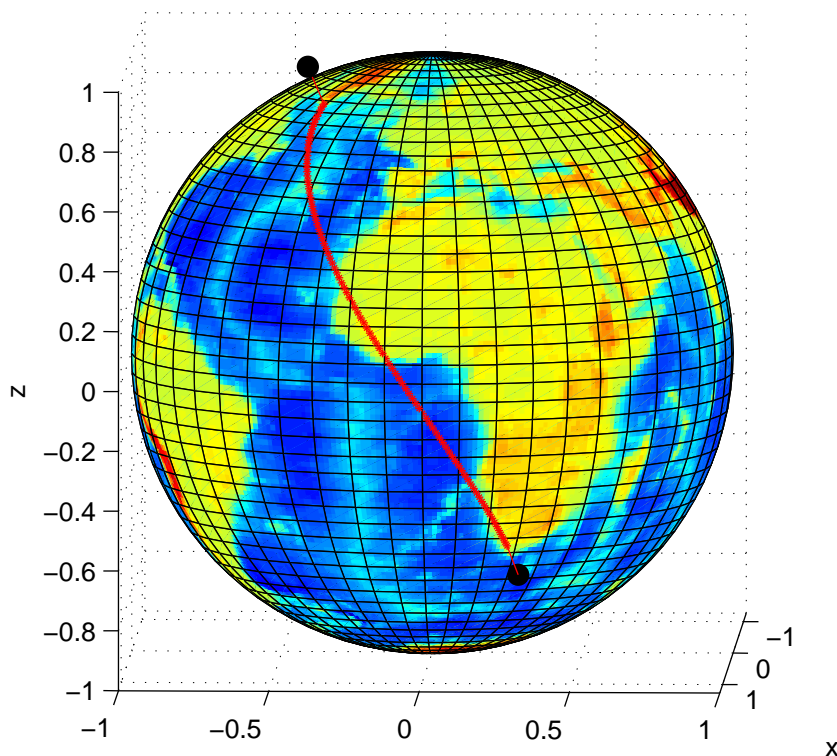
$$T_1^0 = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$T_2^1 = \begin{bmatrix} \cos(-\beta) & 0 & \sin(-\beta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(-\beta) & 0 & \cos(-\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$T_3^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Potom výsledný tvar pro T_3^0 je:

$$T_3^0 = \begin{bmatrix} \cos\gamma \cdot \cos\beta & -\sin\gamma & -\cos\gamma \cdot \sin\beta & L \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma \\ \cos\beta \cdot \sin\gamma & \cos\gamma & -\sin\gamma \cdot \sin\beta & L \cdot \cos\beta \cdot \sin\gamma \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta & L \cdot \sin\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tři prvky v posledním sloupci matice T_3^0 odpovídají vektoru [x,y,z].

Na obrázku číslo 7. je znázorněna vzniklá trajektorie mezi jihem Grónska a jihem Afriky.



Obrázek 7: Cesta vyznačená na globusu

2 3DoF manipulátor

2.1 2. úkol - geometrický popis - DGM a IGM

2.1.1 DGM

Úloha DGM se zabývá určením polohy koncového efektoru manipulátoru, pokud jsou nám známy polohy jeho kloubů. Polohu často označujeme jako zobecněné souřadnice X . Kloubové souřadnice zase písmenem Q . Matematický předpis má potom následující tvar:

$$X = F(Q, \xi).$$

ξ označuje návrhové parametry manipulátoru. Dále budeme postupovat v souladu s D-H úmluvou. D-H parametry planárního manipulátoru jsou v následující tabulce.

i	d_i	θ_i	a_i	α_i
1	0	θ_1	a_1	0
2	0	θ_2	a_2	0
3	0	θ_3	a_3	0

Prvky ve sloupci d_i jsou nulové, protože se jedná o planární manipulátor, protože počátky jednotlivých soustav jsou v jedné rovině. Sloupec α_i je nulový, protože zetové osy jsou navzájem rovnoběžné. Sloupec θ_i představuje proměnné a sloupec s parametrem a_i určuje posun souřadnicového systému o délku daného ramene.

Nyní si můžeme vyjádřit tvary jednotlivých homogenních transformačních matic určených řádky tabulky DH parametrů.

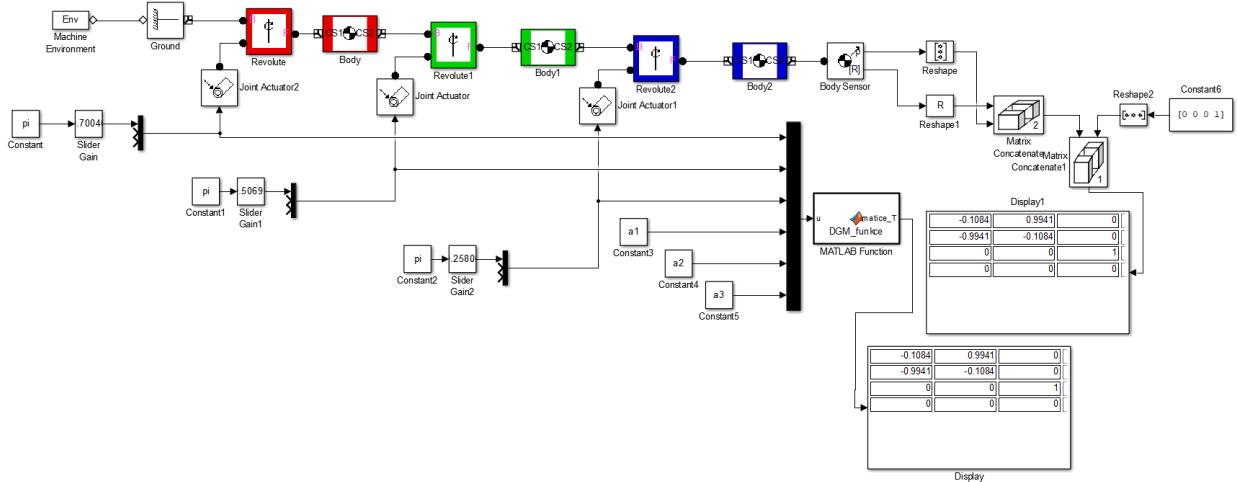
$$T_1^0 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & a_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2^1 = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & a_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^2 = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 & a_3 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pro výpočet DH parametrů jsem si v Matlabu vytvořil funkci DH_parametry. Pomocí výsledné matice T_3^0 jsme schopni určit zobecněné souřadnice koncového bodu našeho manipulátoru z původně zadaných kloubových souřadnic.

$$T_3^0 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & -\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & 0 & a_3 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + a_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) + a_1 \cdot \cos \theta_1 \\ \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & 0 & a_3 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + a_2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) + a_1 \cdot \sin \theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

