

浙江大学 2016 — 2017 学年春夏 学期

《点集拓扑》课程期末考试试卷

课程号: 75120010 开课学院: 数学

考试形式: 闭卷

考试日期: 2017 年 6 月 26 日 14:00-16:00, 考试时间: 120 分钟

姓名: _____ 学号: _____

请详细解答下面问题. 第 1, 2, 4-8, 9(a) 题每题 10 分, 第 3, 9(b) 题每小题 5 分

1. 设 U 是 X 的开集, C 是 X 的闭集. 证明 $U - C$ 是 X 的开集, $C - U$ 是 X 的闭集.
2. 称拓扑空间 X 具有不动点性质, 若对于任意连续映射 $f: X \rightarrow X$, 存在 $x_0 \in X$ 使得 $f(x_0) = x_0$. 证明具有不动点性质的拓扑空间必是连通的.
3. 正整数集合 \mathbb{Z}_+ 的子集族 $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{Z}_+, \{1\}, \{1, 2\}, \dots, \{1, 2, \dots, n\}, \dots\}$. 证明:
 - (a) \mathcal{T} 是 \mathbb{Z}_+ 上一个拓扑.
 - (b) \mathbb{Z}_+ 不是紧致的, 也不是 Hausdorff 的.
 - (c) \mathbb{Z}_+ 中任意点都有紧致邻域, 但任意点的邻域的闭包都是 \mathbb{Z}_+ .
4. 闭区间 $[0, 1]$ 上连续函数构成的集合记为 $C[0, 1]$. 定义 $d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$.
 - (a) 证明 d 是 $C[0, 1]$ 上一个度量.
 - (b) $\{f \in C[0, 1] \mid f(x) > 0\}$ 是否为度量空间 $(C[0, 1], d)$ 的开集? 说明理由.
5. 证明欧氏直线 \mathbb{E}^1 中无理数子空间是可分的.
6. 证明: 若乘积空间 $X \times Y$ 中单点集是闭集, 则 X 和 Y 的单点集都是闭集; 若同时 $X \times Y$ 还是正规的, 则 X 和 Y 也是正规的.
7. 设 A 是连通拓扑空间 X 的连通子集. 证明: 若 U 是子空间 $X - A$ 既开又闭的子集, 则 $A \cup U$ 是连通的.
8. 证明局部连通空间的商空间是局部连通的.
9.
 - (a) 证明一个紧致度量空间是第二可数的.
 - (b) 证明一个紧致度量空间 X 的连续像 Y 如果是 Hausdorff 的, 则它也是可度量化.