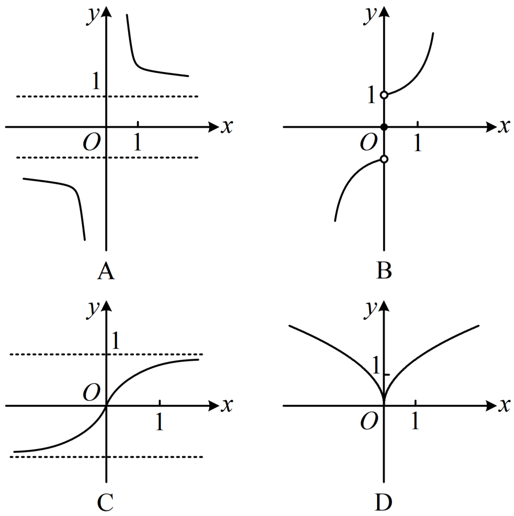
强化训练

A 组 夯实基础

1.（2024 • 广东惠州模拟）

函数 $f(x)=\dfrac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}$ 的图象大致为（　　）



1. C

解析：由题意，$f(x)=\dfrac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}=\dfrac{4^x-1}{4^x+1}=\dfrac{4^x+1-2}{4^x+1}$

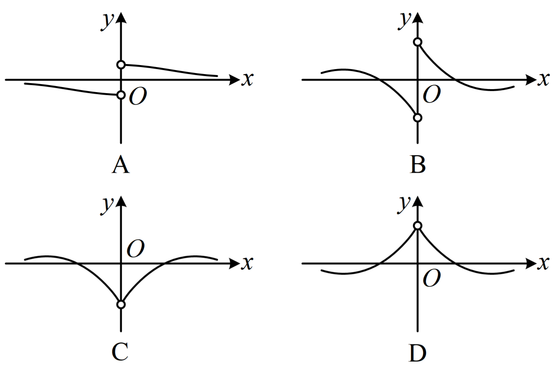
$=1-\dfrac{2}{4^x+1}$，因为 $\dfrac{2}{4^x+1}>0$，所以 $f(x)=1-\dfrac{2}{4^x+1}<1$，

高中数学一本通

从而 $f(x)$ 只在直线 $y=1$ 的下方有图象，故选 C.

2.（2024 • 江西开学考试）

函数 $f(x)=\dfrac{|x|}{2^x-2^{-x}}$ 的图象大致为（　　）



2. A

解析：观察发现 A、B 两项关于原点对称，C、D 两项关于 y 轴对称，故可通过判断奇偶性排除两个选项，

令 $2^x-2^{-x}\neq 0$ 可得 $2^x\neq 2^{-x}$，所以 $x\neq -x$，即 $x\neq 0$，

所以 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，

由题意，$f(-x)=\dfrac{|-x|}{2^{-x}-2^x}=-\dfrac{|x|}{2^x-2^{-x}}=-f(x)$，

所以 $f(x)$ 是奇函数，其图象关于原点对称，排除 C、D；

选项 A、B 的明显差异是 A 在 y 轴右侧的图象始终在 x 轴上方，而 B 项则在 x 轴上方、下方都有图象，故可通过判断当 $x>0$ 时 $f(x)$ 的正负来排除一个选项，

当 $x>0$ 时，$|x|>0$，$x>-x$，所以 $2^x>2^{-x}$，

从而 $2^x-2^{-x}>0$，故 $f(x)=\dfrac{|x|}{2^x-2^{-x}}>0$，所以在 y 轴右侧，$f(x)$ 的图象恒在 x 轴上方，排除 B，选 A.

