强化训练

本节综合性较强，难度较高，所以配套的练习题只设计了 B 组和 C 组，没有设计 A 组.

B 组 强化能力

1.（2024·重庆三模）

已知 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$，且 $2\sin 2\alpha=4\cos\alpha-3\cos^3\alpha$，则 $\cos 2\alpha=$（　　）

A. $\frac{2}{9}$　　B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{7}{9}$　　D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

1. C

解析：所给等式怎样变形？涉及的角有 2α 和 α，且观察发现不方便统一成 2α，故考虑用二倍角公式把角统一成 α，

由题意，$4\sin\alpha\cos\alpha=4\cos\alpha-3\cos^3\alpha$ ①，

又 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$，所以 $\cos\alpha>0$，

故式①可化为 $4\sin\alpha=4-3\cos^2\alpha$，

此时又可发现若将 $\cos^2\alpha$ 换成 $1-\sin^2\alpha$，能将函数名统一成正弦，求出 $\sin\alpha$，那么 $\cos 2\alpha$ 也就有了，

所以 $4\sin\alpha=4-3(1-\sin^2\alpha)$，故 $3\sin^2\alpha-4\sin\alpha+1=0$，

解得：$\sin\alpha=\frac{1}{3}$ 或 1，又 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$，所以 $\sin\alpha=\frac{1}{3}$，

故 $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{7}{9}$.

一数 • 高中数学一本通

2.（2024·山西大同期末）

已知 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，且满足 $\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}=\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$，则 $\tan\alpha=$（　　）

A. $\sqrt{3}$　　B. $\pm\sqrt{3}$

C. $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

2. D

解析：所给等式涉及 α 和 2α，考虑将它们统一，注意到分母有 $1+\cos 2\alpha$，这是升次标志，可将其化为 $2\cos^2\alpha$，为了统一角度，分子的 $\sin 2\alpha$ 也用二倍角公式，

$\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$，

代入题干等式得 $\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$，

所以 $\cos^2\alpha=\sin\alpha+\sin^2\alpha$，观察发现将左边的 $\cos^2\alpha$ 换成 $1-\sin^2\alpha$，可统一函数名，求出 $\sin\alpha$，故按此操作，

所以 $1-\sin^2\alpha=\sin\alpha+\sin^2\alpha$，故 $2\sin^2\alpha+\sin\alpha-1=0$，

解得：$\sin\alpha=\frac{1}{2}$ 或 -1，又 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$，

从而 $\alpha=\frac{\pi}{6}$，故 $\tan\alpha=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

3.（2024·江西宜春三模）

已知$0<\theta<\frac{\pi}{4}$，且$\tan 2\theta\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=4$，则

$\frac{\cos 2\theta}{1-\sin 2\theta}=$______.

3．3

解析：已知和所求一起，涉及的角度有θ和2θ，显然不方便统一成2θ，故考虑统一成θ，

由题意，$\tan 2\theta\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\cdot\frac{\tan\theta+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\theta\tan\frac{\pi}{4}}$

$=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\cdot\frac{\tan\theta+1}{1-\tan\theta}=\frac{2\tan\theta}{(1+\tan\theta)(1-\tan\theta)}\cdot\frac{\tan\theta+1}{1-\tan\theta}$

$=\frac{2\tan\theta}{(1-\tan\theta)^2}=4$，解得：$\tan\theta=\frac{1}{2}$或2，

又因为$0<\theta<\frac{\pi}{4}$，所以$0<\tan\theta<1$，故$\tan\theta=\frac{1}{2}$，

所以$\frac{\cos 2\theta}{1-\sin 2\theta}=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta}$

$=\frac{(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)}{(\cos\theta-\sin\theta)^2}=\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$

$=\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}=\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=3$.

一数·高中数学一本通

4.（2024·辽宁大连一模）

若$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，且$5\cos 2\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$，则$\tan\alpha=$（　　）

A．$-\frac{4}{3}$　　　　B．$-\frac{3}{4}$

C．$-\frac{1}{3}$　　　　D．1

4．A

解析：所给等式怎样化简？若无思路，可尝试把右边展开，同时为了统一角度，左边也用二倍角公式，

由题意，$5\cos 2\alpha=\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha-\cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha\right)$

$=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right)=\cos\alpha-\sin\alpha$，

注意到右边有$\cos\alpha-\sin\alpha$，故对左边用二倍角公式时选择$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$，可构造公共项$\cos\alpha-\sin\alpha$，

所以$5(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)=\cos\alpha-\sin\alpha$　①，

因为$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，所以$\cos\alpha<0$，$\sin\alpha>0$，

从而$\cos\alpha-\sin\alpha<0$，故式①可化为$5(\cos\alpha+\sin\alpha)=1$，

结合$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$解得：$\cos\alpha=\frac{4}{5}$，$\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，

或$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，$\sin\alpha=\frac{4}{5}$，又$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，

所以 $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$， $\sin\alpha=\frac{4}{5}$， 故 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{4}{3}$.

