哥德尔证明

<u>前外封面</u>

哥德尔证明

原作者：欧内斯特·内格尔（Ernest Nagel）
　　　　詹姆士 R. 纽曼　(James R. Newman)

修编及新前言作者：道格拉斯　R. 霍夫斯塔特（Douglas R. Hofstadter）

修订版

<u>前内封面</u>

1931 年哥德尔出版了他的革命性的论文,《论<数学原理>及相关系统中的形式不可判定命题》，摧毁了某些支撑起数学和逻辑学的基本假定。具有讽刺意味的是，当时很少有数学家能够理解这位青年学者的复杂证明，多年来这项工作的整体重要性在很大程度上被忽略掉了。但是，哥德尔至少得到了欣赏他的少数精英的认可，1951 年他获得了首届为自然科学成就设立的阿尔伯特·爱因斯坦奖，这在美国的同类奖项中是荣誉最高的。包括阿尔伯特·爱因斯坦和 J.罗伯特·奥本海默(J. Robert Oppenheimer)在内的颁奖委员会，称其工作是“近年来对科学所做的最伟大贡献之一”。

在《哥德尔证明》中，欧内斯特·内格尔和詹姆士·纽曼既为学者也为非专业人士，对哥德尔发现中的主要思想和广泛含义提出了一套具有可读性和非技术性的解释。此书首版是在 1958 年，此后陆续出了十种语言的版本。这部十分流行的原创性著作，为每一位对数学、逻辑和哲学有兴趣的受过教育的人士提供了机会，便于他们理解这个原本艰涩而难以企及的论题。(续后内封面)

<u>后内封面</u>

（接前内封面）

在此次新版中，普利策奖的获奖作者道格拉斯 R. 霍夫斯塔特（Douglas R.

Hofstadter）对这一经典著作的原文进行了重新斟酌和更新，澄清了模糊之处，使论述更为清晰，并使行文更具可读性。他同时加进了一篇新的前言，其中披露了他本人和这一开创性著作的特殊的个人联系，它对他本人专业生涯的影响，解释了哥德尔证明的基本精神，并且阐明了哥德尔证明是怎样和为什么直到今天仍然具有相关的意义。这本使人愉悦的书将会受到学生、学者、教师，以及数学、计算机科学、逻辑、哲学和一般科学领域中的专业人士的喜爱。

已故的欧内斯特 · 内格尔是原哥伦比亚大学约翰 · 杜威讲座哲学教授，已故的詹姆士 R. 纽曼是《什么是科学》一书的作者。

道格拉斯.R.霍夫斯塔特是印地安那大学艺术和科学学院的计算机科学和认知科学教授，普利策获奖作品《哥德尔、艾舍尔、巴赫：一条永恒的金带》（Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid）一书的作者。

后外封面

“一部微型的诠释杰作。”——自然杂志

“对哥德尔著名论文实质内容出色的非技术性说明。”——美国数学会公告

1931 年，库尔特. 哥德尔（Kurt Gödel）发表了一篇革命性的论文，对传统数学和逻辑研究中内含的某些根本性假定提出了挑战。时至今日，他对未知领域进行的探索，已被公认为是对现代科学思想的重大贡献。现在，这本再次修订、扩展和更新了的《哥德尔证明》，是第一部对哥德尔证明的主要思路和广泛含义作了易读的解释的书。

前硬内封页

1931 年，库尔特. 哥德尔（Kurt Gödel）发表了一篇革命性的论文，对传统数学和逻辑研究中作为基础的某些根本性假定提出了挑战。时至今日，他对未知领域进行的探索，已被公认为是对现代科学思想的重大贡献。

本书是第一本既面向学者又面向非专业人士，对哥德尔证明的主要思路和广泛含义作了易读的解释的书。对任何具有逻辑和哲学品味的受过教育的人士来说，它

提供了一个深入了解先前无法企及的论题的机会。

在此书的新版中，普利策奖的获奖作者道格拉斯 R. 霍夫斯塔特（Douglas R. Hofstadter）对这一经典著作的原文进行了重新斟酌和更新，澄清了模糊之处，使论述更为清晰，并使行文更具可读性。他同时加进了一篇新的前言，其中披露了他本人和这一开创性著作的特殊的个人联系，这本书对他本人专业生涯的影响，解释了哥德尔证明的基本精神，并且阐明了哥德尔证明是怎样和为什么直到今天仍然具有相关的意义。

献给

伯特兰 . 罗素 (Bertrand Russell)

目录

为内格尔和纽曼所著《哥德尔证明》一书的中文版写的序言

道格拉斯·霍夫斯塔特

美国印地安纳州 布鲁明顿 印地安纳大学 认知科学教授

嗨！欢迎光临！此刻我算是老板（真走运）！

先请你看一下圆周率π，或说得更准确一点儿，是它的十进位展开式中的前几位：

3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944....

你是否曾对π中的数字排列如此混乱而感到困惑？为什么 “圆的周长含有多少个直径的长度” 这样一个简单而又自然的问题，竟导致这么一个玄奥难解的数，它不仅不是整数，甚至也不是两个整数之比？

再看看下面的数字花样：

1，-3，5，-7，9，-11，13，-15，17，-19，.....

你会想到它和圆的直径或周长有某种关联吗？可能不会。怎么可能呢？奇数列和圆周会有什么关系？为什么这些奇数的符号还变来变去？再让我们对这个模式做一点儿小小的修改，将这些奇数改为其倒数，并在它们之间添上加号：

$$1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - 1/11 + 1/13 - 1/15 + 1/17 - 1/19 +.....$$

这个新的模式描绘了一种沿着数轴的锯齿状的运动。从1开始，然后向左1/3，再向右1/5，又向左1/7，再向右1/9，如此继续下去。当然，步长会变得越来越短，所以你会看出我们不可避免地逐渐瞄准到了一个特定的点，这个点明显地会大于2/3而又小于1。这个点到底在数轴上什么地方？这样的问题是否值得关注？

在告诉你这个点是什么之前，让我先问一下，你是否真的在乎了解这个问题？有的人会觉得这种涉及无限的模式很吸引人，甚至感到神奇；而另外一些人则会耸耸肩说：“这算什么？谁会在乎这个？”这两种态度反映出在人类成员中的一种根深蒂固的一分为二的状况。有时我会感到迷惑不解，那些说“不在乎”的人，到底是由于天生或遗传上就对数学的美和魅力有某种“免疫力”呢，还是需要有合适的人

出来对他们讲合适的话，或给他们举出合适的例子，再或者给他们看合适的图片，才能使他们睁开眼敞开心灵，看到数学的魅力。我并不知道这类问题的答案，但我觉得，如果到目前为止你还在读这篇前言而不是在打鼾，那你还算是至少对数学及其模式的迷人之处可能有点感觉的人。

那么我刚才所讲的数轴上的那个点究竟在哪里？下面就是答案（可以肯定不是显而易见的！）：

$$1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - 1/11 + 1/13 - 1/15 + 1/17 - 1/19 + ... = \pi/4$$

这意味着，被用作在数轴上左右来回运动步长的奇数的倒数，与完美的曲线圆和它的笔直的直径之间，有着不可思议的密切关系。这样一种奇特的事实究竟来自何方？

圆周率π到底是高深莫测还是极为简单？如果你知道如何去看它，它就变得非常简单；而最明显的作法（如列出其十进制展开式）却使之变得不可想象地棘手难解。从事数学就是如此。对以正确的适当方式去观察模式的人，秘密是敞开的；而对那些没能摸到窍门儿的人来说，秘密就掩盖着。

人类从事数学已有几千年了，许许多多的秘密已被发现，当然也已被公开了，从而在横跨几大洲的范围内，通过对隐藏在数学中的关键性模式的建构和分享，达成了某种集

体共识。但是不管学习了多少这类关键性的模式，似乎没人能达到这样一种状态，即对所遇到的每一个挑战都能通过应用已知的模式加以解决。为了取得新的进展，常常需要有全新的想法。这些想法是突然闪现的，似乎真正是来自天才的头脑。

为什么会是这种情况？为什么数学总是要求有天才的灵光闪现呢？我们大家都记得在小学时，只要学会了几条固定的规则，就能把任意两个数相加，乘法、减法和除法的情况也是如此。（想象一下，如果只是把一组数字加到一起都需要天才的创造力的话，那日子真是没法过了！人们有时的确会说到“很有创意的记帐法”[†] 之类的话，但那完全是两回事…）也许你知道求某个数平方根的技巧，有点像是长除法。不管怎样，小时候父亲就教过我，我曾花费了大量的时间计算2、3、5 等数的平方根，这给我带来了极大的乐趣，但这并不需要创造力——实际上涉及的创造力是零。

与此类似，一个孩子也可以使用简单的硬性的计算规则，列出一个递增的素数表：

2，3，5，7，11，13，17，19，23，29，31，37，41，43，47，53, 59. . . .

[†] 这是英语中一个讽刺的词，用来指公司在帐上玩花样以蒙骗股民。一般记帐只需要算术的加减乘除。[译者注]

做法是十分简单和机械性的，但是，这种简单的体力劳动所得到的结果却显得十分混乱。除了看出头一个素数之后的所有素数都是奇数外，其中还有什么别的模式？为什么前后两数之差在上下跳动：2，2，4，2，4，2，4，6，2，6，4，2，4，6，6，....？正如你可能会想到的，不久表中就会出现某个“8”，然后在某处会现“10”，并且随后就会有越来越大的偶数出现在这个差值列表中。但是，模式是什么？

在某种意义上，你也可以说没有模式。然而在这个序列中，的确存在着不可思议的，隐藏着的规律性。这里涉及的是它的增长率。简而言之，当 n 越来越大趋于无限的过程中，第 n 个素数的值越来越接近 n log n，其中“log n”是自然对数，意思是说，当它是著名的常数 e 的幂时，我们可得到 n。这里我不打算定义 e 或是自然对数，因为我这里要表述的观点与这些技术细节无关。我要讲的是，在数学中，每当遇到一个表现为混沌的现象时，最终都会表明，原来都是具有某种意外的、隐藏着的模式的；但是，每次都需要有新的创造力去辨认出这些模式，然后还需要有进一步的创造力去严格证明这些模式。

就上面所讲的“素数定理”而言，直到1900年左右这个重要的结果才最终得到了证明，在阿达马（Jacques Hadamard）和德·拉·瓦莱·布森（Charles-Jean de la Vall ée Poussin）令人惊叹的证明中，用到了复数的解析工具。目的是为了解释素数序列的密度[†]，而通过的却是万万想不到的门径！但是话又说回来，谁又曾料到基于奇数的倒数的无限来回又能和圆及其直径发生关系呢？

你可能还不清楚我讲所有这些到底是为了说明什么。其实很简单，简而言之，我的意思是说要发现数学问题的答案，似乎从来就没有像做算术演算那样的固定处方。从事数学，事实上是在挑战最伟大的人类心灵，因为和机械式地自动操作相反，它不断地要求产生新的思想。

为什么情况会是这样？为什么研究数学和算术演算会如此不同？难道就不可能存在固定的一套方法用以得到所有的数学证明吗？这套规则可能会多于在小学里学到的加法和除法等规则，也可能更困难，或者更微妙精细，但难道就不可能在原则上是存在的吗？

事实上，这正是二十世纪初在数学家们心中的普遍信念——必然会存在某种固定的，严格的规则集合，用一个完全不用思考的自动机，能够完全机械地产生所有的数学真理。数学家们为什么会相信这个？因为他们是证明概念的信奉者，而在十九世纪，证明概念的焦点变得越来越清晰，所谓一个证明似乎就是在一个形式公理系统内部进行严格符号操作而得到的必然结果。

[†] 素数定理的另一结果是：不超过n的素数的数目，随着n的增大趋近于n/logn。[译者注]

换句话说，纯逻辑似乎可以通过称为“符号逻辑”的一套形式规则被机械化，然后向里面输入几条特定的公理（例如，交换律、结合律和分配律，加上“数学归纳法”），然后开始运作就行了！人们可以得到这样的机器，至少在原则上用它可以一个接一个地输出数学真理，并且从原则说，每一条真理都能或迟或早地从这台机器中产生出来。

这就是当时数学家们关于他们的学科的普遍信念。你可能会认为，他们在想到这一点时多少会有些失落感，甚至觉得受到威胁，因为这意味着在他们专业中的一切都可用一台无心灵、无思想、无理解力的自动机或机器人来替代完成。但是，使人感到奇怪的是，这种前景并未使数学家们感到困扰；事实上，倒是使他们对自己学科的高度规范，高度一致，高度精确有了进一步的信心。

随后，在1931年，伴随着年青的奥地利逻辑学家库尔特·哥德尔的出现，这种想法被打得粉碎。25岁的哥德尔瞄准将数学视为机械地符号操作的观念，证明其内部潜藏着致命的矛盾。只要你将一台产生真理的机器交到哥德尔手上，他就会检验一下它的结构，瞬时间就交给你一个你的这台机器永远也产生不出来的真数学命题。至于他怎么知道这台机器产生不了这个命题？他怎样利用这台机器的结构制造了这样一条它永远产出不了的真的数学命题？那好办，阅读完此书你就会知道了。最重要的是，哥德尔完全摧毁了将数学

视为纯粹机械性活动的观念。他确凿地表明，创造性的思想将永远体现在数学中，创造力将永远是必需的。在所有这些事情中，最令人惊叹的是，年轻的哥德尔是**证明**了事实的确是如此。他的证明，是地球上所有曾进行过的数学思考中最有创意的成果之一。

所以数学虽然是一门有关模式和规则的科学，但是从其本性来讲却并不是一个总体模式或总体规则而已。数学自身的本质在于，虽然它包括模式，而模式又构成模式（如此这般以致无穷），然而总会有不能预见到的在新的层次上的模式；新的层次上的模式总是会使人感到意外，总是好像在回避先前已有的思维方式。

哥德尔定理是如此奇妙，如此使人惊喜！虽然在我看来，1931年看到这一点的数学家们应该感到高兴才是，但是相反地，他们却是如此难以接受。数学家们一直沉浸于对他们所从事的学科具有完美的机械性的想象之中，而现在却被告知数学是不可预测的，难以驾驭的，充满着对持续创造能力的永恒需求。这个信息多少会使人惊慌失措和感到威胁，并不符合他们对自身学科的想象。

然而随着二十世纪进程的展开，随着观念的梳理和澄清，数学家们逐渐认识到，这种对其学科性质的看法非但并不那么可怕，那么糟糕，而且是不可避免的。随着计算机渗

入我们的生活，人们开始看到在计算机适合做的事和心灵适合做的事之间，存在着巨大的鸿沟。因此，哥德尔带来的信息显得越来越合理，甚而是必然的。但所有这一切并不意味着哥德尔证明本身就变得显而易见了——远非如此！哥德尔的观念是美妙的，而其艰深的一整套思想对大多数人来说，却是难以消化的；几十年当中，只有少数人才能够理解。

这个问题的解决落在了内格尔和纽曼——他们俩个人都不是数学家，而是有关数学和人类心灵的深刻思想家——身上。他们合写的初版于1958年，现已成为经典的《哥德尔证明》一书，使哥德尔证明为广大的读者所了解。这本书曾在成千上万人中传播，改变了其中很多人的生活，其中就包括当时只有十来岁的我本人。就我个人来讲，我的确要把我生活中的全部事业追溯到那至关重要的一天：当时是1959年秋天，在门罗公园的开普勒书店里，我完全偶然地见到了《哥德尔证明》。

可能此刻在中国，有个人——可能就是你——正在书店里面随意浏览这本书，正在翻动它的书页并正在读着眼前这些词句。或许如果你买了这本书，会使你的生活发生革命性的变化，就像这本书对我那样！当然，也可能什么也没有发生。或许正在读这些话的不是你，而是站在书店别处的另外的人。也可能你根本就不在书店里。或许你还正在睡觉呢！但是不管是哪种情况，不管是你或是别的什么人，我的确希

望在中国有人能发现这本书，能感受到它是如此之美妙，如此之激动人心，就像我在14岁，然后在15岁，再在16岁，以及之后在所有的年龄段时所感受到的那样。事实上，从对这些思想的感受的角度讲，我从来就没有变得太老。这些思想是如此美妙，如此难以忘怀，如此神秘，它们将会伴随你整个一生。

我个人的情况是，我已用了几十年的时间来思考哥德尔的观念，我选择了认知科学这个专业领域，因为我想要了解人类的心灵怎么会不像最初所感到的那样简单，而是具有如此丰富得多的创造性；我想要了解心灵和机器之间难以捉摸的联系；我想要了解数的模式为什么一方面是如此完满和单纯，另一方面又如此不可预见和狂乱；我想要了解隐藏在思维、创造力和意识背后的秘密。

如果你问我是否取得了最后的成功，答案是“当然没有！”如果是的话，生活将会变得令人厌烦。如果人的心灵会被化简为几条僵化的规则，即便是相当大的一个僵化规则的集合，那会是一件令人极度悲哀的憾事。哥德尔证明了，情况不会是这样。我们是幸运的，因为我们的心灵是如此不可预知；而正因如此，生活才充满了情趣。尽管如此，我们仍在进行努力来科学地了解我们自身。

如果要说在科学发现中有哪一件工作曾使我们洞察到我们自身心灵的微妙和深度，那就是哥德尔在1930-1931年

间所创造的关于不完全性定理的证明。我希望你在阅读这本宝石般珍贵的小书时，是像在进行会获得极大欢乐的一次航行。这次航行是在驶向数学的核心，数学思想的核心，思想本身的核心，说到底是在驶向人类心灵的核心。就像是乘坐过山车一样，这将是一次你会不时地感到昏眩，失去方向感，迷狂的曲折旅程。但正因如此，这将是你所有过的最不可思议的经历。

我当然希望如此。祝你一路顺风。

2007年2月

布鲁明顿　印地安纳州

新版前言

道格拉斯 R. 霍夫斯塔特

1959 年 8 月，在结束了在日内瓦一年的居留之后，我们全家回到了加利福尼亚州的斯坦福。那年我十四岁，法语刚变流利，喜好各种语言，开始了解书写系统、符号以及语义的神秘，充满了对数学和思维奥秘的好奇。

一个傍晚，父亲和我去逛一家书店。我不经意地看到一本薄书，有个神秘的书名叫《哥德尔证明》。我随手翻了一下，发现书中有许多诱人的图形和公式，其中一个脚注特别吸引我，它谈到引号、符号，以及将其它符号符号化的符号。由于直觉地感到《哥德尔证明》好像注定和我会有某种关联，我想我必须买下这本书。

离开书店后，父亲说，他曾在纽约的城市学院上过哲学课，这本书的作者之一欧内斯特·内格尔就是讲课老师，并且在那之后他们成了很好的朋友。这个巧合进一步增加了这本书给人的神秘感，一到家，我就急不可耐地啃读起来。从头至尾，《哥德尔证明》都和我激情共鸣；很快地，我发现我开始沉迷于真与假、悖论与证明、映射与反映、符号操作和符号逻辑、数学与元数学、人类思想创造性飞跃的奥秘及智能的机制等问题的思考之中。

此后不久，父亲告诉我说，他在校园里偶然碰到了欧内斯特·内格尔。内格尔是哥伦比亚大学的教授，此时碰巧来斯坦福大学工作一年。没过几天，两家人就聚集到了一起，我立刻就被四个内格尔——欧内斯特和艾迪丝，以及他们的两个儿子，年纪差不多和我一样大的山迪和鲍比——的魅力深深吸引住了。能认识我如此喜爱的书的作者使我惊喜万分，并且发现欧内斯特和艾迪丝也对我在科学、哲学、音乐和艺术上表现的青春期热情给予了极大的理解和包容。

时光如梭，内格尔一家的学术年假很快就要结束了。在离去之前，他们热情地邀请我在那年夏天到他们位于弗芒特州的木屋度假一个星期。在充满田园情调的逗留期间，欧内斯特和艾迪丝向我展示出了文明端庄、宽容大度和谦逊虚心的极致典范，以至在那之后的这么多年里，他们两人都始终停留在我的记忆当中。对我来说，难忘的时刻是有两个阳光灿烂的下午，山迪和我坐在户外翠绿的草地上，我大声地给他通读《哥德尔证明》。能给作者之一的儿子读这本书，是怎样使我心中充满了反客为主的暗喜啊！

那以后好多年，山迪和我书信往来共同探寻数的模式，而这对于我后来的生活产生了很大的影响，对他恐怕也是一样。现在人们叫他阿里克斯，是威斯康星大学的一名数学教授。鲍比也一直是我的朋友，现在人们叫他西德尼，是芝加哥大学的一名物理学教授。我们相互间不时地碰碰面，每次都特别高兴。

我多么希望能说我也曾见过詹姆士·纽曼啊。我收到的高中毕业礼物就是他写的煌煌四卷本的《数学世界》，我一直欣赏他的写作风格和对数学的挚爱。但我不得不遗憾地说，我们从来未曾见过面。

进入斯坦福大学后，我的专业是数学，出于对内格尔和纽曼书中论述的观念的喜爱，我选修了若干门逻辑和元数学方面的课程，但其枯燥无味使我大失所望。后来我进入研究院，还是攻读数学，但类似的幻灭感再次发生。为此我放弃了数学，改修物理，但没过多久，发现自己又一次地陷入抽象和迷惑的困境当中。

1972 年的某一天，为了暂时解脱一下，我步入大学的书店随意浏览，偶然看到了霍华德·迪隆（Howard DeLong）所写的《数理逻辑简介》（*A Profile of Mathematical Logic*）。这本书给我的影响，类似于《哥德尔证明》在 1959 年给我带来的震撼。书中明晰透彻的论述，重新吹燃了潜伏在灰烬之中的我对逻辑、元数学，以及与哥德尔定理及其证明有关的不可思议的概念的那种复杂缠结的喜爱。鉴于我早就将原先那本内格尔和纽曼合写的神奇的书搞丢了，我又买了一本——多亏它还在印刷发行——并带着重新焕发的强烈爱好再重读了一遍。

那年夏天，我向研究院请了假，驾车横穿美国大陆，一路风餐露宿，同时虔诚地阅读有关哥德尔的著作，思考推理的性质以及将思想和意识机械化的梦想。在事先毫无计划的情况下，我一头扎进了纽约城，头一个找的就是我的老朋友，智力上和感情上

的导师内格尔夫妇。接下来的几个月时间，我在他们的公寓里渡过了无数的夜晚，情绪热烈地讨论了许许多多的问题，其中当然包括了哥德尔证明及其衍生的相关论题。

1972 年标志着我个人深入涉猎哥德尔证明以及围绕它的内容丰富的相关领域的开始。之后几年，我对这一系列观念进行了或许显得有些怪异的探索，并最终出了一本书叫做《哥德尔、艾舍尔、巴赫：一条永恒的金带》（*Gödel, Escher, Bach: an Eternal Golden Braid*）[†]。毫无疑问，我这本枝叶蔓延的书的父母，一方是内格尔和纽曼的书，另一方是霍华德·迪隆的书。

哥德尔的工作究竟意义何在？库尔特·哥德尔，这位生于 1906 年的奥地利逻辑学家，曾沉浸在他那个时代的向着形式化方向无情驱动的数学氛围之中。人们相信符号操作的规律能够把握住数学的思维，只要从一组固定的公理和一组固定的符号操作规则出发，就能通过将符号颠过来倒过去而产生出称为“定理”的新的符号串。这场运动的高潮是罗素和怀特海（Alfred North Whitehead）于 1910 至 1913 年间出版了三卷本《数学原理》（*Principia Mathematica*）。罗素和怀特海自信已经将全部数学建立在纯逻辑之上，并且他们的著作已为今后所有的数学打下了坚实的基础。

差不多二十年后，哥德尔开始对这一壮观的图景产生怀疑。

[†] 中译本：《哥德尔、艾舍尔、巴赫——集异璧之大成》，侯世达（霍夫斯塔特的中文名）著，郭维德等译，商务印书馆，1996 年。——译者注（以下凡译者注皆以†号打头，并标明为译者注。）

有一次他正在琢磨《数学原理》中极为严格和一丝不苟的符号操作，突然感到事实上这种模式和数字模式是如此相像，因而可以将每个符号都换成数字，并将《数学原理》中的符号操作全部变成数字运算。这种新的看问题的方式，产生了令人震惊的相互缠绕的结果：因为《数学原理》的主要论述的对象是数，而哥德尔又将此书的符号媒介也变成了数字，这表明《数学原理》自身就是它的主要论述对象之一；换句话说，罗素和怀特海系统中的模式化的公式组合可以被看作是相互指涉的，很可能就是在论述其自身。

