

Homework 2 of Stochastic Processes

姓名：林奇峰 学号：19110977

2019 年 9 月 13 日

1 Let $S_n = X_1 + \dots + X_N$ where X_1, \dots, X_n are i.i.d binary rv.s with PMF $p_x(0) = \frac{3}{4}$ and $p_x(1) = \frac{1}{4}$.

1. Plot the CDF of $Y_n = \frac{S_n - n\bar{X}}{n}$ for $n = 4, 20$ and 50 .
2. Plot the CDF of $Z_n = \frac{S_n - n\bar{X}}{\sqrt{n}}$ for $n = 4, 20$ and 50 .

Solutions:

1. The figure of CDF of $Y_n = \frac{S_n - n\bar{X}}{n}$ is showed as following:

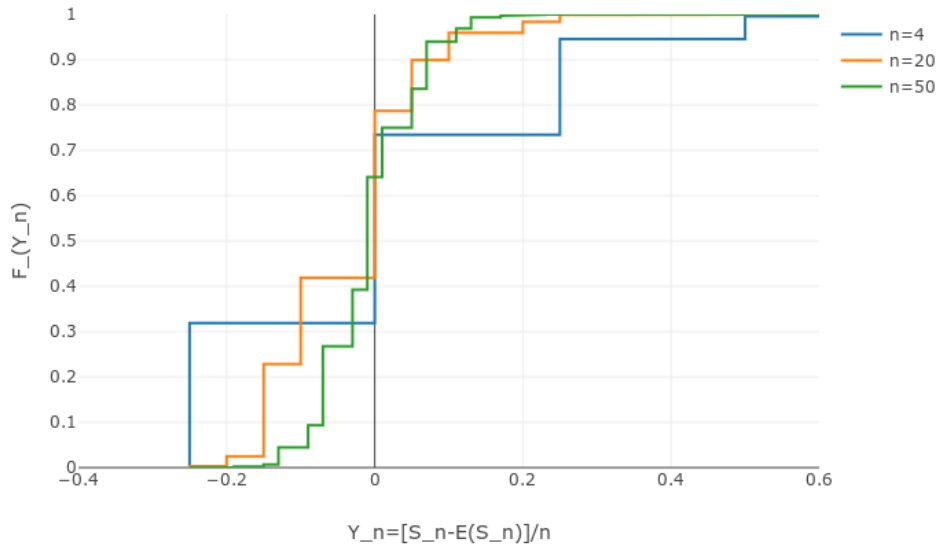


图 1: CDF of $Y_n = \frac{S_n - n\bar{X}}{n}$

2. The figure of CDF of $Z_n = \frac{S_n - n\bar{X}}{\sqrt{n}}$ is showed as following:

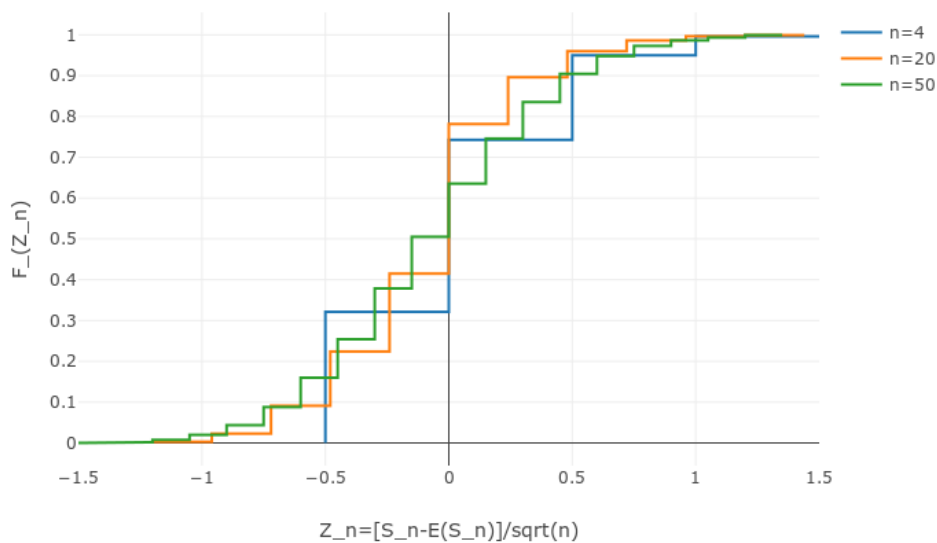


图 2: CDF of $Z_n = \frac{S_n - n\bar{X}}{\sqrt{n}}$

2 掷一个骰子

- 写出样本空间 S
- $\mathcal{F}_0 = \{S, \emptyset, A\}$ 是一个事件类吗? 其中 $A = \{1, 3, 5\}$
- $\mathcal{F}_1 = \{S, \emptyset, A, A^c\}$ 是一个事件类吗? $\mathcal{F} = 2^S$ 呢?
- 定义 $X =$ 骰子面上的点数
 - 若我们考察的概率模型是以 \mathcal{F}_1 为事件类, X 是随机变量吗?
 - 若我们考察的概率模型是以 \mathcal{F} 为事件类, X 是随机变量吗?
- 定义 $Y = X \bmod 2$, 讨论 d) 所讨论的问题。
- 思考题: 随机变量的定义与概率 $P(\cdot)$ 有关吗?

