强化训练

A 组 夯实基础

1．（2024·北京模拟）

$\sin\frac{11\pi}{3}$的值为（　　）

A．$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　　　B．$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

C．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

1．A

解析：$\sin\frac{11\pi}{3}=\sin\left(4\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$．

2．（2024·江苏模拟）

$\tan\frac{4\pi}{3}$的值为（　　）

A．1　　　　B．-1

C．$\sqrt{3}$　　　　D．$-\sqrt{3}$

2．C

解析：$\tan\frac{4\pi}{3}=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$．

3．（2024·黑龙江二模）

已知角α的终边与单位圆的交点$P\left(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$，则

$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=$（　　）

A．$-\frac{4}{5}$　　　　B．$-\frac{3}{5}$

C．$\frac{3}{5}$　　　　D．$\frac{4}{5}$

3．B

解析：由题意，$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\alpha=-\frac{3}{5}$．

4．（2024·陕西渭南模拟）

$\sin\left(-\frac{14\pi}{3}\right)+\cos\left(-\frac{20\pi}{3}\right)+\tan\left(-\frac{11\pi}{6}\right)=$______．

4．$-\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{1}{2}$

解析：$\sin\left(-\frac{14\pi}{3}\right)+\cos\left(-\frac{20\pi}{3}\right)+\tan\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$

$=\sin\left(-4\pi-\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(-6\pi-\frac{2\pi}{3}\right)+\tan\left(-2\pi+\frac{\pi}{6}\right)$

$=\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+\tan\frac{\pi}{6}$

$=-\sin\frac{2\pi}{3}+\cos\frac{2\pi}{3}+\tan\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{1}{2}$.

B组 强化能力

5.（2024•江西九江模拟）

若 $\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=-\frac{\sqrt{6}}{3}$，则 $\cos\left(\frac{10\pi}{3}+\alpha\right)=$（　　）

A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $-\frac{\sqrt{6}}{3}$

5. A

解析：给值求值问题，可考虑寻找求值角与已知角的关系，为了便于观察，我们将已知角换元，

令 $t=\frac{\pi}{6}-\alpha$，则 $\alpha=\frac{\pi}{6}-t$，且 $\sin t=-\frac{\sqrt{6}}{3}$，

所以 $\cos\left(\frac{10\pi}{3}+\alpha\right)=\cos\left[\frac{10\pi}{3}+\left(\frac{\pi}{6}-t\right)\right]$

$=\cos\left(\frac{7\pi}{2}-t\right)=-\sin t=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

6.（2024•江西景德镇模拟）

$\sin\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)=\frac{1}{4}$，$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{3}$，$\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)$ 等于（　　）

A. $-\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{4}$

C. $-\frac{\sqrt{15}}{4}$　　D. $\frac{\sqrt{15}}{4}$

6. D

解析：令 $t=\frac{\pi}{6}+\theta$，则 $\theta=t-\frac{\pi}{6}$，且 $\sin t=\frac{1}{4}$，

$\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)=\sin\left[\frac{2\pi}{3}+\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\right]=\sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=\cos t$ ①，

因为 $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{3}$，所以 $-\frac{\pi}{3}<t=\frac{\pi}{6}+\theta<\frac{\pi}{2}$，

从而 $\cos t>0$，故 $\cos t=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$，

代入①得 $\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)=\frac{\sqrt{15}}{4}$.

7.（2024·辽宁三模）

已知 $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$，则 $\dfrac{\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)-\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(-\alpha)-\sin(\pi-\alpha)}=$

（　　）

A．-1　　　　B．1

C．-3　　　　D．3

7．D

解析：由题意，$\dfrac{\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)-\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(-\alpha)-\sin(\pi-\alpha)}=\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$

$=\dfrac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=\dfrac{1+\dfrac{1}{2}}{1-\dfrac{1}{2}}=3$.

8.（2024·广西桂林模拟）

在平面直角坐标系中，角 α 的终边经过点 $(-3,-4)$.

