强化训练

A 组 夯实基础

1.（2024 • 河南洛阳模拟）

与 -2024° 角终边相同的角是（　　）

A．24°　　B．113°

C．136°　　D．224°

1．C

解析：终边相同的角相差 360° 的整数倍，故直接将 -2024° 与选项的角作差，看差值是否为 360° 的整数倍，

A 项，$-2024^\circ-24^\circ=-2048^\circ=-6\times360^\circ+112^\circ$，

差值不是 360° 的整数倍，二者终边不同，故 A 项错误；

B 项，$-2024^\circ-113^\circ=-2137^\circ=-6\times360^\circ+23^\circ$，

差值不是 360° 的整数倍，二者终边不同，故 B 项错误；

C 项，$-2024^\circ-136^\circ=-2160^\circ=-6\times360^\circ$，

差值是 360° 的整数倍，二者终边相同，故 C 项正确；

D 项，$-2024^\circ-224^\circ=-2248^\circ=-6\times360^\circ-88^\circ$，

差值不是 360° 的整数倍，二者终边不同，故 D 项错误.

2.（2024 • 上海模拟）

与 $\frac{15\pi}{4}$ 终边重合的最小正角是_______.

2．$\frac{7\pi}{4}$

解析：与 $\frac{15\pi}{4}$ 终边重合的角为 $\frac{15\pi}{4}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

令 $\frac{15\pi}{4}+2k\pi>0$ 得 $k>-\frac{15}{8}$，结合 $k\in\mathbf{Z}$ 知 k 最小可取 -1，

所以与 $\frac{15\pi}{4}$ 终边重合的最小正角是 $\frac{15\pi}{4}-2\pi=\frac{7\pi}{4}$.

3.（2024 • 河南南阳模拟）

-2024° 的终边在（　　）

A．第一象限　　B．第二象限

C．第三象限　　D．第四象限

3．B

解析：因为 $-2024^\circ=-6\times360^\circ+136^\circ$，

所以 -2024° 与 136° 的终边相同，在第二象限.

4.（2024 • 江苏南通模拟）

若 $\alpha=6$，则角 α 的终边在（　　）

A．第一象限　　B．第二象限

C．第三象限　　D．第四象限

4．D

解析：因为 $\pi \approx 3.14$，所以 $\frac{3\pi}{2} < 6 < 2\pi$，

故角 α 的终边在第四象限.

5.（2024 • 上海闵行模拟）

将角度化为弧度：$-315^\circ =$ ________.

5. $-\frac{7\pi}{4}$

解析：$-315^\circ = -315 \times \frac{\pi}{180} \mathrm{rad} = -\frac{7\pi}{4}$.

6.（2024 • 湖南株洲模拟）

把 $\frac{5\pi}{4}$ 化成角度是（　　）

A．45°　　　　B．225°

C．300°　　　　D．135°

6. B

解析：$\frac{5\pi}{4} = \left(\frac{5\pi}{4} \times \frac{180}{\pi}\right)^\circ = 225^\circ$.

7.（2024 • 陕西渭南模拟）

经过 2 小时，钟表上时针转过的弧度数为________.

7. $-\frac{\pi}{3}$

解析：钟表一共有 12 个小时，相当于把表盘 $2\pi \mathrm{rad}$ 平均分为 12 份，经过 2 小时，则时针转过其中的 2 份，

需注意，时针为顺时针转动，所以是负角，

所以时针转过的弧度数是 $-2\pi \times \frac{2}{12} = -\frac{\pi}{3}$.

B 组 强化能力

8.（2024 • 陕西模拟）（多选）

下列说法正确的是（　　）

A．终边在 x 轴上的角的集合是 $\{\alpha \mid \alpha = k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$

B．终边在 y 轴上的角的集合是 $\left\{\alpha \middle| \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$

C．终边在坐标轴上的角的集合是 $\left\{\alpha \middle| \alpha = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$

D．终边在 $y = -x$ 上的角的集合是 $\left\{\alpha \middle| \alpha = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$

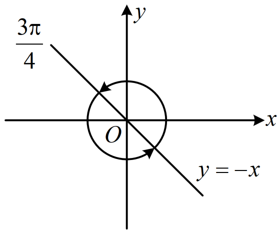
8. ABC

解析：A 项，零角的终边在 x 轴上，在此基础加 $k\pi$，终边仍在 x 轴上，所以终边在 x 轴上的角的集合是 $\{\alpha \mid \alpha = k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$，故 A 项正确；

B 项，$\frac{\pi}{2}$的终边在y轴上，在此基础加$k\pi$，终边仍在y轴上，故终边在y轴上的角的集合是$\left\{\alpha \middle| \alpha=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$，故 B 项正确；

C 项，终边在坐标轴上的角必为$\frac{\pi}{2}$的整数倍，所以终边在坐标轴上的角的集合是$\left\{\alpha \middle| \alpha=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$，故 C 项正确；

D 项，如图，$\frac{3\pi}{4}$的终边在$y=-x$上，在此基础加$k\pi$，终边仍在$y=-x$上，所以终边在$y=-x$上的角的集合是$\left\{\alpha \middle| \alpha=\frac{3\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$，故 D 项错误.



