浙江大学 2017 － 2018 学年春夏 学期
《点集拓扑》课程期末考试试卷

课程号：75120010　　开课学院：数学

考试形式：闭卷

考试日期：2018 年 7 月8 日 14:00-16:00，考试时间：120 分钟

姓名：____________　　学号：____________

请仔细阅读下列问题并详细作答. 每题 10 分.

1. 给出只含两个元素的集合 $X = \{a, b\}$ 上所有的拓扑. 对这些拓扑空间按同胚分类.

2. 在 $\mathbb{R}$ 的子空间 $X = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\}$ 及 $Y = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\}$ 中, 分别给出其中所有闭集.

3. 证明对拓扑空间 X 的任意子集 A, 有

   (a) $A^\circ = X - \overline{X - A}$.

   (b) $\overline{\overline{A^\circ}^\circ} = \overline{A^\circ}$.

4. 设 $f : [0, 1] \to [0, 1]$ 是连续映射. 证明: 若 f 是开映射, 则 f 是满射.

5. 设 $C(\mathbb{R}^d)$ 为 $\mathbb{R}^d$ 上所有连续函数集合. 对任意 $n \in \mathbb{Z}_+, f, g \in C(\mathbb{R}^d), \rho_n(f, g) := \max\{|f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})| \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d,$欧氏长度 $|\mathbf{x}| \leq n\}$.

   (a) 证明 ρ_n 是被合理定义的. ρ_n 是 $C(\mathbb{R}^d)$ 上度量吗?

   (b) 证明 $\rho(f, g) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_n(f, g)}{2^n(1 + \rho_n(f, g))}$ 是 $C(\mathbb{R}^d)$ 上一个度量.

6. 证明一个连续满射 $f : X \to Y$ 是闭映射当且仅当对于任意 Y 的子集 B, 任意 X 中包含 $f^{-1}(B)$ 的开集 U, 存在 Y 的开集 $V \supset B$, 使得 $f^{-1}(V) \subset U$.

7. 设 $\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ 是一族拓扑空间. 证明积空间 $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ 是局部连通空间当且仅当每一个 X_λ 是局部连通空间, 且除去有限个 λ 外, X_λ 是连通空间.

8. 设 X 是正规空间, $\{U_1, U_2, \cdots, U_n\}$ 是 X 的一个有限开覆盖. 证明:

   (a) 存在 X 的一个有限开覆盖 $\{W_1, W_2, \cdots, W_n\}$, 使得 $\overline{W_i} \subset U_i, i = 1, 2, \cdots, n$.

   (b) 对于任意 $i = 1, 2, \cdots, n$, 存在连续函数 $f_i : X \to [0, 1]$, 使得 $x \notin U_i$ 时, $f_i(x) = 0$. 同时, 对于任意 $x \in X, \sum_{i=1}^{n} f_i(x) = 1$.

9. 证明第二可数拓扑空间 X 上所有连续函数集合 $C(X)$ 与实数集 $\mathbb{R}$ 有相同的基数.

10. 将 $\mathbb{R}$ 的正整数子集 $\mathbb{Z}_+$ 粘合为一点所得商空间记为 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}_+$

    (a) 证明对任意子集 $A \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}_+$, 若 $p \in \overline{A}$, 则存在 A 中序列 (a_n) 在 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}_+$ 中收敛于 p.

    (b) 证明 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}_+$ 不满足第一可数性公理.

    (c) 证明 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}_+$ 不是局部紧的.