强化训练

A组 夯实基础

1．（2024•河北张家口模拟）

已知 $\cos(\pi+\theta)=-\dfrac{1}{3}$，$\theta$ 是第四象限角，则 $\tan\dfrac{\theta}{2}=$（　　）

A．$\sqrt{2}$　　　　B．$-\sqrt{2}$

C．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　　　D．$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

1．D

解析：$\cos(\pi+\theta)=-\dfrac{1}{3}\Rightarrow -\cos\theta=-\dfrac{1}{3}\Rightarrow \cos\theta=\dfrac{1}{3}$，

由 $\cos\theta$ 求 $\tan\dfrac{\theta}{2}$，可考虑半角公式 $\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$，还差 $\sin\theta$，故先求它，

因为 θ 是第四象限的角，所以 $\sin\theta<0$，

故 $\sin\theta=-\sqrt{1-\cos^2\theta}=-\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，

由半角公式，$\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{1-\dfrac{1}{3}}{-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$．

2．（2024•上海模拟）

已知 $\alpha\in\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$，则 $\sqrt{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos\alpha}=$______．（用 $\dfrac{\alpha}{2}$ 有关的三角函数式表示）

2．$\sin\dfrac{\alpha}{2}$

解析：因为 $\alpha\in\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$，所以 $\dfrac{\alpha}{2}\in\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{4}\right)$，

故 $\sqrt{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos\alpha}=\sqrt{\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}=\left|\sin\dfrac{\alpha}{2}\right|=\sin\dfrac{\alpha}{2}$．

3．（2024•全国模拟）

已知 $\sin\beta+\cos\beta=\dfrac{1}{5}$，$\beta\in(0,\pi)$，则 $\tan\dfrac{\beta}{2}=$______．

3．2

解析：$\sin\beta$ 和 $\cos\beta$ 都可直接由万能公式表示为 $\tan\dfrac{\beta}{2}$，代入所给等式即可解出 $\tan\dfrac{\beta}{2}$，

因为 $\sin\beta+\cos\beta=\dfrac{1}{5}$，所以 $\dfrac{2\tan\dfrac{\beta}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\beta}{2}}+\dfrac{1-\tan^2\dfrac{\beta}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\beta}{2}}=\dfrac{1}{5}$，

解得：$\tan\dfrac{\beta}{2}=2$ 或 $-\dfrac{1}{3}$，又因为 $\beta\in(0,\pi)$，所以 $\dfrac{\beta}{2}\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，从而 $\tan\dfrac{\beta}{2}>0$，故 $\tan\dfrac{\beta}{2}=2$．

B 组 强化能力

4.（2024 • 四川南充模拟）

已知 $\sin 100^\circ = a$，则 $\sin 95^\circ =$（　　）

A. $\sqrt{\frac{1-a}{2}}$　　　B. $\sqrt{\frac{1+a}{2}}$

C. $2a^2-1$　　　D. $1-2a^2$

4. B

解析：观察发现容易用诱导公式将 100° 化为 10°，95° 化为 5°，故问题即为已知 10° 的三角函数值求 5° 的三角函数值，可用半角公式处理，

由题意，$\sin 100^\circ = \sin(90^\circ + 10^\circ) = \cos 10^\circ = a$，

所以 $\sin 95^\circ = \sin(90^\circ + 5^\circ) = \cos 5^\circ = \sqrt{\frac{1+\cos 10^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1+a}{2}}$.

5.（2024 • 四川成都模拟）

证明：$\frac{1+\sin 2\theta - \cos 2\theta}{1+\sin 2\theta + \cos 2\theta} = \tan\theta$.

5. **证法 1：**（观察发现考虑的方向不外乎两个：1 与 $\sin 2\theta$ 组合，化为 $(\sin\theta+\cos\theta)^2$，或 1 与 $\cos 2\theta$ 组合，可以升次，我们先试试第一个）

$$\frac{1+\sin 2\theta-\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta+\cos 2\theta} = \frac{(\sin\theta+\cos\theta)^2-(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}$$

$$= \frac{(\sin\theta+\cos\theta)^2-(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)}{(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)}$$

$$= \frac{\sin\theta+\cos\theta-(\cos\theta-\sin\theta)}{\sin\theta+\cos\theta+(\cos\theta-\sin\theta)} = \frac{2\sin\theta}{2\cos\theta} = \tan\theta.$$