3.（2024·云南昆明模拟）（多选）

若 $f(x)=\ln\dfrac{2-x}{2+x}$，则下列说法正确的是（　　）

A．$f(x)$ 的定义域为 $(-2,2)$

B．$f(x)$ 为奇函数

C．$f(x)$ 在定义域上是减函数

D．$f(x)$ 的值域为 $(0,+\infty)$

3．ABC

解析：A 项，由 $\dfrac{2-x}{2+x}>0$ 可得 $(2-x)(2+x)>0$，

解得：$-2<x<2$，所以 $f(x)$ 的定义域是 $(-2,2)$，

故 A 项正确；

B 项，$f(-x)=\ln\dfrac{2-(-x)}{2+(-x)}=\ln\dfrac{2+x}{2-x}=\ln\left(\dfrac{2-x}{2+x}\right)^{-1}$

$=-\ln\dfrac{2-x}{2+x}=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数，故 B 项正确；

一数·高中数学一本通

C 项，$f(x)=\ln\dfrac{2-x}{2+x}=\ln\dfrac{4-(2+x)}{2+x}=\ln\left(\dfrac{4}{2+x}-1\right)$，

$f(x)$ 可看成由 $y=\ln u$ 和 $u=\dfrac{4}{2+x}-1$ 复合而成，可用同增异减准则分析其单调性，

当 $x\in(-2,2)$ 时，$u=\dfrac{4}{2+x}-1$ ↘，而 $y=\ln u$ ↗，内外层单调性相异，所以 $f(x)$ 在 $(-2,2)$ 上↘，故 C 项正确；

D 项，由于 $f(x)=\ln u$，所以可先由 $u=\dfrac{4}{x+2}-1$ 分析 u 的取值范围，再看 $\ln u$ 的取值范围，

由 $-2<x<2$ 可得 $0<x+2<4$，所以 $\dfrac{4}{x+2}>1$，

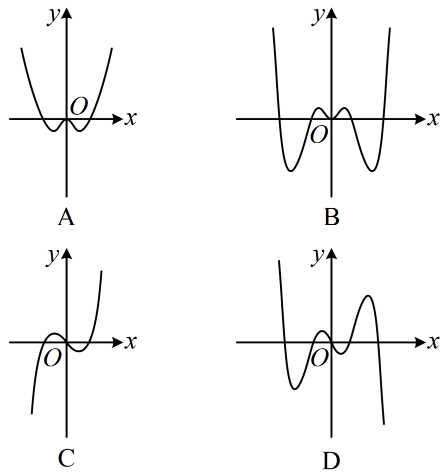
从而 $u=\dfrac{4}{x+2}-1>0$，故 $f(x)=\ln\left(\dfrac{4}{x+2}-1\right)=\ln u\in\mathbf{R}$，

所以 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$，故 D 项错误.

B组 强化能力

4．（2024 • 四川模拟）

函数 $f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}\cdot(x^3-3x)$ 的图象大致是（　　）



4．A

解法 1：观察发现 A、B 关于 y 轴对称，C、D 关于原点对称，故可通过判断奇偶性排除两个选项，

由题意，$f(-x)=\dfrac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1}\cdot[(-x)^3-3(-x)]$

$=\dfrac{1-2^x}{1+2^x}\cdot(-x^3+3x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}\cdot(x^3-3x)=f(x)$，

一数・高中数学一本通

所以 $f(x)$ 为偶函数，其图象关于 y 轴对称，排除 C、D；

对比 A、B 两项可发现它们与 x 轴的交点个数不同，故可尝试分析方程 $f(x)=0$ 的解的个数，再排除一个选项，

令 $f(x)=0$ 可得 $\dfrac{2^x-1}{2^x+1}\cdot(x^3-3x)=0$，

所以 $2^x-1=0$ 或 $x^3-3x=0$，

由 $2^x-1=0$ 可得 $2^x=1$，解得：$x=0$，

由 $x^3-3x=0$ 可得 $x(x^2-3)=0$，所以 $x=0$ 或 $\pm\sqrt{3}$，

所以方程 $f(x)=0$ 共有 $x=0$，$x=\pm\sqrt{3}$ 三个解，

即 $f(x)$ 的图象与 x 轴共有 3 个交点，排除 B，选 A.

解法 2：排除 C、D 两项的过程同解法 1，对于 A、B 两项，观察发现它们在原点附近函数值的正负不同，故也可据此分析，排除一个选项，

当 $x>0$ 且 x 趋近于 0 时，$2^x-1>0$，$2^x+1>0$，

$x^3-3x=x(x^2-3)<0$，所以 $f(x)<0$，排除 B，故选 A，

若理解极限思想困难，也可取接近 0 的 x 代入解析式来看，

例如，不妨考虑 $x=0.01$ 的情形，

$f(0.01)=\dfrac{2^{0.01}-1}{2^{0.01}+1}\times(0.01^3-3\times0.01)<0$.

