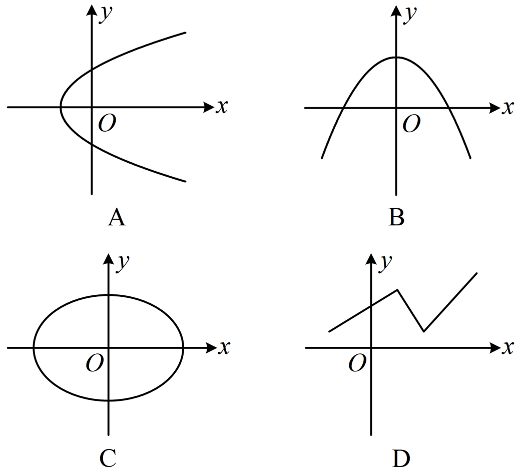
强化训练

A 组 夯实基础

1．（2024·陕西安康期末）（多选）

下列各图中能作为函数 $y=f(x)$ 图象的是（　　）

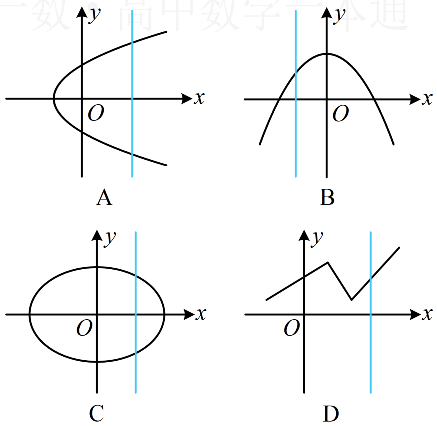


1．BD

解析：在函数的概念下，1 个 x 只能对应 1 个 y，所以某图形可以作为函数图象的标准是任意竖直线与该图象最多只有 1 个交点，故按此观察即可，

如图，对于选项 A、C，存在竖直线与它们的图象有 2 个交点，它们不是函数 $y=f(x)$ 的图象，

对于选项 B、D，任意竖直线与它们的图象都最多只有 1 个交点，它们是函数 $y=f(x)$ 的图象，故选 BD.



2．（2023·黑龙江期中）

已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$，则 $f(3)+f\left(\dfrac{1}{3}\right)=$______.

2．1

解析：由题意，$f(3)=\dfrac{3^2}{1+3^2}=\dfrac{9}{10}$，$f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}{1+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{1}{10}$，

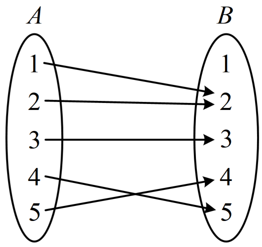
所以 $f(3)+f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{9}{10}+\dfrac{1}{10}=1$.

3.（2024·河南阶段练习）

如图，$f:A\to B$ 表示从集合 A 到集合 B 的函数，若 $f(a)=2$，则 a 的值为（　　）

A．1　　　B．2

C．1 或 2　　　D．3



3．C

解析：由所给图形可知集合 A 中的 1 和 2 都对应了集合 B 中的 2，所以当 $f(a)=2$ 时，$a=1$ 或 2.

4.（2024·西藏拉萨期末）

函数 $y=\sqrt{4+3x-x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ 的定义域是_____.

4．$(1,4]$

解析：由 $\begin{cases}4+3x-x^2\ge 0\\ x-1>0\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}-1\le x\le 4\\ x>1\end{cases}$，所以 $1<x\le 4$，

故所给函数的定义域是 $(1,4]$.

5.（2024·重庆模拟）

已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,2]$，则 $f(3-2x)$ 的定义域为（　　）

A．$\left[\dfrac{1}{2},2\right]$　　　B．$[-1,2]$

C．$[-1,5]$　　　D．$\left[1,\dfrac{5}{2}\right]$

5．A

解析：因为 $f(x)$ 的定义域是 $[-1,2]$，所以 $f(\cdots)$ 括号内整体的范围是 $[-1,2]$，故在 $f(3-2x)$ 中，$-1\le 3-2x\le 2$，

解得：$\dfrac{1}{2}\le x\le 2$，所以 $f(3-2x)$ 的定义域是 $\left[\dfrac{1}{2},2\right]$.