这种相互缠绕确实是未曾想到的事情的转机，因为它不可避免地使哥德尔想到了古老的涉及自指的悖论，其中最有名的是：“这句话是错的。”正是由于此类悖论的启发，哥德尔想到，在原则上，他可以写出《数学原理》系统中一个不可思议地谈论其自身的公式：“按照《数学原理》的规则，这个公式不可证”。这样一个自我缠绕公式的存在，对于罗素和怀特海构筑的大厦是一个巨大的威胁，因为他们一直把绝对消除“恶性循环”当作神圣目标，并且确信已经赢得了这场战役。而现在，看来恶性循环是通过后门潜入了他们的纯净领地，潘朵拉的盒子被打开了。

必须得对付这个自我否定的哥德尔公式。哥德尔非常精巧地处理了这个问题，他表明，尽管看起来它像是一个悖论，但和悖论有着非常微妙的差别。尤其是，它被揭示出是一个无法用《数学原理》系统的规则证明的真命题，而说到底，这个真命题的无

法证明恰恰在于其真。

正是以这种令人瞠目结舌的大胆方式，哥德尔横扫了《数学原理》这座堡垒，使之轰然倒塌变成了一堆瓦砾。他也证明了，他的方法可用于任何和《数学原理》抱有同样目标的系统。实际上，哥德尔粉碎了那些相信通过严谨的公理系统就可以网尽数学思想的人们的希望，并因而迫使数学家、逻辑学家和哲学家们去探索新发现的，将可证性和真理性截然分开的神秘鸿沟。

从哥德尔开始，人们才明白数学思维是多么微妙，多么深邃；一度显得实现在即的将数学思想机械化的希望，如果还不算是痴人说梦的话，也是摇摇欲坠了。那么，哥德尔之后，应该相信数学思维是什么？数学真理是什么？归根结底，什么是真理？在哥德尔的划时代的论文发表七十年后，这些仍然是未得到解决的中心问题。

我本人的书，尽管大大得益于内格尔和纽曼，并不是在所有的哲学结论上都和他们保持一致。这里，我想指出一个关键的不同之处。在他们的“结论性的反思”中，内格尔和纽曼认为在有了哥德尔的发现之后，可以认为计算机，或如他们所称的“演算机械”，原则上无法在推理方面做到和人类推理一样灵活机动。之所以如此，是因为计算机要遵循“一组固定的指令”（即某个程序）。对于内格尔和纽曼来说，这个想法对应着固定的一组公理和推理规则，而计算机在执行它的程序时的行为方式，就类似于一台机器在一个形式系统内系统地摆弄出定理的证明系列。这

种将计算机对应到形式系统的作法，非常符合加诸于它的“演算机械”这个名称的字面意思，也就是说，造出这种机器来仅仅是为了用于处理数字和算术问题。想到这样的机器按其本性能够“摆弄”出一些有关数学的真命题，的确令人鼓舞，实际上也有一定的道理；但是，仅仅这样来理解计算机的话，未免就太小看计算机的能力和多方面的功能了。

尽管恰如其名，计算机是由严格面向算术运作的硬件构成的，却不能说按其设计就使它和数学真理不可分割的联系在一起。要计算机打出大量错误的数学运算式（如 2+2=5；0/0=43，等等），并不比打印出某一形式系统的定理更为困难。而要求设计出“一组固定的指令”，使计算机能够像任何一位数学家那样，借助于想象图形、概念联想、直觉猜测、类比及审美选择来探寻数学观念世界（而不是仅仅弄出一些数学符号来），则是相当微妙也相当困难的挑战。

当内格尔和纽曼写作《哥德尔证明》的时候，想使计算机像人一样思考，换句话说就是具有人工智能，还是刚刚提出来的一个目标，它的前景潜力如何当时并不清楚。在那些早期的日子里，一个主要的努力目标就是将计算机用作公理系统的机械实现，这样一来，计算机所要做的就是运作出定理的证明。现在来看无可否认的是，如果这种处理方式被视为在原则上代表了计算机模拟人的认知能力的全部方式，那么内格尔和纽曼的论点确实是对的，就是根据哥德尔的发现，不管计算机的运算有多快，也不管

计算机的记忆存贮能力有多大，它必定不及人的思维那样灵巧，也不具备人类思维的洞察力。

然而，定理证明在使计算机模拟思维的各种方法中不过是最简单的方法之一。让我们来看看道格拉斯·利纳特（Douglas Lenat）于七十年代中期写的“AM”程序。AM 不是处理数学命题，而是处理概念；他的目标是基于一个十分原始的审美观和尽量简单的原则去寻找“有趣的”概念。从零开始，AM 发现了很多数论中的概念。AM 不是去用逻辑证明定理，而是在数的世界中漫游，用它的原始的审美的“鼻子”，嗅出一些模式，并对其进行一些猜想。就像一个聪明人一样，AM 的猜想大多数都是对的，也有一些是错的，还有少数到现在仍无法判断其对与错。

另一种用计算模拟思考（精神）过程的方式是通过神经网络，这种方式和那种定理证明的范式真是相差十万八千里。由于人脑的细胞是以某些方式联接在一起的，而又可以用软件来模拟所有这些方式，也就是说，用“一组固定的指令”，控制一个计算引擎，就可使之模拟出显微镜下才见得到的脑网络及其行为。认知科学家们已研究此类模型多年，发现许多大脑的学习模式，包括相应的犯错误的情况，都能被忠实地模拟复制出来。

上面两个例子（我还能举更多的例子）说明，人的思维，包括它的灵活性和易错性，在原则上讲是可以用“一组固定的指令”模型化的，前提是人们要从那种认为按照算术运算而建造的计算机，除了奴隶般地产生真命题——全部真命题且只有真命题外，

什么也做不了的先入之见中解放出来。这种先入之见，坦率的说，源自形式公理演绎系统的核心思想，但今天不会再有人仍然认真地将这个系统当作人类思想的模型了，即使在人的思想处于最具逻辑的状态时也是如此。现在我们已经了解到，人的思想从根本上不是一种逻辑引擎，而是一种模拟引擎，一种学习引擎，一种猜测引擎，一种审美驱动的引擎，自我较正的引擎。只要深刻地记取这个教训，我们就绝对能使“一组固定的指令”具有上面提到的一些性质。

需要明确的是，我们现在搞出的计算机程序，离哪怕是稍稍相似于人类思维的灵活性都差得极远，在这个意义上，内格尔和纽曼以诗意的语言做出的下述论断应该是很恰当的：面对哥德尔定理，“不应对此感到沮丧，而应把握住这个对创造性理性再次赞赏的机会。”不能说得比这更好了。

然而，在内格尔和纽曼对哥德尔所得结果的解释中，存在使人感到明显不一致而具有讽刺意味的地方。内格尔和纽曼的书的读者们会看到，哥德尔的天才之处，就在于他认识到数字是体现任何种类的模式的普遍中介，并且正因为如此，表面上看来只是有关数字的命题，事实上能够被看作是有关其它领域的命题的编码。换句话说，哥德尔跨越了数论的表面层次，认识到数字能够代表任何种类的结构。在计算机问题上应用哥德尔的想法，可以看到，由于计算机说到底是操作数字的，而数字又是体现任何种类的模式的普遍中介，因而计算机能对应任意类型的模式，不管

它们是逻辑的还是非逻辑的，是一致性的还是非一致性的。简言之，当你站得离成千上万内部相互联系着的各种数字模式足够远时，你就能看出其它领域的模式，就像肉眼观看一个显示屏上的像素，能从中看出一张熟悉的脸来，而非 0 和 1 组成的阵列一样。这种哥德尔式的对待计算机的方式，在现代世界上已通行到了这样的程度，以至于除了专家以外，人们对计算机的数字基础干脆就是视而不见。普通人日常用计算机进行文字处理，玩游戏，通信，看动画，设计，画图等等，根本就不去想在硬件深部进行的基本算术运算。认知科学家，指望他们的计算机的算术硬件既不犯错也无创造性，而给出“一组固定的指令”来模拟人的出错及人的创造。至少在原则上，没有理由认为不能用计算机模拟出创造性的数学思维过程。但是，在二十世纪五十年代，还很难看出计算机的这种潜力。然而，免不了有讽刺意味的是，这样一本专门赞颂哥德尔对数字在总体上能包揽所有模式的洞见的书，其主要的哲学结论中竟然没有体现这种洞见，因而未能看到这种“演算机械”能复制出所有的可以想见的模型样式，甚至包括创造性的人类思维在内。

在结束这篇前言之前，我想就我为何要冒昧地对这样一部经典著作进行一些技术性的修订作几点解释。尽管此书在评论家那里受到了热情欢迎，但仍有批评认为它在个别地方不够精确并有误导读者的危险。在第一次读此书时，我本人并没有察觉到任何这样的瑕疵；但是多年之后，当我设想自己要尽可能精确和清晰

地解释这里面的概念，而再次阅读《哥德尔证明》一书时，在第七章的几个段落中碰到了问题，并且不久我就明白了这不完全是我本人的原因。知道这本受人钟爱的书中有一些瑕疵当然不好受，但显然我也无能为力。有意思的是，当时我就在书页边上的空白处仔细地记下了我发现的所有不妥之处，并表明了应如何进行纠正，就像我当时就预见到了有那么一天，我会突如其来地收到纽约大学出版社的来函，问我是否可考虑为这本书的新版写一个前言似的。

我肯定是最受内格尔和纽曼这本小小的经典著作影响的读者中的一员。为此，既然有了这么个机会，我义不容辞应为他们将这块宝石揩拭干净，使之在新千年重放光芒。我希望我这样做，非但没有背叛我尊敬的导师们，相反是表达了一个热情而又虔诚的弟子的敬意。

布鲁明顿，印第安那大学，概念和认知研究中心

一　导论

1931 年，一本德国的科学期刊上发表了一篇不算很长的论文，其标题很令人费解，叫做“论《数学原理》及相关系统的不可判定命题”。论文作者是库尔特·哥德尔，当时是维也纳大学的一位年仅 25 岁的年轻数学家，1938 年以后，成为普林斯顿高等研究院的终身成员。这篇论文是逻辑和数学史上的一座里程碑。1952 年哈佛大学在授予哥德尔荣誉学位时，将此项工作称为现代逻辑学最重要的进展。

但是，当这篇论文初次发表时，大多数数学家既不明白它的题目也不了解它的内容。在标题中提到的《数学原理》，是怀特海（Alfred North Whitehead）和罗素（Bertrand Russell）合写的三卷关于数理逻辑和数学基础的旷世巨著；但是对于在数学的大多数分枝中要想成功地从事研究工作来说，熟悉这本著作却也并不是必不可少的预先要求。而且，哥德尔论文中处理的那一类问题，除了吸引少数研究者外，绝大多数人都不会感兴趣。其证明的思路在论文发表时又是如此创新，以至于只有那些密切关注着这个高度专业化的领域中的技术性文献的人才能无困难地跟上其论证。尽管如此，现在人们已普遍认识到，哥德尔所得出的结论，就其广泛的哲学方面的重要性而言，是具有革命意义的。本书的目的，就是使非专业的人士能够了解哥德尔成果的要点和其证明的轮廓。

哥德尔这篇著名的论文攻克的是数学基础的一个中心问题。这里先简要的概述一下问题产生的背景是会有帮助的。任何曾接触过初等几何的人，无疑都会回想起它是一门演绎的学科。在经验科学中，一条定理只要和观察相一致就会被接受，但几何学与此不同。一个命题，只要它是经由明确的逻辑证明所得出的结论就是成立的，这个观念的形成可回溯到古希腊人，正是他们发明了所谓的“公理方法”，并且利用这种方法以一种系统的方式发展了几何学。公理方法，就是先不加证明地将某些命题当作公理或前提（例如，通过两点只能画一条直线的公理），然后从公理推导出系统中所有其它的命题作为定理。公理构成了系统的“基础”；定理则是仅靠逻辑原理的帮助从公理所得到的“上层建筑”。

几何学的公理化发展给每个时代的思考者都留下了强烈的印象；因为这样少的几条公理，竟然支撑起了可从中导出的无穷无尽的命题。而且，如果能够以某种方式确保这些公理为真——实际上，两千年来绝大多数学者都毫无疑义地相信它们是关于空间的真理——则所有定理的真理性和相互间的一致性都自动得到了保证。由于这些原因，世世代代的杰出思想家们，均将公理化的几何学视为科学知识的最好典范。因此，很自然地要问，几何学以外的思想分枝，是不是也能被建立在可靠的公理基础之上。然而在古代只有某些部分的物理学曾被公理化了（如在阿基米德那里），除此之外，直到现代只有几何学被大多数学者认为是具有

坚实公理基础的唯一的数学分枝。

但是最近两个世纪以来，公理方法的研究越来越有力和充满生机。对数学的新老分枝，包括对熟悉的基数（或“非负整数”）性质的研究，都提供了一组看上去是适当的公理。[1] 当时的舆论普遍认为，数学思想的每一分枝都能找到一组公理，从其出发就足以系统地推导出在此研究领域中无穷无尽的所有真命题。

哥德尔的论文证明这种假定是站不往脚的。他向数学家们宣布了使人吃惊而又沮丧的结论，即公理方法具有固有的局限性，即使是非负整数的性质也不可能全部被公理化。他进而证明对于许多演绎系统，数论只是其中一例，要确定其内部逻辑一致性是不可能的，除非所采用的推证原理是如此复杂，它本身的内在一致性和所要确定的系统一样是悬而未决的。根据论文中的这些结论，许许多多重要的数学领域是无法最终完成其（公理）系统化的，并且也无法绝对地保证很多数学的重要分枝可免于内部的自相矛盾。

因此，哥德尔的发现破除了深深扎根的先入之见，使因数学公理基础的研究而重新点燃的古老希望破灭了。但是，他的这篇论文并不完全是负面的。他给基础问题的研究引进了一种新的分

---

[1] 数论，可追溯到古希腊时代，专门研究自然数 0，1，2，3，…的性质。自然数有时也被称为“基数”或“非负整数”。它们的性质包括：一个数有多少因子；一个数有多少种不同的方式被表示为较小的数字的和；具有某种性质的数是否有一最大数；某类方程的解是否为整数，等等。虽然数论内容无比丰富，充满了使人惊奇的结果，它的专业词汇却极少，十几个符号就足以表达任何数论命题了（尽管常常显得笨拙）。

本书中，我们偶尔会用“算术”作为数论的同义词，当然此词的含义是指数论中全部丰富的内容，而绝不仅仅限于指在小学所教的加、减、乘、除，或像在收银机和加法器中通过机械实现的那些机械方法。——编者注（“编者注”即为霍夫斯塔特注。以下凡霍氏注，皆标明为编者注。——译者）

析方法，这种方法不管在其性质上还是在其成果的丰硕上，都可以和笛卡尔在几何中引入的代数方法相媲美。这种方法在逻辑和数学研究中提出了新的问题，也引发了现在仍在进行之中的针对数学哲学以及对一般知识论哲学所做的重新评价。

如果没有相当的数学训练，要跟踪哥德尔这篇划时代的论著中的证明细节是十分困难的。但是，要使具有尽管是相当有限的数学和逻辑知识的读者，了解他的证明的基本结构和其结果的核心内容还是能够做到的。为了获取这样的了解，读者会体会到，先简单地回顾一下数学和现代形式逻辑的某些相关的进展是有帮助的。本书下面四章将进行这样的考察。

二　一致性问题

在十九世纪，数学研究的领域大大扩展了，研究的力度也大大加强了。很多早期思想家曾付出过极大努力而无斩获的一些基本问题得到了解决；数学研究的新领域被开拓了出来；在这门学科的各个分枝中，或者奠定了新的基础，或者借助于更为精确的分析技术使老的基础得以重塑。例如：在初等几何中，希腊人曾提出只用直尺和圆规三等分一个角，求出体积为一已知立方体两倍的立方体，以及画出面积等于已知圆的面积的正方形这样三个问题。两千多年来，解决这些问题的努力均未成功。直到十九世纪，才最终从逻辑上证明这三个作图问题是不可能有解的。然而更重要的是，在证明时得到了十分有价值的副产品：因为问题的解在实质上要依赖于特定方程的根的类型的确定，因此对这些古代流传下来的著名问题的关心催生了对数的性质和数的连续统结构的深入探究，最终对负数、复数和无理数给出了严格的定义，为实数系统建立了逻辑基础，并创立了关于无限数的理论。

但是如果就其对后来的数学史产生的深远影响而言，最有意义的进展是解决了希腊人提出而没能解答的另一个问题。欧几里德在使几何系统化时所用的公理中，有一个涉及到平行线。他所用的这个公理在逻辑上等价于（但并不全等于）以下的假定：过一条给定直线外的一点只能画出一条这条直线的平行线。由于多种不同的原因，对于古人来讲这条公理并不显然是“自明”的。

因此他们试图用其它显然是自明的欧氏公理来推导出这条公理。[2] 能否找到平行公理的证明？世世代代的数学家们都曾努力地试图解决这个问题，但一直未能奏效。当然反复地求证失败并不意味着不能找到这个证明，就像迄今为止一直未能有效治疗一般伤风感冒，但这并不意味着人类永远得为此而流鼻涕一样。直到十九世纪，主要是由于高斯（Gauss）、鲍耶（Bolyai）、罗巴切夫斯基（Lobachevsky）和黎曼（Riemann）等人的工作，从其它公理推导出平行公理的不可能性才得以确认。这个结果在认识上具有极大的重要意义。首先，它以令人印象深刻的方式使人们看到这样的事实，即能够证明某一系统中某些命题的不可证性。我们将会看到，哥德尔的论文，就是证明了数论中某些重要命题的形式证明的不可能性。其次，平行公理问题的解决，迫使人们认识到，欧几里德并没有为几何学画上句号，因为可以在一组不同于并且也不相容于欧几里德公理的公理基础上，建立起新的几何体系。特别是，正像大家所知道的，当用过一直线外一点可画一条以上的平行线作为公理，或者相反地，用过这一点没有平行线作为公理来代替原来的平行公理时，可以得到一批引起人们巨大兴趣的丰硕成果。传统观念曾认为几何公理（或者任何学科的公理）可以由于它们看起来自明而成立，但这种观念现在崩坍了。

[2] 认为缺乏自明性的主要原因，似乎是由于平行公理涉及到空间的无限远区域。欧几里德将平行定义为“当两直线在同一平面上向两个方向无限延长”时不相交。因此，当讲到两条直线平行时，等于说是两条直线即使在“无限远处”也不相交。但是古人知道存在这样的线，它们在平面上的任何有限的区域内都不相交，但是会在“无限远处”相交，并将这样的线称为“渐近线”，如双曲线是其轴的渐进线。因而对于古代的几何学家来说，过一条直线外一点只能画一条在无限远处也不与其相交的直线这一点并不是直观上显然的。——作者注（以下凡作者之原注皆不另标明为作者注。——译者）

进而，人们逐渐地认识到，从事纯数学研究的适当方法，就是从假设的公理前提推导出定理，而这些公理是否自明为真则无关紧要。最后，对正统几何学的成功改造，推动了对许许多多其它数学系统的公理基础的修正和完善。那些迄今为止都只是在或多或少的直觉的基础上进行研究的领域，最终都被建立在公理基础之上了。（参见附录第 1 条）

从对数学基础的这些重要研究中所得出的总体结论是，将数学视为“量的科学”这一古老的观念既有所欠缺又容易对人产生误导。很显然，数学不过是一门从一组给定的公理或前提所隐含的东西中逻辑地抽取结论的最完善的学科。事实上，数学推演的有效性，并不依赖于前提之中词汇的含义或表达式的意思。因此，数学要比传统上所认为的更为抽象和形式化：所谓更抽象，是因为在原则上数学命题可表达任何东西，而不仅限于某类事物的固有划分或其特性；所谓更形式化，是因为数学证明的有效性是基于命题的结构，而不取决于特定主题的本质。任何应用性的数学分枝的前提，并不是固有地代表空间、数量，苹果、角度，预算等等具体内容；和前提所用语汇相联系的任何特定含义（或所谓“描述性谓词”），在推导定理的过程中都不会实质性地发挥作用。我们要再次强调，纯数学家所面临的问题（区别于用数学去研究某一特定问题的科学家），不是所假定的前提或从这些前提演绎出的结论是否为真，而是这些结论在事实上是否为初始前提的必然的逻辑结果。

举个例子。在深具影响的德国数学家希尔伯特（David Hilbert）写的著名的《几何公理》（最早发表于 1899 年）中，有未定义的（初始的）词汇表述像“点”、“线”、“在…上面”、“在…之间”，等等。我们可能觉得和这些词相关的惯用的意义在发现和学习定理时是发挥着作用的。由于其含义是熟悉的，我们感到我们理解它们之间的各种关系，并且这种理解引导着公理的形成和选择；进而，它们启发并促成了我们希望成为定理的那些命题的形成。但是事实上，正如希尔伯特所表明的那样，在这里我们所有要考虑的只是最基本的数学任务，即揭示出命题之间的纯粹的相关逻辑关系，应将那些初始词汇的熟悉含义整个忽略掉，而与那些初始词汇唯一有关的“意义”，仅由它们所在的那些公理来决定。[3] 这就是罗素所说的警句的意思：纯数学是一门我们不知正在谈论的是什么，或者不知所谈的是否为真的一门学科。

像这样一种严格的抽象观念，其中没有一点熟悉的地标，肯定是不好对付的。但是作为一种补偿，它提供了新的活动自由和新的景观。过去人们习惯于对精心构造的公理前提所表达的东西进行解释，而现在强化了的数学形式化将人们的思想从这种限制中解放了出来。新型的代数和几何出现了，它们和传统的数学有着重大区别。随着某些词汇的语义变得更加宽泛，它们的应用也变得更广，且从中得到的推论更少局限。形式化促生了多种多样

[3] 用更技术性的语言来讲，初始词汇是由公理“隐含地”确定的，所有不包括在隐含定义中的东西，均与定理的证明无关。

的具有相当数学趣味和价值的体系。必须承认，其中有的无法像欧几里德几何或算术那样具有直接感性的（即常识的）解释，但对这一事实不必感到惊慌。直觉事实上是具有弹性的：我们的孩子可能会毫无困难地将相对论中的佯谬（即看似谬误但其实不然的现象——译者）当作直观明显的东西接受下来，就像我们对几代之前被认为完全不可直接感受的东西会毫不犹豫地加以接受一样。正像我们都知道的，直觉并不是一个安全的向导：它不适用于作为一种标准，以判断一项科学探索的真理性或它是否能获得成果。

然而，数学的日益抽象化引发了一个十分严肃的问题。这个问题就是，作为一个理论体系基础的一组公理前提是否是内部协调一致的，是否能确保不会从前提推导出相互矛盾的定理。当一组公理是关于某些熟悉的对象时，这个问题似乎显得不是那么紧迫；因为，“这些公理前提对这些对象来说是否为真”这样一个问题，不仅可能显得有意义，而且还有可能加以证实。由于欧几里德的公理曾被普遍认为是关于空间（或空间中的对象）的真命题，十九世纪以前的数学家没有一个曾考虑过是不是有朝一日会从这些公理中推出一对相互矛盾的定理出来。这种对欧几里德几何一致性的信心，源自这样一个可信服的原理，即逻辑上不相容的命题不可能同时为真；如果一组命题是真的（对欧几里德公理就是这么假设的），那么这些命题逻辑上是相互协调一致的。

非欧几何，显然就属于另外的范畴了。它们的公理，开始时

被认为对空间而言明显不成立，甚至其中有任何东西能够成真都是大可怀疑的；所以确定非欧几何体系的内部一致性，被认为是既困难又关键的问题。如在椭圆几何里，欧几里德平行公设被过直线外一点无法画出一条平行线的设定所替代。那么，再来考虑：椭圆几何的公设之间是否一致？这些公设明显地不符合普通经验的空间。那么，如何来证明其一致性？怎么证明不会导致相互矛盾的定理出现？显然，现有的已经导出的定理之间没有矛盾这个事实解决不了这个问题，因为下一个导出的定理就会产生矛盾的可能性始终存在。然而除非这个问题真正得到解决，否则就无从确认椭圆几何可以是欧几里德几何的替代物，也就是说，它们同样在数学上是正确的。非欧几何成立的可能性和这个问题的解决是联系在一起的。

解决此问题的一般性方法是有的。其基本想法是为系统的抽象公设找到一个"模型"（或"解释"），使每一条公设都转化为关于此模型的一个真命题。在欧几里德几何的情况下，模型就是普通空间。这个方法被用来寻找其它的模型，这些模型的元素可被用为确定抽象公设一致性的实际支撑。其一般过程可说明如下。首先我们说"类"是一群或一堆相互能区别开的元素，其中每个元素都被称为这个类的一个"成员"。如小于 10 的质数就是一个类，其成员为 2、3、5、7。假如下面的一组公设是关于两个类 K 和 L 的，这两个类的特殊性质并未明确给出，而是"隐含地"由公设所确定：