9.（2024·广东深圳期末）

若扇形的面积为 1，且弧长为其半径的两倍，则该扇形的周长为（　　）

A．1　　　B．2

C．4　　　D．6

9．C

解析：设扇形的半径为r，弧长为l，面积为S，

则由题意，$\begin{cases}S=\frac{1}{2}lr=1\\ l=2r\end{cases}$，解得：$\begin{cases}l=2\\ r=1\end{cases}$，

所以该扇形的周长为$l+2r=4$.

10.（2024·江苏盐城期末）

若角α的终边与角θ的终边关于x轴对称，则$\alpha+\theta$的终边落在（　　）

A．x轴的非负半轴

B．第一象限

C．y轴的非负半轴

D．第三象限

10．A

解析：由知识点 6 可建立终边关于x轴对称的角的关系，故先由此找到α和θ的关系，再求$\alpha+\theta$，

由α与θ的终边关于x轴对称可得$\theta=-\alpha+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

所以$\alpha+\theta=2k\pi$，故$\alpha+\theta$的终边落在x轴的非负半轴.

11．（2024 • 河北承德期末）

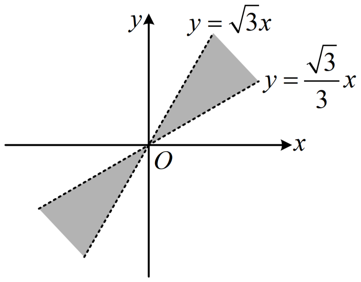
已知角 θ 的终边落在如图所示的阴影区域内（不含边界），角 α 的终边和 θ 相同，则角 α 的集合为（　　）

A．$\left\{\alpha\left|\frac{\pi}{6}+2k\pi<\alpha<\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$

B．$\left\{\alpha\left|\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$

C．$\left\{\alpha\left|\frac{\pi}{6}+k\pi<\alpha<\frac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$

D．$\left\{\alpha\left|\frac{\pi}{6}+\frac{3k\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{3}+\frac{3k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$



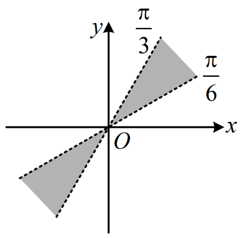
11．C

解析：看到阴影区域关于原点对称，想到先选其中一块来表示，再加 $k\pi$，

如图，$\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{3}$ 表示的区域是第一象限的阴影区域，

所以全部的阴影区域构成的角 α 的集合为

$\left\{\alpha\left|\frac{\pi}{6}+k\pi<\alpha<\frac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$.



12．（2024 • 四川泸州模拟）（多选）

下列说法中，正确的是（　　）

A．330° 是第四象限角

B．锐角一定是第一象限角

C．第二象限角大于第一象限角

D．若角 α 为第二象限角，那么 $\frac{\alpha}{2}$ 为第一象限角

12．AB

解法 1：A 项，$330^\circ=360^\circ-30^\circ$，其终边与 -30° 相同，在第四象限，故 A 项正确；

B 项，锐角 α 满足 $0^\circ<\alpha<90^\circ$，其终边必定在第一象限，故 B 项正确；

C 项，角所在的象限不能决定其大小，故此选项错误，我们举个反例，

120° 是第二象限的角，$370^\circ = 360^\circ + 10^\circ$，所以 370° 和 10° 的终边相同，在第一象限，但 $120^\circ < 370^\circ$，故 C 项错误；

D 项，已知 α 的象限，可写出其范围，得到 $\frac{\alpha}{2}$ 的范围，再分析其所在的象限，

因为 α 是第二象限的角，所以 $2k\pi + \frac{\pi}{2} < \alpha < 2k\pi + \pi$，

其中 $k \in \mathbf{Z}$，故 $k\pi + \frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < k\pi + \frac{\pi}{2}$ ①，

当 k 为偶数时，设 $k = 2m$，其中 $m \in \mathbf{Z}$，

则不等式①即为 $2m\pi + \frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < 2m\pi + \frac{\pi}{2}$，