B 组　强化能力

6.（2024·河北石家庄期末）

函数 $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{3x-2}}+(x-1)^0$ 的定义域（　　）

A．$\left(\dfrac{2}{3},+\infty\right)$　　　B．$\left[\dfrac{2}{3},1\right)\cup(1,+\infty)$

C．$\left(\dfrac{2}{3},1\right)\cup(1,+\infty)$　　　D．$\left[\dfrac{2}{3},+\infty\right)$

6．C

解析：要使 $f(x)$ 的解析式有意义，应有 $\begin{cases}3x-2\geq 0\\ \sqrt{3x-2}\neq 0\\ x-1\neq 0\end{cases}$，

解得：$x>\dfrac{2}{3}$ 且 $x\neq 1$，故 $f(x)$ 的定义域是 $\left(\dfrac{2}{3},1\right)\cup(1,+\infty)$.

7.（2024 • 天津模拟）

下列函数中，与 $y=x$ 相同的函数是（　　）

A．$y=\sqrt{x^2}$

B．$y=(\sqrt{x+1})^2-1$

C．$y=\dfrac{x^2-x}{x-1}$

D．$y=\sqrt{1+x^2}-\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$

7．D

解析：A 项，$y=\sqrt{x^2}=|x|$，与 $y=x$ 对应方法不同，它们不是相同的函数，故 A 项错误；

B 项，由 $x+1\geq 0$ 可得 $x\geq -1$，所以 $y=(\sqrt{x+1})^2-1$ 的定义域是 $[-1,+\infty)$，而 $y=x$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，二者定义域不同，它们不是相同的函数，故 B 项错误；

C 项，由 $x-1\neq 0$ 可得 $x\neq 1$，所以函数 $y=\dfrac{x^2-x}{x-1}$ 的定义域是 $\{x\,|\,x\neq 1\}$，与 $y=x$ 定义域不同，它们不是相同的函数，故 C 项错误；

D 项，这里有根号，也有分母，我们先来看看它的定义域是不是 $\mathbf{R}$，$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2+1\geq 1$，所以 $\sqrt{x^2+1}$ 始终有意义，

又 $x+\sqrt{1+x^2}>x+\sqrt{x^2}=x+|x|\geq 0$，

所以 $\forall x\in\mathbf{R}$，都有 $x+\sqrt{1+x^2}\neq 0$，

故 $y=\sqrt{1+x^2}-\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，

与 $y=x$ 的定义域相同 ①，

再看对应方法，需把解析式化简，注意到目标式 $y=x$ 没有根号，故不妨试试分母有理化，

$y=\sqrt{1+x^2}-\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$

$=\sqrt{1+x^2}-\dfrac{\sqrt{1+x^2}-x}{(x+\sqrt{1+x^2})(\sqrt{1+x^2}-x)}$

$=\sqrt{1+x^2}-(\sqrt{1+x^2}-x)=x$，

所以两个函数的对应方法也相同，结合①可知它们是相同的函数，故 D 项正确.

8.（2024 • 湖北期末）

已知函数 $f(2x-1)$ 的定义域为 $(-1,2)$，则函数

$f(1-x)$ 的定义域为（　　）

A．$\left(-\dfrac{1}{2},1\right)$　　B．$\left(-1,\dfrac{1}{2}\right)$

C．$(-2,4)$　　D．$(-2,1)$

8．C

解析：已知 $f(2x-1)$ 的定义域，可求括号内整体的范围，并运用到 $f(1-x)$ 上，求 x 的范围，

由题意，在 $f(2x-1)$ 中，$-1<x<2$，所以 $-3<2x-1<3$，

即 $f(\cdots)$ 括号内整体的范围是 $(-3,3)$，

所以在 $f(1-x)$ 中，$-3<1-x<3$，解得：$-2<x<4$，

故 $f(1-x)$ 的定义域是 $(-2,4)$.