5.（2024·黑龙江哈尔滨开学考试）

$4\sin 80^\circ-\frac{\cos 10^\circ}{\sin 10^\circ}=$______.

5. $-\sqrt{3}$

解析： 80° 和 10° 有什么联系？ $80^\circ=90^\circ-10^\circ$， 可由此将角统一成 10°，

原式 $=4\sin(90^\circ-10^\circ)-\frac{\cos 10^\circ}{\sin 10^\circ}=4\cos 10^\circ-\frac{\cos 10^\circ}{\sin 10^\circ}$

$=\frac{4\sin 10^\circ\cos 10^\circ-\cos 10^\circ}{\sin 10^\circ}=\frac{2\sin 20^\circ-\cos 10^\circ}{\sin 10^\circ}$，

到此又有 20° 和 10° 两个角，它们除了二倍之外，还有什么关系？注意到 $20^\circ=30^\circ-10^\circ$， 故可由此将角统一成 10°，

原式 $=\frac{2\sin(30^\circ-10^\circ)-\cos 10^\circ}{\sin 10^\circ}$

$=\frac{2(\sin 30^\circ\cos 10^\circ-\cos 30^\circ\sin 10^\circ)-\cos 10^\circ}{\sin 10^\circ}$

$=\frac{\cos 10^\circ-\sqrt{3}\sin 10^\circ-\cos 10^\circ}{\sin 10^\circ}=\frac{-\sqrt{3}\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ}=-\sqrt{3}$.

6.（2024·广东二模）

$\tan 7.5^\circ-\tan 82.5^\circ+2\tan 15^\circ=$（　　）

A. -2　　　　B. -4

C. $-2\sqrt{3}$　　　　D. $-4\sqrt{3}$

一数·高中数学一本通

6. D

解析： 涉及 7.5°， 82.5°， 15° 三个角度，注意到 $82.5^\circ=90^\circ-7.5^\circ$， 故可先按此把 7.5° 和 82.5° 统一起来，

原式 $=\tan 7.5^\circ-\tan(90^\circ-7.5^\circ)+2\tan 15^\circ$

$=\tan 7.5^\circ-\frac{\sin(90^\circ-7.5^\circ)}{\cos(90^\circ-7.5^\circ)}+2\tan 15^\circ$

$=\tan 7.5^\circ-\frac{\cos 7.5^\circ}{\sin 7.5^\circ}+2\tan 15^\circ$，

若将 $\frac{\cos 7.5^\circ}{\sin 7.5^\circ}$ 化为 $\frac{1}{\tan 7.5^\circ}$， 则接下来按切化简不易，故考虑切化弦分析，

原式 $=\frac{\sin 7.5^\circ}{\cos 7.5^\circ}-\frac{\cos 7.5^\circ}{\sin 7.5^\circ}+\frac{2\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}$

$=\frac{\sin^2 7.5^\circ-\cos^2 7.5^\circ}{\sin 7.5^\circ\cos 7.5^\circ}+\frac{2\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}=\frac{-\cos 15^\circ}{\frac{1}{2}\sin 15^\circ}+\frac{2\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}$

$=-\frac{2\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ}+\frac{2\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}=-\frac{2(\cos^2 15^\circ-\sin^2 15^\circ)}{\sin 15^\circ\cos 15^\circ}$

$=-\frac{2\cos 30^\circ}{\frac{1}{2}\sin 30^\circ}=-\frac{4}{\tan 30^\circ}=-4\sqrt{3}$.

7.（2024 • 福建三明模拟）

（1）求证：$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$；

（2）当 $x\in[0,\pi]$ 时，求函数 $f(x)=\cos 3x-4\cos 2x+2\cos x-2$ 的所有零点.

7. **解：**（1）（右边的角是 α，考虑先把左边的 3α 按 $2\alpha+\alpha$ 拆分，再展开，逐步统一成目标角 α）

$\cos 3\alpha=\cos(2\alpha+\alpha)=\cos 2\alpha\cos\alpha-\sin 2\alpha\sin\alpha$，

（注意到目标式右侧函数名是 $\cos\alpha$，所以把上式尽可能朝这上面化）

所以 $\cos 3\alpha=(2\cos^2\alpha-1)\cos\alpha-2\sin^2\alpha\cos\alpha$

$=2\cos^3\alpha-\cos\alpha-2(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha$

$=2\cos^3\alpha-\cos\alpha-2\cos\alpha+2\cos^3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$.