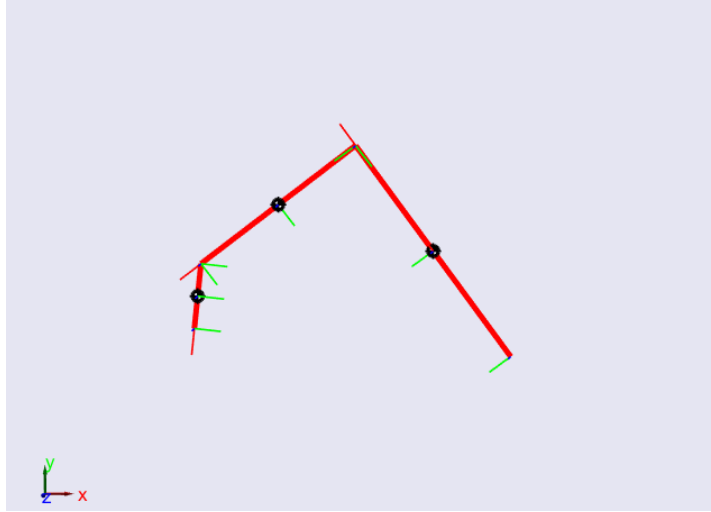


Obrázek 8: Schéma modelu DGM planárního manipulátoru

Z matice T_3^0 lze vypočítat zobecněné souřadnice jako:

$$\begin{aligned} x &= a_3 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + a_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) + a_1 \cdot \cos \theta_1 \\ y &= a_3 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + a_2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) + a_1 \cdot \sin \theta_1 \\ \phi &= \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \end{aligned} \quad (1)$$

Na obrázku číslo 8 je znázorněné schéma modelu sestaveného v Simulinku pomocí knihovny SimMechanics. Na obrázku číslo 9 je znázorněn náhled simulace pro zadané parametry.



Obrázek 9: Planární manipulátor

2.1.2 IGM

Úloha IGM (inverzní geometrická úloha) určuje na základě zobecněných souřadnic kloubové parametry $\theta_1, \theta_2, \theta_3$. Při odvozování matic budeme vycházet z toho, že známe O_3^0 . Potom platí, že:

$$O_2^0 = O_3^0 - a_3 x_3^0.$$

Hodnotu x_3^0 neznáme a proto si ji vyjádříme z matice rotace.

$$R_3^0 = (z, \Phi) = \begin{bmatrix} \cos \Phi & -\sin \Phi & 0 \\ \sin \Phi & \cos \Phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x_3^0, y_3^0, z_3^0]$$

Pohybujeme se v rovině a proto nemusíme uvažovat osu z . Dále dosadíme vektor x_3^0 :

$$O_2^0 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - a_3 \begin{bmatrix} \cos \Phi \\ \sin \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - a_3 \cos \Phi \\ y - a_3 \sin \Phi \end{bmatrix}.$$

Nyní si musíme vyjádřit matici T_2^0 .

$$T_2^0 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) & 0 & a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + a_1 \cos \theta_1 \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 & a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + a_1 \sin \theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pokud spojíme rovnice pro O_2^0 a první dva prvky posledního sloupce matice T_2^0 získáme 2 rovnice:

$$\begin{aligned} x - a_3 \cos \Phi &= a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + a_1 \cos \theta_1, \\ y - a_3 \sin \Phi &= a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + a_1 \sin \theta_1. \end{aligned}$$

Tyto rovnice umocníme, sečteme a za použití součtových vzorců získáme následující vztah:

$$(x - a_3 \cos \Phi)^2 + (y - a_3 \sin \Phi)^2 = a_2^2 + a_1^2 + 2a_1a_2 \cdot \cos \theta_2.$$

Z něj si vyjádříme $\cos \theta_2$ a poté $\sin \theta_2$:

$$\begin{aligned} \cos \theta_2 &= \frac{(x - a_3 \cos \Phi)^2 + (y - a_3 \sin \Phi)^2 - a_2^2 - a_1^2}{2a_1a_2}, \\ \sin \theta_2 &= \pm \sqrt{1 - \cos \theta_2}. \end{aligned}$$

Vznikají nám zde dvě řešení. Já jsem při sestavování modelů pracoval se zápornou hodnotou. V Matlabu použijeme pro vyjádření tuto funkci:

$$\theta_2 = \text{atan2}(\sin \theta_2, \cos \theta_2).$$

Máme tedy vypočtený parametr θ_2 . Parametr θ_1 určíme pomocí stejných dvou rovnic jako v případě parametru θ_2 .

$$\begin{aligned} x - a_3 \cos \Phi &= a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + a_1 \cos \theta_1 \\ y - a_3 \sin \Phi &= a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + a_1 \sin \theta_1 \end{aligned}$$

Pomocí součtových vzorců je upravíme:

$$\begin{aligned} x - a_3 \cos \Phi &= -a_2(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + a_1 \cos \theta_1, \\ y - a_3 \sin \Phi &= a_2(\sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2) + a_1 \sin \theta_1. \end{aligned}$$

Rovnice převedeme do maticového tvaru:

$$\begin{bmatrix} x - a_3 \cos \Phi \\ y - a_3 \sin \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_2 \sin \theta_2 & a_2 \cos \theta_2 + a_1 \\ a_2 \cos \theta_2 + a_1 & -a_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sin \theta_1 \\ \cos \theta_1 \end{bmatrix}.$$

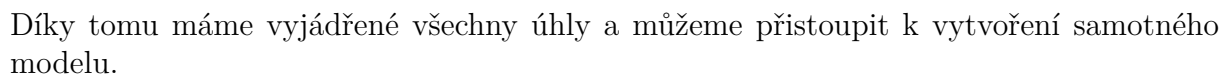
Z toho předpisu si můžeme jednoduše vyjádřit přesný tvar pro $\sin \theta_1$ a $\cos \theta_1$. V Matlabu pro výpočet úhlu θ_1 použijeme:

$$\theta_1 = \text{atan2}(\sin \theta_1, \cos \theta_1)$$

Díky tomu máme vyjádřené všechny úhly a můžeme přistoupit k vytvoření samotného modelu.

Díky tomu máme vyjádřené všechny úhly a můžeme přistoupit k vytvoření samotného modelu.

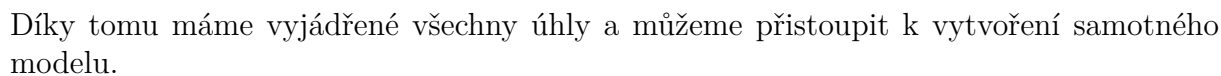
Díky tomu máme vyjádřené všechny úhly a můžeme přistoupit k vytvoření samotného modelu.



Díky tomu máme vyjádřené všechny úhly a můžeme přistoupit k vytvoření samotného modelu.

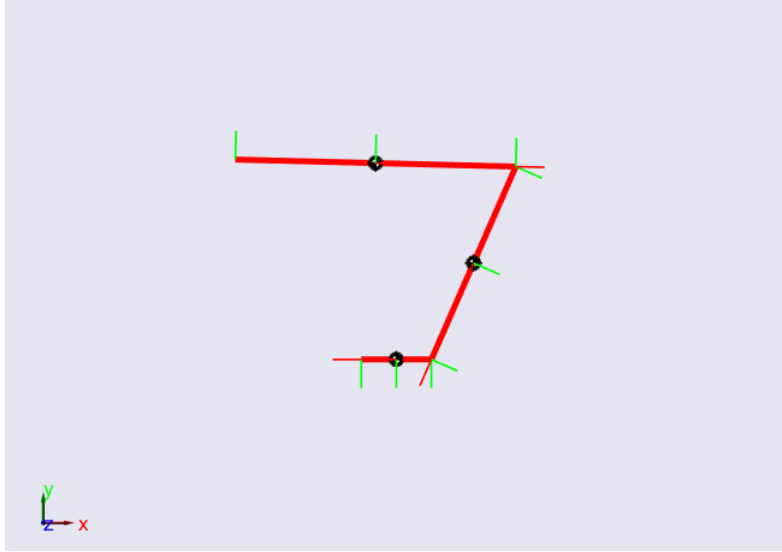
Díky tomu máme vyjádřené všechny úhly a můžeme přistoupit k vytvoření samotného modelu.