它表示的区域与 $\frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$ 相同，在第一象限；

当 k 为奇数时，设 $k = 2m+1$，则不等式①即为

$(2m+1)\pi + \frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < (2m+1)\pi + \frac{\pi}{2}$，

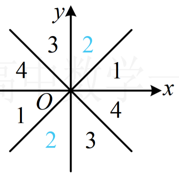
也即 $2m\pi + \frac{5\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < 2m\pi + \frac{3\pi}{2}$，

它表示的区域与 $\frac{5\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \frac{3\pi}{2}$ 相同，在第三象限；

所以 $\frac{\alpha}{2}$ 在第一象限或第三象限，故 D 项错误.

解法 2：A、B、C 三项的分析同解法 1，对于 D 项，也可用等分象限法来快速判断，

如图，因为 α 在第二象限，所以 $\frac{\alpha}{2}$ 在第一象限或第三象限，故 D 项错误.

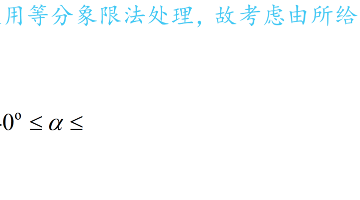


13.（2024•江西模拟）（多选）

如图，若角 α 的终边落在阴影部分，则角 $\frac{\alpha}{2}$ 的终边可能在（　　）

A．第一象限　　　B．第二象限

C．第三象限　　　D．第四象限



13．AC

解析：这题 α 未填满所在的两个象限，不方便用等分象限法处理，故考虑由所给图形把阴影部分表示的范围写出来，再求 $\frac{\alpha}{2}$ 的范围，

因为 α 的终边落在阴影部分，所以 $k \cdot 360^\circ + 40^\circ \le \alpha \le$

$k \cdot 360^\circ + 140^\circ (k \in \mathbf{Z})$，

故 $k \cdot 180^\circ + 20^\circ \le \frac{\alpha}{2} \le k \cdot 180^\circ + 70^\circ$ ①，

当 k 为偶数时，设 $k=2m$，其中 $m\in\mathbf{Z}$，

则不等式①即为 $2m\cdot180^\circ+20^\circ\le\frac{\alpha}{2}\le2m\cdot180^\circ+70^\circ$，

也即 $m\cdot360^\circ+20^\circ\le\frac{\alpha}{2}\le m\cdot360^\circ+70^\circ$，

此范围在第一象限；

当 k 为奇数时，设 $k=2m+1$，则不等式①即为

$(2m+1)\cdot180^\circ+20^\circ\le\frac{\alpha}{2}\le(2m+1)\cdot180^\circ+70^\circ$，

也即 $m\cdot360^\circ+200^\circ\le\frac{\alpha}{2}\le m\cdot360^\circ+250^\circ$，

此范围在第三象限；

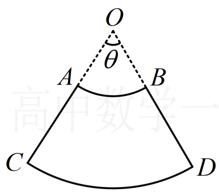
所以角 $\frac{\alpha}{2}$ 的终边在第一象限或第三象限.

14.（2024 • 山西模拟）

某校欲建造一个扇环形状（$ABDC$）的花坛，该扇环是由以点 O 为圆心的两个同心圆构造出的，小圆半径 $OA=5$ 米，大圆半径 $OC=10$ 米，圆心角 $\theta=\frac{\pi}{3}$.

（1）求该花坛的周长；

（2）求该花坛的面积.



14．解：（1）（花坛周长由 AC，BD，$\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{CD}$ 四部分构成，下面分别计算其长度）

由题意，$AC=OC-OA=10-5=5$ 米，

$BD=AC=5$ 米，$\overset{\frown}{AB}$ 的长 $l_1=\theta\cdot OA=\frac{\pi}{3}\times5=\frac{5\pi}{3}$ 米，

$\overset{\frown}{CD}$ 的长 $l_2=\theta\cdot OC=\frac{\pi}{3}\times10=\frac{10\pi}{3}$ 米，

所以该花坛的周长为 $AC+BD+l_1+l_2=(10+5\pi)$ 米.

（2）（花坛的面积可由大扇形 OCD 的面积减小扇形 OAB 的面积求得，故分别计算两个扇形的面积）

扇形 OAB 的面积 $S_1=\frac{1}{2}l_1\cdot OA=\frac{1}{2}\times\frac{5\pi}{3}\times5=\frac{25\pi}{6}$ 平方米，

扇形 OCD 的面积 $S_2=\frac{1}{2}l_2\cdot OC=\frac{1}{2}\times\frac{10\pi}{3}\times10=\frac{50\pi}{3}$ 平方米，

所以该花坛的面积为 $S_2-S_1=\frac{50\pi}{3}-\frac{25\pi}{6}=\frac{25\pi}{2}$ 平方米.

