

浙江大学 2015 — 2016 学年春夏 学期

《点集拓扑》课程期末考试试卷

课程号: 75120010 开课学院: 数学

考试形式: 闭卷

考试日期: 2016 年 6 月 29 日上午 10:30-12:30, 考试时间: 120 分钟

姓名: _____ 学号: _____

请详细解答下面 10 个问题. 每题 10 分. 排序无关难易!

1. 证明 \mathbb{R}^2 不是可数多条直线的并集.
2. 设 $p \in X$. $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X \mid p \in U\}$. 证明 \mathcal{T} 是集合 X 的一个拓扑, 且 $\overline{\{p\}} = X$.
3. 设 $Y = \{1, 2\}$, 配以离散拓扑. 证明: X 连通当且仅当不存在连续满射 $f: X \rightarrow Y$.
4. 证明一个有限的可度量化空间的拓扑是离散拓扑.
5. 设 X 是紧空间, Y 是连通 Hausdorff 空间. 又 $f: X \rightarrow Y$ 是连续函数, 且是开映射. 证明 f 是一个满射.
6. 证明可分空间的开子空间是可分的.
7. 设 X 中单点集是闭集. A 是 X 的连通子集. 则 A 的极限点集 A' 连通.
8. 证明 $K \subset \mathbb{R}^n$ 是紧的当且仅当任意连续函数 $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ 有界.
9. 设 $f: X \rightarrow Y$ 是连续函数, 且又是满的闭映射. 证明下述命题等价.
 - (a) $\forall y \in Y, f^{-1}(y)$ 是 X 的连通子集.
 - (b) $\forall B \subset Y$ 连通子集, $f^{-1}(B)$ 是 X 的连通子集.
10. 设 $T^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = 1\}$ 是 \mathbb{R}^3 的子空间. $S^1 = \{(\cos \theta, \sin \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ 是 \mathbb{R}^2 的子空间. 请给出 $S^1 \times S^1$ 到 T^2 的一个同胚, 并予以证明.