Homework 2 of Stochastic Processes

姓名：林奇峰　　学号：19110977

2019 年 9 月 18 日

1 Let $S_n = X_1 + \cdots + X_N$ where $X_1, \ldots, X_n$ are i.i.d binary rv.s with PMF $p_x(0) = \frac{3}{4}$ and $p_x(1) = \frac{1}{4}$.

1. Plot the CDF of $Yn = \frac{S_n - n\overline{X}}{n}$ for $n = 4$, 20 and 50.
2. Plot the CDF of $Z_n = \frac{S_n - n\overline{X}}{\sqrt{n}}$ for $n = 4$, 20 and 50.

Solutions:

1. The figure of CDF of $Y_n = \frac{Sn - n\overline{X}}{n}$ is showed as following:

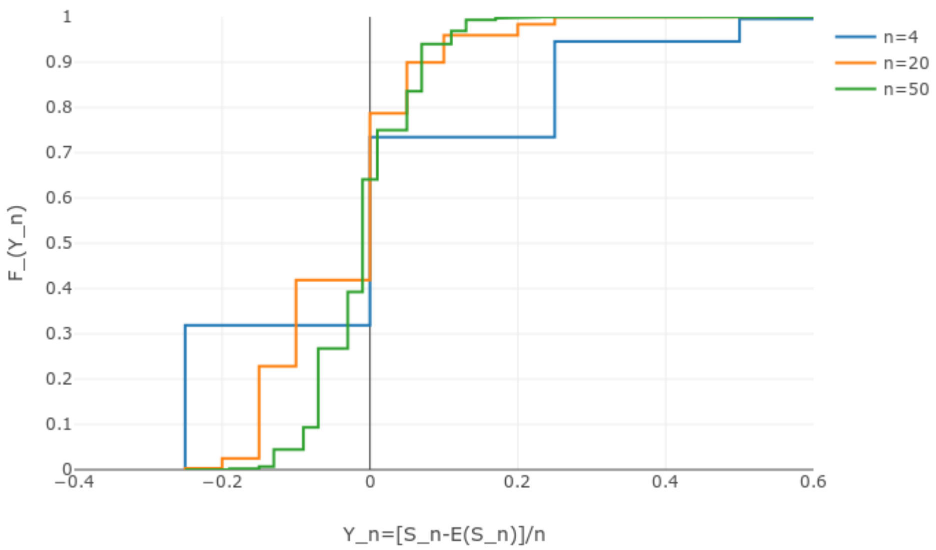

图 1: CDF of $Y_n = \frac{Sn - n\overline{X}}{n}$

2. The figure of CDF of $Z_n = \frac{Sn - n\overline{X}}{\sqrt{n}}$ is showed as following:

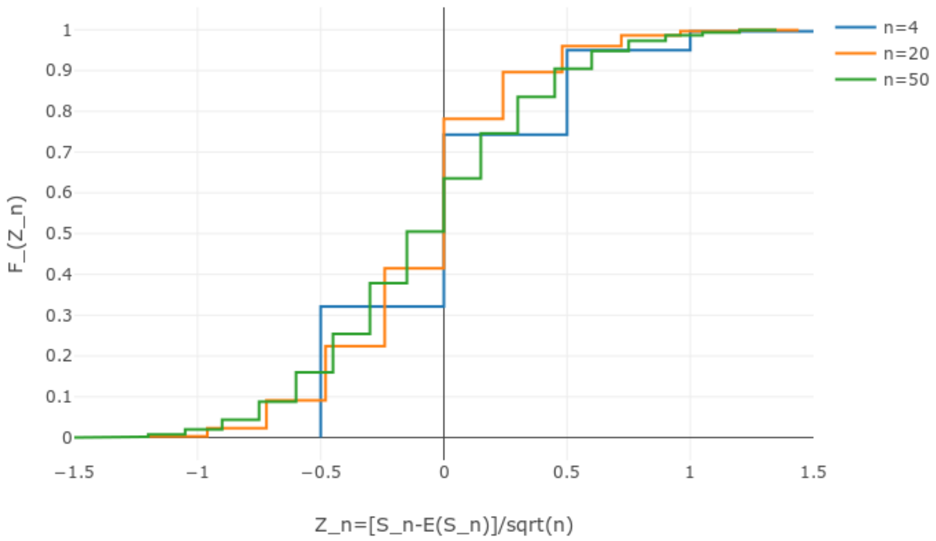

图 2: CDF of $Z_n = \frac{Sn - n\overline{X}}{\sqrt{n}}$

2 掷一个骰子

a) 写出样本空间 S

b) $\mathcal{F}_0 = \{S, \emptyset, A\}$ 是一个事件类吗？其中 $A = \{1, 3, 5\}$

c) $\mathcal{F}_1 = \{S, \emptyset, A, A^c\}$ 是一个事件类吗？$\mathcal{F} = 2^S$ 呢？

d) 定义 $X =$ 骰子面上的点数

i. 若我们考察的概率模型是以 $\mathcal{F}_1$ 为事件类，X 是随机变量吗？

ii. 若我们考察的概率模型是以 $\mathcal{F}$ 为事件类，X 是随机变量吗？

e) 定义 $Y = X \bmod 2$, 讨论 d) 所讨论的问题。

f) 思考题：随机变量的定义与概率 $P(\cdot)$ 有关吗？

答:

事件的公理定义如下：

Given a sample space Ω, the class of subsets of Ω that consititue the set of events satisfies the following axioms:

1. Ω is an events

2. For every sequence of events $A_1, A_2, \ldots$, the union $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ is an event.

3. For every event A, the complement A^c is an event.

a) $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

b) $\mathcal{F}_0 = \{S, \emptyset, A\}$ 不是一个事件类。因为它违反了事件公理中的第三条，即 A^c 不在事件类中，构不成事件。

c) I. $\mathcal{F}_1 = \{S, \emptyset, A, A^c\}$ 是一个事件类。因为它满足所有的事件公理。

i. 首先，样本空间 S 在事件类中, 满足第一条事件公理。

ii. 其次，对任意一个事件序列 $E_1, E_2 \ldots$，$\cup_{n=1}^{\infty} E_n$ 也是一个事件，满足第二条事件公理。

(1) $\forall E_n = \emptyset, \cup_{n=1}^{\infty} E_n = \emptyset \in \mathcal{F}_1$。

(2) $\exists E_n = S, \cup_{n=1}^{\infty} E_n = S \in \mathcal{F}_1$。