答:

事件的公理定义如下:

Given a sample space Ω , the class of subsets of Ω that constitute the set of events satisfies the following axioms:

- Ω is an events
- For every sequence of events A_1, A_2, \dots , the union $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ is an event.
- For every event A , the complement A^c is an event.

- $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

b) $\mathcal{F}_0 = \{S, \emptyset, A\}$ 不是一个事件类。因为它违反了事件公理中的第三条, 即 A^c 不在事件类中, 构不成事件。

c) I. $\mathcal{F}_1 = \{S, \emptyset, A, A^c\}$ 是一个事件类。因为它满足所有的事件公理。

i. 首先, 样本空间 S 在事件类中, 满足第一条事件公理。

ii. 其次, 对任意一个事件序列 $E_1, E_2, \dots, \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ 也是一个事件, 满足第二条事件公理。

$$(1) \forall E_n = \emptyset, \cup_{n=1}^{\infty} E_n = \emptyset \in \mathcal{F}_1.$$

$$(2) \exists E_n = S, \cup_{n=1}^{\infty} E_n = S \in \mathcal{F}_1.$$

$$(3) \forall E_n = A, \cup_{n=1}^{\infty} E_n = A \in \mathcal{F}_1.$$

$$(4) \forall E_n = A^c, \cup_{n=1}^{\infty} E_n = A^c \in \mathcal{F}_1.$$

$$(5) \exists E_i = A, E_j = A^c \text{ 且 } i \neq j, \cup_{n=1}^{\infty} E_n = S \in \mathcal{F}_1.$$

$$(6) B = \{m | A_m = \emptyset\}, \text{ 则 } \cup_{n=1}^{\infty} A_n = (\cup_{i \in B} A_i) \cup (\cup_{j \notin B} A_j) = \cup_{j \notin B} A_j \text{ 其中 } i \in B, j \notin B.$$

$\cup_{j \notin B} A_j$ 是上面 (2)-(5) 中的其中一种情况, 因此 $\cup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{F}_1$ 。

综上, $\cup_{n=1}^{\infty} E_n$ 是一个事件。

iii. 对于任意一个事件 E , 其补集 E^c 也是一个事件, 满足第三条事件公理

$$(1) \text{ 当 } E = \emptyset \text{ 时, } E^c = S \in \mathcal{F}_1.$$

$$(2) \text{ 当 } E = S \text{ 时, } E^c = \emptyset \in \mathcal{F}_1.$$

$$(3) \text{ 当 } E = A \text{ 时, } E^c = A^c \in \mathcal{F}_1.$$

$$(4) \text{ 当 } E = A^c \text{ 时, } E^c = A \in \mathcal{F}_1.$$

综上, \mathcal{F}_1 满足所有的事件公理。因此, \mathcal{F}_1 是一个事件类。

II. 当 $\mathcal{F} = 2^S$ 时, \mathcal{F} 是一个事件类。

i. 首先, $S \in \mathcal{F}$, 满足第一条事件公理。

ii. 其次, 对于任意一个事件序列 $E_1, E_2, \dots, \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ 也是一个事件, 满足第二条事件公理。因为 \mathcal{F} 是 S 的幂集, 即 S 的所有子集都在 \mathcal{F} 中。

iii. 对于任意一个事件 E , 其补集都在 \mathcal{F} 中, 因此满足第三条事件公理。

综上, $\mathcal{F} = 2^S$ 是一个事件类。

d) i. 当考察的概率模型是以 \mathcal{F}_1 为事件类时, X 不是一个随机变量。因为它不满足随机变量的一个性质: $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}$ is an event for each $x \in \mathbb{R}$ 。如 $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq 2\} = \{1, 2\} \notin \mathcal{F}_1$ 。

ii. 当考察的概率模型是以 \mathcal{F} 为事件类时, X 是随机变量。首先, 因为 \mathcal{F} 是 S 的所有子集的集合, 则 $\forall x \in \mathbb{R}, C = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}$ 都在 \mathcal{F} 中, 即为一个事件。其次, $\forall x_1 \in \mathbb{R}, \dots, x_n \in \mathbb{R}, D = \{\omega : X_1(\omega) \leq x_1, \dots, X_n(\omega) \leq x_n\}$ 也都在 \mathcal{F} 中, 即为一个事件。因此, X 是随机变量。