Díky tomu máme vyjádřené všechny úhly a můžeme přistoupit k vytvoření samotného modelu.



Díky tomu máme vyjádřené všechny úhly a můžeme přistoupit k vytvoření samotného modelu.

Na obrázku číslo 11 je znázorněno řešení $\sin \theta_2 = -\sqrt{1 - \cos \theta_2}$.



Obrázek 12: Planární manipulátor pro záporné řešení

2.2 3. úkol - kinematiký popis - POKÚ a IOKÚ

Tyto zkratky znamenají přímá okamžitá kinematická úloha a inverzní přímá okamžitá kinematická úloha.

2.2.1 POKÚ

U přímé okamžité kinematické úlohy se jedná o rozšíření úlohy DGM. U DGM jsme měli na vstupu pouze polohu. Tady navíc uvažujeme rychlost a zrychlení. Pro jejich vyjádření použijeme derivaci polohy. Budeme vycházet z rovnic uvedených v DGM ve vztahu číslo 1. Jejich derivací podle času získáme rychlost:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\Phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) - a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) - a_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 \\ a_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) - a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) - a_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}.$$

Dále vytkneme derivace jednotlivých úhlů a zavedeme pro zjednodušení $\theta_{12} = \theta_1 + \theta_2$ a $\theta_{123} = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$. To samé platí pro derivace.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_3 \sin \theta_{123} - a_2 \sin \theta_{12} - a_1 \sin \theta_1 & -a_3 \sin \theta_{123} - a_2 \sin \theta_{12} & -a_1 \sin \theta_1 \\ a_3 \cos \theta_{123} + a_2 \cos \theta_{12} a_1 \cos \theta_1 & a_3 \cos \theta_{123} + a_2 \cos \theta_{12} & a_1 \cos \theta_1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

Tuto soustavu lze zapsat také jako:

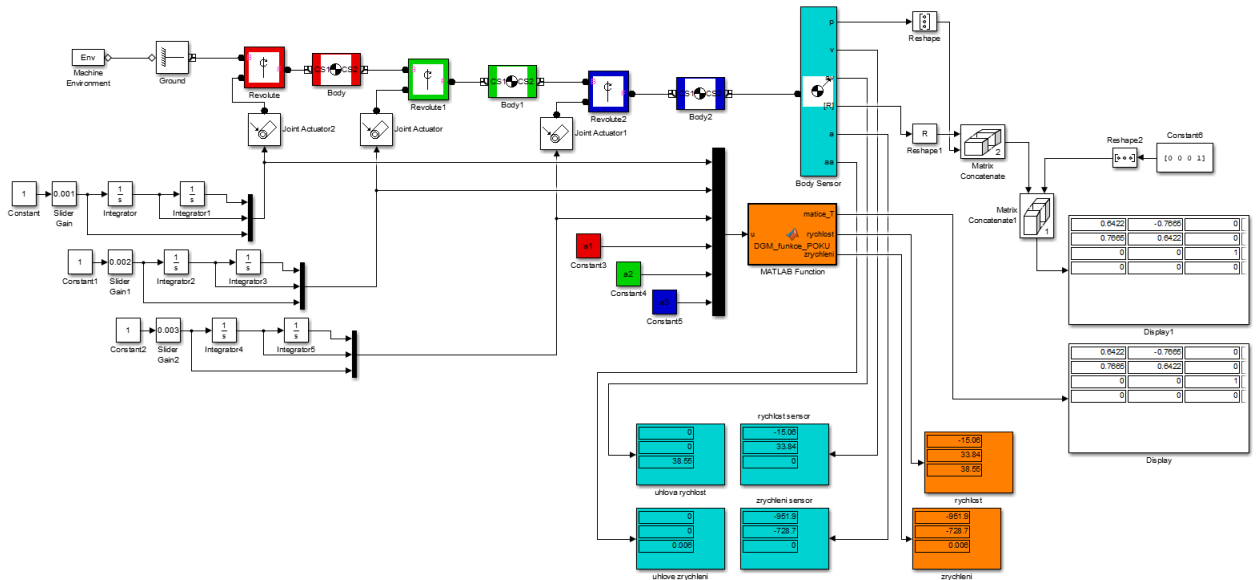
$$\dot{X} = J(Q) \cdot \dot{Q}.$$

$J(Q)$ je Jakobián. Ten nám říká jakou měrou přispívají klouby k pohybu v daném směru. Pokud je $J(Q)$ singulární jedná se o singulární polohu. Zrychlení získáme derivací tohoto vztahu:

$$\ddot{X} = \dot{J}(Q, \dot{Q}) \cdot \dot{Q} + J(Q) \cdot \ddot{Q}.$$

Pro vyjádření nám chybí pouze určit tvar $\dot{J}(Q, \dot{Q})$. Použijeme stejné zjednodušení jako u předchozího případu. Po dosazení do vztahu získáme výsledný vektor pro zrychlení.

$$\dot{J}(Q, \dot{Q}) = \begin{bmatrix} -a_3 \cos \theta_{123} \cdot \dot{\theta}_{123} - a_2 \cos \theta_{12} \cdot \dot{\theta}_{12} - a_1 \cos \theta_1 \cdot \dot{\theta}_1 & -a_3 \cos \theta_{123} \cdot \dot{\theta}_{123} - a_2 \cos \theta_{12} \cdot \dot{\theta}_{12} & -a_3 \cos \theta_{123} \cdot \dot{\theta}_{123} \\ -a_3 \cos \theta_{123} \cdot \dot{\theta}_{123} - a_2 \cos \theta_{12} \cdot \dot{\theta}_{12} - a_1 \cos \theta_1 \cdot \dot{\theta}_1 & -a_3 \cos \theta_{123} \cdot \dot{\theta}_{123} - a_2 \cos \theta_{12} \cdot \dot{\theta}_{12} & -a_3 \cos \theta_{123} \cdot \dot{\theta}_{123} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Obrázek 13: Schéma modelu POKÚ planárního manipulátoru

V modelu jsme opět rozšířili úlohu DGM o rychlost a zrychlení. Výsledné hodnoty jsme porovnali pomocí funkce DGM a získaných dat z robota pomocí bloku Body Sensor.