9．（2024 • 浙江期末）

已知函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[0,4]$，则函数 $y=\dfrac{f(2x+1)}{x-1}$ 的定义域为（　　）

A．$\left[-\dfrac{1}{2},1\right)\cup\left(1,\dfrac{3}{2}\right]$　　B．$\left[-\dfrac{1}{2},1\right)$

C．$\left(1,\dfrac{3}{2}\right]$　　D．$(1,9]$

9．A

解析：因为 $y=f(x)$ 的定义域是 $[0,4]$，所以 $f(2x+1)$ 中，

应有 $0\le 2x+1\le 4$，解得：$-\dfrac{1}{2}\le x\le\dfrac{3}{2}$ ①，

又因为在 $y=\dfrac{f(2x+1)}{x-1}$ 中，$x-1\ne 0$，所以 $x\ne 1$，

结合①可得 $y=\dfrac{f(2x+1)}{x-1}$ 的定义域是 $\left[-\dfrac{1}{2},1\right)\cup\left(1,\dfrac{3}{2}\right]$.

10．（2024 • 江苏镇江模拟（改））

已知函数 $f(x)=\dfrac{8}{x-1}+\sqrt{x+3}$.

（1）求函数 $f(x)$ 的定义域；

（2）求 $f(-2)$，$f(6)$；

（3）已知 $f(2a+1)=\dfrac{4}{a}+3$，求 a 的值；

（4）求 $f(\sqrt{x}-2)$.

10．**解**：（1）由 $\begin{cases}x-1\ne 0\\x+3\ge 0\end{cases}$ 可得 $x\ge -3$ 且 $x\ne 1$，

所以 $f(x)$ 的定义域是 $[-3,1)\cup(1,+\infty)$.

（2）由题意，$f(-2)=\dfrac{8}{-2-1}+\sqrt{-2+3}=-\dfrac{8}{3}+1=-\dfrac{5}{3}$，

$f(6)=\dfrac{8}{6-1}+\sqrt{6+3}=\dfrac{8}{5}+3=\dfrac{23}{5}$.

（3）（要翻译已知条件，需要先算 $f(2a+1)$，将 $f(x)$ 的解析式中所有的 x 都替换成 $2a+1$ 即可）

因为 $f(2a+1)=\dfrac{8}{2a+1-1}+\sqrt{2a+1+3}=\dfrac{4}{a}+\sqrt{2a+4}$，

由 $2a+1\ge -3$ 且 $2a+1\ne 1$ 可得 $a\ge -2$ 且 $a\ne 0$ ①，

所以 $f(2a+1)=\dfrac{4}{a}+3$ 即为 $\dfrac{4}{a}+\sqrt{2a+4}=\dfrac{4}{a}+3$，

化简得：$\sqrt{2a+4}=3$，解得：$a=\dfrac{5}{2}$，满足①.

（4）因为 $f(x)=\dfrac{8}{x-1}+\sqrt{x+3}$，所以 $f(\sqrt{x}-2)=$

$\dfrac{8}{(\sqrt{x}-2)-1}+\sqrt{(\sqrt{x}-2)+3}=\dfrac{8}{\sqrt{x}-3}+\sqrt{\sqrt{x}+1}$，

（结束了吗？别忘了研究定义域）在 $f(x)$ 中，$x\ge -3$ 且

$x\ne 1$，所以在 $f(\sqrt{x}-2)$ 中，$\sqrt{x}-2\ge -3$ 且 $\sqrt{x}-2\ne 1$，

因为 $\sqrt{x}-2\ge -2>-3$，所以 $\sqrt{x}-2\ge -3$ 在 $x\ge 0$ 时恒成立，

而由 $\sqrt{x}-2\ne 1$ 可得 $\sqrt{x}\ne 3$，所以 $x\ne 9$，

所以 x 的取值范围是 $x\ge 0$ 且 $x\ne 9$，

故 $f(\sqrt{x}-2)=\dfrac{8}{\sqrt{x}-3}+\sqrt{\sqrt{x}+1}$，$x\in[0,9)\cup(9,+\infty)$.

11.（2024 • 全国模拟）

求下列函数的值域：

（1）$y=\sqrt{16-x^2}$；

（2）$y=x^2-4x+6(1\le x\le 5)$；

（3）$y=\dfrac{x}{x+1}$；

（4）$y=2x+4\sqrt{1-x}$.