（2）（解析式中有 $\cos 3x$，$\cos 2x$，$\cos x$，不易分析零点，注意到 $\cos 3x$ 和 $\cos 2x$ 可分别由（1）问的结论和二倍角公式统一成 $\cos x$，这样分析零点就方便了）

结合（1）的结论可得 $f(x)=(4\cos^3x-3\cos x)-4(2\cos^2x-1)+2\cos x-2=4\cos^3x-8\cos^2x-\cos x+2$

$=4\cos^2x(\cos x-2)-(\cos x-2)=(\cos x-2)(4\cos^2x-1)$，

因为 $\cos x-2\neq 0$，所以 $f(x)=0\Leftrightarrow 4\cos^2x-1=0$，

故 $\cos x=\pm\frac{1}{2}$，结合 $x\in[0,\pi]$ 可得 $x=\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$，

所以当 $x\in[0,\pi]$ 时，$f(x)$ 的所有零点为 $\frac{\pi}{3}$，$\frac{2\pi}{3}$.

【反思】本题第 1 问的结论是余弦的三倍角公式，另外还有 $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$，感兴趣的小伙伴可以记住它们.

C 组 拓展提升

8.（2024 • 全国模拟）

$\sin(\theta+75^\circ)+\cos(\theta+45^\circ)-\sqrt{3}\cos(\theta+15^\circ)=$______.

8. 0

解析：涉及 $\theta+75^\circ$，$\theta+45^\circ$，$\theta+15^\circ$ 三个角，若全部展开，显然较麻烦，可考虑统一成其中一个角，再展开，统一成谁都行，不妨选 $\theta+15^\circ$，

设 $\alpha=\theta+15^\circ$，则 $\theta=\alpha-15^\circ$，

所以原式 $=\sin(\alpha-15^\circ+75^\circ)+\cos(\alpha-15^\circ+45^\circ)-\sqrt{3}\cos\alpha$

$=\sin(\alpha+60^\circ)+\cos(\alpha+30^\circ)-\sqrt{3}\cos\alpha=\sin\alpha\cos 60^\circ+\cos\alpha\sin 60^\circ+\cos\alpha\cos 30^\circ-\sin\alpha\sin 30^\circ-\sqrt{3}\cos\alpha$

$=\frac{1}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha=0$.

9.（2024 • 河南新乡二模）

若 $\sin(130^\circ+\alpha)=2\cos 20^\circ\cos\alpha$，则 $\tan(\alpha+45^\circ)=$（　　）

A．$-2+\sqrt{3}$　　B．$2-\sqrt{3}$

C．$2+\sqrt{3}$　　D．$-2-\sqrt{3}$

9．A

解析：求 $\tan(\alpha+45^\circ)$ 需要 $\tan\alpha$，而 $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$，故考虑将 $\sin(130^\circ+\alpha)$ 展开，构造出 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$，再观察形式，

由题意，$\sin 130^\circ\cos\alpha+\cos 130^\circ\sin\alpha=2\cos 20^\circ\cos\alpha$，

所以 $\cos 130^\circ\sin\alpha=(2\cos 20^\circ-\sin 130^\circ)\cos\alpha$，

故 $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{2\cos 20^\circ-\sin 130^\circ}{\cos 130^\circ}$，

上式涉及 20° 和 130° 两个非特殊角，它们有什么关系？我们发现 $20^\circ=150^\circ-130^\circ$，故可按此将角统一成 130°，

$\tan\alpha=\dfrac{2\cos(150^\circ-130^\circ)-\sin 130^\circ}{\cos 130^\circ}$

$=\dfrac{2(\cos 150^\circ\cos 130^\circ+\sin 150^\circ\sin 130^\circ)-\sin 130^\circ}{\cos 130^\circ}$

$=\dfrac{-\sqrt{3}\cos 130^\circ+\sin 130^\circ-\sin 130^\circ}{\cos 130^\circ}=\dfrac{-\sqrt{3}\cos 130^\circ}{\cos 130^\circ}=-\sqrt{3}$，

所以 $\tan(\alpha+45^\circ)=\dfrac{\tan\alpha+\tan 45^\circ}{1-\tan\alpha\tan 45^\circ}=\dfrac{-\sqrt{3}+1}{1-(-\sqrt{3})\times 1}$

$=\dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=\dfrac{(1-\sqrt{3})^2}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}=\dfrac{4-2\sqrt{3}}{-2}=-2+\sqrt{3}$.