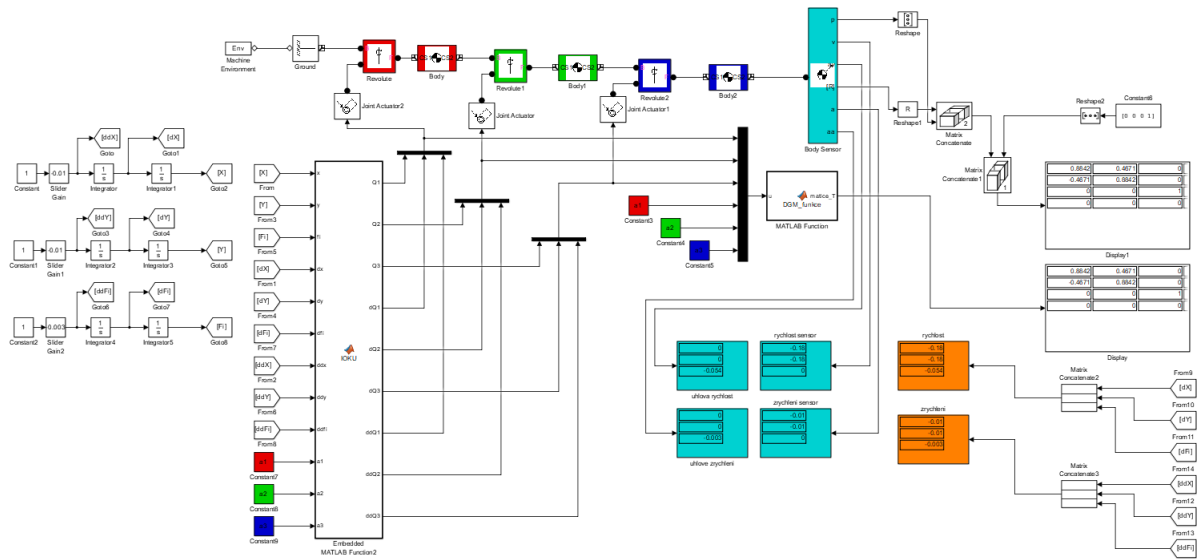
2.2.2 IOKÚ

Inverzní okamžitá kinematická úloha je rozšířením úlohy IGM namísto DGM jako tomu bylo v předchozím případě. Při vyjádření vztahů pro rychlost a zrychlení vyjdeme ze vztahů, které jsme získali při řešení POKÚ. Liší se pouze ve vyjádření vztahů pro $J(Q)$.

$$Q = F^{-1}(X)$$

$$\dot{Q} = J^{-1}(Q) \cdot \dot{X}$$

$$\ddot{Q} = J^{-1}(Q) \cdot (\ddot{X} - \dot{J}(Q, \dot{Q}) \cdot \dot{Q})$$

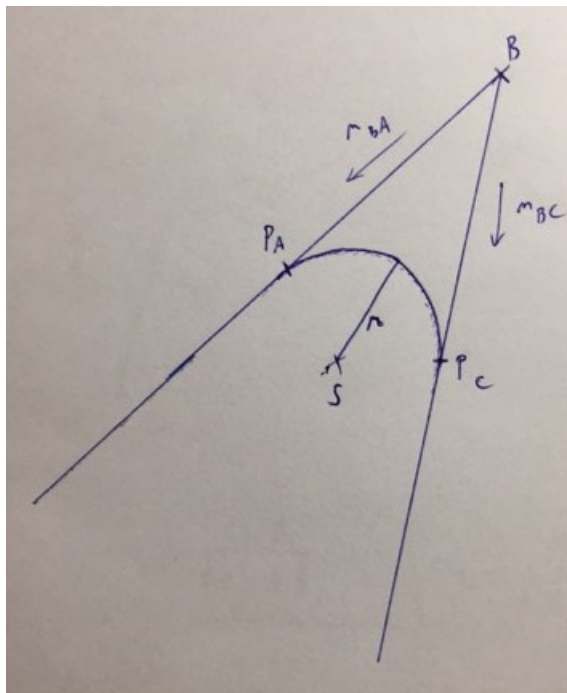


Obrázek 14: Schéma modelu IOKÚ planárního manipulátoru

Vycházeli jsme z modelu pro IGM, který jsme rozšířili o funkci IOKU. Pro správnost výsledků jsme opět provedli porovnání hodnot se senzorů a z funkce DGM.

Při řešení IOKÚ musíme postupovat opačným způsobem než je tomu u POKÚ. Nejprve musíme nalézt ze zadaných zobecněných souřadnic hodnoty pro jednotlivé úhly a teprve poté můžeme přejít k výpočtu analytického jakobiánu pro rychlost a jeho derivaci pro zrychlení. Pro sériové manipulátory lze analytický jakobián nalézt vždy a je jednoznačný. My jsme tento problém mohli vyřešit analyticky, protože náš manipulátor je jednoduchý. Pro složité manipulátory bychom dostali složité mnohačlenné vztahy, které by jsme sice mohli vyřešit pomocí symbolického derivování (Maple, Mathematica), ale výsledné vztahy by bylo velice obtížné použít při návrhu řídicích systémů.

2.3 4. úkol - generátor trajektorie



Obrázek 15: Náčrtek použitý při řešení

Trajektorii budeme navrhovat pouze pro souřadnice x a y , protože se pohybujeme pouze v rovině. Před odvozováním jednotlivých vztahů si nejprve musíme vyjádřit směrové vektory:

$$\begin{aligned} n_{BA} &= \frac{A - B}{\|A - B\|}, \\ n_{BC} &= \frac{C - B}{\|C - B\|}, \\ n_{BS} &= \frac{n_{BA} - n_{BC}}{\|n_{BA} - n_{BC}\|}. \end{aligned}$$

Dále si vyjádříme polohu jednotlivých bodů. Parametry l a k jsou vzdálenosti. Ty získáme v dalších krocích.

$$\begin{aligned} S &= B + n_{BS} \cdot l \\ P_A &= A - n_{BA} \\ P_C &= B + \|P_A - B\| \cdot n_{BC} \end{aligned}$$

Vzdálenost k určíme z předpokladu, že P_{AB} je kolmé na SP_A .

$$\begin{aligned} n_{BA}^T(P_A - S) &= 0 \\ n_{BA}^T(P_A - S) &= n_{BA}^T(A - n_{BA}k - S) \\ n_{BA}(A - S) - n_{BA}^T n_{BA}k &= 0 \quad \rightarrow \quad n_{BA}^T n_{BA} = \|n_{BA}\|^2 = 1 \\ n_{BA}(A - S) - k &= 0 \quad \rightarrow \quad k = n_{BA}(A - S) \end{aligned}$$

Protože P_A leží na kružnici můžeme s jeho pomocí vyjádřit poloměr.

$$\|P_A - S\| = r \quad \rightarrow \quad r = (P_A - S)^T \cdot (P_A - S)$$

Nyní do vzorce dosadíme za S a P_A .

$$\begin{aligned} (P_A - S) &= A - n_{BA}n_{BA}^T(A - B) + n_{BA}n_{BA}^T n_{BS}l - B - n_{BS}l \\ &= A - B - n_{BA}n_{BA}^T(A - B) + (n_{BA}n_{BA}^T n_{BS} - n_{BS}) \cdot l \\ &= (n_{BA}n_{BA}^T n_{BS} - n_{BS}) \cdot l \end{aligned}$$