5.（2024 • 全国模拟）

函数 $f(x)=\log_{2024}(\sqrt{x^2+1}-x)+\mathrm{e}$，则 $f(\log_2\pi)+$

$f(\log_{0.5}\pi)=$（　　）

A．2024　　B．2π

C．e　　D．2e

5. D

解析：观察发现解析式中 $\log_{2024}(\sqrt{x^2+1}-x)$ 这部分为奇函数，故这是“奇函数＋常数”模型，我们看看所求式是否为 $f(x_0)+f(-x_0)$ 这种结构，

设 $g(x)=\log_{2024}(\sqrt{x^2+1}-x)$，则 $g(x)$ 为奇函数，

且 $f(x)=g(x)+\mathrm{e}$，

又 $\log_{0.5}\pi=\log_{2^{-1}}\pi=\frac{1}{-1}\log_2\pi=-\log_2\pi$，

所以 $f(\log_2\pi)+f(\log_{0.5}\pi)=f(\log_2\pi)+f(-\log_2\pi)$

$=g(\log_2\pi)+\mathrm{e}+g(-\log_2\pi)+\mathrm{e}=2\mathrm{e}$.

6.（2024 • 四川成都模拟）

函数 $g(x)=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}+\ln\frac{2-x}{2+x}+2$，若 $g(a)=6$，则 $g(-a)=$________.

6. -2

解析：观察发现解析式中的 $\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$ 和 $\ln\frac{2-x}{2+x}$ 都是奇函数，故这是“奇函数＋常数”模型，

设 $f(x)=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}+\ln\frac{2-x}{2+x}$，则 $f(x)$ 为奇函数，

且 $g(x)=f(x)+2$，所以 $g(a)+g(-a)=$

$f(a)+2+f(-a)+2=f(a)+f(-a)+4=4$，

故 $g(-a)=4-g(a)=4-6=-2$.

7.（2024 • 四川成都开学考试）

若函数 $f(x)=1-\frac{a}{2^x+1}$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数.

（1）求实数 a 的值，并判断函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）若对任意的实数 $x\in[-2,3]$，不等式 $f(k\cdot4^x)+f(1-2^{x+1})\geq0$ 恒成立，求实数 k 的取值范围.

7. 解：（1）因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $f(0)=$

$1-\frac{a}{2^0+1}=1-\frac{a}{2}=0$，解得：$a=2$，

此时 $f(x)=1-\frac{2}{2^x+1}=\frac{2^x+1-2}{2^x+1}=\frac{2^x-1}{2^x+1}$，

所以 $f(-x)=\frac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1}=\frac{1-2^x}{1+2^x}=-\frac{2^x-1}{2^x+1}=-f(x)$，

满足 $f(x)$ 为奇函数，故 $a=2$，

（由 $f(x)=1-\frac{2}{2^x+1}$ 可发现当 x 增大时，$\frac{2}{2^x+1}$ 减小，所以 $f(x)$ 增大，故 $f(x)\nearrow$，下面我们用单调性定义来证明）

设 $x_1<x_2$，$f(x_1)-f(x_2)=1-\frac{2}{2^{x_1}+1}-\left(1-\frac{2}{2^{x_2}+1}\right)$

$=\frac{2}{2^{x_2}+1}-\frac{2}{2^{x_1}+1}=\frac{2(2^{x_1}+1-2^{x_2}-1)}{(2^{x_2}+1)(2^{x_1}+1)}=\frac{2(2^{x_1}-2^{x_2})}{(2^{x_2}+1)(2^{x_1}+1)}$，

因为 $x_1<x_2$，所以 $2^{x_1}<2^{x_2}$，故 $2^{x_1}-2^{x_2}<0$，

又 $(2^{x_2}+1)(2^{x_1}+1)>0$，所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$，

从而 $f(x_1)<f(x_2)$，故 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

（2）（在奇函数中，看到 $f(\cdots)+f(\cdots)\ge 0$，想到移项后利用奇偶性将其化为 $f(\cdots)\ge f(\cdots)$，再用单调性处理）