1. K 的任两个成员都被包含在 L 的一个成员里。
2. L 之中不会有两个以上（不含两个）的成员同时包含有 K 的同一个成员。
3. K 的成员不会全都包含在 L 的同一个成员里。
4. L 的任两个成员都同时包含且只包含 K 的同一个成员。
5. L 的成员不会包含两个以上（不含两个）的 K 的成员。

从这组数量不多的公设出发，使用通常的演绎规则，可以推导出许许多多定理，例如可以证明 K 只有三个成员。那么这组公设是不是一致的，因而决不会推出相互矛盾的定理呢？这个问题可以在下面模型的帮助下得以解决：

> 让 K 为三角型的顶点组成的类，L 为这个三角型的三个边构成的类；并将“K 的一个成员包含在 L 的一个成员之中”理解为作为顶点的点位于作为边的直线上。因而，上面五个公设全都转换成了真命题。例如，第一条公设说的是三角型的任意两个顶点都位于这个三角型的一条边上（见图 1）。用这种方式，可证明这组公设是一致的。

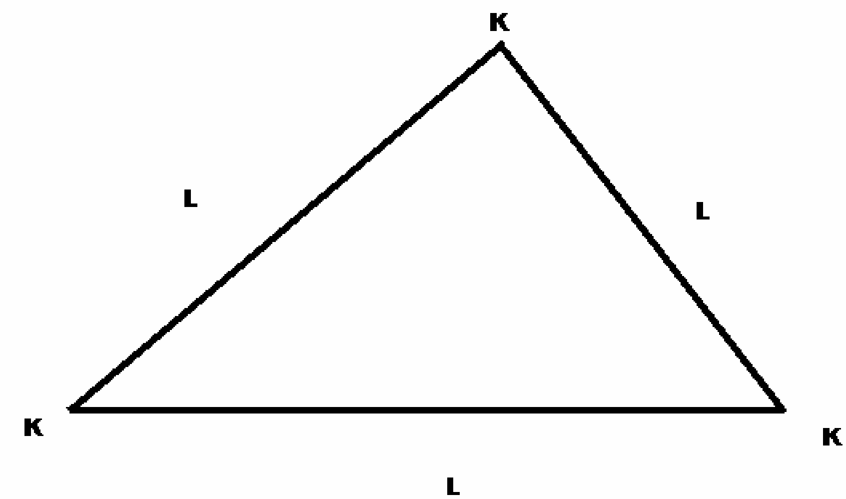

图 1　关于 K 和 L 两个类的一组公设的模型，是一个三角型。其顶点是 K 的成员，其边是 L 的成员。这个几何模型表明这组公设是一致的。

平面椭圆几何的一致性，也能够通过一个体现公设的模型来建立。我们可以将椭圆几何公理中的表达词“平面”解释为一个欧几里德球面，将表达词“点”解释为在球面上的一对对顶点（球面上兩點*A*，*A'*互為對頂的條件是连接两点的直线线段*AA'*以球心為其中點——译者），而表达词“直线”解释为球面上的一个大圆（球面上圆心与球心重合的圆——译者），等等。这样，每一条椭圆几何的公设都变成了一条欧几里德定理。例如，按照这种解释，椭圆几何的平行公设的意思为：通过球面上的一个点，无法画出一个和已知大圆平行的大圆（见图 2）。

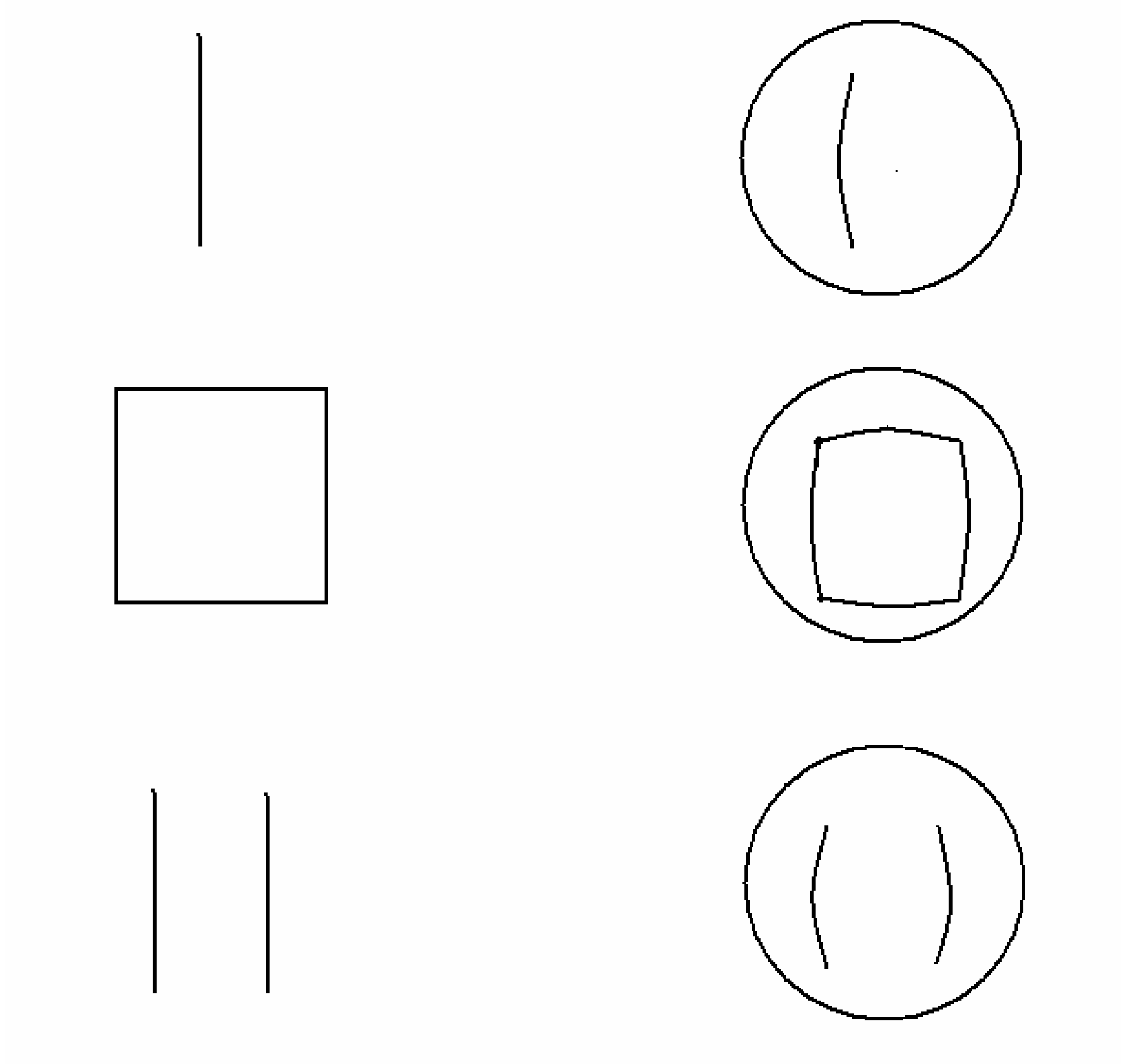

图 2 “椭圆平面”的非欧几何可用欧几里德几何模型表示。椭圆平面变成了一个欧几里德球面，平面上的点变成了球面上的一对对顶点，平面上的直线变成了大圆。因此直线段所围定的椭圆平面部分可用大圆线段所围定的一部分来表示（中图）。椭圆平面上两条线段成为欧几里德球面上两条大圆线段（底图），它们延长下去肯定会相交，从而和欧几里德平行公理相抵触。

初看起来，关于椭圆几何一致性的证明似乎是决定性的。但

如果仔细想一下，还是使人感到不安。敏锐的人会看出一致性问题并没有解决，它不过是从一个领域转移到另一个领域去了。上面的证明过程，是通过欧几里德几何的一致性来解决椭圆几何的一致性问题。所得到的结果，不过是说，如果欧几里德几何是一致的，那么椭圆几何也是一致的。这是在调用欧几里德的权威来证明另一个系统的一致性，而这一系统正是欧几里德独家正确性的挑战者。最后还是要归结到这个问题：欧几里德体系的公理本身是否一致？

对这个问题的一种回答，正像我们已注意到的，是古老传统流传下来的一个神圣的说法：欧几里德公理是真理，因此是一致的。这个答案现在不再被认为是可接受的了；我们很快会回到这个问题上来，并解释为什么它不令人满意。另一种回答是，这些公理和我们有限的但是实际的空间经验相一致，因此我们可以由此外推至普遍成立。然而，虽然有很多归纳的证据可被引用来支持这样的说法，但说到底这样的证明是逻辑上不完全的。即使至今为止所有观察到的事实都和这些公理相符合，却始终存在这样一个可能性，即尚未观察到的事实可能会和它们相矛盾，因此会否定其普遍性。从归纳的角度考虑问题，只能表明其公理看起来是真的，或可能是真的而已。

希尔伯特另辟蹊径直上峰顶，用的线索是笛卡尔坐标几何。按照他的这种解释，欧几里德公理都被简单地转换为代数真理。例如，对平面几何的公理来说，“点”由一对数来表示，“直

线”被视为二元一次方程表示的数之间的（线性）关系，而圆被视为由某种形式的二元二次方程表示的数之间的关系，等等。两个给定的点唯一地决定一条直线这个几何命题，可翻译成两对确定的数唯一地决定一个线性关系的代数命题；直线最多交圆于两个点的几何定理，对应于二元联立方程组（其中一个是线性的，另一个是某种形式的二次方程）最多有两对实数解的代数定理；等等。简言之，欧几里德公设的一致性，可通过它们之能满足一个代数模型来证明。这种确立一致性的方法是有力和有效的。然而，和上面讲过的一样，它同样是易受攻击的，因为在这里一个领域的问题再次被转移到另外一个领域。希尔伯特关于他的几何公设的一致性论证，无非是表明如果代数是一致的，那么他的几何体系也是一致的。这种证明显然和假定另一体系的一致性有关，因而并不是个“绝对”的证明。

在各种各样的试图解决一致性问题的努力中，都碰到一个不易解决的困难。这个困难在于这样一个事实，即用于解释公理的模型都包括无穷多的元素。这样就不可能通过有限的观察来遍历整个模型；因而对公理本身的真理性就会存疑。在对欧几里德几何真理性的归纳论证中，有限数量的观测事实看起来是和它的公理相一致的。但是，这个论证所寻求的结论，涉及到从有限的数据外推到无限。我们怎么样才能确认这种飞跃的正当性呢？另一方面，如果可以构造一个只包含有限个元素的适当模型的话，那么这个困难如果不是完全消失，也会被最小化。前面我们用以证

明类 K 与类 L 的五条抽象公设的一致性所用的三角模型是有限的；因而通过实际检验模型的元素是否满足这些公设，从而确定它们是否为真（因而是一致的）是比较简单的。例如，通过检验模型三角形的所有的顶点，就可看出其中任意两个都在且只在一条边上，因而第一条公设可被认为是正确的。由于这个模型的所有元素，以及它们之间的所有相互关系，都可以直接地和无一遗漏地加以检视，并且因为在检视它们时犯错的可能性几乎为零，实际上在这种情况下公设的一致性是无可怀疑的。

不幸的是，构成重要的数学分枝基础的大多数公理系统，无法被映射到有限的模型中去。试考虑一下初等算术的一条公设：每一个整数都有一个不同于任一前面整数的后继。显然，所需检测的模型的集合不可能是有限的，肯定含有无限的元素。结果是其真理性（因而其一致性）无法通过逐一检视有限数量的元素来证实。这里我们陷入了一个明显的僵局。有限模型，在原则上足以证明某一类公设的一致性；但是此类公设在数学中作用不大。非有限模型，对于解释大多数数学上重要的公设系统是必要的，却只能泛泛而论；我们不能明确无疑地肯定这种设定不会内含矛盾。

我们倾向于认为，非有限模型所描绘的东西是一致的，只要所用到的概念透明般的“清晰”和“显然”。但是思想史对待由清晰和显然的观念构成的教条，或者隐含在上面说法中的对待直觉知识的教义并不仁慈。在某些数学研究领域中，有关无限集合

的假设起着中心作用，然而，尽管其中相关的观念在直觉上是清晰的，理论的建构看起来也前后一致，却仍然出现了尖锐的矛盾。这样的矛盾（技术上可称为“二律背反”），出现在十九世纪的康托（Georg Cantor）所提出的有关无限数的理论当中；这些矛盾的出现使人清楚地认识到，即使是类[4]（或总合）这样的基本观念，其表面上的清晰都不能保证任何建构于其上的特殊系统的一致性。因为处理元素总合或集合的性质及关系的有关类的数学理论，通常被用作其它数学分枝特别是数论的基础，很自然就会产生一个相关的疑问，即在无穷类理论中碰到的那些矛盾，是否会影响到数学其它部分的确立。

事实上，罗素就在初等逻辑的框架中构造了一个矛盾，它非常类似于先前在康托的无限类理论中产生的矛盾。罗素提出的二律背反可引述如下。类可被分为两种：一种是本身不是其成员的类，一种是本身是其成员的类。一个类叫做“常规”的，当且仅当它本身不是其自身的成员；否则就称为“非常规”的。常规类的一个例子是所有数学家这个类，显然这个类本身不是个数学家，因而不是其本身的成员。非常规类的一个例子是所有可思索的东西组成的类；由于所有可思索的东西的类本身是可思索的，因而是其本身的成员。定义“N”为所有常规类所组成的类。我们的问题是，N 本身是否是常规类。如果 N 是常规的，它就是它自

[4] 本书中，我们使用“类”这个词来指今日大多数人所用的“集合”。在怀特海和罗素写作《数学原理》以及哥德尔做出他的发现的时代，使用得更普遍的词是“类”。我们之所以用这个词，正是因为它更能反映我们所描写的时代特点。——编者注

身的一个成员（因为根据定义 N 包括所有的常规类）；但是，在这种情况下，N 是非常规的，因为根据定义，一个包含自身为成员的类是非常规的。另一方面，如果 N 是非常规的，它就是其自身的成员（根据“非常规”的定义）；但是在这种情况下，N 是常规的，因为根据定义 N 的成员都是常规的类。简言之，N 是常规的，当且仅当 N 是非常规的。由此而论，“N 是常规的”这一命题又真又假。这个致命的矛盾，源自对看似澄明的概念“类”的非严格使用。后来又发现了其它一些悖论，都是通过运用熟知的方法和似乎令人信服的推理模式得到的。数学家们终于认识到，在发展一致的系统时，所谓熟悉与直观清晰并不是可靠的指引。

我们已经了解了一致性问题的重要性，并且熟悉了在模型的帮助下解决这个问题所使用的经典的标准方法。已经表明，在大多数情况下，要求使用非有限模型，而对它的描述可能会隐含着不一致性。我们不得不下这样一个结论，就是尽管模型方法是一个极有价值的数学工具，它并不能为它原本要解决的一致性问题提供最后的答案。

三　一致性的绝对证明

由于在证明一致性时应用模型方法的内在局限性，以及越来越多的人认识到许多数学理论体系的标准推演可能会隐含着内部矛盾，数学家们对这个问题展开了新一轮的攻坚战。希尔伯特提出了一种不同于一致性相对证明的办法。他寻求的是构建“绝对”证明，即不用假定其它系统的一致性就可以证明一个系统的一致性。为了理解哥德尔的成就，我们必须简单解释一下此种方法来做进一步的准备。

当希尔伯特构思这种方法时，他想到构建绝对证明的第一步是将演绎系统完全形式化。这意味着要将系统内的所有表达式的意义都抽掉，即将它们都视为空洞的符号，按照事先规定的一组规则，对这些符号进行组合操作。这样做的目的，就是构建一个本身没有任何意义的符号系统（称为一种“演算”），其所有的含义都由我们从外部加以认定。一个完全形式化的系统的公设和定理都是一些无意义的符号组成的“串”（或有限长的序列），其构建是按照将系统的基本符号联接成较大符号组合的规则进行的。而且，当一个系统完全形式化之后，从公设出发进行的定理推导无非是将一组“串”变换（遵循规则）为另外一组“串”而已，从而消除了误用任何未明确规定的推理规则的危险。形式化是一项困难而又易于出错的工作，但是它针对着一个有价值的目标。形式化一览无遗地揭示了系统的结构和功能，就像机械的剖

面工作模型所起的作用一样。当系统被形式化之后，数学命题之间的逻辑关系就揭示了出来，人们可以看到各种“无意义”符号“串”的结构中的规律，譬如它们如何相互关联，如何组合，如何一个嵌入另外一个，等等。

当一页纸上写满了这种形式化数学的“无意义”符号时，它并没有表述任何事情，只不过是一种抽象图样设计，或者说是一种具有确定结构的镶嵌花样。[5] 然而，显然这种系统的构造是可以描述的，并且我们能对其构造及其相互之间的不同关系发表评论。比如可以说一个“串”是按回文顺序排列的（即当从后向前读时和从前向后读是一样的），或者说它的两个符号和另外一个“串”中的符号是一样的，或者某个“串”是由三个其它的“串”拼接而成的，等等。这样的一些评述语句显然都是有意义的，传达了有关这个形式系统的重要信息。我们应立即注意到，这些关于无意义的（形式化的）数学系统的有意义的命题，本身当然不会属于这种系统。它们属于希尔伯特所说的“元数学”，属于关于数学（系统）的语言。元数学命题，是关于一个形式化的数学系统（即一种演算）中的符号，关于这些符号组合成较长

[5] 一种更精确的对形式演算的描述，是说它的符号似乎显得是有意义的（按它的规则运作这些符号的方式，使得这些符号就像具有所希望的意义时应该的那样变换着），但是它们的行为并不是其意义的结果；事实上恰好相反。如果这些形式符号显得有意义的话，他们的外观完全来自其行为，而这种行为完全取决于系统的规则和初始公式（公理）。因此，将“无意义串”视为具有某种意义并不是完全错和完全无道理的，只是要记住这种意义是被动而不是主动具有的。用个比喻的说法来解释这个观念：这些串及其组成符号根本不在乎有什么样的人会赋予它们什么样的意义，对它们来讲所有的一切都取决于规则如何对其运作。

作为一个类比，你可以给你的车起个名字，甚至将其想象为一个活物，但是不管有无名字，也不管它有没有你希望它具有的“灵魂”，汽车的功能都是一样的；所有都取决于使其工作的机器的运作。名字和灵魂都对机器没有影响，尽管这会使你易于与你的汽车沟通。你和心爱的车之间的关系是如此，你和形式演算之间的关系也是如此。——编者注

的称为“公式”的串时有哪些种类和排列，或者关于按照运作规则所获得的公式之间的关系的命题。

举几个例子会有助于了解希尔伯特所说的数学（即无意义的符号系统）和元数学（即关于数学，演算中所用的符号，它们的排列和相互关系的有意义的命题）之间的区别。考虑下面的表达式：

$$2 + 3 = 5$$

这个表达式属于数学（算术），完全是由初等算术的符号构建的。另一方面，

‘2 + 3 = 5’是一个算术公式

这样一个命题却是对所展示的表达式做出的某种宣称。这个命题并不表达某种算术事实，也不属于算术的形式语言；它属于元数学，因为它将某个算术符号串定性为一个公式。下面的语句也属于元数学：

如果符号‘=’用于算术公式，则这个符号的左右两边都应是数字表式。

这个命题给在算术公式中使用某个算术符号规定了一个必要条

件，即如果算术公式含有这个符号的话，必须要有什么样的结构。

再考虑下面三个公式：

$x = x$

$0 = 0$

$0 \neq 0$

它们都属于数学，因为每一个都是完全用数学符号构建出来的。但是命题

‘x’是一个变量。

属于元数学，因为它将某种算术符号定性为归属于一类特定的符号（即变量类）。同样，下面的语句也属于元数学：

公式‘$0 = 0$’可从公式‘$x = x$’导出，只要用数字‘0’代入变量‘x’。

这个命题规定了用什么样的方法就能从一个数学公式得到另一个公式，因而描述了两个公式如何相互发生关联。相似地，命题

‘$0 \neq 0$’不是形式系统 X 的定理。

也属于元数学，因为它说的是某个公式无法从指定的形式演算的公理中导出，因而对这个系统来讲所给出的公式与公理之间不存在某种关系。最后，下面的命题也属于元数学：

形式系统 X 是一致的。

（即是说，不可能从系统X的公理推出形式上矛盾的公式——例如，公式‘0 = 0’和公式‘0 ≠ 0’）。这个命题显然是关于一个形式演算系统的，它宣告说一对特定类型的公式，和构成这个演算的公理的公式之间，某种特定关系不能成立。[6]

有可能读者感到“元数学”这个词有些笨拙，概念有些含混。我们不打算争辩说这个词是美妙的；但是如果我们指出，它的使用是源于一种众所周知的区分，即研究的对象本身和关于这

---

[6] 值得注意的是，文中给出的元数学命题并不包含任何例子中给定的数学符号和公式本身作为其组成部分。初看起来这个说法显然不正确，因为其中明明出现有符号和公式。但是如果以一种分析的眼光来检验一下这些命题，就会看出来为什么情况确实如此。在元数学语句中包括的是某些数学表达式的名称，而不是它们本身。这种区分相当微妙，但是的确是存在的且很重要。它源自语言中语法规则的要求，即在一个句子的表达中引述某一对象时，包含的并不是这个对象本身而是它的名字。显然，当我们谈论某一城市时，我们并没有将这个城市放入我们的句子，而只是提到城市的名字；相似地，如果我们希望对一个词汇（或其它语言学符号）说点什么，出现在句子中的不会是这个词（或符号）本身而是它的名。按照标准的约定，我们构建一个表达式的名时用一对单引号将它标出来。在本书中我们会坚守这个约定。下面的写法是正确的：

芝加哥是个人口众多的城市。

但是如果我们像下面这样写就不正确了：

芝加哥有三个音节。

为了正确的表达我们的意思，此时应该写为

‘芝加哥’有三个音节。

同样，下面这样写是不正确的：

x = 5 是一个等式。

此时我们应该这样来表达：

‘x = 5 ’是一个等式。

个对象的讨论两者之间的区分，那么这个概念对任何人来说都应是清楚的。“矶鹞是由雄性孵蛋”这个命题，所述说的是关于动物学家所研究的对象，因而属于动物学；但是如果我们说这个关于矶鹞行为的判断证明动物学是不合理的，那么我们所说的句子就不是关于矶鹞本身，而是关于这个判断和它归属的学科了，因而属于元动物学。如果我们说“本我（id）”重于“自我（ego）”，我们所说的属于正统精神分析；但是如果我们批评这个说法是无意义的和不可证明的，那么我们的批评是属于元精神分析的。在数学和元数学中，情况同样如此。数学家们构建的形式系统，属于标着“数学”这个名称的文档；而对这个系统的描述、讨论和推测，属于标着“元数学”这个名称的文档。

明确区分数学和元数学的重要性是怎么强调也不会过分的。过去没有认清这一点就产生了悖论和混淆。认识这种区分的意义，使清楚地展示数学推理的结构成为可能。做出这种区分，有利于细致地选定形式演算的符号，避免隐蔽的假设和可能产生误导的联想含义。而且，它要求数学建构和演绎中所涉及的运算和逻辑规则有精确的定义，其中有很多被数学家们运用着，但他们却没有自觉地意识到。

希尔伯特清楚地了解问题的核心所在，他将一致性的“绝对”证明建立在形式演算和对它的解释之间的明确区分上。具体地说，他要寻找的这种证明一致性的方法，要像使用一个有限模型来证明一组公设的一致性一样，能够免受逻辑上的质疑，其办

法就是去分析完全形式化的演算系统中所包含的表达式的有限数量的结构特点，其中包括关注形式演算中所用符号的类型，表明如何将其组合成公式，指出如何能从公式得到公式，并且确定某种指定类型的公式是否能通过明确规定的操作规则从别的公式推导出来。希尔伯特相信，有可能将每一种数学演算系统都展示为某种“几何式”的公式组合样式，其中公式与公式之间具有有限数量的结构关系。他希望通过逐一检验一个系统内的表达式的结构性质，就能够证明从一给定系统的公理出发不可能得到形式上相互矛盾的公式。希尔伯特方案最初想法的一个实质性要求，就是在证明一致性的过程中，不能涉及到公式的无限数量的结构性质，也不能涉及到对公式进行无限个操作运算。这样的过程被称为是“有限的”；符合这种要求的一致性证明被称为是“绝对的”。“绝对”证明过程中，只用到最少的演绎原理，并且不需要假定其它某组公设是一致的。因此，假如可以建立形式化数论一致性的绝对证明的话，就可以通过有限的元数学步骤来证明，两个相矛盾的公式，如“0 = 0”和它的形式否定式“~（0 = 0）”是不可能同时按照给定的演绎规则从公理（或初始公式）中推导出来的。[7] 上面的符号“~”在形式上模拟我们的直观概念“否定”。