Závorku označíme jako k_1 , potom :

$$(P_A - S) = k_1 \cdot l.$$

Vyjádříme vzdálenost l :

$$(k_1 l)^T (k_1 l) = r^2 \quad \rightarrow \quad l = \frac{r}{\pm k_1^T k_1}.$$

Také zde dostáváme dvě řešení. Ty se odvíjí od velikosti úhlu při bodu B . Konvexní úhel odpovídá $+$ a nekonvexní $-$. Dále přejdeme k vyjádření parametrizovanému pohybu.

$$\begin{aligned} P_{AB} : \quad & x = A - k_1 n_{BA}, \quad k_1 \in \langle 0, \|A \cdot P_A\| \rangle \\ P_{BC} : \quad & x = P_B - k_2 n_{BC}, \quad k_2 \in \langle 0, \|C \cdot P_C\| \rangle \\ \text{kružnice} : \quad & x = \begin{bmatrix} r \cdot \cos(\Phi_{PA} + \text{smer}\Phi) \\ r \cdot \sin(\Phi_{PA} + \text{smer}\Phi) \end{bmatrix} + S \end{aligned}$$

Parametr smer volíme buď jako 1 nebo -1. Φ_{PA} vypočteme v Matlabu následujícím způsobem:

$$\Phi_{PA} = \text{atan2}((P_A - S)(2), (P_A - S)(1)).$$

Pro generování trajektorie si nyní můžeme vyjádřit jednotlivé parametry. P_{AB} představuje vzdálenost k bodu P_A . P_{AC} je vzdálenost od bodu P_C . Parametr k značí vzdálenost od bodu P_A k bodu P_C .

$$\begin{aligned} P_{AB} : \quad & S_1 = \|P_A - A\| \\ P_{BC} : \quad & S_1 = \|P_C - C\| \\ k : \quad & S_k = r \Delta \Phi \end{aligned}$$

Parametr $\Delta \Phi$ lze definovat pomocí tohoto vzorce:

$$\Delta \Phi = \left(\frac{(P_C - S)^T (P_A - S)}{r^2} \right).$$

Víme, že pro dráhu musí platit, že:

$$S_{max} = S_1 + S_2 + S_k.$$

Z toho vyplývá, že trajektorie se skládá ze tří úseků, pro něž si vyjádříme předepsané chování.

a) $0 \leq S(t) < S_1$

Nejprve uvedeme obecný tvar pro jednotlivé úseky a poté jejich tvar zapsaný pomocí zobecněných souřadnic(X). Pro ostatní případy bude platit to samé.

$$k_1(t) = S(t)$$

$$\dot{k}_1(t) = v(t)$$

$$\ddot{k}_1(t) = a(t)$$

$$X(t) = A - k_1(t)n_{BA}$$

$$\dot{X}(t) = -\dot{k}_1(t)n_{BA}$$

$$\ddot{X}(t) = -\ddot{k}_1(t)n_{BA}$$

b) $S_1 \leq S(t) < S_1 + S_k$

$$\Phi(t) = \frac{S(t) - S_1}{r}$$

$$\dot{\Phi}(t) = \frac{v(t)}{r}$$

$$\ddot{\Phi}(t) = \frac{a(t)}{r}$$

$$X(t) = r \cdot \begin{bmatrix} \cos(\Phi_{PA} + smer\Phi) \\ \sin(\Phi_{PA} + smer\Phi) \end{bmatrix} + S$$

$$\dot{X}(t) = r \cdot \begin{bmatrix} -\sin(\Phi_{PA} + smer\Phi) \\ \cos(\Phi_{PA} + smer\Phi) \end{bmatrix} \cdot smer\dot{\Phi}(t)$$

$$\ddot{X}(t) = r \cdot \begin{bmatrix} -\cos(\Phi_{PA} + smer\Phi) \\ -\sin(\Phi_{PA} + smer\Phi) \end{bmatrix} \cdot smer^2\dot{\Phi}^2(t) + r \cdot \begin{bmatrix} -\sin(\Phi_{PA} + smer\Phi) \\ \cos(\Phi_{PA} + smer\Phi) \end{bmatrix} \cdot smer\ddot{\Phi}(t)$$