$f(k\cdot 4^x)+f(1-2^{x+1})\ge 0\Leftrightarrow f(k\cdot 4^x)\ge -f(1-2^{x+1})$

$\Leftrightarrow f(k\cdot 4^x)\ge f(2^{x+1}-1)$ ①，

又 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上↗，所以不等式①等价于 $k\cdot 4^x\ge 2^{x+1}-1$，

（观察发现两端同除以 4^x 可将 k 分离出来，故先分离）

所以 $k\ge\frac{2^{x+1}-1}{4^x}$，$\frac{2^{x+1}-1}{4^x}=\frac{2\times 2^x-1}{(2^x)^2}=\frac{2}{2^x}-\frac{1}{(2^x)^2}$，

令 $t=\frac{1}{2^x}$，则当 $x\in[-2,3]$ 时，$t\in\left[\frac{1}{8},4\right]$，

且 $\frac{2^{x+1}-1}{4^x}=2t-t^2=-(t-1)^2+1$，

所以当 $t=1$ 时，$\frac{2^{x+1}-1}{4^x}$ 取得最大值 1，

因为 $k\ge\frac{2^{x+1}-1}{4^x}$ 在 $x\in[-2,3]$ 时恒成立，所以 $k\ge 1$，

故实数 k 的取值范围是 $[1,+\infty)$.

8.（2024·浙江杭州期末）

已知函数 $f(x)=\frac{a^{2x}+t}{a^x}(a>0$ 且 $a\ne 1)$ 是奇函数.

（1）求 t 的值；

（2）若 $0<a<1$，对 $\forall x\in[0,1]$ 有 $f(2x^2-kx-k)<f(1)$ 恒成立，求实数 k 的取值范围.

8．**解**：（1）**解法 1**：由题意，$f(x)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，

因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(0)=\frac{a^0+t}{a^0}=1+t=0$，

解得：$t=-1$，此时 $f(x)=\frac{a^{2x}-1}{a^x}=a^x-\frac{1}{a^x}=a^x-a^{-x}$，

所以 $f(-x)=a^{-x}-a^x=-f(x)$，

满足 $f(x)$ 为奇函数，故 $t=-1$.

解法 2：（已知奇偶性求参，也可考虑用定义处理）

因为 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(-x)+f(x)=\frac{a^{-2x}+t}{a^{-x}}+\frac{a^{2x}+t}{a^x}$

$=\frac{1+t\cdot a^{2x}}{a^x}+\frac{a^{2x}+t}{a^x}=\frac{(1+t)(a^{2x}+1)}{a^x}=0$，故 $t=-1$.

（2）（看到 $f(\cdots)<f(\cdots)$，想到用单调性处理，于是我们先用定义判断 $f(x)$ 的单调性）

设 $x_1<x_2$，$f(x_1)-f(x_2)=a^{x_1}-\frac{1}{a^{x_1}}-\left(a^{x_2}-\frac{1}{a^{x_2}}\right)$

$=a^{x_1}-a^{x_2}+\frac{1}{a^{x_2}}-\frac{1}{a^{x_1}}=a^{x_1}-a^{x_2}+\frac{a^{x_1}-a^{x_2}}{a^{x_2}\cdot a^{x_1}}$

$=(a^{x_1}-a^{x_2})\left(1+\frac{1}{a^{x_2}\cdot a^{x_1}}\right)=(a^{x_1}-a^{x_2})\left(1+\frac{1}{a^{x_2+x_1}}\right)$，

因为 $0<a<1$，$x_1<x_2$，所以 $a^{x_1}>a^{x_2}$，故 $a^{x_1}-a^{x_2}>0$，

又因为$1+\frac{1}{a^{x_2+x_1}}>0$，所以$f(x_1)-f(x_2)>0$，

从而$f(x_1)>f(x_2)$，故$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递减，

所以$f(2x^2-kx-k)<f(1)\Leftrightarrow 2x^2-kx-k>1$ ①，

（观察发现不等式①中的k容易分离，故先将其分离）

当$x\in[0,1]$时，不等式①$\Leftrightarrow k(x+1)<2x^2-1\Leftrightarrow k<\frac{2x^2-1}{x+1}$，