11. **解**：（1）（求函数的值域前，先求定义域）

由 $16-x^2\ge 0$ 可得 $-4\le x\le 4\Rightarrow$ 函数的定义域是 $[-4,4]$，

当 $x\in[-4,4]$ 时，$16-x^2\in[0,16]$，所以 $\sqrt{16-x^2}\in[0,4]$，

故该函数的值域为 $[0,4]$.

（2）（定义域是 $[1,5]$，于是我们画出草图来看看 $[1,5]$ 这段的情况）函数 $y=x^2-4x+6$ 的草图如图 1，

由图可知函数在 $x=2$ 处取得最小值，$x=5$ 处取得最大值，

所以 $y_{\min}=2^2-4\times 2+6=2$，$y_{\max}=5^2-4\times 5+6=11$，

故函数 $y=x^2-4x+6(1\le x\le 5)$ 的值域为 $[2,11]$.

（3）由 $x+1\ne 0$ 可得 $x\ne -1\Rightarrow$ 函数的定义域是 $\{x\,|\,x\ne -1\}$，

（分子分母都含 x，但观察发现可通过拆项把分子化为常数，这样显然更容易分析值域，故按此操作）

$y=\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{x+1-1}{x+1}=1-\dfrac{1}{x+1}$，

因为当 $x\in\{x\,|\,x\ne -1\}$ 时，$\dfrac{1}{x+1}\ne 0$，所以 $1-\dfrac{1}{x+1}\ne 1$，

故函数 $y=\dfrac{x}{x+1}$ 的值域是 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

（4）由 $1-x\ge 0$ 可得 $x\le 1\Rightarrow$ 函数的定义域是 $(-\infty,1]$，

（解析式较复杂，怎样求其值域？注意到解析式第一项中的 x 与第二项的 $\sqrt{1-x}$ 的次数可以看成有 2 倍关系，故可尝试将 $\sqrt{1-x}$ 换元，化为二次函数来分析）

令 $t=\sqrt{1-x}$，则 $x=1-t^2$，所以 $y=2x+4\sqrt{1-x}$

$=2(1-t^2)+4t=-2t^2+4t+2$，

因为 $x\in(-\infty,1]$，所以 $t=\sqrt{1-x}\in[0,+\infty)$，

函数 $y=-2t^2+4t+2$ 的草图如图 2，由图可知，该函数在 $t=1$ 处取得最大值，所以 $y_{\max}=-2\times 1^2+4\times 1+2=4$，

故函数 $y=2x+4\sqrt{1-x}$ 的值域是 $(-\infty,4]$.

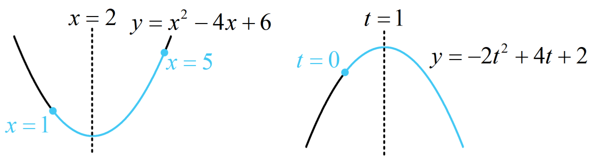


图1　　图2

12.（2024·山东临沂模拟）

已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$.

（1）求 $f(2)$ 与 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$f(3)$ 与 $f\left(\dfrac{1}{3}\right)$ 的值；

（2）根据（1）中求得的结果，你能发现 $f(x)$ 与 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 有什么关系？证明你的发现；

（3）求 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2024)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)+f\left(\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+f\left(\dfrac{1}{2024}\right)$ 的值.

12. **解**：（1）$f(2)=\dfrac{2^2}{1+2^2}=\dfrac{4}{5}$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{5}$，

$f(3)=\dfrac{3^2}{1+3^2}=\dfrac{9}{10}$，$f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{1}{10}$.

（2）（由（1）的结果我们发现 $f(2)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)=f(3)+f\left(\dfrac{1}{3}\right)=1$，于是可猜想 $f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=1$，故尝试证明）

由（1）可猜想 $f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=1$，下面给出证明，

$f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^2}{1+x^2}+\dfrac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}=\dfrac{x^2}{1+x^2}+\dfrac{1}{x^2+1}=1$.