e) i. 当 $Y = X \bmod 2$ 且以 \mathcal{F}_1 为事件类时, Y 是一个随机变量。根据定义, Y 的取值为 0 或 1。

$$(1) \text{ 当 } y \in \mathbb{R} \text{ 且 } y < 0 \text{ 时, } \{\omega : Y(\omega) \leq y\} = \emptyset \in \mathcal{F}_1.$$

$$(2) \text{ 当 } y \in \mathbb{R} \text{ 且 } 0 \leq y < 1 \text{ 时, } \{\omega : Y(\omega) \leq y\} = A^c \in \mathcal{F}_1.$$

(3) 当 $y \in \mathbb{R}$ 且 $1 \leq y$ 时, $\{\omega : Y(\omega) \leq y\} = S \in \mathcal{F}_1$ 。

(4) 从上面的讨论中我们已经可以知道, 对于任意一个映射 Y , 它都满足以下性质:
 $\forall y \in \mathbb{R}, \{\omega : Y(\omega) < y\}$ 是一个事件。

则, $\forall y_1 \in \mathbb{R}, \dots, y_n \in \mathbb{R}$, 令 $D = \{\omega : Y_1(\omega) < y_1, \dots, Y_n(\omega) < y_n\} = \cap_{i=1}^n D_i$,
 其中 $D_i = \{\omega : Y_i(\omega) < y_i\}$ 。根据上述楞知 $D_i \in \mathcal{F}_1$ 为一个事件, 且根据事件公理 $D_i^c \in \mathcal{F}_1$ 也是一个事件, 所以根据事件公理, $\cap_{i=1}^n D_i = \cup_{i=1}^n D_i^c$ 也是一个事件。

综上, Y 都满足随机变量的两个条件, 是一个随机变量。

ii. 当 $Y = X \bmod 2$ 且以 \mathcal{F} 为事件类时, Y 是一个随机变量。根据定义, Y 的取值为 0 或 1。

(1) 当 $y \in \mathbb{R}$ 且 $y < 0$ 时, $\{\omega : Y(\omega) \leq y\} = \emptyset \in \mathcal{F}$ 。

(2) 当 $y \in \mathbb{R}$ 且 $0 \leq y < 1$ 时, $\{\omega : Y(\omega) \leq y\} = \{2, 4, 6\} \in \mathcal{F}$ 。

(3) 当 $y \in \mathbb{R}$ 且 $1 \leq y$ 时, $\{\omega : Y(\omega) \leq y\} = S \in \mathcal{F}$ 。

(4) 从上面的讨论中我们已经可以知道, 对于任意一个映射 Y , 它都满足以下性质:
 $\forall y \in \mathbb{R}, \{\omega : Y(\omega) < y\}$ 是一个事件。

则, $\forall y_1 \in \mathbb{R}, \dots, y_n \in \mathbb{R}$, 令 $D = \{\omega : Y_1(\omega) < y_1, \dots, Y_n(\omega) < y_n\} = \cap_{i=1}^n D_i$,
 其中 $D_i = \{\omega : Y_i(\omega) < y_i\}$ 。根据上述楞知 $D_i \in \mathcal{F}$ 为一个事件, 且根据事件公理 $D_i^c \in \mathcal{F}$ 也是一个事件, 所以根据事件公理, $\cap_{i=1}^n D_i = \cup_{i=1}^n D_i^c$ 也是一个事件。

f) 随机变量的定义并不依赖于概率模型 $P(\cdot)$, 但是 $P(\cdot)$ 决定了随机变量的一些统计特性。除此之外, 两者依赖于同一个事件类 \mathcal{F} 。

i. 概率模型 $P(\cdot)$ 将事件类 \mathcal{F} 中的一个事件 A 映射到一个实数。

ii. 随机变量 X 将样本空间 Ω 中的样本点映射到一个实数, 但是集合 $\{\omega : X(\omega) \leq x\}$ 必须是一个隶属于事件类 \mathcal{F} 的事件。不同的随机变量 X 和 Y 可以给样本空间 Ω 中相同的样本点以不同的值, 但是对于同一个值 a , $\{\omega : X(\omega) \leq a\}$ 和 $\{\omega : Y(\omega) \leq a\}$ 可能不相等。

iii. 对于一个随机变量 X , 不同的概率模型 $P_1(\cdot)$ 和 $P_2(\cdot)$ 对于同一个事件 $\{\Omega : X(\omega) \leq x\}$ 的值可能不同, 进而导致不同的统计特性, 如累积分布函数 (CDF)。