C 组 拓展提升

15．（2024 • 江苏连云港模拟）

如果 α 是第三象限角，则 $-\dfrac{\alpha}{2}$ 是（　　）

A．第一象限角

B．第一或第二象限角

C．第一或第三象限角

D．第二或第四象限角

15．C

解法 1：因为 α 是第三象限的角，所以 $2k\pi+\pi<\alpha<2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}$，其中 $k\in\mathbf{Z}$，

故 $k\pi+\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\alpha}{2}<k\pi+\dfrac{3\pi}{4}\Rightarrow -k\pi-\dfrac{3\pi}{4}<-\dfrac{\alpha}{2}<-k\pi-\dfrac{\pi}{2}$ ①，

当 k 为偶数时，$-k\pi$ 必为 2π 的整数倍，所以不等式①表示的区域与 $-\dfrac{3\pi}{4}<-\dfrac{\alpha}{2}<-\dfrac{\pi}{2}$ 相同，在第三象限；

当 k 为奇数时，设 $k=2m-1(m\in\mathbf{Z})$，

则不等式①即为 $-(2m-1)\pi-\dfrac{3\pi}{4}<-\dfrac{\alpha}{2}<-(2m-1)\pi-\dfrac{\pi}{2}$，

也即 $-2m\pi+\dfrac{\pi}{4}<-\dfrac{\alpha}{2}<-2m\pi+\dfrac{\pi}{2}$，

它表示的区域与 $\dfrac{\pi}{4}<-\dfrac{\alpha}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ 相同，在第一象限；

综上所述，$-\dfrac{\alpha}{2}$ 在第一或第三象限.

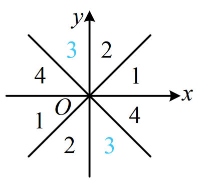
解法 2：已知 α 的象限，可用等分象限法快速判断 $\dfrac{\alpha}{2}$ 的象限，而 $-\dfrac{\alpha}{2}$ 与 $\dfrac{\alpha}{2}$ 关于 x 轴对称，故 $-\dfrac{\alpha}{2}$ 的象限也就有了，

如图，α 是第三象限的角 $\Rightarrow\dfrac{\alpha}{2}$ 是第二或第四象限的角，

又因为第二象限的角关于 x 轴对称后在第三象限，

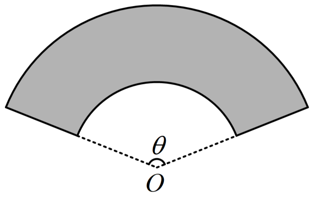
第四象限的角关于 x 轴对称后在第一象限，

所以 $-\dfrac{\alpha}{2}$ 是第一或第三象限的角.



16．（2024·江苏镇江开学考试）

立德中学拟建一个扇环形状的花坛（如图），该扇环面由以点 O 为圆心的两个同心圆弧和延长后可通过点 O 的两条直线段围成．按设计要求扇环的周长为 30 米，其中大圆环所在圆的半径为 10 米，设计小圆环所在圆的半径为 x 米，圆心角为 θ（弧度），当 $\theta=\dfrac{4}{3}$ 时，$x=$_____米；现要给花坛的边缘（实线部分）进行装饰，已知直线部分的装饰费用为 4 元/米，弧线部分的装饰费用为 9 元/米，则花坛每平方米的装饰费用 M 的最小值为_____元（$M=\dfrac{总费用}{花坛总面积}$）．



16．5；$\dfrac{10}{3}$

解析：如图，有了 θ，则弧长 l_1 可用 x 表示，l_2 可直接求出，于是能算扇环的周长，该周长已知，故可建立方程求 x，

因为 $\theta=\dfrac{4}{3}$，所以 $l_1=\dfrac{4}{3}x$，$l_2=\dfrac{4}{3}\times 10=\dfrac{40}{3}$，

故扇环的周长为 $l_1+l_2+2(10-x)=\dfrac{4}{3}x+\dfrac{40}{3}+20-2x$

$=\dfrac{100}{3}-\dfrac{2}{3}x$（单位：米），又由题意，扇环的周长为 30 米，

所以 $\dfrac{100}{3}-\dfrac{2}{3}x=30$，解得：$x=5$；

再来看第二空，需要计算装饰的总费用和花坛总面积，

由题意，装饰的总费用为

$4\times 2(10-x)+9(l_1+l_2)=80-8x+9(\theta x+10\theta)$，

花坛的总面积 $S=\dfrac{1}{2}l_2\cdot 10-\dfrac{1}{2}l_1 x$

$=\dfrac{1}{2}\times 10\theta\times 10-\dfrac{1}{2}\theta x\cdot x=50\theta-\dfrac{1}{2}\theta x^2$，