（3）（逐项计算显然太繁琐，联系（2）的结论，我们在计算目标式时，将括号内整体互为倒数的两项组合）

所求式 $=f(1)+\left[f(2)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right]+\left[f(3)+f\left(\dfrac{1}{3}\right)\right]+\cdots$

$+\left[f(2024)+f\left(\dfrac{1}{2024}\right)\right]=\dfrac{1^2}{1+1^2}+1+1+\cdots+1$（共2023个1）

$=\dfrac{1}{2}+2023=\dfrac{4047}{2}$.

C组 拓展提升

13．（2024 • 河北模拟）

当 $x>0$ 时，$y=\dfrac{x^2}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{x+1}$ 的值域为______．

13．$\left[\dfrac{3}{4},1\right)$

解析：所给函数形式较复杂，怎么求其值域？观察发现 $\dfrac{x}{x+1}$ 与 $\dfrac{1}{x+1}$ 很像，实际上，$\dfrac{x}{x+1}$ 可以通过拆项化为关于 $\dfrac{1}{x+1}$ 的式子，从而统一结构，换元处理，

因为 $\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{x+1-1}{x+1}=1-\dfrac{1}{x+1}$，所以 $y=\dfrac{x^2}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{x+1}$

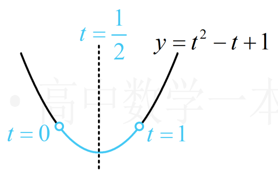
$=\left(1-\dfrac{1}{x+1}\right)^2+\dfrac{1}{x+1}=\left(\dfrac{1}{x+1}\right)^2-\dfrac{1}{x+1}+1$，

令 $t=\dfrac{1}{x+1}$，则 $y=t^2-t+1$，

当 $x>0$ 时，$x+1>1$，所以 $t=\dfrac{1}{x+1}\in(0,1)$，

函数 $y=t^2-t+1$ 的草图如图，由图可知，该函数在 $t=\dfrac{1}{2}$ 处取得最小值，所以 $y_{\min}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{3}{4}$，

又当 $t=0$ 或 1 时，$y=1$，所以函数的值域是 $\left[\dfrac{3}{4},1\right)$．



14．（2024 • 天津模拟）

已知函数 $f(x)=\sqrt{(1-a^2)x^2+3(1-a)x+6}$．

（1）当 $a=0$ 时，求 $f(x)$ 的值域；

（2）若 $f(x)$ 的定义域为 $[-2,1]$，求实数 a 的值；

（3）若 $f(x)$ 的定义域为 **R**，求实数 a 的取值范围．

14．**解**：（1）当 $a=0$ 时，$f(x)=\sqrt{x^2+3x+6}$，

因为 $x^2+3x+6=\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{15}{4}\ge\dfrac{15}{4}$，当且仅当 $x=-\dfrac{3}{2}$ 时取等号，所以 $\sqrt{x^2+3x+6}\ge\dfrac{\sqrt{15}}{2}$，

故 $f(x)$ 的值域是 $\left[\dfrac{\sqrt{15}}{2},+\infty\right)$．

（2）因为 $f(x)$ 的定义域是 $[-2,1]$，所以 $[-2,1]$ 是不等式 $(1-a^2)x^2+3(1-a)x+6\ge 0$ 的解集，

（该不等式的平方项系数含参，其是否为 0 对不等式的类型有影响，分析方法也不同，故讨论）

当 $1-a^2=0$ 时，$a=\pm1$，经检验，不满足 $(1-a^2)x^2+3(1-a)x+6\ge 0$ 的解集是 $[-2,1]$，不合题意；

当 $1-a^2\ne 0$ 时，要使不等式 $(1-a^2)x^2+3(1-a)x+6\ge 0$ 的解集是 $[-2,1]$，如图 1，应有 $1-a^2<0$，且 -2 和 1 是 $y=(1-a^2)x^2+3(1-a)x+6$ 的两个零点，

由韦达定理，$\begin{cases}-2+1=-\dfrac{3(1-a)}{1-a^2}\\ -2\times 1=\dfrac{6}{1-a^2}\end{cases}$，解得：$a=2$，

满足$1-a^2<0$；

综上所述，实数 a 的值为 2.