c) $S_1 + S_k \leq S(t) < S_1 + S_k + S_2$

$$k_2(t) = S(t) - S_1 - S_k$$

$$\dot{k}_2(t) = v(t)$$

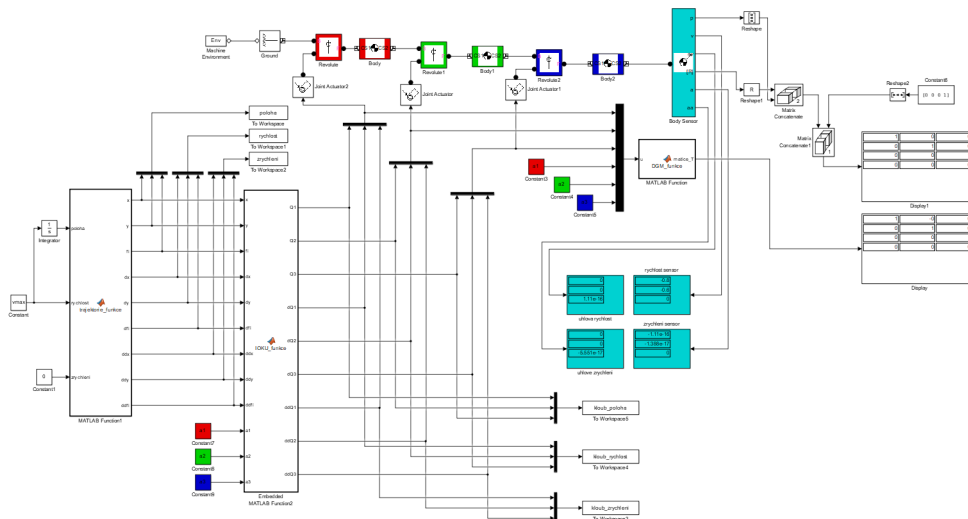
$$\ddot{k}_2(t) = a(t)$$

$$X(t) = P_c + k_2(t)n_{BC}$$

$$\dot{X}(t) = \dot{k}_2(t)n_{BC}$$

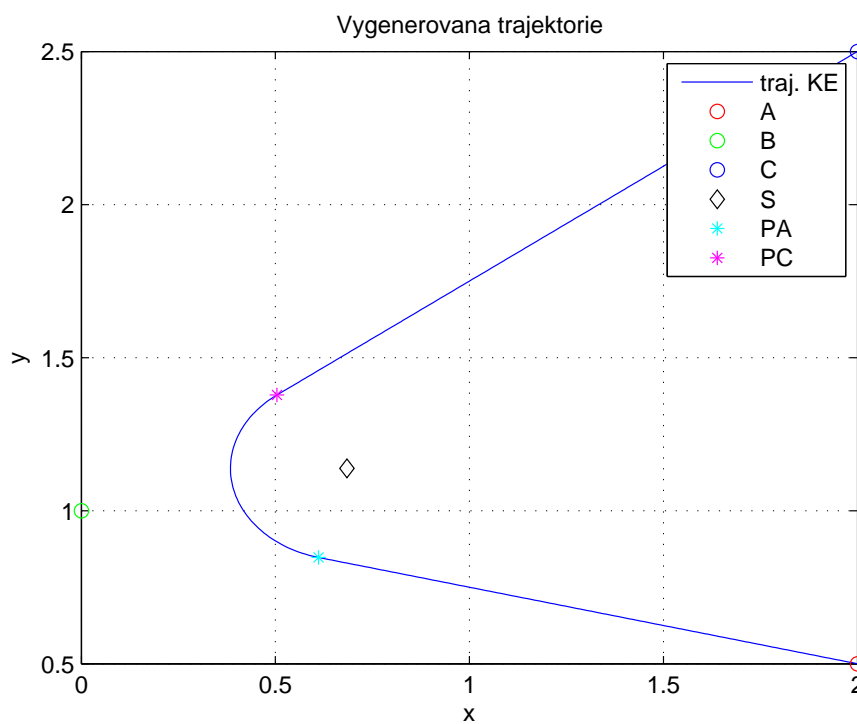
$$\ddot{X}(t) = \ddot{k}_2(t)n_{BC}$$

Na základě získaných vztahů jsme sestavili generátor trajektorie, kterým jsme rozšířili model z úlohy IOKÚ. Výsledné schéma modelu je znázorněno na obrázku číslo 16.



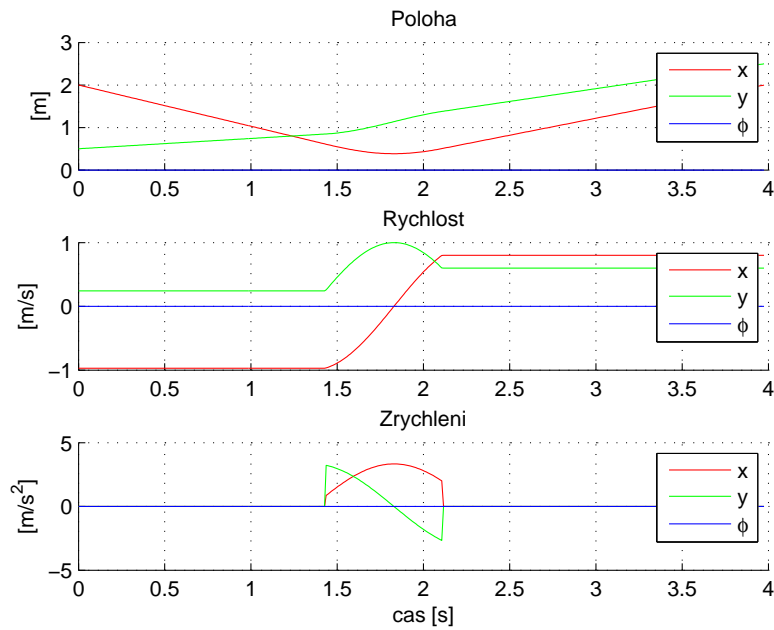
Obrázek 16: Průběh trajektorie koncového efektoru

Na obrázku číslo 17 je znázorněna výsledná vygenerovaná trajektorie. Z obrázku je patrné, že začíná v bodě A, poté v bodě PA začíná oblouk, který končí v bodě PC a poté pokračuje až do bodě C.



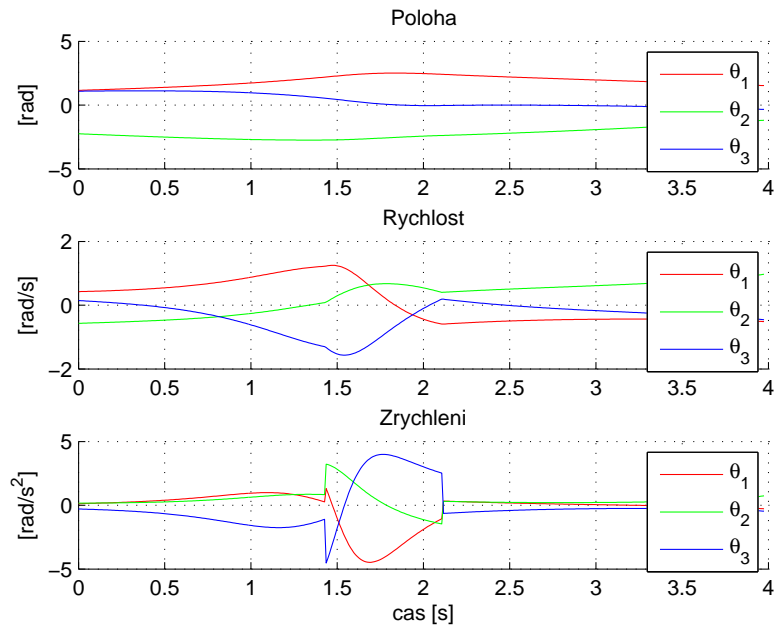
Obrázek 17: Průběh trajektorie koncového efektoru

Na obrázku číslo 18 jsou zobrazeny průběhy polohy, rychlosti a zrychlení zobecněných souřadnic koncového efektoru při pohybu po trajektorii.



Obrázek 18: Zobecněné souřadnice a jejich derivace

Na obrázku číslo 19 jsou zobrazeny průběhy polohy, rychlosti a zrychlení kloubových souřadnic koncového efektoru při pohybu po trajektorii.



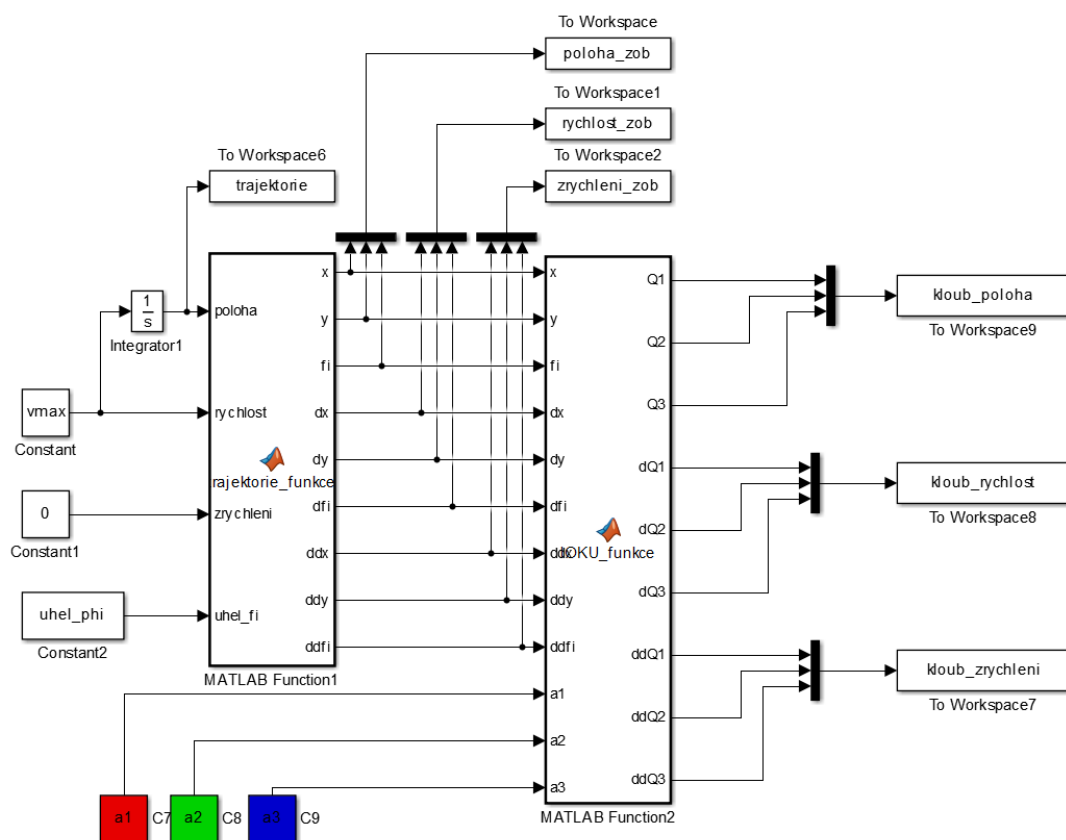
Obrázek 19: Kloubové souřadnice a jejich derivace