所以 $M=\dfrac{80-8x+9(\theta x+10\theta)}{50\theta-\dfrac{1}{2}\theta x^2}$

$=\dfrac{16(10-x)+18\theta(x+10)}{\theta(100-x^2)}$ ①，

有两个变量，考虑消元，需寻找 x 和 θ 的关系，题干的扇环周长为 30 米还没翻译，故来翻译它，

扇环的周长 $2(10-x)+l_1+l_2=20-2x+\theta x+10\theta=30$，

所以 $\theta(x+10)=10+2x$，故 $\theta=\dfrac{10+2x}{x+10}$，

代入①得 $M=\dfrac{16(10-x)+18\cdot\dfrac{10+2x}{x+10}\cdot(x+10)}{\dfrac{10+2x}{x+10}\cdot(100-x^2)}$

$=\dfrac{16(10-x)+18(10+2x)}{(10+2x)(10-x)}=\dfrac{10(17+x)}{(5+x)(10-x)}$，

此为“$\dfrac{一次函数}{二次函数}$”结构，可将“一次函数”换元成 t，

令 $t=17+x$，则 $x=t-17$，由题意可知 $0<x<10$，

所以$17<t<27$，$M=\dfrac{10t}{(5+t-17)(10-t+17)}$

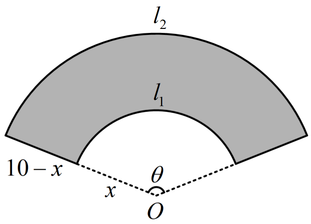
$=\dfrac{10t}{(t-12)(27-t)}=\dfrac{10t}{-t^2+39t-324}=\dfrac{10}{39-\left(t+\dfrac{324}{t}\right)}$，

因为$t+\dfrac{324}{t}\geq 2\sqrt{t\cdot\dfrac{324}{t}}=36$，取等条件是$t=\dfrac{324}{t}$，

即$t=18$，满足$17<t<27$，

所以$M=\dfrac{10}{39-\left(t+\dfrac{324}{t}\right)}\geq\dfrac{10}{39-36}=\dfrac{10}{3}$，

故M的最小值为$\dfrac{10}{3}$元.



17.（2024·河南南阳模拟）

已知一扇形的圆心角为$\alpha(\alpha>0)$，半径为R，面积为S，周长为L.

（1）若$S=4$，则扇形圆心角α为多少弧度时，L最小？并求出L的最小值；

（2）若$L=10$，则扇形圆心角α为多少弧度时，S最大？并求出S的最大值.

17. **解**：(1)（涉及变量较多，我们先翻译已知和所求，再来观察它们之间的联系）

由题意，$S=\dfrac{1}{2}\alpha R^2=4$ ①，

$L=\alpha R+2R=(\alpha+2)R$ ②，

（观察发现可由①反解出α，代入②消去α，化为关于R的单变量函数来分析最值）

由①可得$\alpha=\dfrac{8}{R^2}$，代入②得$L=\left(\dfrac{8}{R^2}+2\right)R$

$=\dfrac{8}{R}+2R\geq 2\sqrt{\dfrac{8}{R}\cdot 2R}=8$，取等条件是$\dfrac{8}{R}=2R$，即$R=2$，

所以L的最小值为8，此时$\alpha=\dfrac{8}{R^2}=\dfrac{8}{2^2}=2$.

（2）若$L=10$，则$\alpha R+2R=10$，所以$R=\dfrac{10}{\alpha+2}$，

故$S=\dfrac{1}{2}\alpha R^2=\dfrac{1}{2}\alpha\left(\dfrac{10}{\alpha+2}\right)^2=\dfrac{50\alpha}{\alpha^2+4\alpha+4}=\dfrac{50}{\alpha+\dfrac{4}{\alpha}+4}$，

因为$\alpha+\dfrac{4}{\alpha}\geq 2\sqrt{\alpha\cdot\dfrac{4}{\alpha}}=4$，所以$S\leq\dfrac{50}{4+4}=\dfrac{25}{4}$，

取等条件是$\alpha=\dfrac{4}{\alpha}$，即$\alpha=2$，故$S_{\max}=\dfrac{25}{4}$.