（1）求 $\sin\alpha$， $\cos\alpha$ 的值；

（2）求 $\dfrac{\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)\cos\left(\dfrac{9\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(-\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin(2\pi-\alpha)\sin(\pi+\alpha)}$ 的值.

8．**解**：（1）因为角 α 的终边经过点 $(-3,-4)$，所以该点到原点

的距离 $r=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}=5$，

故 $\sin\alpha=\dfrac{y}{r}=\dfrac{-4}{5}=-\dfrac{4}{5}$， $\cos\alpha=\dfrac{x}{r}=\dfrac{-3}{5}=-\dfrac{3}{5}$.

（2）$\dfrac{\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)\cos\left(\dfrac{9\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(-\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin(2\pi-\alpha)\sin(\pi+\alpha)}=$

$\dfrac{\cos\alpha\sin\alpha(-\sin\alpha)}{-\sin\alpha(-\sin\alpha)}=-\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$.

C 组　拓展提升

9.（2024·辽宁模拟）

角 α 终边上一点为 $P(2\sin5,-2\cos5)$， $\alpha\in(0,2\pi)$，则 $\alpha=$（　　）

A．$\dfrac{3\pi}{2}-5$　　　　B．$5-\dfrac{\pi}{2}$

C．5　　　　D．$5+\dfrac{\pi}{2}$

9．B

解析：给出 α 终边上一点，想到三角函数定义，考虑将 P 的坐标化为 $(\cos\theta,\sin\theta)$ 的结构，可先除以 2，把系数化 1，得到 α 的终边与单位圆的交点，

$P(2\sin5,-2\cos5)$ 在 α 的终边上 $\Rightarrow P'(\sin5,-\cos5)$ 是 α 的终边与单位圆的交点，

还不是 $(\cos\theta,\sin\theta)$ 的结构，考虑用诱导公式 $\sin\alpha=$

$\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)$ 和 $-\cos\alpha=\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)$ 化为该结构，

因为 $\sin 5=\cos\left(5-\dfrac{\pi}{2}\right)$，$-\cos 5=\sin\left(5-\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以 P' 的坐标为 $\left(\cos\left(5-\dfrac{\pi}{2}\right),\sin\left(5-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$，

从而 α 的终边与 $5-\dfrac{\pi}{2}$ 相同，故 $\alpha=5-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

又 $\alpha\in(0,2\pi)$，所以 k 只能取 0，故 $\alpha=5-\dfrac{\pi}{2}$.

10．（2024 • 北京东城一模）

已知角 α，β 的终边关于直线 $y=x$ 对称，且 $\sin(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{2}$，则 α，β 的一组取值可以是 $\alpha=$______，$\beta=$______.

10．$\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{\pi}{6}$（答案不唯一，符合题意即可）

解析： α 和 β 的终边关于直线 $y=x$ 对称怎样翻译？我们不妨画出图形来分析，

如图，α 和 β 的终边关于直线 $y=x$ 对称，则存在角 γ，使得将角 $\dfrac{\pi}{4}$ 分别按逆时针、顺时针的方向旋转 γ 后，终边分别与 α 和 β 重合，即 $\begin{cases}\dfrac{\pi}{4}+\gamma=2k_1\pi+\alpha & ①\\ \dfrac{\pi}{4}-\gamma=2k_2\pi+\beta & ②\end{cases}$，其中 $k_1,k_2\in\mathbf{Z}$，

要求的是 α 和 β，故考虑消去引入的参数 γ，

由① + ②可得 $\dfrac{\pi}{2}=2(k_1+k_2)\pi+\alpha+\beta$，记 $k_1+k_2=k$，

则 $k\in\mathbf{Z}$，且 $\dfrac{\pi}{2}=2k\pi+\alpha+\beta$，所以 $\beta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha-2k\pi$，