10．（2024·黑龙江双鸭山模拟）

已知 $\alpha,\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\dfrac{1}{7}$，且 $3\sin\beta$

$=\sin(2\alpha+\beta)$，则 $\alpha+\beta$ 的值为（　　）

A．$\dfrac{\pi}{12}$　　B．$\dfrac{\pi}{6}$

C．$\dfrac{\pi}{4}$　　D．$\dfrac{\pi}{3}$

一数·高中数学一本通

10．D

解法 1：观察已知条件可发现 α 不是特殊角，故无法单独计算 α 和 β，再求 $\alpha+\beta$，考虑整体处理. 由 $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\dfrac{1}{7}$ 能确定 α，所以 α 可看成已知角，于是把另一条件也往已知的 α 和所求的 $\alpha+\beta$ 上凑，有 $\beta=(\alpha+\beta)-\alpha$，$2\alpha+\beta=(\alpha+\beta)+\alpha$，思路就有了，

$3\sin\beta=\sin(2\alpha+\beta)\Rightarrow 3\sin[(\alpha+\beta)-\alpha]=\sin[(\alpha+\beta)+\alpha]$,

所以 $3\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-3\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha=$

$\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$，

所以 $\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha=2\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$，

故 $\tan(\alpha+\beta)=2\tan\alpha$　①，

怎样由 $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\dfrac{1}{7}$ 求 $\tan\alpha$？可与 $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ 联立，先求 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$，由题意，$\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\dfrac{1}{7}$，

结合 $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ 以及 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ 可求得

$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$，$\cos\alpha=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$，所以 $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

代入①得 $\tan(\alpha+\beta)=\sqrt{3}$，又 $\alpha,\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$，

所以 $\alpha+\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，结合 $\tan(\alpha+\beta)=\sqrt{3}$ 得 $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{3}$.

解法 2：得到式①的过程同解法 1，由 $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{1}{7}$ 求 $\tan\alpha$，也可直接凑齐次式，快速得到答案，

由题意，$\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{1}{7}=\frac{1}{7}(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)$，

化简得：$3\cos^2\alpha=4\sin^2\alpha$，所以 $\tan^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{3}{4}$，

结合 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 得 $\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$，接下来同解法 1.

11．（2024·江西二模）

已知 $\cos(140^\circ-\alpha)=\cos(200^\circ+\alpha)+\sin(130^\circ-\alpha)$，则 $\tan\alpha=$（　　）

A．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　　　B．$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

C．$\sqrt{3}$　　　　D．$-\sqrt{3}$

11．D

解析：式子中涉及 140°，200°，130°，彼此关系不明，可考虑先用诱导公式，把这部分全部化到锐角范围再观察，

$\cos(140^\circ-\alpha)=\cos[180^\circ-(40^\circ+\alpha)]=-\cos(40^\circ+\alpha)$，

$\cos(200^\circ+\alpha)=\cos[180^\circ+(20^\circ+\alpha)]=-\cos(20^\circ+\alpha)$，

$\sin(130^\circ-\alpha)=\sin[90^\circ+(40^\circ-\alpha)]=\cos(40^\circ-\alpha)$，

代入题干所给的等式可得

$-\cos(40^\circ+\alpha)=-\cos(20^\circ+\alpha)+\cos(40^\circ-\alpha)$，

所以 $-\cos40^\circ\cos\alpha+\sin40^\circ\sin\alpha=-\cos20^\circ\cos\alpha+$

$\sin20^\circ\sin\alpha+\cos40^\circ\cos\alpha+\sin40^\circ\sin\alpha$，

化简得：$(2\cos40^\circ-\cos20^\circ)\cos\alpha+\sin20^\circ\sin\alpha=0$，

所以 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos20^\circ-2\cos40^\circ}{\sin20^\circ}$，

涉及 20° 和 40° 两个角，可以想象，若对 $\cos40^\circ$ 用二倍角公式，则下一步化简不易，怎么办呢？其实 40° 与 20° 还可按 $40^\circ=60^\circ-20^\circ$ 来建立联系，把角度统一为 20°，

所以 $\tan\alpha=\frac{\cos20^\circ-2\cos(60^\circ-20^\circ)}{\sin20^\circ}$

$=\frac{\cos20^\circ-2(\cos60^\circ\cos20^\circ+\sin60^\circ\sin20^\circ)}{\sin20^\circ}$

$=\frac{\cos20^\circ-2\left(\frac{1}{2}\cos20^\circ+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin20^\circ\right)}{\sin20^\circ}=\frac{-\sqrt{3}\sin20^\circ}{\sin20^\circ}=-\sqrt{3}$.

一数·高中数学一本通