证法 2：（再来试试 1 与 $\cos 2\theta$ 组合，此时为了统一角度，$\sin 2\theta$ 也要用二倍角公式）

$$\frac{1+\sin 2\theta-\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta+\cos 2\theta} = \frac{\sin 2\theta+(1-\cos 2\theta)}{\sin 2\theta+(1+\cos 2\theta)}$$

$$= \frac{2\sin\theta\cos\theta+2\sin^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta+2\cos^2\theta} = \frac{\sin\theta(\cos\theta+\sin\theta)}{\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta.$$

证法 3：（注意到目标等式右侧的角是 θ，故也可考虑直接将左边的角 2θ 也化为 θ，其中 1 可按 $1=\cos^2\theta+\sin^2\theta$ 化，其余的项用二倍角公式来化）

$$\text{左边} = \frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta-(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{\cos^2\theta+\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}$$

$$= \frac{2\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}{2\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta} = \frac{\sin\theta(\sin\theta+\cos\theta)}{\cos\theta(\cos\theta+\sin\theta)} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta.$$

6.（2024 • 四川绵阳模拟）

化简：$\frac{\cos 4\theta - 4\cos 2\theta + 3}{\cos 4\theta + 4\cos 2\theta + 3}$.

6. **解：**（涉及的角有 4θ，2θ，可考虑对 $\cos 4\theta$ 用二倍角公式，将角度都化成 2θ 再看怎样变形）

$$\text{原式} = \frac{2\cos^2 2\theta-1-4\cos 2\theta+3}{2\cos^2 2\theta-1+4\cos 2\theta+3} = \frac{\cos^2 2\theta-2\cos 2\theta+1}{\cos^2 2\theta+2\cos 2\theta+1}$$

$$= \frac{(1-\cos 2\theta)^2}{(1+\cos 2\theta)^2} = \frac{(2\sin^2\theta)^2}{(2\cos^2\theta)^2} = \frac{\sin^4\theta}{\cos^4\theta} = \tan^4\theta.$$

C组 拓展提升

7.（2024 • 湖北模拟）

在$\triangle ABC$中，$\dfrac{\tan B+\tan C}{\tan B}=\dfrac{2\sin A}{\sin B}$.

（1）求角 C 的大小；

（2）若$\triangle ABC$为锐角三角形，求$\sin^2 A+\sin^2 B$的取值范围.

7. **解：**（1）（所给等式有切有弦，显然弦化切不易，故考虑切化弦分析）$\dfrac{\tan B+\tan C}{\tan B}=1+\dfrac{\tan C}{\tan B}=1+\dfrac{\sin C\cos B}{\cos C\sin B}$，

代入$\dfrac{\tan B+\tan C}{\tan B}=\dfrac{2\sin A}{\sin B}$得$1+\dfrac{\sin C\cos B}{\cos C\sin B}=\dfrac{2\sin A}{\sin B}$，

两端乘以$\cos C\sin B$可得

$\cos C\sin B+\sin C\cos B=2\sin A\cos C$ ①，

又$\cos C\sin B+\sin C\cos B=\sin(B+C)=\sin(\pi-A)=\sin A$，

所以代入①得$\sin A=2\sin A\cos C$ ②，

因为$A\in(0,\pi)$，所以$\sin A>0$，故式②可化为

$1=2\cos C$，所以$\cos C=\dfrac{1}{2}$，结合$C\in(0,\pi)$可得$C=\dfrac{\pi}{3}$.

（2）（目标式涉及 A，B 两个角，不方便直接求范围，注意到已知 C，故可由内角和为 π 求出 $A+B$，用于消元）

由（1）可得$A+B=\pi-C=\dfrac{2\pi}{3}$，所以$B=\dfrac{2\pi}{3}-A$，

故$\sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 A+\sin^2\left(\dfrac{2\pi}{3}-A\right)$

$=\dfrac{1-\cos 2A}{2}+\dfrac{1-\cos\left(\dfrac{4\pi}{3}-2A\right)}{2}$

$=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos 2A+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{4\pi}{3}\cos 2A+\sin\dfrac{4\pi}{3}\sin 2A\right)$