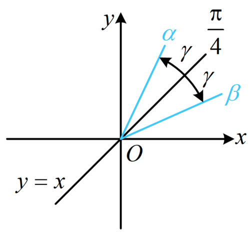
故 $\sin(\alpha-\beta)=\sin\left[\alpha-\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha-2k\pi\right)\right]$

$=\sin\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)=-\cos 2\alpha$，

又 $\sin(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{2}$，所以 $-\cos 2\alpha=\dfrac{1}{2}$，故 $\cos 2\alpha=-\dfrac{1}{2}$，

可取 $2\alpha=\dfrac{2\pi}{3}$，则 $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$，相应的 $\beta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha-2k\pi$

$=\dfrac{\pi}{6}-2k\pi$，不妨取 $k=0$，则 $\beta=\dfrac{\pi}{6}$.



【反思】若 α 和 β 的终边关于直线 $y=x$ 对称，则 $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}-2k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

11．（2024 • 湖北黄冈模拟）

化简：$\dfrac{\sqrt{1+2\sin 280^\circ\cos 440^\circ}}{\sin 260^\circ+\cos 800^\circ}=$（　　）

A．1　　　　B．0

C．-1　　　　D．2

11．C

解析：涉及的角数值都比较大，各部分的联系不明显，考虑先用诱导公式把它们全部化到 $0^\circ \sim 90^\circ$ 再观察形式，

原式 $=\dfrac{\sqrt{1+2\sin(360^\circ-80^\circ)\cos(360^\circ+80^\circ)}}{\sin(180^\circ+80^\circ)+\cos(720^\circ+80^\circ)}$

$=\dfrac{\sqrt{1-2\sin 80^\circ\cos 80^\circ}}{-\sin 80^\circ+\cos 80^\circ}=\dfrac{\sqrt{1-2\sin 80^\circ\cos 80^\circ}}{\cos 80^\circ-\sin 80^\circ}$，

此时可发现，只要将分子的 1 换成 $\cos^2 80^\circ+\sin^2 80^\circ$，就能凑成和分母相关的完全平方形式，

所以原式 $=\dfrac{\sqrt{\cos^2 80^\circ+\sin^2 80^\circ-2\sin 80^\circ\cos 80^\circ}}{\cos 80^\circ-\sin 80^\circ}$

$=\dfrac{\sqrt{(\cos 80^\circ-\sin 80^\circ)^2}}{\cos 80^\circ-\sin 80^\circ}=\dfrac{|\cos 80^\circ-\sin 80^\circ|}{\cos 80^\circ-\sin 80^\circ}$，

因为 $\cos 80^\circ<\sin 80^\circ$，所以 $\cos 80^\circ-\sin 80^\circ<0$，

故原式 $=\dfrac{\sin 80^\circ-\cos 80^\circ}{\cos 80^\circ-\sin 80^\circ}=-1$.

12．（2024 • 山东济南二模）

质点 P 和 Q 在以坐标原点 O 为圆心，半径为 1 的圆 O 上逆时针作匀速圆周运动，同时出发. 点 P 的角速度为 2rad/s，起点为圆 O 与 x 轴正半轴的交点；点 Q 的角速度为 5rad/s，起点为圆 O 与射线 $y=-\sqrt{3}x(x\geq 0)$ 的交点，则当 Q 与 P 第 2024 次重合时，P 的坐标为（　　）

A. $\left(\cos\dfrac{2\pi}{9},\sin\dfrac{2\pi}{9}\right)$

B. $\left(-\cos\dfrac{5\pi}{9},-\sin\dfrac{5\pi}{9}\right)$

C. $\left(\cos\dfrac{\pi}{9},-\sin\dfrac{\pi}{9}\right)$

D. $\left(-\cos\dfrac{\pi}{9},\sin\dfrac{\pi}{9}\right)$

12．B

解析：只要找到 P，Q 第 2024 次重合的时刻 t，就能求出以 OP 为终边的角，用三角函数定义写出 P 的坐标，怎么找？若无思路，不妨先画图分析第 1 次，第 2 次重合的情况，再总结规律，