令$m=x+1$，则$x=m-1$，且$m\in[1,2]$，

$\frac{2x^2-1}{x+1}=\frac{2(m-1)^2-1}{m}=\frac{2m^2-4m+1}{m}=2m+\frac{1}{m}-4$，

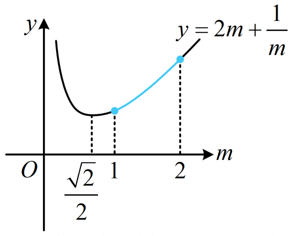
如图，由双勾函数性质，$y=2m+\frac{1}{m}$在$[1,2]$上↗，

所以当$m=1$时，$2m+\frac{1}{m}$取得最小值3，

此时$2m+\frac{1}{m}-4$取得最小值-1，所以$\left(\frac{2x^2-1}{x+1}\right)_{\min}=-1$，

因为$k<\frac{2x^2-1}{x+1}$在$x\in[0,1]$时恒成立，所以$k<-1$，

故实数k的取值范围是$(-\infty,-1)$.

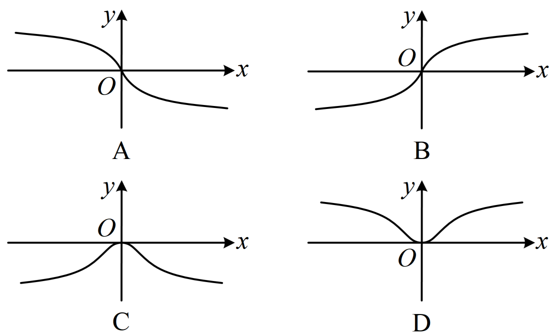


一数 • 高中数学一本通

C组 拓展提升

9.（2024 • 全国模拟）（多选）

已知函数$f(x)=\log_2(\sqrt{x^2+1}-kx)$，其中$k\in\mathbf{R}$，则$f(x)$的大致图象可能是（　　）



9．ABD

解析：选项的图象要么关于原点对称，要么关于y轴对称，所以只需考虑$f(x)$有奇偶性的情形，由所给解析式能联想到的有奇偶性的函数不外乎$y=\log_2\sqrt{x^2+1}$，$y=\log_2(\sqrt{x^2+1}\pm x)$，故分别考虑$k=0$和$\pm1$的情况即可，

当$k=0$时，$f(x)=\log_2\sqrt{x^2+1}$，$f(-x)=\log_2\sqrt{(-x)^2+1}$

$=\log_2\sqrt{x^2+1}=f(x)$，所以$f(x)$为偶函数，

且当$x\in[0,+\infty)$时，若x增大，则$\sqrt{x^2+1}$增大，

所以$\log_2\sqrt{x^2+1}$增大，故$f(x)$在$[0,+\infty)$上↗，

此时$f(x)$的大致图象是D项；

当$k=-1$时，$f(x)=\log_2(\sqrt{x^2+1}+x)$，由本节内容提要第5点，$f(x)$的图象大致是B项，

当 $k=1$ 时，$f(x)=\log_2(\sqrt{x^2+1}-x)$，由本节内容提要第 6 点，$f(x)$ 的图象大致是 A 项，

当 k 取除 0，±1 外的其它值时，$f(x)$ 是非奇非偶函数，图象与选项不符，所以选 ABD.

10.（2024 • 湖南邵阳模拟）

若 $f(x)=\log_{2024}(\sqrt{x^2+1}-x)+1$，则关于 x 的不等式 $f(2x-1)+f(3x^2)>2$ 的解集是_____.