2.4 6. úkol - koncový efektor jako pracovní nástroj

V tomto úkolu v první části vyšetříme chování normy vektoru rychlosti kloubových souřadnic a ve druhé části je předem určena orientace koncového efektoru. Počáteční úhel je $\Phi_s = \frac{\pi}{2}$ a koncový úhel je $\Phi_e = 0$.

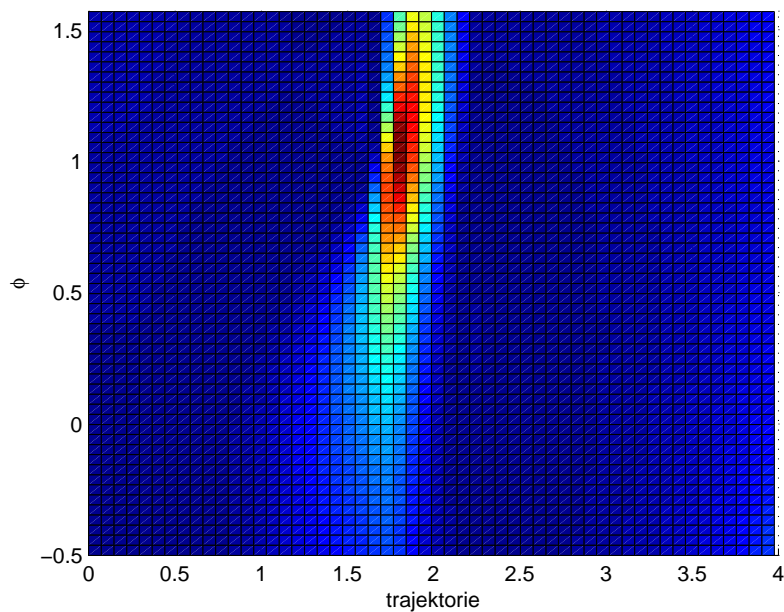
2.4.1 a) chování normy vektoru rychlostí kloubových s.

Pro různé hodnoty orientace koncového efektoru z předem daného intervalu provedeme grafické znázornění chování normy vektoru rychlosti kloubových souřadnic. Sestavil jsem následující model. Vymazal jsem bloky robota, protože při řešení tohoto úkolu my stačí pouze generátor trajektorie a funkce IOKÚ.



Obrázek 20: Schéma modelu pro získání chování normy

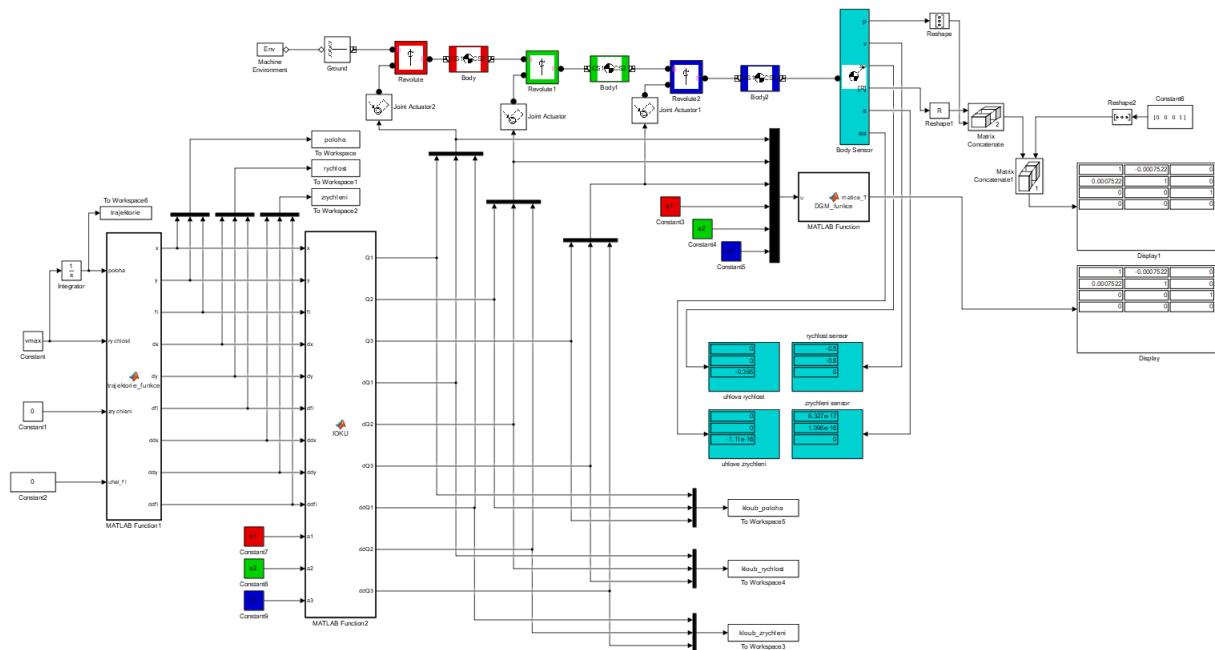
Na obrázku číslo 20 je znázorněno chování normy vektoru rychlosti. Červená elipsa, která se v grafu vyskytuje mezi 1.5s a 2s, značí blízké okolí singulární polohy manipulátoru.



Obrázek 21: Surf graf pro chování normy

2.4.2 b) lineární změna orientace koncového efektoru podél trajektorie

Pro vyřešení tohoto úkolu jsem vycházel ze stejného modelu jako v bodě a) pouze v tom rozdílu, že jsem uvažoval celého robota a také jsem změnil vztahy pro úhel v generátoru trajektorie.