为了说明起见，将元数学作为一种证明的理论与国际象棋理

[7] 希尔伯特并没有对什么样的元数学过程可被认为是有限的做出完整的精确说明。在他提出的方法的最初形式中，对一致性绝对证明提出的要求，还不像他的学派中的其他人在后来对其方法的解释中那样严格。

论比照一下可能是有益的。国际象棋有一个画有 64 个小区域的棋盘，32 个具有特别形象设计的棋子，棋子可以按照固定的规则在棋盘上移动。显然，不对棋子及其在棋盘上的位置做任何解释的情况上也可以玩这个游戏，尽管在想这么做时可以做出此类解释。例如，我们可以约定，一个兵棋子代表军队中的一个团，一个棋格代表某个地理区域，等等。但是这类约定（或解释）并不是惯例；棋子、棋格或棋子在棋盘上的位置在此游戏之外并无任何意义。从这个角度说，棋子和它们在盘上的布局是“无意义的”。因而，这个游戏类似于形式化的数学演算。棋子、棋盘上的方格对应于演算的基本符号；棋子在棋盘上的合法位置排列，对应于演算的公式；而棋子在棋盘上的初始位置对应于演算的公理或原始公式；棋子在棋盘上后来的位置对应于从公理推导出的公式（即定理）；而游戏的规则，对应于演算的演绎（或推导）规则。这种对应不只于此。尽管棋子在棋盘上的布局和演算中的公式一样，都是“无意义的”，然而关于这种布局的命题，正如关于公式的元数学命题一样，是有意义的。一个“元象棋”命题可以表述白方有二十种可能的开棋方法，或者是说在给定的棋局中白方走三步后可以将倒黑方。而且，通过只涉及到有限数量的可允许的棋盘布局的证明步骤，可以得出普遍性的“元象棋”定理。用这种方式，可以得到白方可能开棋走法的个数；同样也可得出当白方只有两个士和王，而黑方只有王时，白方是不可能将死黑方的这样的“元象棋”定理。换句话说，可以通过有限的推

理方法，即依次检验在所讲的条件下有限的布局中的每一种情况，证明出这些或其它的“元象棋”定理。与之相似，希尔伯特证明论的目的，也是想通过这类有限的方法来证明，在一给定数学演算中是不可能推出形式上矛盾的公式的。

四　形式逻辑的系统编码

在进入哥德尔证明之前，恐怕还有两个“坎儿”要过。首先我们必须简要说明怀特海和罗素为什么和怎样写出《数学原理》；其次，我们通过从《数学原理》摘取一个片断，简要地描述一下怎样将演绎系统形式化，以及如何证明它的绝对一致性。

一般地说，即使数学证明本身完全符合可接受的严格专业标准，仍然有可能存在重要的疏忽。这些证明通常都会用到一些没有明确表述出来的演绎原理（或规则）。而数学家们常常没有意识到这一点。以欧几里德证明不存在最大素数为例（除了 1 和本身没有其它因子的数是素数），这个使用反证法的证明过程如下：

假设和要证的结果相反，存在着最大素数。设其为“x”，则

1. x 是最大素数；
2. 将所有小于或等于 x 的素数相乘再加 1 得到一个新数 y，

   $$y = (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \ldots \times x) + 1$$

3. 如果 y 本身是素数，那么 x 就不是最大的素数，因为 y 显然要大于 x；
4. 如果 y 是合数（即非素数），那么 x 也不会是最大的素

数。原因是如果 y 是合数，则它一定会有一个素数因子 z；而 z 和所有小于或等于 x 的素数 2、3、5、7、…、x 都不相同；所以 z 一定是大于 x 的素数；

5. 而 y 不是素数就是合数；
6. 所以 x 不是最大素数；
7. 所以不存在最大的素数。

上面我们只列出了证明的主要环节。可以表明，在把全部环节都列出来时，有大量的不言而喻的推理规则和逻辑定理在起着关键性的作用。其中有些属于形式逻辑的最初等的部分，其它则属于较高级的分枝；比如，属于“量化理论”的那些规则和定理，处理的是包含“量词”的命题之间的关系，其中“量词”指的是“所有”，“有些”和它们的同义词。这里我们将列举一条初级的逻辑定理和一条演绎规则，在证明过程中它们都是必要而又隐在幕后的参与者。

看一下上面证明的第 5 行。这是从哪儿来的？答案是来自逻辑原理（或必然真理）：“或者p或者非p为真”，其中“p”称为命题变量。到底怎样从这条定理得到第 5 行的命题？答案是应用所谓“命题变量替换规则”的推理规则，按照这条规则，可以将一个命题中所含的某个命题变量（在这里是p）的每一次出现，代之以任意的一个命题（在这里是“y是素数”）。正像我们曾指出的，这些规则和逻辑原理的应用，常常是无意识的行为。揭示这

些规则和原理的分析研究工作，即使是在像欧几里德这种相对简单的证明中，也要仰仗于近百年来在逻辑理论方面所取得的进展。[8] 正如莫里埃（Molière）笔下的茹尔丹先生（Monsieur Jourdain）一辈子都在说散文而不自知一样，[9] 数学家们至少推理了二千年而未注意到他们这样做是基于什么原理。直到近代，他们所用的这些工具的真实性质才开始变得明朗起来。

差不多二千年来，亚里士多德为演绎推理的正确形式所建立的系统规范，一直被认为是完备的，不可能再有实质性的改进了。迟至1787年，德国哲学家伊曼努尔·康德（Immanuel Kant）还不得不指出自亚里士多德以来，形式逻辑“未能前进一步，俨然成了一个封闭的完成了的教条体系。”事实上，传统逻辑是严重不完备的，甚至未能顾及很多在相当初等的数学论证中所用到的演绎原理。[10] 在近代，逻辑研究的复兴，始于1847年乔治·布尔（George Boole）《逻辑的数学分析》一书的出版。布尔和其紧接的继承者主要关心的是发展出一种逻辑代数，它将为传统逻辑原理所未能覆盖的更广泛和更多样的演绎推理提供精确的概念。例如，在一所学校里受到表彰的毕业生的构成，是所有数学专业的男生和所有非数学专业的女生。根据已知的学生的分类，能不能知道数学专业班的学生的构成？如果只应用传统逻辑的工具，

[8] 对上述证明中获得第6和第7行的结果所需要的推理规则和逻辑原理的详细讨论，请读者参见附录中的第2条。

[9] 参见莫里埃于1669年写的芭蕾舞喜剧《贵人迷》第二幕第四场。——译者注

[10] 一个这方面的例子是下面演绎中所用到的原理：因为5大于3，所以5的平方大于3的平方。

答案并不容易得到。但是，如果得到布尔代数的帮助，很容易证明数学专业班正好由受到表彰的男毕业生和未受到表彰的女毕业生组成。

所有的绅士都是有礼貌的。
没有一个银行家是有礼貌的。
所以，没有绅士是银行家。

$g \subset p$

$b \subset \overline{p}$

$\therefore \quad g \subset \overline{b}$

$g\,\overline{p} = 0$

$b\,p = 0$

$\therefore \quad g\,b = 0$

符号逻辑是十九世纪中由英国数学家乔治·布尔发明的。在此演示的是将一个三段论以两种不同的方式翻译成他的符号。在上面一组公式中，符号"$\subset$"意味着"被包含于"。因而"$g \subset p$"的意思是绅士类被包含于有礼的人的类之中。在下面一组公式中，两个连写的字母意味着具有两种特性的事物的类。例如，"bp"意味着既是银行家又是有礼貌的人的类；而方程"$bp = 0$"说的是这个类没有成员。在一个字母上面的一条线段意味着"非"（例如"$\overline{p}$"意思是"没礼貌"）。

表 1

另外一条研究线索与十九世纪数学家们在分析基础方面的工

作密切相关，并和布尔的研究方向相关联。这一新的发展试图将纯数学变成形式逻辑的一部分；它的经典表述集中体现在怀特海和罗素于 1910 年发表的《数学原理》一书中。十九世纪的数学家成功地使代数“算术化”了，并且通过证明数学分析中的各种概念均可用数论术语（即依据整数及其运算）来唯一定义，从而也使向来被称为“无穷小分析”的这一数学分枝算术化了。例如，可以不再将虚数$\sqrt{-1}$视为某种神秘的“实体”，而是定义为整数的有序对（0，1），并可对它进行某种“加法”和“乘法”运算。类似地，无理数$\sqrt{2}$可被定义为一个有理数的类，即所有其平方小于 2 的有理数组成的类。罗素（在他之前有德国数学家弗雷格（Gottlob Frege））试图做的就是用纯逻辑的概念来确定所有的数论概念，认为所有的数论公理都可以从很少几条可以被确认为纯逻辑真理的基本命题推导出来。

举例说明一下上面讲的作法。类的概念被认为属于一般的逻辑。两个类被认为是“相似的”，如果在它们的成员之间存在一一对应，而这种对应的概念又可用其他逻辑概念加以明确。只有一个成员的类被称为“单元类”（例如地球的卫星组成的类）；基数“1”可被定义为所有相似于单元类的类所组成的类，其它基数可以用类似的方法定义；各种算术运算，如加法和乘法，可以用形式逻辑的概念来定义。一个算术陈述，如“1 + 1 = 2”可被视为只包含属于一般逻辑表达式的命题的一种缩写，而这样的纯逻辑命题可被证明是可以从某些逻辑公理推导出来的。

因此，《数学原理》通过将问题化归为形式逻辑本身的一致性，使数学系统特别是数论的一致性问题的最终解决向前推进了一步。如果数论公理本身可以作为形式逻辑的定理被推导出来，那么这些公理是否一致的问题就相当于逻辑的基本公理是否一致的问题。

弗雷格—罗素关于数学仅是逻辑的一部分的看法，由于各种各样的原因，始终未获得数学家们的广泛支持。正如我们已经看到的那样，除非事先特别小心防范，类似康托的超限（transfinite）理论中的悖论也可以在逻辑中产生；但是《数学原理》中所采取的那些措施，是否足以排除所有的自相矛盾而无悖论之虞？这一点还不能理所当然地肯定。因此，弗雷格—罗素将算术归为逻辑并不能给一致性问题一个最后的答案；实际上，问题只是以一种更加普遍的形式表现了出来。然而不管弗雷格—罗素的看法是否成立，《数学原理》有两点被证明对于未来一致性问题的研究具有无可估量的价值。一是《数学原理》提供了一套非常全面的符号体系，借助于这套符号，所有的纯数学命题（特别是数论命题）可以用一种标准的编码方式来表示；二是《数学原理》明确了数学证明所用的大多数形式推理规则（最终使这些规则变得精确而完整）。总之，《数学原理》创建了重要的工具，使得整个数论系统可以被视为一种未加解释的形式演算来研究，这种演算是一个无意义的符号系统，它的公式（或者“串”）是按照明确的操作规则进行组合和转换的。

由于《数学原理》在历史上的重要性，我们将在后文用它为数论形式化的典型范例；而且，每当我们提及《数学原理》时，都应理解为后面隐含地伴随着哥德尔的论文标题中的短语“及相关的系统”，意思是指所有此类系统。

五　一个成功的一致性绝对证明的例子

现在我们必须试一试上一章开始时所提出的第二项任务，并且搞懂一个重要而又容易理解的有关一致性绝对证明的例子。通过掌握这个证明，读者将能更好地品味哥德尔 1931 年论文的意义。

我们将粗略地勾画一下《数学原理》中的一小部分内容，即初等命题逻辑是如何形式化的。这会涉及到将这个片段的系统转化成一种对未加解释的符号的演算。然后我们再对其一致性进行“绝对证明”。

形式化分四步进行。首先，准备一个形式演算所用符号的完整目录，这是它所用的词汇。第二，制定“形成规则”。它们表明哪一些词汇表中符号的组合可被视为“公式”（即语句）。这些规则可视为系统的语法。第三，阐明“变换规则”，描述公式需要具有什么结构才能变换为其他一些有给定结构的公式。这些规则实际上就是演绎规则。最后，选择某些公式作为公理（或“原始公式”），将其作为整个系统的基础。我们将用“系统的定理”这个短语来称呼任何通过相继应用变换规则从公理一步步推导出来的公式。所谓的形式“证明”（或“演示”），是指一个由公式组成的有限序列，这个序列中的每一个公式，或者本身就是公理，或者是由序列中排在它前面的公式运用变换规则而得

出。[11]

命题逻辑（常叫做“命题演算”）的词汇（或“原始符号”列表）是极为简单的。它由变量和常量符号构成。变量可用命题代入，因而称作“命题变量”。它们是字母“p”，“q”，“r”，等等。而常量符号，或者是“命题联接符”或者是标点符号。命题联接符是：

“~”，它是“非”的缩写（称为“波折号”）；

“$\vee$”，它是“或者”的缩写；

“$\supset$”，它是“如果…那么…”的缩写；

“$\bullet$”，它是“与”的缩写。

标点符号则分别是左和右圆括号“（”和“）”。

形成规则通常用于将原始符号组合成被称为“公式”的命题形式。每一个命题变量也被视为一个公式。而且，如果字母“S”代表一个公式，那么它的形式否定，即$\sim(S)$也是一个公式。相似的，如果S_1和S_2分别是公式，那么$(S_1)\vee(S_2)$，$(S_1)\supset(S_2)$，以及$(S_1)\bullet(S_2)$都是公式。例如，下列串都是公式：“p”，“$\sim(p)$”，“$(p)\supset(q)$”，“$((q)\vee(r))\supset(p)$”。但是，“$(p)(\sim(q))$”和“$((p)\supset(q))\vee$”两者都不是公式：对前者来说，尽管“(p)”和“$(\sim(q))$”都是公式，但是它们之间缺少了个命题联接符；对后者来说，联接符“$\vee$”的使用，没有遵从其左右两端都应有公式的

[11] 所以立刻就可以得出结论说公理可以视为定理。

规则。[12]

我们采用两条变换规则。第一条称为（对命题变量的）替换规则，意思是从一个含有命题变量的公式，允许通过将变量统一替换为其它公式而得到新的一个公式。这里要明确的是，当在一个公式中对一个变量进行替换时，对此变量的每一次出现都要进行同样的替换。例如，假设已知“$p \supset p$”成立，我们可以用公式“q”替换变量“p”得到“$q \supset q$”；可以用公式“$p \vee q$”替换变量“p”得到“$(p \vee q) \vee (p \vee q)$”；也可以实际的英文句子（这里译成中文——译者）来替换“p”，从而分别得到下列的命题“青蛙很吵人$\supset$青蛙很吵人”和“（蝙蝠看不见$\vee$蝙蝠吃老鼠）$\supset$（蝙蝠看不见$\vee$蝙蝠吃老鼠）”。[13] 第二条变换规则称为分离规则（或 Modus Ponens）。这条规则说的是从两个具有S_1和$S_1 \supset S_2$形式的公式，总允许推出公式S_2。例如，从两个公式“$p \vee \sim p$”和“$(p \vee \sim p) \supset (p \supset p)$”，我们可以推导出“$(p \supset p)$”。

最后，这个演算系统的公理（实质上和《数学原理》中一样）是下列四个公式：

---

[12] 在不会发生混淆的情况下，标点符号（即括号）可以去掉。因而可将“$\sim (p)$”写为“$\sim p$”；将“$(p) \supset (q)$”简写为“$p \supset q$”。（这种看似对系统形式化的松动，并没有离开纯粹按规则进行的要求，因为消除不需要的括号本身可以很容易地用一种纯粹机械的方式加以规定。）

[13] 另一方面，假设已知公式“$(p \supset q) \supset (\sim q \supset \sim p)$”，我们要用变量“$r$”替换变量“$p$”，用“$p \vee r$”替换“$q$”。通过这个替换，我们是无法获得公式“$(r \supset (p \vee r)) \supset (\sim q \supset \sim r)$”的，因为没有做到对变量“$q$”的每一出现均给予同样的替换。正确替换所获得的公式应为“$(r \supset (p \vee r)) \supset (\sim (p \vee r) \supset \sim r)$”。

1 $(p \vee p) \supset p$

或者用平常话来说

如果 p 或者 p，那么 p

1 如果（亨利八世是个粗人或者亨利八世是个粗人）那么亨利八世是个粗人

2 $p \supset (p \vee q)$

换言之，

如果 p，那么 p 或者 q

2 如果精神分析很时兴，那么（精神分析很时兴或者头疼粉卖得很便宜）

3 $(p \vee q) \supset (q \vee p)$

换言之，

如果 p 或者 q，那么 q 或者 p

3 如果（依曼努尔·康德很守时或好莱坞有罪），那么（好莱坞有罪或者依曼努尔·康德很守时）

4 $(p \supset q) \supset ((r \vee p) \supset (r \vee q))$

换言之，

如果（如果 p 那么 q）那么（如果（r 或者 p）那么（r 或者 q））

4 如果（如果鸭子步子蹒跚那么 5 是素数）那么（如果（丘吉尔喝白兰地或者鸭子步子蹒跚）那么（丘吉尔喝白兰地或者 5 是素数））

在左手栏中，列出了公理及解释。右手栏中，我们给每条公理举了一个例子。这种解释的笨拙，尤其在最后一条公理中特别明显，或许有助于读者明白在形式逻辑中使用特殊符号的优点。同样重要的是要观察到，即便在公理中用以替换的命题不合常理，或者在条件句中结论和前提之间意义上没有什么联系，两者都不影响这些例句中逻辑联系的正确性。

每一个公理可能看起来是“显然的”和微不足道的。然而，在变换规则的帮助下，却能导出无穷多个定理，而它们可不是显然的和微不足道的。例如，公式

$$“((p \supset q) \supset ((r \supset s) \supset t)) \supset ((u \supset ((r \supset s) \supset t)) \supset ((p \supset u) \supset (s \supset t)))”$$

可以作为定理推导出来。

然而，目前我们的兴趣并不在于从公理中导出定理。我们的目的是证明这样一组公理不相互矛盾，也就是说要“绝对地”证明，应用变换规则是不可能从这组公理中导出公式S的同时又导出其形式否定式$\sim S$的。

注意，“$p \supset (\sim p \supset q)$”（读作如果$p$，那么如果非$p$那么$q$）正巧是这个命题演算中的一条定理。（我们将接受这一事实，而不再演示其推导过程。）假设，有某一命题S及其形式否定$\sim S$都能从这组公理中推导出来。在上面的定理中用S替换变量p（使用替换规则），然后连着应用分离规则两次，就可

推导出公式q。[14] 但是，如果这个含有变量“q”的公式是可证的，那么立刻就会看到，不论什么样的公式代入“q”，这个公式都可以从这组公理推导出来。因此很清楚，如果有某个公式s和其形式否定$\sim s$都可从这组公理导出，则任何公式均可从这组公理导出。总之一句话，如果这个演算系统不是一致的，则每一个公式都是定理，或者说从一组相互矛盾的公理出发任何公式都可被推导出来。反过来说，如果不是每个公式都是定理（即如果至少有一个公式不能从这组公理推导出来），那么这个演算系统是一致的。因此，我们的任务就是要去证明至少有一个公式是无法从这组公理推导出来的。

为了完成这个任务，就要对我们面前的系统进行元数学推理。实际的作法相当精致。它包括找出满足以下三个条件的公式特点或结构性质：（1）这个性质是所有四个公理都具有的。（举个有这样性质的例子，就是公式所含的原始符号数小于 25 个；然而这条性质并不满足下一个条件。）（2）这个性质在变换规则下必须具有“遗传性”——就是说如果所有的公理具有这个性质，则通过变换规则导出的所有公式都具有这个性质。由于这样导出的公式按定义都是定理，这个条件实质上是说所有的定理都必须具有这条性质。（3）这个性质不能属于所有的

---

[14] 通过用S替换p ,首先得到：$S \supset (\sim S \supset q)$。由此，因已假设$S$是可证的，应用分离规则我们就得到$\sim S \supset q$。最后，因为$\sim S$也已假定为可证的，再次用分离规则，我们就得到：$q$。

按照形成规则构建的公式——就是说我们必须设法表明至少有一个公式不具有这个性质。如果我们成功地完成了上面的三重任务，我们也就有了对一致性的绝对证明。这里的推理过程如下：某遗传性质从这组公理传递到所有的定理；如果发现有一列符号符合系统中公式的要求，但又不具备这个特殊的遗传性质，那么这个公式就不可能是一条定理。（换个说法，如果一个令人怀疑的后代（公式）不具备先辈（公理）的不变的遗传特征，那么事实上它就不可能是其子孙（定理）。））但是，如果发现了一个公式它不是一条定理，我们就已经证明了这个系统的一致性；因为就像我们刚才注意到的那样，如果这个系统是不一致的，什么公式都能从公理中导出（即每一个公式都是定理）。简言之，找出一个不具有遗传性质的公式是关键。

首先让我们找出一条满足要求的性质。我们选择的公式性质是“重言”。在日常谈话中，如果一句话包括冗余的内容，用不同的词讲两遍同样的事，通常被称之为同义反复。例如，“约翰是查里斯的父亲并且查里斯是约翰的儿子”就是同义反复。然而在逻辑上，一个重言式被定义为排除了逻辑真值变数的命题，如“天正在下雨或者没有下雨”。换个说法，重言式“怎么说都为真”。不会有人怀疑，不管天气的实际状态如何（即不管天正在下雨这个命题是否为真），“天正在下雨或者没有下雨”这个命题都必然为真。

我们使用这个概念在我们的系统中定义一个重言式。首先

注意到，每个公式都是由原始成份“p”，“q”，“r”等等构成的。一个公式被称为是一个重言式，如果它必然为真而不管其原始构成命题是真还是假。对第一条公理$(p \vee p) \supset p$来说，其中唯一的原始成份是“p”；此时不管假定“p”为真还是为假都没有区别，在两种情况下这条公理都为真。如果我们用“雷尼尔山高两万英尺”这个命题替换“p”，可能会看得更清楚，此时第一条公理成为“如果雷尼尔山高两万英尺或者雷尼尔山高两万英尺，那么雷尼尔山高两万英尺”。读者实际上可能不知道雷尼尔山是否高两万英尺，却不难承认上面这条长长的命题为真。显然，第一条公理是一个重言式——即“怎么说都为真”。其它几条公理也都很容易证明是重言式。

下一步，可以证明在变换规则作用下，是重言式这个性质是具遗传性的，这里我们就不给出证明了（详见附录第 3 条）。由此可知每一个从这组公理正确导出的公式（也就是所有的定理）都是重言式。

迄今为止，已经表明重言式这个性质满足上面提到的三个条件中的两个，现在可以迈出第三步了。我们必须找到一个属于这个系统的公式（即由词汇表中的符号按形成规则构成），并且不具备重言式的性质，因而不可能是一条定理（即不可能从这组公理导出）。我们不用费太多的周折；找到这么一种公式相当容易。例如，“$p \vee q$”就符合要求。看起来是只鹅仔其实却是只鸭仔；它不属于要找的家族：它是一个公式，但不是

一条定理。显然，它不是重言式，只要找个替换的例子（或说明）立刻就能表明这一点。我们对“$p \vee q$”中的变量进行相应的替换可得到以下的命题：“拿破仑死于癌症或者俾斯麦享用一杯咖啡”。这个命题不是一个逻辑真理，因为当两个从句都为假时它也为假；即使它是一个真命题，它也不会不论其构成命题的真假而恒为真。（见附录第3条。）

如此一来我们已达到了目的。我们已经至少发现了一个不是定理的公式，而当这组公理是自相矛盾时这样一个公式是不可能存在的。因此，不可能从命题演算的公理中既推导出某个公式又推导出其否定。一句话，我们已经展示了这个系统一致性的一个绝对证明。[15]

在离开命题演算之前，还有最后一点要提及。既然在命题演算中所有的定理都是重言式，是逻辑真理，自然会问的一个问题就是反过来，每一个可用命题演算的词汇表达的逻辑真理（即所有的重言式）是否也都是定理（即可从其公理推导出来）。结论是肯定的，尽管其证明太长以致无法在此处给出。好在我们在此打算强调的论点并不依赖于对这一证明的熟悉。这个论点是，根据这个结论，该系统的公理足以产生所有的重言公式——即所有该系统中可用公式表述的逻辑真理。具有此

[15] 读者可能觉得下列摘要重述会有帮助：1、这个系统的每条公理是重言式。2、重言是一种遗传性质。3、从这组公理正确导出的每一个公式（即每一条定理）也都是重言式。4、因此不是重言式的公式不是定理。5、找到一个公式（例如“$p \vee q$”）不是重言式。6、因此这个公式不是定理。7、然而，如果这组公理是不一致的，任何公式都会是一条定理。8、因此，这组公理是一致的。