当 P，Q 第 1 次重合时，如图 1，此时 Q 转过的角度比 P 转过的角度多 $\dfrac{\pi}{3}$，

当 P，Q 第 2 次重合时，如图 2，此时 Q 又比 P 多转一圈，所以 Q 转过的角度比 P 转过的角度总共多 $2\pi+\dfrac{\pi}{3}$，

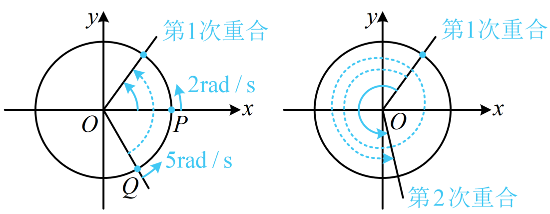


图1　　　　图2

可以想象，从第 n 次重合开始，到第 $n+1$ 次重合时，Q 总是又比 P 多转一圈，规律就出来了，

以此类推，P，Q 第 2024 次重合时，Q 转过的角度比 P 转过的角度总共多 $2023\times 2\pi+\dfrac{\pi}{3}$，

设此时为时刻 t，则 Q 转过的角度与 P 转过的角度之差 $5t-2t=2023\times 2\pi+\dfrac{\pi}{3}$，解得：$t=\dfrac{4046\pi}{3}+\dfrac{\pi}{9}$，

所以当 P，Q 第 2024 次重合时，以 OP 为终边的角 $\alpha=2t=\frac{8092\pi}{3}+\frac{2\pi}{9}=2697\pi+\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{9}=2697\pi+\frac{5\pi}{9}$，

故 $\cos\alpha=\cos\left(2697\pi+\frac{5\pi}{9}\right)=-\cos\frac{5\pi}{9}$，

$\sin\alpha=\sin\left(2697\pi+\frac{5\pi}{9}\right)=-\sin\frac{5\pi}{9}$，

由三角函数定义，点 P 的坐标为 $\left(-\cos\frac{5\pi}{9},-\sin\frac{5\pi}{9}\right)$.

13．（2024 • 陕西西安模拟）

已知 $\alpha,\beta,\gamma\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，且 $\alpha+\beta+\gamma=\frac{9\pi}{14}$，$\sin\alpha=$

$\cos\beta=\tan\gamma$，则（　　）

A．$\alpha<\beta<\gamma$　　　B．$\beta<\gamma<\alpha$

C．$\gamma<\beta<\alpha$　　　D．$\gamma<\alpha<\beta$

13．D

解析：怎样处理 $\sin\alpha=\cos\beta=\tan\gamma$？函数名不统一（有正弦、余弦，还有正切），考虑先统一函数名，统一为谁呢？$\sin\alpha$ 和 $\cos\beta$ 容易通过诱导公式互化，那 $\tan\gamma$ 呢？可将其化为 $\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}$，把分母放缩掉，可化为正弦，故考虑统一为正弦，

由题意，$\alpha,\beta,\gamma\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\sin\gamma,\cos\gamma\in(0,1)$，

又 $\sin\alpha=\cos\beta=\tan\gamma$，所以 $\sin\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}$

$>\sin\gamma$，结合 $\alpha,\frac{\pi}{2}-\beta,\gamma\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 可得 $\alpha=\frac{\pi}{2}-\beta>\gamma$，

由 $\alpha=\frac{\pi}{2}-\beta$ 可得 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$，

又 $\alpha+\beta+\gamma=\frac{9\pi}{14}$，所以 $\gamma=\frac{9\pi}{14}-(\alpha+\beta)=\frac{\pi}{7}$，

显然 α 和 β 无法求出，怎么办呢？那就估计它们的大小，由 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ 想到比较 α，β 与 $\frac{\pi}{4}$ 的大小．已有 γ，则 $\tan\gamma$ 是已知的，故考虑结合 $\sin\alpha=\tan\gamma$ 来分析，

$\sin\alpha=\tan\gamma=\tan\frac{\pi}{7}<\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}<\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\frac{\pi}{4}$，

所以 $\alpha<\frac{\pi}{4}$，从而 $\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha>\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$，故 $\alpha<\beta$，

结合前面的 $\alpha>\gamma$ 可得 $\gamma<\alpha<\beta$.