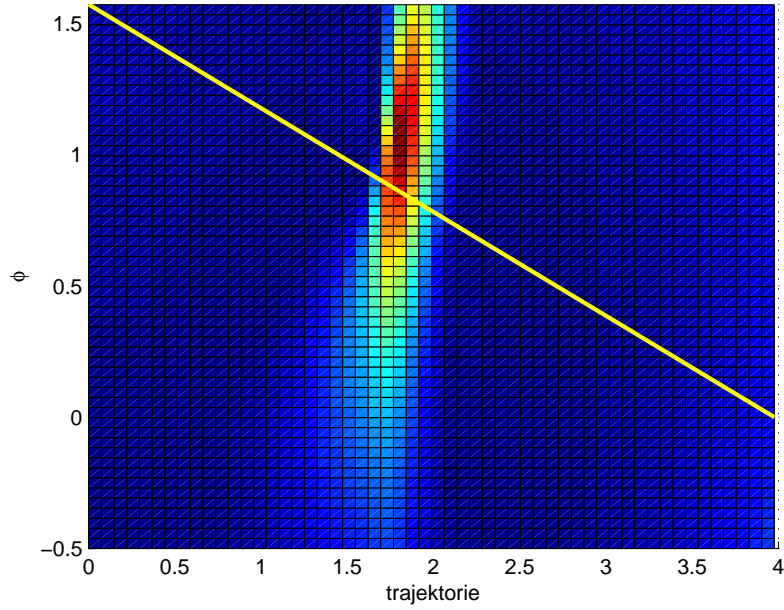
Obrázek 22: Schéma modelu pro lineární změnu orientace koncového efektoru

Kvůli dosažení zadané podmínky jsem upravil vzorce pro úhel.

$$\Phi(t) = \Phi_s + \frac{S(t)}{S_{max}} \cdot (\Phi_e - \Phi_s)$$

$$\dot{\Phi}(t) = \frac{v(t)}{S_{max}} \cdot (\Phi_e - \Phi_s)$$

$$\ddot{\Phi}(t) = \frac{a(t)}{S_{max}} \cdot (\Phi_e - \Phi_s)$$

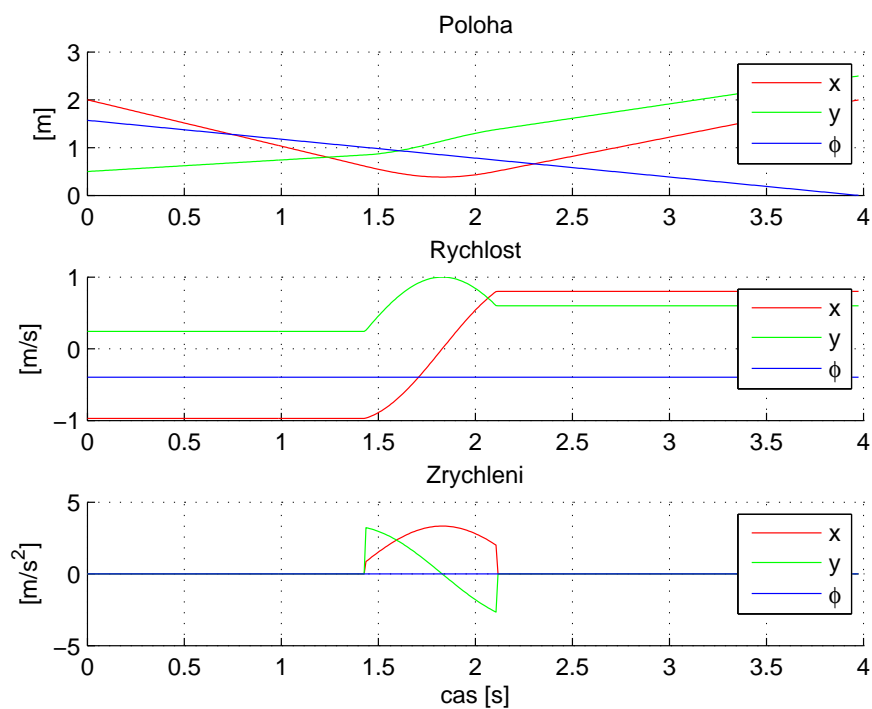


Obrázek 23: Surf graf pro chování normy se znázorněnou trajektorií

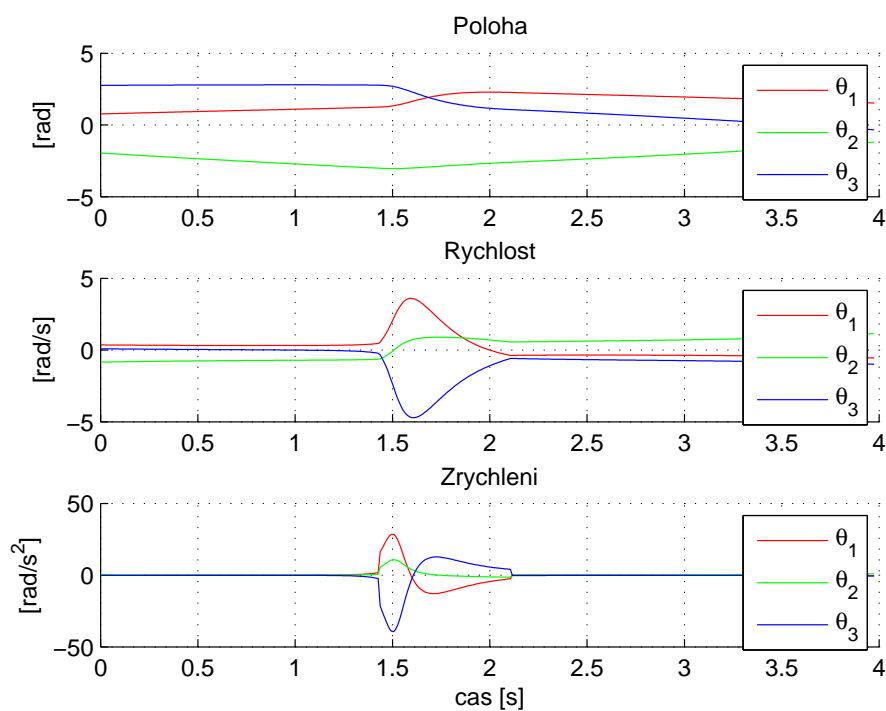
Z obrázku číslo 23 je jasně patrné, že manipulátor se pohybuje v blízkosti singulární polohy. Žlutě zakreslená přímka značí změnu orientace koncového efektoru.

Na obrázku číslo 24 jsou zobrazeny průběhy polohy, rychlosti a zrychlení zobecněných souřadnic koncového efektoru při pohybu po trajektorii.

Na obrázku číslo 25 jsou zobrazeny průběhy polohy, rychlosti a zrychlení kloubových souřadnic koncového efektoru při pohybu po trajektorii. Při porovnání rychlosti vidíme, že získáváme vyšší hodnoty než je tomu v případě, který popisuje obrázek číslo 19. To je dáno blízkostí singulární polohy.



Obrázek 24: Zobecněné souřadnice a jejich derivace



Obrázek 25: Kloubové souřadnice a jejich derivace

3 Závěr

Během vypracovávání této semestrální práce jsme si vyzkoušeli základní operace z robotiky a mechatroniky.

V první části jsme se věnovali transformaci 2D souřadnic do 3D. Zanesení cesty z mapy na globus.

V druhé části jsme se již zabývali 3DoF planárním manipulátorem. K němu jsme vytvořili přímý geometrický model, úloha DGM. Dále inverzní geometrický model, úloha IGM. Na tyto části dále navazovala část zabývající se přímou okamžitou kinematickou úlohou (POKÚ) a inverzní okamžitou kinematickou úlohou (IOKÚ). V dalším úkolu jsme se zabývali specifikováním trajektorie. Nejprve to byl pohyb po trajektorii s konstantním natočením koncového efektoru a v posledním úkolu jsme se zabývali tím, že natočení koncového efektoru se lineárně měnilo.