10. $\left(-1,\frac{1}{3}\right)$

解析：观察发现 $\log_{2024}(\sqrt{x^2+1}-x)$ 为奇函数，可考虑把这部分孤立出来，构造函数分析，

令 $g(x)=f(x)-1=\log_{2024}(\sqrt{x^2+1}-x)$，则 $g(x)$ 为奇函数，且由本节内容提要第 6 点，$g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上↘，

$f(2x-1)+f(3x^2)>2\Leftrightarrow[f(2x-1)-1]+[f(3x^2)-1]>0$

$\Leftrightarrow g(2x-1)+g(3x^2)>0\Leftrightarrow g(2x-1)>-g(3x^2)$

$\Leftrightarrow g(2x-1)>g(-3x^2)\Leftrightarrow 2x-1<-3x^2$

$\Leftrightarrow 3x^2+2x-1=(3x-1)(x+1)<0$，解得：$-1<x<\frac{1}{3}$，

所以不等式 $f(2x-1)+f(3x^2)>2$ 的解集是 $\left(-1,\frac{1}{3}\right)$.

11.（2024 • 全国模拟）

已知函数 $f(x)=\frac{2}{e^x+1}-x-2$，若 $f(m^2)+f(m-2)$ $+2>0$，则实数 m 的取值范围是（　　）

A．$(-2,1)$　　B．$(-1,2)$

C．$(0,2)$　　D．$(2,4)$

一数 • 高中数学一本通

11. A

解析：看到 $\frac{2}{e^x+1}$，想到可按 $\frac{e^x-1}{e^x+1}=\frac{e^x+1-2}{e^x+1}=1-\frac{2}{e^x+1}$ 与奇函数 $y=\frac{e^x-1}{e^x+1}$ 联系起来，故先按此凑形式，

$f(x)=\frac{2}{e^x+1}-x-2=\left(\frac{2}{e^x+1}-1\right)-x-1=\frac{1-e^x}{e^x+1}-x-1$，

令 $g(x)=\frac{1-e^x}{e^x+1}-x$，则 $g(x)=f(x)+1$，

因为 $g(-x)=\frac{1-e^{-x}}{e^{-x}+1}-(-x)=\frac{e^x-1}{1+e^x}+x=-g(x)$，

所以 $g(x)$ 为奇函数，

观察要解的不等式，我们发现可将其化为 $g(\cdots)>g(\cdots)$ 的形式，再用单调性处理，故先判断单调性，

由本节内容提要第 3 点可知，$y=\frac{e^x-1}{e^x+1}$ 在 $\mathbf{R}$ 上↗，

所以 $y=\frac{1-e^x}{e^x+1}$ 在 $\mathbf{R}$ 上↘，又 $y=-x$ 在 $\mathbf{R}$ 上也↘，

所以 $g(x)=\frac{1-e^x}{e^x+1}-x$ 在 $\mathbf{R}$ 上↘，

$f(m^2)+f(m-2)+2>0\Leftrightarrow[f(m^2)+1]+[f(m-2)+1]>0$

$\Leftrightarrow g(m^2)+g(m-2)>0\Leftrightarrow g(m^2)>-g(m-2)$

$\Leftrightarrow g(m^2)>g(2-m)\Leftrightarrow m^2<2-m\Leftrightarrow m^2+m-2<0$，

解得：$-2<m<1$，所以实数 m 的取值范围是 $(-2,1)$.

12．（2024•浙江杭州期末）（多选）

已知函数 $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)+x+1$，则下列说法正确的是（　　）

A．$f(\lg 3)+f\left(\lg\dfrac{1}{3}\right)=2$

B．函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(0,1)$ 对称

C．对定义域内的任意两个不相等的实数 x_1， x_2，

$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$ 恒成立

D．若实数 a，b 满足 $f(a)+f(b)>2$，则 $a+b>0$

12．ABD

解析：A 项，观察发现解析式中 $\ln(\sqrt{x^2+1}+x)+x$ 这部分为奇函数，故这是“奇函数＋常数”模型，

设 $g(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)+x$，则 $g(x)$ 为奇函数，

且 $f(x)=g(x)+1$，因为 $\lg\dfrac{1}{3}=\lg 3^{-1}=-\lg 3$，

所以 $f(\lg 3)+f\left(\lg\dfrac{1}{3}\right)=f(\lg 3)+f(-\lg 3)$

$=g(\lg 3)+1+g(-\lg 3)+1=g(\lg 3)+g(-\lg 3)+2=2$，

故 A 项正确；

B 项， $g(x)$ 为奇函数，其图象关于原点对称，

又 $f(x)=g(x)+1$，所以将 $g(x)$ 上移 1 个单位，即得 $f(x)$ 的图象，从而 $f(x)$ 的图象关于点 $(0,1)$ 对称，故 B 项正确；