(3) $\forall E_n = A, \cup_{n=1}^{\infty} E_n = A \in \mathcal{F}_1$。

(4) $\forall E_n = A^c, \cup_{n=1}^{\infty} E_n = A^c \in \mathcal{F}_1$。

(5) $\exists E_i = A, E_j = A^c 且 i \neq j, \cup_{n=1}^{\infty} E_n = S \in \mathcal{F}_1$。

(6) $B = \{m | A_m = \emptyset\}$, 则 $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = (\cup A_i) \cup (\cup A_j) = \cup A_j 其中 i \in B, j \notin B$。$\cup A_j$ 是上面 (2)-(5) 中的其中一种情况，因此 $\cup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{F}_1$。

综上，$\cup_{n=1}^{\infty} E_n$ 是一个事件。

iii. 对于任意一个事件 E，其补集 E^c 也是一个事件，满足第三条事件公理

(1) 当 $E = \emptyset$ 时，$E^c = S \in \mathcal{F}_1$。

(2) 当 $E = S$ 时，$E^c = \emptyset \in \mathcal{F}_1$。

(3) 当 $E = A$ 时，$E^c = A^c \in \mathcal{F}_1$。

(4) 当 $E = A^c$ 时，$E^c = A \in \mathcal{F}_1$。

综上，$\mathcal{F}_1$ 满足所有的事件公理。因此，$\mathcal{F}_1$ 是一个事件类。

II. 当 $\mathcal{F} = 2^S$ 时，$\mathcal{F}$ 是一个事件类。

i. 首先，$S \in \mathcal{F}$，满足第一条事件公理。

ii. 其次，对于任意一个事件序列 $E_1, E_2 \ldots, \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ 也是一个事件，满足第二条事件公理。因为 $\mathcal{F}$ 是 S 的幂集，即 S 的所有子集都在 $\mathcal{F}$ 中。

iii. 对于任意一个事件 E，其补集都在 $\mathcal{F}$ 中，因此满足第三条事件公理。

综上，$\mathcal{F} = 2^S$ 是一个事件类。

d) i. 当考察的概率模型是以 $\mathcal{F}_1$ 为事件类时，X 不是一个随机变量。因为它不满足随机变量的一个性质：$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}$ is an event for each $x \in \mathbb{R}$。如 $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq 2\} = \{1, 2\} \notin \mathcal{F}_1$。

ii. 当考察的概率模型是以 $\mathcal{F}$ 为事件类时，X 是随机变量。首先，因为 $\mathcal{F}$ 是 S 的所有子集的集合，则 $\forall x \in \mathbb{R}$, $C = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}$ 都在 $\mathcal{F}$ 中，即为一个事件。其次，$\forall x_1 \in \mathbb{R}, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, $D = \{\omega : X_1(\omega) \leq x_1, \ldots, X_n(\omega)\}$ 也都在 $\mathcal{F}$ 中，即为一个事件。因此，X 是随机变量。

e) i. 当 $Y = X \mathrm{mod} 2$ 且以 $\mathcal{F}_1$ 为事件类时，Y 是一个随机变量。根据定义，Y 的取值为 0 或 1。