$=1-\dfrac{1}{2}\cos 2A-\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2}\cos 2A-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2A\right)$

$=1-\dfrac{1}{4}\cos 2A+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\sin 2A=1+\dfrac{1}{2}\sin\left(2A-\dfrac{\pi}{6}\right)$ ③，

（求上式的值域需要 A 的范围，题干说$\triangle ABC$为锐角三角形，C 已知，只需 A 和 B 为锐角，可由此求 A 的范围）

因为$\triangle ABC$为锐角三角形，所以$\begin{cases}0<A<\dfrac{\pi}{2}\\0<B=\dfrac{2\pi}{3}-A<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$，

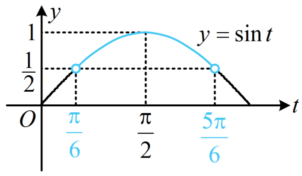
解得：$\dfrac{\pi}{6}<A<\dfrac{\pi}{2}$，（由此求式③的范围，可考虑将$2A-\dfrac{\pi}{6}$换元成 t，借助$y=\sin t$的图象来看）

令$t=2A-\dfrac{\pi}{6}$，则$\sin^2 A+\sin^2 B=1+\dfrac{1}{2}\sin t$，

当$\dfrac{\pi}{6}<A<\dfrac{\pi}{2}$时，$\dfrac{\pi}{6}<t<\dfrac{5\pi}{6}$，如图，$\dfrac{1}{2}<\sin t\le 1$，

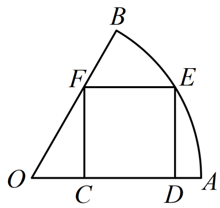
所以$\dfrac{5}{4}<1+\dfrac{1}{2}\sin t\le\dfrac{3}{2}$，

故$\sin^2 A+\sin^2 B$的取值范围是$\left(\dfrac{5}{4},\dfrac{3}{2}\right]$.



8.（2024·四川成都模拟）

某居民小区为缓解业主停车难的问题，拟对小区内一块扇形空地 AOB 进行改造，如图所示，矩形 $CDEF$ 区域为停车场，其余部分建成绿地，其中 E 在 $\overset{\frown}{AB}$ 上，F 在 OB 上，C，D 在 OA 上. 已知扇形 AOB 的半径为 2（百米），圆心角为 $\dfrac{\pi}{3}$，问：应该如何规划，可以使得矩形停车场 $CDEF$ 的面积最大？最大面积是多少？



8．**解**：（求矩形的面积需要长 CD 和宽 DE，观察发现 DE 可放到 $\mathrm{Rt}\triangle OED$ 中求，该三角形已知 OE，可设 $\angle EOD$ 为变量，求 DE）设 $\angle EOD=\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{3}\right)$，则 $DE=OE\cdot\sin\angle EOD=2\sin\alpha$，

（怎样求 CD？可按 $OD-OC$ 来求，其中 OD 和 OC 可分别到 $\triangle EOD$ 和 $\triangle FOC$ 中去求）

$OD=OE\cdot\cos\angle EOD=2\cos\alpha$，在 $\triangle FOC$ 中，$CF=DE$

$=2\sin\alpha$，又 $OC\cdot\tan\angle FOC=CF$，

所以 $OC=\dfrac{CF}{\tan\angle FOC}=\dfrac{2\sin\alpha}{\tan\frac{\pi}{3}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\alpha$，

故 $CD=OD-OC=2\cos\alpha-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\alpha$，

所以矩形 $CDEF$ 的面积 $S=CD\cdot DE$

$=\left(2\cos\alpha-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\alpha\right)\cdot2\sin\alpha=4\sin\alpha\cos\alpha-\dfrac{4}{\sqrt{3}}\sin^2\alpha$

$=2\sin2\alpha-\dfrac{4}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{1-\cos2\alpha}{2}=2\sin2\alpha+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\cos2\alpha-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，

因为 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{3}$，所以 $\dfrac{\pi}{6}<2\alpha+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{5\pi}{6}$，

故当 $2\alpha+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$，即 $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$ 时，$\sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)=1$，

此时 S 取得最大值 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，所以应让 $\angle AOE=\dfrac{\pi}{6}$，可以使矩形停车场 $CDEF$ 的面积最大，最大面积为 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ 平方百米.