种性质的公理系统被称为是“完全的”。

某一公理系统是不是完全的，这一点通常是目前研究兴趣集中之所在。的确，将数学的不同分枝加以公理化的强烈动机之一，就是希望找出一组初始假定，从中可推导出某一领域的全部真命题。当欧几里德将初等几何公理化时，他显然选择了一组公理以便能导出所有几何真理；这些几何真理中既包括那些已知的，也包括那些在未来可以被发现的。[16] 直到最近，任何数学分枝都可能找到一组完全的公理还被视为是理所当然的。特别是，数学家们相信过去为数论建立的一组公理事实上是完全的，最坏的情况下也只需要在原有的基础上再增加有限几条公理也就可以使之变为完全的了。发现这一点是无法实现的，正是哥德尔的主要贡献之一。

[16] 欧几里德在将著名的平行公理处理为独立于其它公理之外的一条假设时，显示了他深刻的洞察力。原因是正如后来证明的那样，这条公理是不可能从他的其它假定中推导出来的，所以如果没有它，这组公理是不完全的。

六　映射的概念及其在数学中的应用

作为一个例子，命题演算这个数学系统完全实现了希尔伯特关于证明的理论的目标。实际上，这个演算系统只不过是对形式逻辑的一小部分的编码，它的词汇和形式规则甚至不足以发展出初等算术。希尔伯特的方案当然不会如此受限，它可以成功地应用于一些范围更广的，通过元数学推理可以证明是一致的和完全的系统。例如，对于一个包括加法公理而不包括乘法的形式系统，就能够取得一致性的绝对证明。然而，对于像《数学原理》这样的系统，其词汇和形式规则足可用以表达整个数论而不仅是其中一个片断，希尔伯特的有限方法是不是强有力得足以证明它的一致性呢？构建这个证明的反复嚐试均遭失败，直到 1931 年发表的哥德尔的论文最终证明，所有严格遵循希尔伯特原来方案的努力是不可能取得成功的。

哥德尔到底证明了什么，以及他是怎样证明的？他的主要结论有两个。首先（这里没有按照哥德尔的实际论证顺序），他证明不可能对一个广泛得足以包括整个算术的系统（如《数学原理》）的一致性给出一个元数学证明，除非证明所用的演绎规则在某些实质方面不同于在该系统内推导定理所用的变换规则。当然，这类证明可以是非常有价值和十分重要的，但如果其论证是基于比《数学原理》中的规则更强的推理规则的话，那么它用于推理的前提本身的一致性，至少会像数论形式

系统的一致性一样值得怀疑。这种证明所取得的只是虚有其表的胜利：杀死了一条龙却又引出了另一条。在任何情况下，如果证明不是有限性的，就无法实现希尔伯特原来方案的目标；而哥德尔的论证则使《数学原理》（或类似系统）的有限的一致性证明变得不大可能。

哥德尔的第二个结论更叫人吃惊和更具革命性，因为它表明公理方法的能力有着根本的局限。哥德尔证明了，《数学原理》或任何其它能在其中发展出算术的系统，实质上是不完全的。换句话说，在任何一致的数论形式系统中，都存在此系统无法推导出的真的数论命题。这个极为重要的论点值得进一步说明。数学中有着大量的一般性命题，迄今无例外地挫败了所有对之进行证明的努力。一个经典例子是所谓“哥德巴赫猜想”，它声称所有（大于 2 的）偶数都是两个素数之和。迄今没有人发现不是两个素数之和的偶数，但也没有人成功地找到证明哥德巴赫猜想毫无例外地适用于所有偶数的方法。这个例子表明，某个算术命题可能是真的，但是从形式化数论的公理中（可能）是导不出来的。现在假设哥德巴赫猜想确实普遍为真，但无法从（现有）公理中推导出来。那么如果将公理和推导规则进行修订或者扩大，以便使原来无法证明的命题（如哥德巴赫猜想）在扩大的形式系统中可以推导出来，会怎么样呢？哥德尔的结论表明，即使能够做到上面这一点，这种作法仍然无法从根本上解决问题。不管《数学原理》是否用一定数

量的新公理和规则加以扩充，在这个扩充后的系统中总还是会有新的算术真理是形式不可导的。[17]

哥德尔是怎样证得这些结论的？正如他本人指出的那样，在一定意义上说，他的论证结构是模仿了一个被称为“里查德悖论”的逻辑矛盾的推理过程。这个悖论是法国数学家理查德（Jules Richard）在 1905 年提出来的。我们在此大略解释一下这个悖论。

我们选一种语言（如英语）用来阐述和定义基数的纯算术性质。先让我们检查一下可以用这种语言说出的定义。经过使人痛苦的绕圈子和无限递归，有一点变得很清楚，总是有些涉及算术性质的词汇是无法明确定义的，因为我们无法对所有的东西加以定义，而总得把某些东西当作起点，尽管这些词汇仍可能以某种其它的方式来加以理解。对我们的目的来说，这里未定义的或“原始的”词汇是什么无关紧要；例如，我们可以假定我们明白“一个整数可以被另一个整除”，“一个整数是两个整数的乘积”等等的意思。因此，是个素数的性质可被定义为：“不能被 1 和自身以外的其它整数整除”；而是个平方数的性质为：“是某一整数和它自身的乘积”，等等。

可以看出，每一个这样的定义都只含有有限个字，因此也都只包含有限个字母。所有的定义可以按顺序排列起来：如果

[17] 这些新的算术真理，正如我们将会看到的，是可以通过某种形式的有关系统的元数学推理得出来的。但这个过程并不符合演算的两项要求：即演算本身必须是自我完备的，并且这些算术真理必须体现为系统中特定公理的形式结果。因此，作为一种把整个数论系统化的途径，公理方法存在着固有的局限性。

一个定义所用的字母数目小于另一个定义的字母数目，则将前一个定义排在后一个定义前面；如果两个定义的字母数目相等，那么就将二者的字母按照字母表的先后排出顺序。在这种排序的基础上，每一个定义都对应于一个唯一的整数，代表其在序列中的位置。例如，具有最少字母数的定义对应于数 1，下一个定义对应于 2，以此类推。

既然每一个定义都和唯一的一个整数相联系，那就有可能在某种情况下，这一整数本身就具有与它对应的定义所标明的性质。[18] 比如说，定义表达句“不能被 1 和其自身以外的其它整数整除”刚好对应于顺序号 17（这里中文字符数恰好也为 17。——译者）；显然 17 本身就具有所标明的性质。另一方面，假设定义表达句“某一个整数与这一整数自身的乘积”对应于顺序号 15；但 15 就明显地不具有表达句所定义的性质。为了描述第二个例子所表现的状况，我们说数 15 具有“里查德”性质；而在第一个例子中，17 就不具备“理查德”性质。更一般地，我们将“x是理查德数”定义为“x本身不具备与它在序列中对应的定义表达句所标明的性质”的缩写。

现在我们就该谈到理查德悖论的有趣而关键的语句了。具有里查德性质的定义表达句明显地是用文字描述了整数的算术性质。因此，这个表达句本身属于上面提到的定义序列。所以

[18] 这就像我们在一英文单词列表中，为每一单词后面加上标记，说明这个字是“monosyllabic”（单音节）还是“polysyllabic”（多音节）。如果列表中有“polysyllabic”这个字时，就会发生同样的事情：单词“polysyllabic”的标记也会是“polysyllabic”。

这个定义对应于序列中一个固定的位置，相应地对应于一个位置数。设此数为 n。我们在这里提出一个问题，这个问题让我们回想到罗素悖论：n 是不是里查德数？读者无疑会预感到致命的矛盾正在逼进。因为 n 是理查德数，当且仅当 n 不具有与 n 对应的定义表达句所指定的性质（即它没有是里查德数之性质）。一句话，n 是理查德数当且仅当 n 不是理查德数；所以命题“n 是理查德数”既真又假。

必须指出，在某种意义上这个矛盾是由于“游戏”玩得不公正而产生的。在上面的论述过程中，一个在定义的顺序排列过程中重要却未明确表述的要求被悄悄丢掉了。当初考虑的定义，应该是对整数的纯算术性质的定义，对这种性质的描述可以使用算术中加、乘等概念。但是前面的论述中，在没有预警的情况下，我们被要求在定义序列中接受涉及描述算术性质时所用的语言的性质的定义。明确地说，里查德数的定义，不属于我们开始时所说的定义序列，因为这个定义涉及到定义表达句的语言（如英文）中字母（或符号）的数目等元数学概念。因此，通过仔细区分局限于算术性质的命题（即不牵扯到任何描述用的记号系统）和关于用作描述算术性质的某种记号系统的命题，我们就能够避免理查德悖论。

在构建理查德悖论时所做的推理显然是谬误的。[19] 然而无

---

[19] 仔细地考虑理查德悖论表明，在一个形式系统内部事实上是可以重新构建这个悖论的，而不必用高度含混又缺精确定义的自然语言如英语，。在这种情况下，对其荒谬性的分析就变得更微妙。这时需要使用与哥德尔 1931 年论文密切相关的一些概念，用以确定看似符合逻辑的想法是在哪一个步骤中偏离了方向。然而这种分析超出了这本小书的篇幅范围。——编者

论如何，这种构建的方式表明，将有关一个足够广泛的形式系统的元数学命题“映射”或“镜照”到这个系统本身是可能的。“映射”的概念名声卓著，它在许多数学分枝中都起着基础性的作用。当然，它已经被用于普通的地图绘制，就是将球面上的形状投影到平面上来，使平面上图形之间的关系反映出球面上图形之间的关系。它也被用于将几何翻译成代数的坐标几何，即几何关系被映射成代数关系。（读者可以回想一下在第二章中的讨论，其中解释了希尔伯特是如何用代数来建立他的几何公理的一致性的。希尔伯特所做的，实质上就是将几何映射到代数上。）映射在数学物理中也发挥着作用，如电流性质之间的关系可用流体动力学的术语来表述。在制造机器之前，可先造出个模型；在风洞中先观察一个小型翅膀表面的空气动力学性质，或者在实验室中用电路构成的装置来研究运动中的大型物体之间的关系，这些都涉及到映射的使用。图 3 中展示了一个十分醒目的例子，表明了在被称为投影几何的数学分枝中所用的一种映射的类型。

注

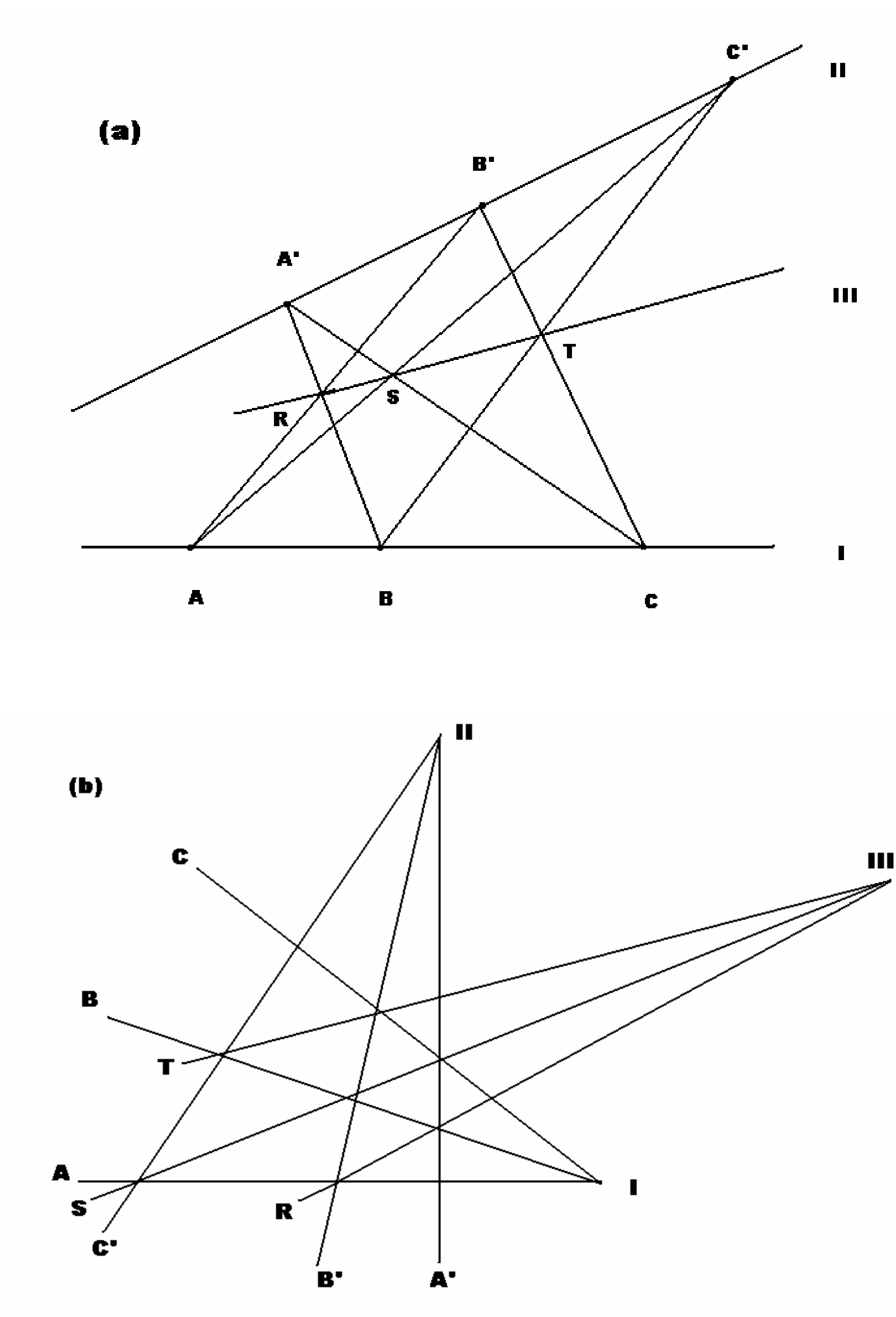

图 3

图 3（a）表示的是 Pappus 定理：如果 A、B、C 是直线 I 上任意三个不同的点，而 A’、B’、C’是另一条直线 II 上的三个不同的点，则由三对直线 AB’和 A’B，BC’和 B’C，CA’和 C’A 所确定的三个点 R、S、T 共线（即都在直线 III 上）。

图 3（b）表示上述定理的“对偶”定理：如果 A、B、C 是过点 I 的任意三根不同的直线，A’、B’、C’是过另一点 II 的三根任意不同的直线，则由三对点 AB’和 A’B，BC’和 B’C，CA’和 C’A 所确定的三条直线 R、S、T 共点（即都过点 III 上）。

这两张图具有同样的抽象结构，尽管在表面上它们明显不同。图 3（a）和图 3（b）的关系是：前者的点对应于后者的线，而前者的线对应于后者的点。实际上，（b）是（a）的映射；在（b）中的一个点，表示了（a）中一条线，（或者说是后者的“镜像”），而（b）中的一条线表示了（a）的一个点。

映射的基本特点是，在一个范畴的对象之间的抽象结构，可以被证明在另外一个范畴的对象（通常和前面那个不同）之间也成立。正是这样一个特点启发哥德尔做出了他自己的证明。如果关于算术形式系统的复杂的元数学命题，能够像他所希望的那样，被翻译成（或镜照成）在这个系统本身的算术命题的话，将会大大有助于进行元数学证明。就像用代数公式来表示（或镜照）空间中曲线和曲面之间错综复杂的几何关系，要比直接处理这些关系更容易一样，处理复杂的逻辑关系的算术对应物（或“镜像”）要比直接对付逻辑关系本身要容易。

充分利用映射的观念是哥德尔著名论文中论点的主要关键。在沿袭了理查德悖论的风格，但仔细地避免了在构建时所产生的谬误之后，哥德尔表明关于算术形式演算的元数学命

题，确实可以用这个演算本身的算术公式来表达。正如下一章我们将详细加以解释的那样，他想出了一种表达方法，使对应于某一特定的元数学命题的算术公式和对应于这一元数学命题的否定的算术公式，都无法在形式演算中加以证明。由于这两个公式中肯定有一个是算术真理，但是由于二者均无法从公理导出，因此该系统是不完全的。哥德尔的表达方法，也使他得以构造一个对应于元数学命题“这个演算是一致的”的数论命题，并且表明将这个命题形式变换为形式演算的符号后，在此演算中是不可证的。结论是这个元数学命题不可证，除非在证明时使用不能够在演算中表达的演绎规则，这样一来，命题证明所用的演绎规则其自身的一致性和形式演算本身的一致性同样成问题。哥德尔正是通过使用具有突出独创性的映射方法，才得出这些卓越的结论的。

七　哥德尔证明

哥德尔的论文很艰深。在得到主要结果之前，必须先掌握四十六个预备性的定义和一些重要的引理。我们将走一条容易得多的路，同时使读者能一睹其攀登过程和顶峰处精妙结构的风采。

A 哥德尔编码

哥德尔描述了一种形式演算系统，我们称其为“PM”，在其中能够表达所有的通常的算术概念，并建立熟悉的算术关系。[20] 这个演算系统的公式可以用系统基本词汇中的原始符号来表达。用一组初始公式（或公理）做基础，通过仔细列出的一组变换规则（或演绎规则）的帮助，从公理即可推出这个演算系统的定理。

首先，哥德尔表明给每一个原始符号、每一个公式（或符号串）、以及每一个证明（公式的有限序列）都指定一个独一无二的数是可能的。这个数可以看作是一种区别用的标签，被称为符号、公式或证明的“哥德尔数”。[21]

属于基本词汇的原始符号分两类：固定符号和变量。我们

[20] 哥德尔使用了一种在《数学原理》中展示的系统的改写本。但是任何能够构建基数（即非负整数）以及基数加法和乘法的形式系统都适用于他的目的。因此，我们将使用前面提到的“PM”来代表任何这样的系统。

[21] 实际上有许多不同的方式来赋予哥德尔数，对论述的主旨来讲使用哪一种都无关紧要。为了帮助讨论，我们给出了一个如何编号的具体例子，事实上，文中所用的编号方法实质上就是哥德尔在其 1931 年论文中所用的方法。

将假定正好有 12 个固定符号，用 1 到 12 的正整数分别作为它们的哥德尔数。[22] 大部分这些符号读者应该很熟悉了：“~”（“非”的缩写）；“∨”（“或者”的缩写）；“⊃”（“如果…那么…”的缩写）；“=”（“等于”的缩写）；“0”（代表零的数）；“+”（“加”的缩写）；“×”（“乘”的缩写）；三个标点符号，即左括号“（”，右括号“）”，以及逗号“，”。除此之外，还将用到两个符号：倒写的字母“∃”，可被读为“存在”，作为“存在量词”出现；以及小写字母“s”，放在一个数字表达式的前面，表示这个数的直接后继。

例如：公式“（∃x）（$x = s0$）”可被读为“存在一个 x，这个 x 是 0 的直接后继”。下面的列表显示了十二个固定符号，每一个符号的哥德尔数，以及符号通常的含义。

固定符号	哥德尔数	通常含义
~	1	非
∨	2	或
⊃	3	如果…那么…
∃	4	存在一个…
=	5	等于
0	6	零
s	7	…的直接后继
（	8	标点

[22] 固定符号的数量取决于形式演算的组建方式。哥德尔在他的论文中只用了七个固定符号。本书用了十二个，为的是使论述更简单一些。哪种方式都可以。

）	9	标点
，	10	标点
+	11	加
×	12	乘

表 2

根据我们在第三章里的说法，形式演算中的符号“滤干了所有的意义”而仅仅是“空洞的符号”。读者可能会疑惑为什么上面的列表里会有“含义”这一栏。我们是不是自己否定自己呢？答案是，我们正在真正空洞的符号和真正有含义的符号之间走一条微妙的中间路线，现在对此做些解释。

在表 2 中，最右边一栏给出了每个符号的“通常含义”，即通过约定，人们对每个符号常联想到的概念。然而说“PM”的符号全无意义的意思是，PM 定理的推导仅靠 PM 中的形式规则，而和其中符号可能具有的意义全无关系。罗素和怀特海的目的是使数学和逻辑形式化，因而他们想使形式演算中的符号和它们的通常解释尽可能保持一致，所以在 PM 中设置推理规则时，有意使每一个符号都带有通常约定的含义。

具体地说，是什么使无意义符号“0”配得上被解释为“零”，无意义符号“+”配得上被解释为“加”，而不是相反？符号“~”原本只是一个服从某些形式规则的拐弯线段，什么使得我们相信它能名副其实地代表抽象概念“非”呢？

简言之，符号的解释取决于其在 PM 定理中的行为表现

（这又进而取决于 PM 的公理和推理规则）。举例来说，如果按照形式系统规则我们能导出定理“0 + 0 = 0”，“0 + *s*0 = *s*0”，和“*s*0 + *s*0 = *ss*0”，我们可能就开始有点信心，感到“0”的行为和我们指望的零一样、而“=”的行为和我们指望的等号一样、“+”的行为和加一样了。相似地，如果字符串“~（0 = *s*0）”，“~~（0 = 0）”和“~（*ss*0 + *ss*0 = *sss*0）”都是 PM 的定理，则我们会获得一些信心，即“~”作为一个符号其自然解释应为“非”。按这种方式，定理集体地限定了其构成符号的意义（或更技术性地说，它们的符号的解释）。

然而，仅靠很少几条定理就对一组符号做出可能的或可靠的解释，恐怕远不足以使人走出怀疑的阴影，认为这些解释绝对值得信赖。为此，我们希望能看到大量的被定理捕捉到的真理才行。

为了锁定形式系统PM中符号的标准解释，在 1931 年论文的命题V中，哥德尔证明存在一个PM定理组成的无穷类，其中每一条定理如果按照上面表中的通常含义加以解释的话，都表达了一个算术真理；反之，有一个算术真理的无穷类（属于“原始递归”的），其中每一个真理如果用上表转换为形式命题的话，就得到PM的一条定理。[23] 这种真命题和经解释的定理之间高度一致的系统对应，立刻表明两件事：它不仅确认了PM

[23] 原始递归算术真理构成的无穷类，包括所有正确的加法，所有正确的乘法，以及类似“17 是第 7 个素数”，“21 不是素数”等等多种多样的命题。所有的原始递归真理都可转为PM定理这一事实，保证了我们赋予PM符号的意义是得当的。

作为数论的公理系统的力量，而且确认了对每一个符号的约定解释。

简而言之，哥德尔令人信服地证明 PM 的符号的确配得上表 2 第三栏所示的“意义”。今天，哥德尔的这个关键性结论作为“对应引理”而为人所知。这个名字来自它所确认的双重对应——首先，每一个原始递归的真理，当用形式演算的符号将其编码为符号串时，成为一条定理；第二，在一个接一个的基础上，形式符号配得上其约定的解释。由此可以看到，真理和意义是难解难分地纠缠在一起的。

除了固定符号外，PM 中有三种变量：数字变量“x”、“y”、“z”，等等，可用数字（如“$ss0$”）或数字表达式（“$x + y$”）代入；命题变量“p”、“q”、“r”，等等，可用公式（命题）代入；以及谓词变量“P”、“Q”、“R”等等，可用谓词“是素数”，“大于”等代入。这些变量按照以下规则被赋予哥德尔数：（1）对每一个不同的数字变量都赋予一个大于 12 的不同素数；（2）对每一个不同的命题变量都赋予一个大于 12 的素数的平方；（3）对每一个不同的谓词变量都赋予一个大于 12 的素数的立方。下表表明了这些规则。

数字变量	哥德尔数	可能的代入
x	13	0
y	17	$s0$
z	19	y

数字变量与大于 12 的素数相联系。

命题变量	哥德尔数	可能的代入
p	13^2	$0 = 0$
q	17^2	（∃x）（$x = sy$）
r	19^2	$p \supset q$

命题变量与大于 12 的素数的平方相联系。

谓词变量	哥德尔数	可能的代入
P	13^3	$x = sy$
Q	17^3	~（$x = ss0 \times y$）
R	19^3	（∃x）（$x = y + sz$）

谓词变量与大于 12 的素数立方相联系。

表 3

下面考虑一个属于 PM 的公式——如“（∃x）（x = sy）”。（从字面上翻译，可读为“存在一个 x 满足 x 是 y 的直接后继的条件”，意思是不管 y 代表什么数，都有一个直接后继。）与这个公式内的十个基本符号相对应的（哥德尔）数分别是：8，4，13，9，8，13，5，7，17，9。我们用图表示如下：

（	∃	x	）	（	x	=	s	y	）
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
8	4	13	9	8	13	5	7	17	9

然而关键是要给这个公式赋予唯一的一个数而不是一个数的序列。幸好这样做并不困难。我们约定将这个公式联系到唯一的一个数，它是按大小顺序排列的头十个素数的乘积，其中每一个素数各加一个对应于相应符号的哥德尔数的指数。所以与此公式相对应的哥德尔数是

$$2^{8}\times 3^{4}\times 5^{13}\times 7^{9}\times 11^{8}\times 13^{13}\times 17^{5}\times 19^{7}\times 23^{17}\times 29^{9}$$