C 项，此选项的意思是 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上↘，于是我们来分析 $f(x)$ 的单调性，可拆成两部分来看，

由本节内容提要第 5 点， $y=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上↗，

又 $y=x+1$ 在 $\mathbf{R}$ 上也↗，所以 $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)+x+1$ 在 $\mathbf{R}$ 上↗，故 C 项错误；

D 项，由 $f(x)=g(x)+1$ 可得 $g(x)=f(x)-1$，结合 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上↗可得 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上↗，

$f(a)+f(b)>2\Leftrightarrow[f(a)-1]+[f(b)-1]>0$

$\Leftrightarrow g(a)+g(b)>0\Leftrightarrow g(a)>-g(b)\Leftrightarrow g(a)>g(-b)$，

所以 $a>-b$，从而 $a+b>0$，故 D 项正确.

13．（2024•广东汕头模拟）

已知函数 $f(x)=2^x+a\cdot 2^{-x}$ 为奇函数.

（1）求 a 的值；

（2）判断 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的单调性，并用定义证明；

（3）设 $F(x)=2^{2x}+2^{-2x}-2f(x)$，求 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值.

13．**解**：（1）因为 $f(x)$ 为奇函数，且定义域为 $\mathbf{R}$，

所以 $f(0)=2^0+a\cdot 2^0=1+a=0$，解得： $a=-1$，

此时 $f(x)=2^x-2^{-x}$，所以 $f(-x)=2^{-x}-2^x=-f(x)$，

满足 $f(x)$ 为奇函数，故 $a=-1$.

（2）函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，证明如下：

设 $x_1<x_2$， $f(x_1)-f(x_2)=2^{x_1}-2^{-x_1}-(2^{x_2}-2^{-x_2})$

$=2^{x_1}-2^{x_2}-\dfrac{1}{2^{x_1}}+\dfrac{1}{2^{x_2}}=2^{x_1}-2^{x_2}-\dfrac{2^{x_2}-2^{x_1}}{2^{x_1}\cdot 2^{x_2}}$

$=(2^{x_1}-2^{x_2})\left(1+\frac{1}{2^{x_1+x_2}}\right)$ ①，

因为 $x_1<x_2$，所以 $2^{x_1}<2^{x_2}$，故 $2^{x_1}-2^{x_2}<0$，

又 $1+\frac{1}{2^{x_1+x_2}}>0$，所以结合①可得 $f(x_1)-f(x_2)<0$，

从而 $f(x_1)<f(x_2)$，故 $f(x)$ 在 **R** 上单调递增.

（3）由题意，$F(x)=2^{2x}+2^{-2x}-2(2^x-2^{-x})$ ②，

（$F(x)$ 的解析式较复杂，怎样求其最值？观察 $2^{2x}+2^{-2x}$ 和 2^x-2^{-x} 两部分的指数可发现它们有平方关系，故考虑将 2^x-2^{-x} 换元成 t，简化 $F(x)$ 的解析式后再看）

令 $t=2^x-2^{-x}$，则 $t^2=(2^x-2^{-x})^2=2^{2x}+2^{-2x}-2\times2^x\times2^{-x}$

$=2^{2x}+2^{-2x}-2$，所以 $2^{2x}+2^{-2x}=t^2+2$，

代入②得 $F(x)=t^2+2-2t=(t-1)^2+1$，

（求 $F(x)$ 的最值还差 t 的范围，注意到 $t=f(x)$，第（2）问已得到 $f(x)$ 的单调性，故可直接求 t 的范围）

$t=2^x-2^{-x}=f(x)$，由（2）得 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，

而 $f(0)=2^0-2^0=0$，$f(1)=2^1-2^{-1}=\frac{3}{2}$，所以 $t\in\left[0,\frac{3}{2}\right]$，

又 $F(x)=(t-1)^2+1$，所以当 $t=1$ 时，$F(x)$ 取得最小值 1.

一数·高中数学一本通