14.（2024•辽宁大连模拟）

在单位圆中，锐角 α 的终边与单位圆相交于点 $P\left(m,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，连接圆心 O 和 P 得到射线 OP，将射线 OP 绕点 O 按逆时针方向旋转 θ 后与单位圆相交于点 B，其中 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

（1）求 $\dfrac{4\sin^3\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)+2\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)-4\cos(\alpha+\pi)}{2+2\cos^2(5\pi+\alpha)+\cos(-\alpha)}$ 的值；

（2）记点 B 的横坐标为 $f(\theta)$，若 $f\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{4}$，求 $\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\theta-\frac{5\pi}{6}\right)$ 的值.

14. **解**：（1）因为 α 的终边与单位圆交于点 $P\left(m,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

所以 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$，又因为 α 为锐角，所以 $\alpha=\frac{\pi}{3}$，

故 $\dfrac{4\sin^3\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)+2\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)-4\cos(\alpha+\pi)}{2+2\cos^2(5\pi+\alpha)+\cos(-\alpha)}$

$=\dfrac{4\cos^3\alpha+2(-\cos\alpha)^2-4(-\cos\alpha)}{2+2(-\cos\alpha)^2+\cos\alpha}$

$=\dfrac{4\cos^3\alpha+2\cos^2\alpha+4\cos\alpha}{2+2\cos^2\alpha+\cos\alpha}=\dfrac{2\cos\alpha(2\cos^2\alpha+\cos\alpha+2)}{2+2\cos^2\alpha+\cos\alpha}$

$=2\cos\alpha=2\cos\frac{\pi}{3}=2\times\frac{1}{2}=1$.

（2）（由点 B 的横坐标联想到以 OB 为终边的角的余弦，故先把以 OB 为终边的角写出来）

如图，将 α 的终边 OP 绕点 O 逆时针旋转 θ 后，得到的角是 $\alpha+\theta$，即 $\frac{\pi}{3}+\theta$，故以 OB 为终边的角是 $\frac{\pi}{3}+\theta$，

由三角函数定义，点 B 的横坐标 $f(\theta)=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)$，

所以 $f\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left[\frac{\pi}{3}+\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)\right]=\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$，

又由题意，$f\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{4}$，所以 $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{4}$，

（怎样由此求目标式？给值求值问题，可考虑寻求角的联系，为了便于观察，将已知的角换元）

令 $t=\theta+\frac{\pi}{6}$，则 $\theta=t-\frac{\pi}{6}$，且 $\cos t=\frac{1}{4}$，

$\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\theta-\frac{5\pi}{6}\right)=\cos\left(\left(t-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{3}\right)+$

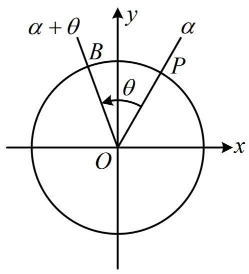
$\cos\left[\left(t-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{5\pi}{6}\right]=\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)+\cos(t-\pi)=\sin t-\cos t$ ①，

（已知 $\cos t$，还差 $\sin t$，可由 $\sin t=\pm\sqrt{1-\cos^2 t}$ 来求，取正还是取负由 t 的象限决定，故先分析 t 的范围）

因为 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $t=\theta+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right)$，

从而 $\sin t>0$，故 $\sin t=\sqrt{1-\cos^2 t}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$，

代入①得 $\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\theta-\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{15}}{4}-\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{15}-1}{4}$.


α + θ
y
α
B
P
θ
O
x