让我们将这个非常大的数设为m。类似地，每一个基本符号组成的有限序列，特别是每一个公式，都有一个唯一的哥德尔数，它可写为与其符号个数相等的一系列按顺序的素数的乘积，其中每一个素数各加一个等于其对应的符号的哥德尔数的指数。[24]

最后，考虑一个公式的序列，证明过程中就会产生这种情况——例如，下面一个序列（包含两个分式）：

---

[24] 在PM中有可能出现不在基本词汇表中的符号，这些符号引进时可用基本符号来定义。例如，符号“ • ”，作为“与”的缩写被用作命题连接词，可被定义如下：“$p \cdot q$”是“～(～p ∨ ～q)”的缩写。那么这些被定义的符号的哥德尔数是什么？如果注意到在包括被定义的符号的表达式中，可以用其对应的等价式来代替这些符号，那么答案是显然的；很清楚，这个表达式的哥德尔数就是转换后的表达式的哥德尔数。因而相应地，公式“p • q”的哥德尔数就是公式“～(～p ∨ ～q)”的哥德尔数。相似地，十进位数字可以通过以下定义而引入：“1”可作为“s0”的缩写，“2”作为“ss0”的缩写，“3”作为“sss0”的缩写，等等。为了得到公式“～（2 ＝ 3）”的哥德尔数，我们将被定义的符号消去，从而获得了纯粹的PM公式“～(ss0 = sss0)”，然后按照文中所讲的规则来决定其哥德尔数。

（$\exists x$）（$x = sy$）

（$\exists x$）（$x = s0$）

其中后者经转换可读作：“零有一个直接后继”；它可通过一条PM的演绎规则从前者机械地导出，这条规则说的是可以将数字表达式（这里是 0）代入一个数字变量之中（这里是 y）。[25]

我们已经确定了前一个公式的哥德尔数：m；现在让我们假定后一个公式的哥德尔数是n。正如前面所讲，对于给定的一个公式序列，重要的是确定其单个的代表数字而不是一个数字序列。我们约定对于这个特定的公式序列，其哥德尔数是按序排列的头两个素数（即素数 2 和 3）的乘积，其中每个素数各加一个指数，它是公式序列中对应公式的哥德尔数。因此，如果我们将此公式序列的哥德尔数称作k，则我们得到$k = 2^m \times 3^n$。通过应用这样一个简单的方法，我们可以获得任何公式序列的数。总之，形式系统PM中的任一种表达形式——不管是基本符号，符号串，或者这种串的序列——都能被赋予唯一的哥德尔数。

迄今为止，我们所做的是找到了一种使形式演算完全“算

25 读者可回想起我们将一个证明定义为一个有限序列的公式，其中每一个公式或者是一条公理，或者在PM的变换规则的帮助下由前面的公式导出。按照这个定义，文中给出的序列不是一个证明，因为第一个公式不是公理，也未列出它从公理推导出来的过程；这两个公式只能说是一个证明的一个片断。如果要写出一个完整的证明的例子所需的篇幅太大了，为了展示的目的，上面的例子就足够了。

术化”的程式。这种程式实质上是列出了一组方法，从而在演算的表达形式和正整数的某个子集之间建立起了一一对应。[26] 一旦给出了一个表达式，就可以计算出唯一与之对应的哥德尔数。

但是到此故事只讲了一半。一旦给定了一个数，我们就能确定它是不是一个哥德尔数，如果是，就可以从中“提取”出它所代表的精确表达式。如果一个给定的数小于或等于 12，它就是某个初始固定符号的哥德尔数。可用表 2 确定这个符号。如果它大于 12，就可被唯一地分解成它的素数因子的乘积（正如我们从数论的一个著名结果中知道的那样。）[27] 如果它是大于 12 的素数，或者是这样的素数的二次或三次幂，那么它就是一个可识别的变量。最后，如果它是连续素数的幂的乘积，则它就可能或者是公式或者是公式序列的哥德尔数。在这种情况下，它所对应的表达式就能够被精确的确定。

遵循这样的程序，我们可以将任何给定的数拆开，就像它是一台机器那样，发现它是如何构建的，里面有什么；由于其中每一个要素都对应于一个它所代表的表达式的一个要素，我

[26] 并非每一个正整数都是一个哥德尔数。例如，考虑一下数 100。因为 100 大于 12，它不会是某个初始固定符号的哥德尔数，同时由于它既不是大于 12 的素数，也不是这样的素数的平方或立方，它不会是任何一种变量的哥德尔数。将 100 分解成其素因子的乘积，发现它是 $2^2 \times 5^2$，其中素数 3 并不是分解式的一个因子，而是被跳过去了。按照已经定下的规则，一个公式（或一个公式序列）的哥德尔数一定是连续的素数的幂的乘积，而数 100 不满足这个条件。总而言之，100 不能通过哥德尔编码映射到任何固定符号，变量符号或公式上面，所以 100 不是一个哥德尔数。

[27] 这个结果叫做算术基本定理，它宣称如果一个整数是合数（即不是素数）的话，它可唯一地分解为带有相应指数的素因子的乘积。

们可以重构这个表达式，分析它的结构，等等。表 4 展示了对一个正整数，我们如何确认它是不是一个哥德尔数；以及如果是的话，它所对应的表达式又是什么。

A	243,000,000
B	64 × 243 × 15,625
C	$2^6 \times 3^5 \times 5^6$
D	$\begin{array}{ccc} 6 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & = & 0 \end{array}$
E	0 = 0

在 PM 中，表达“零等于零”的公式的哥德尔数是 243,000,000。当从 A 向下读到 E 时，演示了一个数是如何被转换成它所代表的表达式的；而从下向上读，则演示了如何计算出代表某一公式的数。

表 4

B 元数学的算术化

哥德尔的下一个步骤涉及到对映射方法的创造性运用。他证明有关形式演算中表达式的结构性质的元数学命题，能够被精确地映射到这个演算自身。他的这个作法的基本思想是：因为 PM 中每一个表达式都对应一个特定的（哥德尔）数，因而

关于表达式及其相互间排列关系的元数学命题，就可以被理解为关于与之对应的哥德尔数及这些数相互间的算术关系的命题。用这种方法，元数学就变得完全“算术化”了。举一个日常生活中的例子，在一个繁忙的超市里，顾客进门时都会取得一个条子，上面印着号码，代表着他们在卖肉柜台排队时的先后顺序。通过检视这些数字，很容易就会知道有多少顾客被服务过了，有多少正在排队等待，谁前谁后，前多少后多少，等等。例如，假设内格尔先生的号是 37，纽曼先生的号是 53，那么就用不着向纽曼先生解释他得等在内格尔先生后面，而只要指出 37 要小于 53 就足够了。

在元数学中也像在超市里一样。具体说，探索元数学的问题，可以通过替换地（或间接地）研究一些（相当大的）整数的某种算术性质和算术关系来进行。我们将看到，每个关于一组符号串以及它们在排列上有什么关系的元数学命题（例如，三个特定的公式组成的序列构成了对第四个特定公式的证明），可以对应于一个关于这组串的哥德尔数以及它们之间有什么算术关系的命题。

让我们举一个简单的例子来说明这些泛泛的说法。考虑一个简单的公式“~（0 = 0）”，它表达了一个明显的错误即零不等于它自己。现在我们看一个简单的元数学命题：这个公式的第一个符号是“~”。如果通过哥德尔编码，元数学判断确实能被忠实地映射到整数的集合及其性质上去，那么这个真实的命

题一定会映射为一个真的数论命题。这个数论命题到底是哪一个？为了寻求答案，首先需要这个公式的哥德尔数—即 $2^1 \times 3^8 \times 5^6 \times 7^5 \times 11^6 \times 13^9$，我们将称其为“$a$”。显然，我们所寻找的命题必定与这个巨大的数的素因子分解有关，特别地，它断定在a的素因子中，最小的素数（就是 2）的指数是 1。换句话说，所希望的（对应的）数论命题是：“2 是a的一个因数，但 2^2 不是”。

我们已经发现了如何以数论的方式来说我们的公式的头一个符号是波折号。这是关键的一步，但下一步同样重要，就是要把以汉语说的这个非正式的命题转换成 PM 的正式的符号串。在 PM 中如何表达述语“x 是 y 的一个因子”？幸好这并不困难：可将其读为“存在一个数 z，使 y 等于 z 乘以 x”，而这直接就可写出 PM 公式“（∃z）（$y = x \times z$）”。对我们第一步的数论命题来说，需要用这个谓词两次，其中一个前面有波折号：

$$(\exists z)(sss\ldots sss0 = z \times ss0) \bullet \sim(\exists z)(sss\ldots sss0 = z \times (ss0 \times ss0))$$

在式中同一个大数出现了两次，这个数中“s”的数目正好为 a。注意公式中间的点，它是“并且”概念的符号（见脚注 24）。因此，我们的公式按其字面的意思是“存在一个数 z，使

a 等于 z 乘以 2，并且不存在数 z，使 a 等于 z 乘以 2×2”。

尽管显得有些笨拙，但是这个公式以 PM 自身的方式，表达了如何辨认 PM 中一个公式的头一个符号的简单的元数学命题。如果要全部写出上面的公式，它会是无法想像地巨大，但对这点不必过于在意；不管它是否涉及天文数字，从概念上讲它是一个十分简单的公式。而且由于算术谓词“x 是 y 的因子”是原始递归的（请读者相信这一点），对应引理确保了上面的字符串表达了一个关于数的真理，因而是 PM 的一个定理。

总之，有一个 PM 的定理，它翻译了“‘~（0 = 0）’的开始符号是波折号”这个真的元数学命题。从这个例子，我们看到 PM 的确能够忠实地谈论其自身（即将元数学真命题映照为 PM 的定理）。这首先要归功于哥德尔编码的灵活映射机制，其次得益于对应引理，它保证了这些符号配得上它们的意义。

我们刚才给出的这个极为简单的例子，表明了处于哥德尔工作核心的一个具有普遍性的洞见：一组长长的符号链在排列上的性质，可以通过探寻大整数的素因子性质，以一种间接但又十分精确的方式来表述。这也就是我们所用短语“元数学算术化”的意思。当我们将这个想法和将算术（即数论）在 PM 中形式化的想法结合起来时，就形成了将元数学在 PM 中形式化的构想。

现在将注意力转向一个更为复杂的元数学命题：“具有哥

德尔数 x 的公式序列是哥德尔数为 z 的公式（在 PM 中）的证明”。借助于元数学的算术化，这个关于某些字符串之间排列关系的命题，通过一个关于两个数 x 和 z 之间纯数字关系的命题而被映照到数论之中。（回想一下前面的一个例子会使我们对这种纯数字关系的复杂性有一些概念，该例子中一个证明（的片断）被赋予了哥德尔数 $k = 2^m \times 3^n$，其结论——即最后一行——的哥德尔数为 n。稍想一下我们就会认识到，在证明的哥德尔数 k 和结论的哥德尔数 n 之间有确定的，但并不意味着是简单的算术关系。）我们将用缩写“dem（x, z）”来表示整数 x 和 z 之间的算术关系。之所以选择小写的字符串“dem”，是为了提醒我们这个数论关系所对应的元数学关系——即“哥德尔数为 x 的公式序列是哥德尔数为 z 的公式在 PM 中的证明（*demonstration*）”。

注意，“dem”所指的数量关系，隐含地依赖于所有的公理和 PM 的演绎规则。如果我们多少动了一下 PM，则“证明”也多少有所变动，因而也会映射为一个多少有所不同的数量关系，但是仍会非常相似于 dem，并且也会像 dem 在 PM 中所起的作用一样在变化后的系统中起作用。

哥德尔在他的论文中用了极大的努力使读者相信“dem（x, z）”是数 x 和 z 之间的原始递归关系，并且从这个事实（这一点我们就此接受下来）出发，通过哥德尔对应引理，在 PM 中有一个形式符号组成的公式表达了这个关系。我们用缩写

“Dem（x, z）”来指此公式，之所以用大写“D”，表明它是形式化的公式。

此处要小心地看到，“dem（2, 5）”虽说是关于整数 2 和 5 的有意义的命题（有意义但显然是假的，因为 2 不会是任何证明的哥德尔数，而 5 也不会是一个完整公式的哥德尔数），它的形式对应物“Dem（*ss*0, *sssss*0）”却仅仅是PM的一个字符串，因此严格地说既不为真也不为假，而是无意义的。[28] 但是哥德尔的对应引理再次进入视野，它为我们保证，任何时候当数论述语 dem（x, z）为真时，形式为 Dem（*sss*…*sss*0, *sss*…*sss*0）的字符串是（PM的）一个定理，式中第一个串中的“s”个数为x，第二个串中的“s”个数为z。

在 PM 中公式“Dem（x, z）”的存在告诉我们一个非常关键的信息：具有“某甲用了 PM 的规则，证明出某乙”形式的真的元数学命题，被忠实地反映在 PM 的定理之中。同样，每

[28] 举一个较简单的例子来说明讨论中形式和非形式两个层级上的关键性区分。考虑一下算术命题“二加二不等于五”。这不是PM的字符串而是一个汉语命题，并且正巧是真的。它可以更简练地写为“2 + 2 ≠ 5”，但这仍是非形式化的，而它的构成符号都被认为是有意义的。然而，其形式对应物，“～(*ss*0 + *ss*0 = *sssss*0)”，严格地说，只是空洞符号的串，既不真亦不假，只是无意义。另一方面，加法是原始递归的，按对应引理，这个公式应是PM的定理。有时我们可以不严格地说一个PM公式，比如前面这个，是真的（或是假的），意思是指它所表达的算术命题是真的或是假的。按这个不严格的说法，“～(*ss*0 + *ss*0 = *sssss*0)”是真的。

一个更复杂的例子涉及到素数的概念。让我们用“pr(x)”表示数论的一个述语“x 是素数”。“九是素数”这个（假）命题，可用“pr(9)”来表示。它不是 PM 的字符串，而仅仅是汉语句子的方便缩写。然而在 PM 中有“pr(x)”的形式对应物，可写为“～ (∃y) (∃z) (x = *ssy* × *ssz*)”。（这肯定只是在 PM 中表示素数的许多可能的方式之一；请读者想明白为什么这里的公式是有效的。）我们用大写的 P,“Pr（x）”来表示这个公式，而假命题“九是素数”在 PM 中可被表达为“Pr(*sssssssss*0)”。如果写出它代表它的全公式，会是“～ (∃y) (∃z) (*sssssssss*0 = *ssy* × *ssz*)”。因为“是素数”是原始递归的，对应引理使我们知道“~Pr(*sssssssss*0)”——它不过是“~~ (∃y) (∃z) (*sssssssss*0 = *ssy* × *ssz*)”的缩写——是 PM 的一条定理。

一个具有形式“某甲用了 PM 的规则，没有证明出某乙”的真的元数学命题，都被忠实的映照为 PM 的具有形式“~Dem（*sss*…*sss*0, *sss*…*sss*0）”的定理，和往常一样，串中各有适当数量的“*s*”。这里我们再次看到，多亏了哥德尔映射，PM 可被视为具有精确谈论自身的能力。

在陈述哥德尔证明的关键点之前，还需要了解最后一个特殊概念及相应的记号。让我们先举一个例子。正如在前几页看到的，公式“（∃*x*）（*x* = *sy*）”的哥德尔数 *m* 十分巨大，其中有一个变量（*y*）的哥德尔数是 17。假如我们在此公式中用 *m* 替换哥德尔数为 17 的变量 *y*。结果是得到一个极长的公式“（∃*x*）（*x* = *sss*…*sss*0）”，其中串中有（*m* + 1）个“*s*”。（翻成汉语，这个新的 PM 字符串的意思是存在一个数 *x* 是 *m* 的直接后继，或更简短地说 *m* 有一个后继。）

这个长长的公式本身又有一个哥德尔数，当然这个数非常大，但不管它有多大，原则上讲它的计算方法相当直截了当。先不管其计算的细节或精确的结果，我们可以一种毫不含糊的元数学方式简单地刻画出这个结果数：它是在一个哥德尔数为*m*的公式中，用*m*本身去替换其中哥德尔数为 17 的变量而得到的新公式的哥德尔数。这一刻画，唯一地确定了一个作为数*m*和 17 的函数的正整数。[29]

[29] 这个函数相当复杂。如果我们深入一下构建这个函数的细节，就会了解到究竟有多复杂。让我们先尝试一下而不必非得到最后结果不可。前面我们看到“(∃*x*) (*x* = *sy*)”的哥德尔数m是 $2^8\times 3^4 \times 5^{13} \times 7^9 \times 11^8 \times 13^{13} \times 17^5 \times 19^7 \times 23^{17} \times 29^9$，为了发现用*m*替换变量*y*而修改过的公式的哥德尔数，我们必须一个一个地审视公式中的符号并将连续的素数所对应的指

正如我们将要看到的那样，将一个字符串的哥德尔数代入这个字符串本身（然后取结果的哥德尔数）这么个看似绕圈子的概念是哥德尔关键性的想法之一，他也付出极大的努力来使读者确信这个函数是直接可计算的，因而是原始递归的，并在对应引理的适用范围之内。我们将用记号“sub（x, 17, x）”来代表新哥德尔数，它是老哥德尔数x的函数。尽管说起来有些绕舌，我们还是可以准确地讲出这个数是什么：它是取一个哥德尔数是x的公式，其中凡是有变量y出现的地方均用数x的数字替换而得到的新公式的哥德尔数。[30]

数确定下来。回想一下我们感兴趣的公式是：“$(\exists x)\ (x = sss\ldots sss0)$”，内含$(m + 1)$个“$s$”。其中各个字符的哥德尔数是： 8，4，13，9，8，13，5，7，7，7，…7，7，7，6，9。在此序列中，7 共有（m + 1）个。现在我们再将这些标为合适的素数的指数：$2^8 \times 3^4 \times 5^{13} \times 7^9 \times 11^8 \times 13^{13} \times 17^5 \times 19^7 \times 23^7 \times 29^7 \times 31^7 \times \ldots \times (P_{m+10})^9$（其中$P_{m+10}$是第（$m + 10$）个按大小顺序排列的素数）。

让我们将这个非常巨大的数记为“r”。现在比较一下两个哥德尔数 m 和 r。前者包括将一个素因子提到 17 次幂（因为前一公式包括变量 y），而后者除包括 m 的所有素因子外还有许多其它的素因子，但是其中没有提到 17 次幂的。因此，如果用其它一些指数不是 17 的素因子来替换在 m 中指数为 17 的素因子，则可以得到 r。要精确全面地讲述 r 是如何与 m 相关的，不引进大量附加的符号设置是不可能的；而这正是哥德尔在论文中所做的工作。希望我们在这里所讲的已足以使读者相信，r 是 m 和 17 的一个良好定义的数论函数。

[30] 对这里刚刚进行的元数学刻画，有可能要问为什么要说是用“数x的数字”去替换某个变量，而不是用“数x”。答案取决于已经讨论过的数学和元数学这间的区别，有必要在这里对数和数字之间的区别做一简要的说明。一个数字是一个符号，一个语言表达式，某种可以写，擦，复制的东西等等。而另一方面，一个数是一个数字所指定或因它而得名的东西，它不能逐字写下来，擦去或复制等等。因而，我们说“十”是我们手指的数，在说出这个命题时，我们赋予了我们手指的类以某种“性质”；但是显然如果我们说这个性质是一个数字那就荒谬了。数“十”可以由阿拉伯数字“10”，以及罗马字母“X”来命名；这些名字是不同的，但都是同一个数的名。简言之，当我们对一个数字变量（一个字母或一个符号）进行替换时，我们是将一个符号取代另一个符号。而我们不能在字面上用一个数去取代一个符号，因为一个数是一个概念（有时被说成是一个类的抽象性质），而不是什么我们可以放在纸面上的东西。所以在对一个公式中的数字变量进行替换时，我们只能够插入一个数字（或者某个数字表达式，如“0×0”或“$ss0 + sss0$ ”），而不是一个数。这就是为什么在对sub函数进行元数学描述时，要说我们用（数）x的数字而不是数x本身来替换变量y的出现。尽管这里强调的是语言的精确，我们却很容易顺便就说出用一个数替换公式中的变量这样的话来；有时，以这种松散的方式说话反而显得更清楚。

在已知哥德尔的sub函数是原始递归的情况下，在PM中存在一个恰好镜照它的形式表达式，[31] 而我们将这个表达式缩写为“Sub（*x*, 17, *x*）”。注意我们像前面一样，通过分别使用头一个字母的小写和大写，标示出非形式的算术观念和它的形式排列中的对应物之间的重要区别。你应该牢记，“sub（243,000,000, 17, 243,000,000）”表示的是一个数（即一个量的大小），[32] 而缩写“Sub（243,000,000, 17, 243,000,000）”表示的则是PM中的一个字符串。虽然严格地讲该字符串并无意义（理所当然地，就像PM中或其它形式系统中所有的字符串一样），但是将其想象成具有某种意义是方便的，因为它扮演了某个相当复杂的算术运算的形式上的代表，就像“无意义”的字符串“*ss*0 + *ss*0”作为是简单计算“二加二”（因而是更为间接的数量概念“四”）在PM内部的形式上的代表一样。[33]

---

[31] 严格地说，对应引理的应用对象不是函数sub而是述语“*z* = sub (*x*, 17, *x*)”；然而这样一个小小的细节在一个脚注里讲一下也就够了。顺带提一下，这个细节和脚注 33 的要点有关。

[32] 读者可能会想，如果哥德尔数为*x*的公式中正巧不含有哥德尔数为 17 的变量——即如果起始公式中不含有变量*y*的话，“sub(*x*, 17, *x*)”会表示什么数。sub(243,000,000, 17, 243,000,000)是在哥德尔数为 243,000,000 的公式中用数字“*sss*…*sss*0”(有 243,000,000 个“*s*”)替换变量*y*所得的公式的哥德尔数。但是如果你看一下表 4 ,你将看到 243,000,000 是字符串“0 = 0”的哥德尔数，其中并没有“*y*”。那么在“0 = 0”中用给定的数字替换“*y*”会得到什么样的公式？答案很简单：由于“0 = 0”中没有“*y*”，因而也就没有替换发生，所以“修改过的”公式也还是原来的未被触动过的公式本身。因此，sub(243,000,000, 17, 243,000,000)所表示的数就是 243,000,000。

[33] 读者可能会拿不准“Sub(*x*, 17, *x*)”是否就像“*s*0 = *sss*0”，“(∃*x*) (*x* = *sy*)”，“Dem(*x*, *z*)”是公式那样是PM中的公式。答案是否定的，原因如下。“*s*0 = *sss*0”是公式，因为它规定了两个数之间的一个关系，因而它有真有假。相似地，当在字符串“Dem (*x*, *z*)”中用数字替换变量时，所得到的公式表达了一个涉及两个数的算术命题，而这个命题或者为真或者为假。对“(∃*x*) (*x* = *sy*)”来讲情况也一样。另一方面，当用一个数字替换“Sub(*x*, 17, *x*)”中的“*x*”时，所得到的串并未做出任何判断因而不会有真值。由于这个原因，“Sub(*x*, 17, *x*)”不是一个公式。和字符串“*ss*0 ×*sssss*0”一样，通过将它描述为其它数的函数，仅仅指定或命名

C 哥德尔论证的核心

我们终于整装待发，可以一睹哥德尔证明的主要轮廓了。开始时我们先一般性地列举一下其步骤，以便读者鸟瞰整个证明的顺序。

哥德尔表明（1）如何构造PM的一个公式G，使其表达以下元数学命题："使用PM的规则，公式G不可证"。[34] 因而从字面上看，这个公式讲的是它自身不可证明。在某种程度上，G是模仿理查德悖论构造的。在理查德悖论中，表述"理查德性质"是和某一数n相联系的，从而构造出"n是理查德数"这样的命题。在哥德尔的论证中，公式G同样地和某一数g——即它本身的哥德尔数——相联系，并且G是这样构造出来的，其意思是说"具有哥德尔数g的公式是不可证明的"。

接着哥德尔证明，（2）G是可证明的，当且仅当它的否定形式～G是可证明的。证明中的这一步也还是模仿理查德悖论中的步骤，那里证明的是n是理查德数当且仅当n不是理查德数。然而，如果一个公式及其否定都是形式可证明的，那么PM就是不一致的。反过来，假设PM是一致的，则G和～G两者都不可能从PM的公理中形式推导出来。简言之，如果PM一致，则G是一个形式不可判定的公式。[35]

了某一个数。

[34] 从现在开始，只要我们在不另带限定词下使用"可证明的"一词，其意思总是"用PM规则可证明的"（和"是PM的定理"同义）。

[35] 断言某个公式X是"形式不可判定"的，就象在哥德尔的论文标题中所说那样（为了简练也可简称为"不可判定"），意味着在讨论中的形式演算如"PM或相关系统"（就像在论文标题中所写的那样）中，X和～X均不可证。