（3）因为 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，所以 $(1-a^2)x^2+3(1-a)x$ $+6\geq 0$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，

（这还是（2）中的不等式，故仍然按$1-a^2$是否为 0 讨论）

当 $a=1$ 时，$(1-a^2)x^2+3(1-a)x+6\geq 0$ 即为 $6\geq 0$，恒成立；

当 $a=-1$ 时，$(1-a^2)x^2+3(1-a)x+6\geq 0$ 即为 $6x+6\geq 0$，

该不等式在 $x<-1$ 时不成立，不合题意；

当 $a\neq\pm 1$ 时，要使 $(1-a^2)x^2+3(1-a)x+6\geq 0$ 恒成立，

函数 $y=(1-a^2)x^2+3(1-a)x+6$ 的草图应如图 2，

所以$\begin{cases}1-a^2>0\\ \Delta=[3(1-a)]^2-4(1-a^2)\cdot 6=3(a-1)(11a+5)\leq 0\end{cases}$，

解得：$-\dfrac{5}{11}\leq a<1$；

综上所述，实数 a 的取值范围是$\left[-\dfrac{5}{11},1\right]$.

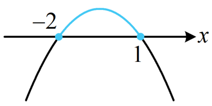


图1

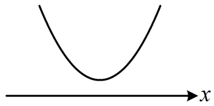
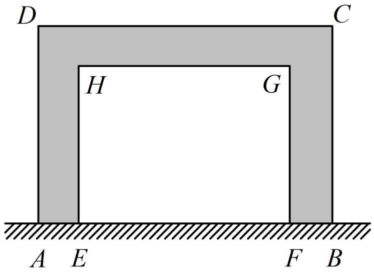


图2

15.（2024·江苏盐城模拟）

为了增强生物实验课的趣味性，丰富生物实验教学内容，某校计划沿着围墙（足够长）划出一块面积为 100 平方米的矩形区域 $ABCD$ 修建一个羊驼养殖场，规定 $ABCD$ 的每条边长均不超过 20 米. 如图所示，矩形 $EFGH$ 为羊驼养殖区，且点 A，B，E，F 四点共线，阴影部分为 1 米宽的鹅卵石小径. 设 $AB=x$（单位：米），养殖区域 $EFGH$ 的面积为 S（单位：平方米）.



（1）将 S 表示为 x 的函数，并写出 x 的取值范围；

（2）当 AB 为多长时，S 取得最大值？并求出最大值.

15. 解：(1)（求 S 需要 EF，EH 的长，我们通过分析图形的几何特征来求它们）

由题意，$AB=x$ 且 $AB\cdot AD=x\cdot AD=100$，

所以 $AD=\dfrac{100}{x}$，由图可知，$EF=AB-AE-BF=x-2$，

$EH=AD-1=\dfrac{100}{x}-1$，所以 $S=EF\cdot EH$

$=(x-2)\left(\dfrac{100}{x}-1\right)=102-x-\dfrac{200}{x}=102-\left(x+\dfrac{200}{x}\right)$，

（还要给出定义域，题干说“$ABCD$ 的每条边长均不超过 20 米”，结合鹅卵石小径宽 1 米可建立不等式求 x 的范围）

由 $2<x\le 20$ 和 $1<\dfrac{100}{x}\le 20$ 可得 $5\le x\le 20$，

所以 $S=102-\left(x+\dfrac{200}{x}\right)$， $5\le x\le 20$.

（2）（观察发现 x 与 $\dfrac{200}{x}$ 满足“积定”，故可直接用基本不等式求 $x+\dfrac{200}{x}$ 的最小值，此时 S 也就最大）

因为 $x+\dfrac{200}{x}\ge 2\sqrt{x\cdot\dfrac{200}{x}}=20\sqrt{2}$，所以 $S\le 102-20\sqrt{2}$，

取等条件是 $x=\dfrac{200}{x}$，即 $x=10\sqrt{2}$，满足 $5\le x\le 20$，

故当 $AB=10\sqrt{2}$ 米时，S 取得最大值 $102-20\sqrt{2}$ 平方米.