(1) 当 $y \in \mathbb{R} 且 y < 0$ 时，$\{\omega : Y(\omega) \leq y\} = \emptyset \in \mathcal{F}_1$。

(2) 当 $y \in \mathbb{R} 且 0 \leq y < 1$ 时，$\{\omega : Y(\omega) \leq y\} = A^c \in \mathcal{F}_1$。

(3) 当 $y \in \mathbb{R}$且$1 \le y$ 时，$\{\omega : Y(\omega) \le y\} = S \in \mathcal{F}_1$。

(4) 从上面的讨论中我们已经可以知道，对于任意一个映射 Y，它都满足以下性质：$\forall y \in \mathbb{R}, \{\omega : Y(\omega) < y\}$ 是一个事件。
则，$\forall y_1 \in \mathbb{R}, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$, 令 $D = \{\omega : Y_1(\omega) < y_1, \ldots, Y_n(\omega) < y_n, \} = \cap_{i=1}^n D_i$，其中 $D_i = \{\omega : Y_i(\omega) < y_1\}$。根据上述楞知 $D_i \in \mathcal{F}_1$ 为一个事件，且根据事件公理 $D_i^c \in \mathcal{F}_1$ 也是一个事件，所以根据事件公理，$\cap_{i=1}^n D_i = \cup_{i=1}^n D_i^c$ 也是一个事件。

综上，Y 都满足随机变量的两个条件，是一个随机变量。

ii. 当 $Y = X \mathrm{mod} 2$ 且以 $\mathcal{F}$ 为事件类时，Y 是一个随机变量。根据定义，Y 的取值为 0 或 1。

(1) 当 $y \in \mathbb{R}$且$y < 0$ 时，$\{\omega : Y(\omega) \le y\} = \emptyset \in \mathcal{F}$。

(2) 当 $y \in \mathbb{R}$且$0 \le y < 1$ 时，$\{\omega : Y(\omega) \le y\} = \{2, 4, 6\} \in \mathcal{F}$。

(3) 当 $y \in \mathbb{R}$且$1 \le y$ 时，$\{\omega : Y(\omega) \le y\} = S \in \mathcal{F}$。

(4) 从上面的讨论中我们已经可以知道，对于任意一个映射 Y，它都满足以下性质：$\forall y \in \mathbb{R}, \{\omega : Y(\omega) < y\}$ 是一个事件。
则，$\forall y_1 \in \mathbb{R}, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$, 令 $D = \{\omega : Y_1(\omega) < y_1, \ldots, Y_n(\omega) < y_n, \} = \cap_{i=1}^n D_i$，其中 $D_i = \{\omega : Y_i(\omega) < y_1\}$。根据上述楞知 $D_i \in \mathcal{F}$ 为一个事件，且根据事件公理 $D_i^c \in \mathcal{F}$ 也是一个事件，所以根据事件公理，$\cap_{i=1}^n D_i = \cup_{i=1}^n D_i^c$ 也是一个事件。

f) 随机变量的定义并不依赖于概率模型 $P(\cdot)$，但是 $P(\cdot)$ 决定了随机变量的一些统计特性。除此之外，两者依赖于同一个事件类 $\mathcal{F}$。

i. 概率模型 $P(\cdot)$ 将事件类 $\mathcal{F}$ 中的一个事件 A 映射到一个实数。

ii. 随机变量 X 将样本空间 Ω 中的样本点映射到一个实数，但是集合 $\{\omega : X(\omega) \le x\}$ 必须是一个隶属于事件类 $\mathcal{F}$ 的事件。不同的随机变量 X 和 Y 可以给样本空间 Ω 中相同的样本点以不同的值，但是对于同一个值 a，$\{\omega : X(\omega) \le a\}$ 和 $\{\omega : Y(\omega) \le a\}$ 可能不相等。

iii. 对于一个随机变量 X，不同的概率模型 $P_1(\cdot)$ 和 $P_2(\cdot)$ 对于同一个事件 $\{\Omega : X(\omega) \le x\}$ 的值可能不同，进而导致不同的统计特性，如累积分布函数（CDF）。