然后哥德尔表明，（3）尽管 G 是形式不可证明的，它却是真的算术公式（见脚注 28 中对此类不严格的说法所做的注解）。G 之为真，是在下述意义上说的，即它声称没有整数会具有哥德尔所定义的某种算术性质——正如哥德尔所证明的那样。

步骤（4）进而表明，由于 G 是真的，又是形式上不可判定的（在 PM 中），因此 PM 肯定是不完全的。换句话说，我们不能用 PM 的公理和规则导出所有的算术真理。而且，哥德尔进一步证明，PM 是在本质上不完全的：即使用附加的公理（或规则）来扩大 PM，使真公式 G 在增强了的演算中成为形式可推导的，也会有另一个用完全类似的方式构造出的真公式 G'，而 G'在增强的演算中是形式不可判定的。不用说，如果进一步增强这个已经增强了的演算系统，使之能够导出 G'，却又会引出了另一个在这个双重增强的演算中不可判定的公式 G''——如此等等，以至无穷。这就是所谓“在本质上不完全”的含义。

在步骤（5）中，哥德尔描述了怎样构造一个 PM 的公式 A，它所表达的元数学命题是：“PM 是一致的”；并且证明公式“A⊃G”在 PM 中是形式可证明的。最后，他表明公式 A 在 PM 中是不可证明的，并从而得出推论，PM 的一致性是无法用任何系列的逻辑推理来证明的，只要这些推理是可以被镜照在 PM 本身组成的形式演绎系统中。

值得指出的是，哥德尔对他的结果的普遍性非常关注，这就是为什么要在论文的标题中明确地宣称他的结果不仅适用于罗素和怀特海的著名的形式系统，而且适用于“相关的系统”。他在论文结尾处写道：“我们几乎是将整个工作局限在PM系统内，而仅仅指出了其对其它系统的适用性。在后续的工作中将以更充分的普遍性来表述和证明这些结果。”事实上，哥德尔担心由于他的论文的震撼效果，很多人会怀疑其正确性，因而打算用后续的工作进一步充实其论证。然而后来的情况表明，由于他的论文写得如此有说服力，其结果很快就被接受了，从而排除了对后续工作的需要。要点是，并不是因为这个特殊的 PM 系统本身有什么奇怪的缺陷才导致哥德尔的结果；此结果适用于任何系统，只要它内化了基数的包括加法和乘法在内的算术性质。

下面让我们更充分地讨论哥德尔的论证。

（i）前面已经定义过公式“Dem（x, z）”。它在 PM 中表达了元数学命题：“哥德尔数为 x 的公式序列是哥德尔数为 z 的公式的一个证明”。现在让我们在此公式前面加一存在量词，即：“（$\exists x$）Dem（x, z）”。这个公式的解释很直白：“存在一个公式序列（哥德尔数为 x），它构成对哥德尔数为 z 的公式的证明。”更紧凑地可解释为：“哥德尔数为 z 的公式是可证的。”（此处我们要提醒读者，术语“证明”和“可证的”都是对形式系统 PM 而言的。）

如果在此公式前面加一波折号就构成了它的否定形式，得到：“～（∃x）Dem（x, z）”。在 PM 中，这个公式构成了对元数学命题“哥德尔数为 z 的公式是不可证明的”的形式解释，这个元数学命题也可表述为“不可能找到对哥德尔数为 z 的公式的证明”。

哥德尔所证明的是，这个公式的某个特例是形式不可证明的。为了构造这个特例，我们从公式（1）开始：

$$\sim(\exists x)\,\mathrm{Dem}(x, \mathrm{Sub}(y, 17, y)) \qquad (1)$$

这个公式属于PM，但有一个元数学解释。问题是这个解释是什么？读者应该还记得表达式“Sub（y, 17, y）”是表示一个数。这个数，是在哥德尔数为y的公式中，用y的数字代入哥德尔数为 17 的变量（即所有字母“y”的地方）而得到的公式的哥德尔数。[36] 由此，公式（1）显然表达了元数学命题：“哥德尔数为sub（y, 17, y）的公式不可证明”。尽管这是个挑逗人的命题，但仍然是未封口的、不明确的，因为它仍然包含变量

[36] 关键是要明白尽管“Sub(y, 17, y)”是PM的表达式，却不是一个公式，而是一个用来标定一个数的名函数（见脚注 33）。如此标定的数将是一个特定公式的哥德尔数，或者不如说，如果y不是一个变量的话，情况就会是这样。但是现在“y ”是变量而不是一个数字，因而“Sub(y, 17, y)”就和字符串“$y + sss0$”一样，不代表一个特定的数；如果要代表一个数，就要用一个特定的数字代入变量“y”。[因为y是个变量，以y为其哥德尔数的公式并未确定下来。但不论y值是什么，一旦确定，它就有可能对应到一个公式，而这个公式中如果含有变量y，代之以y值，便得到另一个公式，它的哥德尔数就是sub(y, 17, y)；如果这个公式中不含变量y，则公式不变，所得的就是原公式的哥德尔数。参看脚注 32。如果y值不对应一个公式或表达式，则Sub(y, 17, y)不定义。——译者]

“y”。为了使其确定下来，我们需要将变量换成一个数字。应该选什么数？这里且看哥德尔怎么做。

因为公式（1）属于 PM，它有一个从原则上讲可计算的（很大的）哥德尔数。幸运的是，我们（哥德尔也一样）不需要进行实际的计算，而可简单地将其值用字母“n”来表示。下一步，我们用数 n（更准确地说，是用数 n 的数字，我们乐于将这个数字写为“n”，就象当我们写“17”时，知道我们实际上是指“*sssssssssssssssss0*”）替换在公式（1）中变量“y”的每一次出现。这样做，将产生一个新的公式，我们将其称为“G”：

$$\sim(\exists x)\mathrm{Dem}(x, \mathrm{Sub}(n, 17, n)) \qquad (\mathrm{G})$$

这就是我们要找的公式。因为它是公式（1）的一个特例，因此其元数学意义就是：“哥德尔数为 sub（n, 17, n）的公式是不可证明的”。现在由于其中不再有（未量化的）变量，G 的意义是确定的。

公式G属于PM，因此肯定对应于一个哥德尔数g。g的值是多少？稍想一下就会知道g = sub（n, 17, n）。[37] 要知道为什么，只需要回想一下，sub（n, 17, n）是当我们在哥德尔数为n

[37] 注意数本身和它在PM中的形式对应物。前者是sub(n, 17, n)，“s”是小写，而后者则是标为“Sub(n, 17, n)”的字符串，其中“S”是大写。换句话说，“sub(n, 17, n)”表示的是一个实际的数量，就像非形式的算术表达式“2×5”表示一个量（即十）一样；而“Sub(n, 17, n)”表示的是PM中的一个给数命名的字符串，就像数名串“*ss*0×*sssss*0”一样。

的公式中用n（它的数字）替换哥德尔数为 17 的变量（即“y”）而得到的公式的哥德尔数。但公式G正是如此而获得的！也就是说，我们从哥德尔数为n的公式出发；然后我们用n的数字替换其中所有的“y”，这样一来，sub（n, 17, n）就成为了G的哥德尔数。

现在我们一定会回想到 G 是下列元数学命题在 PM 中的镜像：“哥德尔数为 g 的公式是不可证明的”。而这就表明公式 G 在 PM 中所表达的元数学命题是：“公式 G 是不可证明的”。总之一句话，可构建 PM 公式 G，它断言其自身不是 PM 的定理。

（ii）我们现在来到第二步——即证明G事实上并不是PM的一个定理。哥德尔对这一点的论证类似于理查德悖论的建构，但是避开了错误的推理。[38] 他的论证相对来说是顺畅的。它证明如果公式G是可证的，则它的否定形式（即公式“（∃x）Dem（x, Sub（n, 17, n））”，其解释为“在PM中存在G的一个证明”）也是可证的；反过来，如果G的否定形式是可证的，则G本身也是可证的。因而我们得到：G可证，当且仅当，~G可证。[39] 正如我们早前注意到的，如果一个公式及其否

[38] 点明当前的论证与理查德悖论之间的相似与不同之处是有用的。关键在于G不等于与之对应的元数学命题，而只是在PM内部表达了（或镜照了）后者。在理查德悖论中，数n是与一个特定的元数学命题相连的数。而在哥德尔的建构中，数n是和属于PM的一个特定的公式相连的，而这个公式可以说是凑巧表达了一个元数学命题。在展开理查德悖论时，问题是数n是否具有是理查德数的元数学性质。而在哥德尔建构中，问题是数g = sub(n, 17, n)是否具有某一算术性质—即不存在数x使断言“dem(x, y)”成立的性质。因此就哥德尔建构来说，与理查德悖论不同，在PM内的命题和关于PM的命题之间不存在混淆之处。

[39] 这不是哥德尔实际上所证明的；文中是借用并改写了J. Barkley Rosser于 1936 年所得

定形式都可从某个形式演算中推导出来，那么这个演算就不是一致的。转过来，我们可以推论说如果PM是一致的形式演算系统，则公式G及其否定形式均不可证。简言之，如果PM一致，则G是形式不可判定的。[40]

（iii）刚看到这个结论，还很难看到它的极端重要性。可能会问，为什么在 PM 中构造出一个不可判定公式显得如此令

到一个较强的结果，为的是使阐述更为简明。哥德尔实际上所证明的是，如果G可证，则～G可证（因而PM不一致）；而如果～G可证，则PM是ω—不一致的。

什么是ω—不一致？设“P”表示一个算术谓词。如果在一个形式演算 C 中，公式“(∃x) P(x)”和无限公式集合“～P(0)”，“～P(s0)”，“～P(ss0)”，等等（即“0 没有性质 P”，“1 没有性质 P”，“2 没有性质 P”，等等）中的每一个都是可证的，则这个形式演算 C 是ω—不一致的。不难想到，如果 C 是不一致的，则也是ω—不一致的（因为在不一致系统中所有的合式字符串都是定理）；然而反过来却不一定成立：C 有可能是ω—不一致,却非不一致。换句话说，不但“(∃x) P(x)”而且上述的公式集合中的每个成员都是 C 的定理，然而“~(∃x) P(x)”却不是定理，在这种情况下，C 就是ω—不一致，却非不一致。

“～(∃x) P(x)”不是定理，而公式集合“～P(0)”，“～P(s0)”，“～P(ss0)，…”中的每一个都是一个定理，看起来似乎很荒谬。毕竟，公式集合总体上表明没有数具有性质P，而“～(∃x) P(x)”独自也表明没有数具有性质P。难道后者不是直接随着前者的吗？“(∃x) P(x)”宣称存在某个数有性质P，怎能是一条定理呢？它难道不是和公式集合直接矛盾吗？两种担忧都是有道理的，如果你（像任何人一样）在思考时带进语义的话。但是C只是一个形式演算系统——只和演绎规则有关而和语义无关。如果有一条规则可以对这个公式集合做一揽子考虑，那么担心是有道理的——但是尽管有规则和任意有限数目的公式有关，却没有能处理无限数目公式的规则。（回想一下希尔伯特对有限方法的坚持，见第三章。）因而，尽管显得怪怪的，上面这种情况是存在的。

[40] 我们将勾画一下哥德尔论证的前一部分：如果G可证，则～G可证。假设G可证。这意味着存在一个PM的公式序列构成对G的证明。让我们将这个元数学命题翻成数字命题。设这个假设存在的G的证明的哥德尔数为k。由于关系式dem(x, z)是“某甲是某乙的证明”的数论对应物，当x值为k，z值为G的哥德尔数时，dem(x, z)肯定为真。换句话说，dem(k, sub(n,17, n))必是一个算术的事实。已知dem(x, z)是个原始递归的关系式（这里就不加证明了），它在PM中的形式对应物行为很规范，即是说“Dem(sss…sss0, Sub(sss…sss0, sss…sss0, sss…sss0))”必是PM的一条定理，其中“s”的数目分别是k，n，17，和n。简言之，“Dem(k, Sub(n, 17, n))”一定是条定理。借助于PM的一条演绎规则，即从具有形式“P(k)”（数k有性质P）的定理，可推出定理“(∃x) P(x)”（某数有性质P），我们立即可以导出公式“(∃x) Dem(x, Sub(n, 17, n))”。但是，这正是G的否定形式。因此，我们就已经证明了如果G可证，则它的否定形式～G也可证。从而，如果PM是一致的，G在PM中就不可证。

要证明如果～G 可证，则 PM 是ω—不一致的，需要多少类似但更为复杂的论证。我们就不打算再讲了。

人瞩目？后面还有一个令人吃惊的情况可以表明这个结果的深刻含义。因为，虽然在 PM 是一致的条件下，公式 G 不可判定，然而通过元数学推理却能够证明 G 是真的。（当然或者 G 或者~G 肯定有一个是真的，因为它们构成了关于数的一对对立的判断；肯定其中有一个为真有一个为假，问题是哪个为真哪个为假。）

不难看出 G 所说的为真。的确，正如我们早些时观察到的，G 说的是“没有 G 的 PM 证明”。（这至少是 G 的元数学解释；当在数论层次上时，G 所说的仅仅是不存在与数 sub（*n*, 17, *n*）有某种关系（即“dem”关系）的数 *x*。为了相信 G 为真，仅考虑前一种解释就可以了。）但是我们刚才证明了 G 在 PM 中是不可判定的，特别是 G 在 PM 中没有证明。而这一点，回想一下，恰恰就是 G 所说的！所以 G 所说的是真理。读者应该细心地体会到，这里我们不是通过从形式系统的公理和规则形式地进行推导，而是通过元数学论证证明了一个数论的真命题。

（iv）现在我们要提醒读者注意在讨论命题演算时引进的“完全性”概念。在那里曾提到，一个演绎系统被称作是“完全的”，如果每一个能够在此系统内表示的真命题都是可以用演绎规则从公理中推导出来的。如果不是这种情况，即不是每一个系统中可表示的真命题都是可推导的，那么这个系统就被称作“不完全的”。由于我们刚好表明G是PM的真公式但又是

在PM中形式不可推导的，因而PM是一个不完全的系统，当然假定的前提是PM是一致的。[41]

而且，PM 的问题比人们最初想到的还糟，因为它不仅是不完全的，而且是实质上不完全的：即使将 G 加上作为一条新的公理，扩大了的系统仍然不足以形式地获得所有的算术真理。原因在于，如果最初的公理集这样扩大之后，在扩大了的系统中可以构建另一个是真的而又是不可判定的公式。这个公式会涉及到一个更复杂一些的数论关系——比如说 dem'（*x*, *z*）——因为新的系统增加了一个公理，因此新系统“可证性”的概念会比 PM 中要复杂一些。在新系统中构造不可判定的公式，只要仿效哥德尔在 PM 自身中确定一个真的却不可判定的公式的方法就行了。不管初始的系统扩充多少次，这个产生不可判定公式的方法均可以使用。它同样也不实质性地依赖于罗素和怀特海的形式演算系统的特点。不管将何种系统作为起点，只要那个系统是完全形式化的，只要它含有确定整数基本性质的公理并包括加法和乘法，此方法都适用。

这就迫使我们认识到形式公理演绎系统能力的一个根本局限性。和先前的信念相反，对算术真理的广袤天地，是无法通过一次性地设定一组公理和演绎规则，从中形式地推出每一个

---

41 我们也可以不用通过（iii）中的推理就得到这个结论，也就是说，不用知道G或～G那一个真，原因是我们已得到结论说G是不可判定的，意味着G和～G在PM中都是不可证的。知道了这两个命题中有一个是真的，也知道了两者都是在PM中不可证的，这本身就意味着PM是不完全的，即便这会使我们对G和～G到底谁真谁假心中无数。或许知道了会感觉好一点，但却不是论证的必要条件。

真算术命题而建立起整体系统的秩序的。对任何倾向于相信数学的实质就是纯形式公理演绎的人来说，这肯定是个令人震撼的发现。

（v）我们终于接近哥德尔令人惊奇的智力交响乐的尾声了。我们跟踪了他为其元数学命题奠定基础的各个步骤，这个命题是："如果 PM 是一致的，则它是不完全的"。但是，也可以证明这个条件命题作为一体时可用 PM 中一个可证公式来表示。

很容易构建这个关键性的公式。我们在第五章曾说过，元数学命题"PM 是一致的"，等价于说"至少有一个 PM 的公式在 PM 中是不可证的"。通过哥德尔映射将此元数学命题映射到数的范畴，这对应于数论命题"至少存在一个 y，没有一个 x 能和它构成 dem 关系"。也可以说，"某数 y 具有这样一种性质，即没有 x 能使关系 dem（x, y）成立"。这样我们就可以将其翻成 PM 的形式：

$$(\exists y)\sim(\exists x)\mathrm{Dem}(x, y) \qquad \text{(A)}$$

我们可以重述 A 的元数学解释如下："至少存在一个公式（其哥德尔数为 y），无法提出任何公式序列（其哥德尔数为 x）以构成 PM 中对它的证明"。

因此，公式 A 代表了元数学命题"如果 PM 一致，则它是

不完全的”中的前半句。另一方面，后半句即“它（PM）是不完全的”，相当于说，对任何真的但又不可证的公式 X，“X 不是 PM 的定理”。幸好我们知道一个这样的公式 X，就是我们的老朋友公式 G。因此，我们就可以通过写出“G 不是 PM 的一条定理”的字符串，将后半句翻成 PM 的形式语言。而这不是别的，正是 G 本身。所以 G 可被用作我们的条件元数学命题中的后半句。

将前面讲的归拢在一起，结论就是条件命题“如果 PM 一致，则它是不完全的”在 PM 中可以表示成公式：

$$(\exists y)\sim(\exists x)\mathrm{Dem}(x, y) \supset \sim(\exists x)\mathrm{Dem}(x, \mathrm{Sub}(n, 17, n))$$

为了简练起见，这个公式可用符号表示为“A ⊃ G”。（可证明这个公式在 PM 中是形式可证明的，但在这里我们就不证明了。）

现在我们证明公式 A 在 PM 中是不可证明的。先假设它可证明，那么因为公式“A⊃G”可证，通过使用分离规则（见第五章），公式 G 将是可证的。但是，除非 PM 不一致，否则 G 是形式不可判定的，也就是说它是不可证的。因此，如果 PM 一致，则公式 A 在 PM 中是不可证的。

这会将我们引向哪里？公式 A 是元数学命题“PM 是一致

的”在 PM 中的表示。因此，假设通过一串推理步骤能非形式地证明这个元数学命题，并且如果这一串步骤能映射为 PM 中构成证明的公式序列，那么公式 A 本身在 PM 中就是可证的。但正像我们刚看到的，如果 PM 是一致的，则这是不可能的。我们面临关键的最后一步：我们被迫得出结论，即如果 PM 是一致的，那么它的一致性是无法用任何可被镜照到 PM 自身的元数学推理来证明的！

这个哥德尔分析的辉煌结果不应被曲解：它并未排除PM一致性的元数学证明。它排除的是能被镜照到PM内的一致性证明。[42]

对诸如PM这一类形式系统一致性的元数学证明，事实上在 1936 年就令人瞩目地由希尔伯特学派的成员甘岑（Gerhard Gentzen）做出了，从那以后有其他人也完成了类似的工作。[43]这些证明有很大的逻辑意义，除了其它的原因之外，它们提出了元数学建构的新的形式，并从而有助于搞清如果要证明PM及相关系统的一致性，推理规则的类应该如何扩大。但是，这些证明不能镜照进它们所关心的系统中，并且，由于它们不是有

[42] 读者在此处回想一下一个相似的例子是有帮助的。证明没有可能用圆规和直尺三等分一个任意角，并不意味着用其它手段无法做到。正好相反，例如我们除了用圆规和直尺外，还允许使用在直尺上标明固定距离刻度，那么任意角都是可三等分的。

[43] 甘岑的证明依赖于将PM中所有的证明按其“简单性”依线性排序（注意这一点类似于在前一章里间接提到的理查德悖论的形式样式）。这种安排具有某种“超限序数”的规律。（超限序数的理论是德国数学家康托（Georg Cantor）于十九世纪发明的。）为获得一致性证明，要对这个线性排序使用一条叫做“超限归纳原理”的推理规则。但甘岑的论证不能镜照到PM中。而且，尽管大多数数理逻辑的专家并不置疑这个证明的正确性，但在希尔伯特原来所规定的一致性的绝对证明的意义上，它并不是有限的。

限的，因而都没有达到希尔伯特原来方案中所设定的目标。

八　结论性的反思

哥德尔结论的重要意义影响深远，尽管它还未被充分地了解。这些结论表明，对每一个演绎系统（特别是对一个可以表示整个数论的系统）来说，发现一个满足希尔伯特方案有限性要求的一致性的绝对证明，尽管从逻辑上讲不是不可能，但是可能性极小。[44] 这些结论也表明，存在无穷多个无法用封闭的一组演绎规则从给定的一组公理推导出来的真的算术命题。相应地，对数论的公理化处理看来不能充分地刻画数论真理的性质；我们所理解的数学证明过程和形式化的公理方法的应用也并不吻合。形式化的公理方法，是基于一组初始确定的且固定不变的一组公理和变换规则。然而，正如哥德尔本人论证的那样，不可能事先限定数学家在设计新的证明方法上可能具有的独创性。因而，也就不可能对正确的数学证明的精确性质下最终的断语。根据这些情况，究竟是否能够给出数学或逻辑真理的全盘覆盖的定义，以及是否如哥德尔看来所相信的那样，只有古代柏拉图式的彻底的哲学“实在论”（realism）才能提供一个恰当的定义，这些仍是辩论中的问题，其困难的程度，我们无法在此处作进一步的考虑。[45]

---

[44] 哥德尔的结果并未排除构建一个像《数学原理》那样的形式系统的一致性绝对证明的可能性。哥德尔证明的是不存在能被镜照到《数学原理》中的证明的可能性。他的论证并未消除找到严格有限但又不能被映照到《数学原理》中去的证明的可能性。问题在于，时至今日没有人对不能被映照到《数学原理》中去的有限证明究竟意味着什么有十分清楚的概念。

[45] 柏拉图的实在论认为，数学不是创造或发明出它的“对象”，而是像哥伦布发现美

哥德尔的结论和是否能建造一台演算机械来模仿人类大脑在数学方面的智能有关。今天的演算机械内建固定的一组指令，这些指令对应于形式化公理系统的固定的一组演绎规则。这种机器通过一步步操作的方式为问题提供答案，其中每一步都由内建的指令来控制。但是，正如哥德尔在他的不完全性定理中所表明的，初等数论中有无穷多的问题超出了固定的公理方法的能力范围，不管按其原理造的机器有多复杂多精妙，运转多么快，它都不具备回答所有这些问题的能力。给定一个问题，就可以造出一台解决这个问题的机器，但不可能造出解决所有的问题的机器。当然人的大脑，也有其自身的局限性，也可能有无力解决的数学问题。但即便如此，大脑所具有的操作规则结构也要比现在所理解的人工机器强大得多。当前还看不出用机器人来替代人类大脑的直接前景。

哥德尔证明不应引起绝望，也不应被当作陷入神秘主义的借口。发现有不能够形式证明的数论真理，并不意味着有永远无法认知的真理，也不意味着要用一种“神秘”直觉（注意这里讲的不是在其类型和权威性上都大为不同的那种在智力进展

洲大陆那样发现了这些对象。如果真的如此，则对象必须在某种意义上先于其被发现而“存在”。按照柏拉图的教义，数学研究的对象不是在时空中发现的。它们是脱离肉体的永恒形式或原型，存在于只有智力才能够探寻的特殊世界之中。按此种观点，感官所感受到的物体的三角或圆的形状并不是数学合适的对象。这些形状仅仅是不可分割的“完美”三角形或“完美”圆形的不完美的体现，这些完美对象不是创造出来的，永不能被物质客体充分地体现，而只能通过数学家的思想探索去掌握。哥德尔看来是持一种类似的观点的，他说：“可以将类或概念视为实在的对象…独立于我们的定义和建构而存在。对我来说，假定这样的对象的存在就像假定物质客体的存在一样合理，有同样多的理由来相信它们的存在。”(Kurt Gödel ,“Russell’s Mathematical Logic,” in *The Philosophy of Bertrand Russell* (ed.. Paul A. Schilpp, Evanston and Chicago, 1944), p. 137).

中普遍起作用的直觉）来替代严格的证明。它并不意味着像最近有些作家所讲的那样，存在着“人类理性的不可避免的限制”。它的确意味着人类的智力资源没有，也不可能被全部形式化，新的证明原理永远等待着人们去发明和发现。我们曾讲过，从给定的一组公理出发不能被形式演绎证明的数学命题，仍然可以被“非形式的”元数学推理来证明。认为这些能被元数学推理证明而形式上不可证的真理只能建立在凭空而来的直觉基础上的说法，恐怕是不负责任的。

同样，演算机械所固有的局限性也并不意味着我们无望用物理和化学的词汇来解释生命物质和人类理性。哥德尔不完全定理既未排除也未肯定这类解释的可能性。这个定理的确表明，人类思想的结构和力量，要远比迄今为止所构想的非生命的机器复杂和微妙得多。哥德尔自身的工作，恰好就是这种复杂和微妙的显著例证。我们不应为此感到沮丧，而应把握住这个对创造性理性再次赞赏的机会。

附录

注释

一、（第 7 页）直到 1899 年基数算术的公理化工作才由意大利数学家皮亚诺（Giuseppe Peano）完成。他的公理有五条。这些公理是借助于三个未定义但假设为已知的词而构建起来的。这三个词是：“数”，“零”，以及“直接后继”。皮亚诺公理可条列如下：

1. 零是一个数。
2. 一个数的直接后继也是个数。
3. 零不是一个数的直接后继。
4. 不会有两个数有同一个直接后继。
5. 如零有某种性质，并且有此性质的数的直接后继也有这个性质，则所有的数都有此性质。

最后一条公理就是我们常说的“数学归纳法”。

二、（第 30 页，脚注 8）读者可能想比书中所讲的更多地了解即使在初等数学证明中都在无形中使用了的逻辑原理和演绎规则。我们先来分析一下在欧几里德的证明中，从第 3、4、以及 5 行导出第 6 行的推理过程。

我们指定字母“p”，“q”和“r”为“命题变量”，因为可以用命题代进去。为了节省篇幅，我们将条件命题从“如果 p 那么 q”的形式写为“$p \supset q$”，在这个表达式中，我们将马

蹄形符号“$\supset$”左边的式子称为“前件”，右边的式子为“后件”。相似地，我们将“或者 p 或者 q”缩写为“$p \vee q$”。

在初等逻辑中有一条定理是：

$$(p \supset r) \supset [(q \supset r) \supset ((p \vee q) \supset r)]$$

可以证明，这个公式是必然真理。读者不难看出它是下面长得多的命题的缩写：

如果（如果 p 那么 r），那么[如果（如果 q 那么 r）那么（如果（或者 p 或者 q）那么 r）]

正如正文中指出的，有一条称为命题变量替换规则的逻辑演绎规则。按照这条规则，如果含有命题变量的命题 S_1 将其中的变量统一地用某些命题代入后可得到命题 S_2，则前者可以逻辑地推导出后者。如果对刚才提到的定理应用此规则，用“y 是素数”代入“p”，用“y 是合数”代入 q，用“x 不是最大的素数”代入“r”，我们得到：

（y 是素数 $\supset$ x 不是最大的素数）$\supset$

[（y 是合数 $\supset$ x 不是最大的素数）$\supset$

（（y 是素数 $\vee$ y 是合数）$\supset$ x 不是最大的素数）]

读者应注意到在第一对括号内的条件语句和欧几里德证明中的第三行的一样。相似地，在方括号里面第一对圆括号内的条件语句和证明的第四行一样。方括号中的或语句和证明的第五行一样。

我们现在利用另一条称为分离规则（Modus Ponens）的演绎规则。这条规则允许我们从两个命题语句s_1和$s_1 \supset s_2$推出命题语句s_2。（在欧几里德的证明中）我们应用了三次这个规则：首先，将其用于证明的第三行和上面的这条逻辑定理；其次，用于前面的应用所得的结果和证明的第四行；最后，用于所得的最终结果和证明的第五行。结果就是证明的第六行。

从第三、第四和第五行推出第六行，涉及到两条推理规则和一条逻辑定理的默认使用。这些规则和定理都属于逻辑理论的初级部分，即所谓的命题演算。这个部分处理的是命题之间的逻辑关系，这些命题是通过命题连接符如“$\supset$”和“$\vee$”将其它命题复合而产生的。另外一种连接符是代表合取词“并且（and）”，用“$\bullet$”作为其缩写形式；这样合取命题“p 并且 q”写为“$p \bullet q$”。符号“~”代表否定“非（not）”；所以“非 p”写为“$\sim p$”。

让我们检查一下在欧几里德的证明中从第六行是如何过渡到第七行的。这个步骤是无法单单借助于命题演算而能够加以分析的。这里要用到一个属于逻辑理论更高等部分的推理规

则——也就是说，这个规则会注意到含有“所有的”，“每一个”，“有些”等表述或它们的同义词的命题的内部复杂性。这些词汇传统上被称为“量词”，而讨论它们的作用的逻辑理论分枝称为量化理论。

作为分析上面问题中过渡步骤的准备，有必要解释一下这个逻辑中更高等的部分的一些概念。除了可用命题代入的命题变量之外，我们还必须考虑“个体变量”这一类别，如“x”，“y”，“z”，等等，对它们可用个体的名代入。使用这些变量，全称命题“所有大于 2 的素数都是奇数”可被描述为：“对每一个 x，如果 x 是大于 2 的素数，那么 x 是奇数”。表达式“对每一个 x”称为全称量词，用现在的逻辑符号其缩写为“（x）”。这样，上面的全称命题可写为：

（x）（x 是一个大于 2 的素数 $\supset$ x 是奇数）

进而，“特称”（或“存在”）命题“有些整数是正的”可被描述为“至少有一个 x，这个 x 是一个整数并且 x 是正的”。表达式“至少有一个 x”被称为存在量词，现在用符号“$\exists$（x）”来缩写。刚才提到的存在命题可被转写为：

$\exists$（x）（x 是一个整数 $\bullet$ x 是正的）

可观察到很多命题隐含的量词不只一个，所以在展现其真实结构时，必然会出现多个量词。在表明这一点之前，让我们先讲清对通常所称的谓词表达式，或更简单地称之的谓词所采用的某些缩写方式。我们将用“Pr（x）”来表示“x 是一个素数”；并且用“Gr（x, z）”来表示“x 大于 z”。考虑命题：“x 是最大的素数”。如用下述的说法，它的意思可以表示得更清楚：“x 是一个素数，并且，对每一个是素数又不同于 x 的 z，x 大于 z”。借助于上面几种缩写，命题“x 是最大的素数”可被写为：

$$\mathrm{Pr}(x) \bullet (z)[(\mathrm{Pr}(z) \bullet \sim(x = z)) \supset \mathrm{Gr}(x, z)]$$

从字面上讲，这个式子说的是：“x 是一个素数，并且，对每一个 z，如果 z 是一个素数并且 z 不等于 x，那么 x 大于 z”。在此符号系列上，我们见识了欧几里德证明中的第一行内容的形式化的表示方法，这个表示方法十分明确，简直令人受不了。

下一步，考虑如何用我们的符号表达命题“x 不是最大的素数”，这是证明中的第六行。这可被表示为：

$$\mathrm{Pr}(x) \bullet \exists(z)[\mathrm{Pr}(z) \bullet \mathrm{Gr}(z, x)]$$

从字面上讲，它的意思是“x 是一个素数并且至少存在一个 z，z

是一个素数并且 z 大于 x”。

最后，欧几里德证明的结论即第七行，宣称不存在最大的素数，可形式化地转述如下：

$$(x)[\mathrm{Pr}(x) \supset \exists(z)(\mathrm{Pr}(z) \bullet \mathrm{Gr}(z, x))]$$

它的意思是：“对每一个 x，如果 x 是一个素数，那么至少存在一个 z，z 是一个素数并且 z 大于 x”。读者会观察到，欧几里德的结论隐含地涉及到多于一个量词的使用。

现在我们准备好了可以讨论从欧几里德证明的第六行到第七行的步骤。在逻辑中有一个定理是：

$$(p \bullet q) \supset (p \supset q)$$

翻译过来，就是“如果 p 并且 q，那么（如果 p 那么 q）”。应用替换规则，用“$\mathrm{Pr}(x)$”替换“p”，并用“$\exists(z)(\mathrm{Pr}(z) \bullet \mathrm{Gr}(z, x))$”替换“$q$”，我们得到：

$$(\mathrm{Pr}(x) \bullet \exists(z)[\mathrm{Pr}(z) \bullet \mathrm{Gr}(z, x)]) \supset$$
$$(\mathrm{Pr}(x) \supset \exists(z)[\mathrm{Pr}(z) \bullet \mathrm{Gr}(z, x)])$$

这个定理的前件（上面公式的第一行）就是欧几里德证明的第

六行；如果我们应用分离规则，则得到

$$（\mathrm{Pr}（x）\supset \exists（z）[\mathrm{Pr}（z）\bullet \mathrm{Gr}（z, x）]）$$

按照逻辑量化理论中的一个推理规则，一个具有形式“（*x*）（…*x*…）”的语句s_2，总是可以从具有形式“（…*x*…）”的语句s_1推导出来。换句话说，具有量词（*x*）作为前缀的语句，可以从除了不具有这个前缀而在其它方面均一样的语句推导出来。将这个规则用于刚才最后展示的那个语句，我们就得到了欧几里德证明中的第七行。

我们这里讲的情况表明，在欧几里德定理的证明中，隐含地不但涉及到属于命题演算的定理和推理规则，而且也涉及到量化理论的推理规则。

三、（第 42，43 页）看到这里，细心的读者可能会有反对意见，开始像下边这么想：作为重言式，其性质是依据真与假的观念定义的。然而这些观念明显地涉及到对形式演算之外的东西。因此，在文本中所提到的方法，实际上是通过给系统提供模型的方式对演算提出的一种解释。既然如此，作者们并没有照他们承诺的那样去做，即依据公式本身纯结构性的特点来定义公式的性质。看来，在本书第二章讲到基于模型对一致性的证明时所提到的困难，即从公理的真推出它们的一致性，

仅仅是将问题转移了——归根结底并未得到解决。为什么还将证明称为“绝对的”而不称为相对的？

这样的反对意见如果是针对文中的论述方式是有道理的。我们之所以采取这里的方式，是为这样一些读者着想，他们不习惯接受基于直观上不明显的证明而进行的高度抽象的表述。由于更勇于探索的读者们可能会希望看到真东西，看看无懈可击的未加修饰的定义是什么样的，我们在这里就提供它。

读者恐怕还记得，演算中的一个公式，或者是用作命题变量的字母中的某一个（我们将称这些公式是“基本的”），或者由用作命题连接符的符号和括号将这些字母复合而成。我们约定，把每一个基本公式放进两个相互不交叉又全涵盖的类K_1和K_2。非基本公式按照以下规定分别放入这二类中：

I） 具有形式$S_1 \vee S_2$的公式，如果S_1和S_2都在K_2中，则也放在K_2类中；否则放入K_1。

II） 具有形式$S_1 \supset S_2$的公式，如果S_1在K_1中，S_2在K_2中，则放入K_2；否则，放入K_1。

III） 具有形式$S_1 \bullet S_2$的公式，如果S_1和S_2都在K_1中，则放入K_1；否则放入K_2。

IV） 具有形式$\sim S$公式，如果S在K_1中，则放入K_2；否则放入K_1。

然后我们定义重言性：一个公式是重言式，当且仅当它均属于 K_1 类,不管构成它的基本公式放在两类中的哪一类。显然，现在对系统没有用任何模型或进行任解释，就描述了作为重言式的性质。仅仅按照上面的约定验证其结构，我们就能发现一个公式是不是重言式。

通过这样的检验，表明四条公理的每一个都是重言式。一个方便的方法是画一个表，列出一个给定的公式的基本成份放在这两个类中的所有可能性。在这列表中，对每一种可能的情况，我们可以确定公式的非基本组成部分属于哪一类，整个公式又属于哪一类。拿第一个公理来说。它的表有三列，分别由公理的基本公式部分，公理的非基本公式部分，和公理本身作为表头。在每一个表头下，对于基本公式每一种可能的在两类中的指派，标明这特定的项所属的类。这个表如下：

p	$(p \vee p)$	$(p \vee p) \supset p$
K_1	K_1	K_1
K_2	K_2	K_1

第一列标明公理中唯一的基本公式的分类。第二列在约定 I）的基础上指定其非基本部分所属的类。最后一列在约定 II）的基础上标明公理本身所属的类。最后一列表明第一个公理总落在 K_1，不管它唯一的基本公式落在哪一类。因此，这个公理是一

个重言式。

对第二个公理，其表如下：

p	q	（$p \vee q$）	$p \supset$（$p \vee q$）
K_1	K_1	K_1	K_1
K_1	K_2	K_1	K_1
K_2	K_1	K_1	K_1
K_2	K_2	K_2	K_1

头两列列出了公理的两个基本组成公式的四种可能的分类方式。第三列在约定 I）的基础上指定了非基本组成部分属于的类。最后一列在约定 II）的基础上对公理做了同样的事。最后一列再次显示，对其基本组成公式分类的每一种可能的情况，第二个公理都落入了K_1类。因此这个公理是一个重言式。用类似的方式，可证明剩下的两个公理也是重言式。

我们也将给出在使用分离规则的情况下，是重言式这一性质具有遗传性（向下传递性）。（在替换规则下的遗传性的证明留给读者。）假定任两个公式S_1和$S_1 \supset S_2$都是重言式；我们必须证明在这种情况下S_2也是重言式。假设S_2不是重言式，则至少对一种它的基本组成公式的分类，S_2落在K_2类。但是根据假定，S_1是重言式，所以对其所有可能的基本组成公式的分类，它都落入K_1类——特别是，对于使S_2落入K_2类的那个分类也是

如此。对于最后这个分类，按照第二条约定，$S_1 \supset S_2$必然落入K_2类。然而，这和$S_1 \supset S_2$是重言式的假定相矛盾。结果是，为了避免矛盾，S_2一定是重言式。因而，是重言式这一性质，就被分离规则从前提传递到了按此规则而推出的结果那里。

最后再评论一下书中给出的重言式的定义。在这里所用的两个类K_1和K_2，可以被解释为所有真命题和所有假命题分别组成的两个类。但是我们刚刚看到的处理方法，完全不依赖于这种解释，尽管当这样来理解类时对以上的阐述更容易掌握。

简要书目

CARNAP, RUDOLF — Logical Syntax of Language, New York, 1937.

FINDLAY, J. — "Goedelian sentences: a non-numerical approach," *Mind*, Vol. 51 (1942), pp. 259–265.

GÖDEL, KURT — "Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I," *Monatshefte für Mathematik und Physik*, Vol. 38 (1931), pp. 173–198.

KLEENE, S. C. — Introduction to Metamathematics, New York, 1952.

LADRIÈRE, JEAN — Les Limitations Internes des Formalismes, Louvain and Paris, 1957.

MOSTOWSKI, A. — Sentences Undecidable in Formalized Arithmetic, Amsterdam, 1952.

QUINE, W. V. O. — Methods of Logic, New York, 1950.

ROSSER, J. BARKLEY — "An informal exposition of proofs of Gödel's theorems and Church's theorem," *Journal of Symbolic Logic*, Vol. 4 (1939), pp. 53–60.

TURING, A. M. — "Computing machinery and intelligence," *Mind*, Vol. 59 (1950), pp. 433–460.

WEYL, HERMANN — Philosophy of Mathematics and Natural Science, Princeton, 1949.

WILDER, R. L. — Introduction to the Foundations of Mathematics, New York, 1952.

译者后记

哥德尔在西方学术界被公认为是二十世纪最重要的思想家和逻辑学家之一。哥德尔于三十年代初所证明的不完全性定理，是近现代以来在数学基础和逻辑学领域中最重要的成果，不但对数理逻辑、计算机科学、人工智能乃至整个认知科学的研究发展起到了开创性的推动作用，而且在当代数学哲学、科学哲学、哲学认识论和语言哲学等方面都产生了深远的影响。

《哥德尔证明》（Gödel’s Proof）一书原作者是美国著名的分析哲学家欧内斯特·内格尔（Ernest Nagel）以及詹姆士·R·纽曼（James R. Newman）。两位作者曾于 1956 年在美国著名杂志《科学美国人》6 月号上发表同名的文章，此文国内已有中译文[1]。之后，两人又合写了此书，并于 1958 年由美国纽约大学出版社首次出版。

哥德尔定理的证明本身专业性极强，涉及到许多原创性的数学逻辑学术思想，因此对许多想深入了解这一重要定理的其它领域的一般读者来说，存在着一定的困难。而《哥德尔证明》这本书，正像此书出版者所介绍的那样："本书是第一本既面向学者又面向非专业人士，对哥德尔证明的主要思路和广泛含义作了易读的解释的书。对任何具有逻辑和哲

[1] 《现代世界中的数学》/（美）克莱因主编；齐民友等译，上海教育出版社，2004.12

学品味的受过教育的人士来说，它提供了一个深入了解先前无法企及的论题的机会。” 虽然这本书的篇幅很小，百页而已，但可谓小而精，深入浅出，论述精准，著名的《自然》杂志评价其为“一部微型的诠释杰作”，是本难得的好书。此书出版后受到广泛欢迎，到上世纪末英文版就已重印发行六次，并被翻译多国文字出版，影响很大，对当代许多著名学者的成长都起到过重要的启示作用，可以说已成为此领域中普及性的现代经典著作之一。

此次中译本依据的是美国纽约大学出版社为纪念哥德尔发表其证明 70 周年，而于 2001 年出版的委托美国著名学者，印地安纳大学认识科学中心教授道格拉斯 R.霍夫斯塔特（Douglas R. Hofstadter，自取中文名侯世达）重新编辑的修订版。其中霍夫斯塔特加进了一篇新的前言，同时改正了原版中的一些不当的地方，增加了部分新的内容。英文修订版于 2005 年再次由纽约大学出版社重印发行。此次中国人民大学出版社出版此书中文版时，霍夫斯塔特教授特地为中国读者写了中文版序言。

我们认为，这样一本经过时间考验的书在国内翻译出版，会为从事哲学社会科学研究与教学的同志提供一本极好的基础性参考书，也会对从事数学、计算机科学、人工智能和认知科学的专业人员了解其基础哲学问题有启发，也可为大学里哲学系、数学系和计算机科学系等专业的师生相应课

程的参考。同时，我们特别希望此书会对一般读者和广大青少年科学精神、哲学精神的培养和开阔眼界产生好的影响。

本书的中译本得到了美国纽约大学出版社的许可和中国人民大学出版社总编辑周蔚华先生的批准，被收入北京大学陈波教授和美国 Susan Haack 教授共同主编的“当代世界学术名著·哲学系列”丛书，并得到了霍夫斯塔特（侯世达）教授的热情支持。在此译本的编辑出版过程中，人大出版社的编辑李艳辉女士付出了很多的心血。在此，我们向以上诸位老师表示由衷的感谢。由于译者本身的水平有限，译文中可能会有的错漏之处，均由译者承担全部责任。

为了便于读者对原书作者和编者的了解，我们在后记的附录 A 中做了简单的介绍。附录 B 中列出了一些较近期的，面向有进一步需要的一般读者的中英文参考文献。

附录A

为了便于读者了解有关原作者和编者的情况，我们将收集到的有关情况简介如下：

1、 **本书原作者之一：欧内斯特·内格尔（Ernest Nagel）（1901——1985）**

内格尔出生于现在捷克共和国的首都布拉格（当时是奥匈帝国的一部分），十岁时随家庭移居美国。1923 年获纽约城市学院学士学位，1925 年获哥伦比亚大学数学硕士学位，

1930 年获该校哲学博士学位。此后除了在洛克菲勒大学工作过一年之外，一直在哥伦比亚大学任教：1946 年起任教授，1956 年至 1966 年任杜威讲座哲学教授，1967 年至 1970 年退休前成为校级教授。其间，1940 至 1946 年任《符号逻辑》杂志编委；1939 至 1956 年担任《哲学杂志》编委；1956 至 1959 年任《科学哲学》杂志编委。曾任美国哲学和科学方法研究会主席，美国符号逻辑协会主席，美国哲学协会东部分会主席。他于 1961 年出版的《科学的结构》（The Structure of Science）被公认为科学分析哲学的开山之作，是逻辑实证主义运动的领军人物之一。内格尔是美国科学院院士，英国科学院的通讯院士。

2、 **本书原作者之二：詹姆士 R. 纽曼（James R. Newman）（1907—1966）**

律师、数学家和数学史家。二战前后及期间曾担任美国驻伦敦大使馆首席情报官，战时副国务卿特别助理，美国参议院原子能问题顾问等重要敏感职务。战后从 1948 年起，成为《科学美国人》杂志的编委会成员。他曾用十几年的时间编辑出版了四卷本的《数学世界》丛书，其中收集了从古到今的重要数学文献，具有极大参考价值，曾多次再版。

3、 **本书新版编者：道格拉斯 R. 霍夫斯塔特（Douglas R. Hofstadter）（1945— ）**

自取中文名为侯世达。世界著名物理学家、1961 年诺贝

尔物理学奖获得者罗伯特·霍夫斯塔特之子。1965 年获斯坦福大学学士学位，1975 年获俄勒冈大学物理学博士学位。现任美国印地安纳大学认知科学和计算机科学教授，是印地安纳大学观念与认知研究中心的负责人，同时兼任历史与科学哲学、哲学、比较文学和心理学教授，是美国当代计算机科学、认知科学、语言学等学科的著名学者。除在人工智能领域的最前沿的许多重要研究成果之外，他兴趣广泛，通晓多国语言，出版过许多领域中的著作，如用英文在美国翻译出版俄国诗人普希金的长诗《叶甫盖尼·奥涅金》。其名著Gödel, Escher, Bach: an Eternal Golden Braid（《哥德尔、艾舍尔、巴赫：一条永恒的金带》）曾获得 1980 年普利策奖，影响广泛。此书曾由北大组织翻译，中译本由商务印书馆于 1996 年出版，中文书名为《哥德尔、艾舍尔、巴赫——集异璧之大成》。

附录B

为了便于各界读者进一步了解和研究哥德尔及其著作和影响，我们提供以下部分文献以供参考：

1、 朱水林：《**哥德尔不完全性定理**》辽宁教育出版社，1988.

2、 张家龙：《**数理逻辑发展史—从莱布尼茨到哥德尔**》社会科学文献出版社，1993.

3、 侯世达：《**哥德尔、艾舍尔、巴赫——集异璧之大成**》郭维德等译，商务印书馆，1996.

4、 张尚水：《**当代西方著名哲学家评传 第五卷 逻辑哲学**》山东人民出版社，1996.

5、 （美）M.克莱因：《**数学：确定性的丧失**》李宏魁译，湖南科技出版社，1997.

6、 刘晓力：《**理性的生命—哥德尔思想研究**》 湖南教育出版社，2000.

7、 王浩：《**哥德尔**》 康宏逵译，上海译文出版社，2002.

8、 （奥）约翰·卡斯蒂等：《**逻辑人生—哥德尔传**》刘晓力，叶闯译，上海科技教育出版社，2002.

9、 （加）弗拉第米尔·塔西奇：《**后现代思想的数学根源/西方数学文化理念传播译丛**》 蔡仲，戴建平译 复旦大学出版社，2005.

10、 （美）马丁·戴维斯：《**逻辑引擎**》张卜天译，湖南科技出版社，2005.

11、 冯天瑾：《**智能学简史**》清华大学出版社，2007.

12、 Solomon Feferman, et al., editors, **Kurt Gödel, Collected Works. Vol. I.** Publications 1929–1936, Oxford University Press, New York, 1986.

13、 Solomon Feferman, et al., editors, **Kurt Gödel, Collected Works. Vol. II.** Publications 1938–1974, Oxford University Press, New York, 1990.

14、 Solomon Feferman, et al., editors, **Kurt Gödel, Collected Works. Vol. III.** Unpublished essays and lectures, Oxford University Press, New York, 1995.

15、 Solomon Feferman, et al., editors, **Kurt Gödel, Collected Works. Vol. IV.** Correspondence A－G, Oxford University Press, Oxford, 2003.

16、 Solomon Feferman, et al., editors, **Kurt Gödel, Collected Works. Vol. V.** Correspondence H－Z, Oxford University Press, Oxford, 2003.

17、John W. Dawson , **Logical Dilemmas: The Life and Work of Kurt Gödel** , A. K. Peters Ltd., Wellesley, Mass., 1997.

18、 Hao Wang (王浩), **A Logical Journey: From Gödel to Philosophy**, MIT Press, Cambridge, Mass.,1996.

19、 Torkel Franzén , **Gödel’s Theorem: An Incomplete Guide to Its Use and Abuse** , A. K. Peters Ltd., Wellesley, Mass., 2005.

20、 Rebecca Goldstein , **Incompleteness: The Proof and Paradox of Kurt Gödel (Great Discoveries)**, W. W. Norton, New York, 2006.

21、 Gregory J. Chaitin , **Thinking about Gödel and Turing** , World Scientific, 2007.