3.4 函数的应用（一）

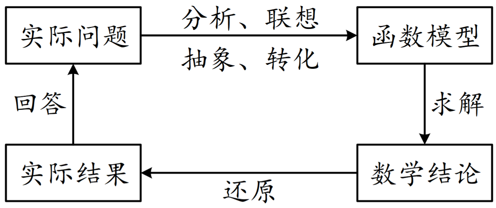
►► 习题：P1

知识梳理

解答函数应用题的基本步骤：

审题	应用题通常文字冗长，所以一定要认真读题，明确问题的实际意义，对于题干中出现的新名词、新概念等“新”事物要能够正确理解，而变量的单位也需要尤其注意，避免在后期建模时列错函数关系式.
建模	在明确问题的实际意义与各个自变量等数据的实际含义后，根据问题的已知条件结合已掌握的数学、物理等相关知识（如利润 = 总收入 − 成本、路程 = 速度 × 时间等）建立函数解析式，将实际问题用数学语言“翻译”出来，实现实际问题的数学化，建立数学模型.
求解	利用所学知识将得到的数学模型予以解答，求得结果.
检验	将模型求解后的结果代入原问题中进行检验，此时通常要考虑该结果是否符合实际背景，如原问题要求解机器的数量，则结果必须为正整数等，最后得出结论并作答.

上述步骤我们也可以用下图表示：



本节核心题型

应用题的难点是文字较长，阅读量大，题意不好理解，所以关键的步骤是建模，只要能正确地建立问题的数学模型，写出函数关系式，接下来的研究就好办了．而应用题中常见的函数模型有二次函数、双勾函数、分段函数以及双勾函数与分段函数结合等，下面我们分别举例.

【例 1】某工厂 2024 年年初用 100 万元购进一台新的设备，并立即投入使用，该设备使用后，每年的总收入预计为 50 万元．设使用 x 年后该设备的维修、保养费用为 $2x^2+5x(x\in\mathbf{N}^*)$ 万元，盈利总额为 y 万元.

（1）写出 y 与 x 之间的函数关系式；

（2）从第几年开始，使用该设备开始盈利？

解：（1）（根据题干的信息，盈利总额 = 总收入 − 购进费用 − 维修保养费用，由此可建立 y 与 x 的函数关系）

由题意，$y=50x-100-(2x^2+5x)=-2x^2+45x-100$，$x\in\mathbf{N}^*$.

（2）（开始盈利意味着 $y>0$，可由此求出 x 的取值范围，再根据题目要求，得到问题的答案）

令 $y>0$ 可得 $-2x^2+45x-100>0$，所以 $2x^2-45x+100<0$，故 $(2x-5)(x-20)<0$，解得：$\dfrac{5}{2}<x<20$，

又因为 $x\in\mathbf{N}^*$，所以 $3\le x\le 19(x\in\mathbf{N}^*)$，故从第 3 年开始，使用该设备开始盈利.

【反思】建立起函数关系式后，自变量的取值一定要符合实际情况．例如本题中 x 表示的是设备使用年数，于是我们规定 $x\in\mathbf{N}^*$.

【例 2】天气转冷，宁波某暖手宝厂商为扩大销量，拟进行促销活动．根据前期调研，获得该产品的销售量 a 万件与投入的促销费用 x 万元 $(x\ge 0)$ 满足关系式 $a=8-\dfrac{k}{x+1}$（k 为常数），而如果不搞促销活动，该产品的销售量为 4 万件．已知该产品每一万件需要投入成本 20 万元，厂家将每件产品的销售价格定为 $\left(36+\dfrac{10}{a}\right)$元，设该产品的利润为 y 万元．（注：利润＝销售收入－投入成本－促销费用）

（1）求出 k 的值，并将 y 表示为 x 的函数；

（2）促销费用为多少万元时，该产品的利润最大？此时最大利润为多少？

解：(1)（题干说“不搞促销活动，该产品的销售量为 4 万件”，这意味着当 $x=0$ 时，$a=4$，可由此求 k 的值）

由题意，当 $x=0$ 时，$a=8-k=4$，所以 $k=4$，故 $a=8-\dfrac{4}{x+1}$ ①，

（要将利润 y 表示成关于 x 的函数，需要先求销售收入、投入成本）

因为厂家将每件产品的销售价格定为 $\left(36+\dfrac{10}{a}\right)$元，所以销售 a 万件的销售收入为 $\left(36+\dfrac{10}{a}\right)a$ 万元，

又因为该产品每一万件需要投入成本 20 万元，所以 a 万件的投入成本为 $20a$ 万元，

故利润 $y=\left(36+\dfrac{10}{a}\right)a-20a-x=36a+10-20a-x=16a-x+10$ ②，

将①代入②得 $y=16\left(8-\dfrac{4}{x+1}\right)-x+10=138-\dfrac{64}{x+1}-x$，$x\ge 0$．

（2）**解法 1**：（要求 y 的最大值，若从函数的观点来看，需要判断上述函数的单调性）

设 $f(x)=138-\dfrac{64}{x+1}-x$，$x\ge 0$，任取 $0\le x_1<x_2$，$f(x_1)-f(x_2)=138-\dfrac{64}{x_1+1}-x_1-\left(138-\dfrac{64}{x_2+1}-x_2\right)$

$=x_2-x_1+\dfrac{64}{x_2+1}-\dfrac{64}{x_1+1}=x_2-x_1+\dfrac{64(x_1+1)-64(x_2+1)}{(x_2+1)(x_1+1)}=x_2-x_1+\dfrac{64(x_1-x_2)}{(x_2+1)(x_1+1)}=(x_2-x_1)\left[1-\dfrac{64}{(x_2+1)(x_1+1)}\right]$ ③，

（观察发现 $\dfrac{64}{(x_2+1)(x_1+1)}$ 这部分与 1 的大小由 x_1，x_2 与 7 的大小决定，故据此分类判断上式的正负）

当 $0\le x_1<x_2<7$ 时，$(0+1)\times(0+1)<(x_2+1)(x_1+1)<(7+1)\times(7+1)$，

所以 $1<(x_2+1)(x_1+1)<64$，从而 $\dfrac{64}{(x_2+1)(x_1+1)}>1$，故 $1-\dfrac{64}{(x_2+1)(x_1+1)}<0$，

又 $x_2-x_1>0$，所以结合式③可得 $f(x_1)-f(x_2)<0$，从而 $f(x_1)<f(x_2)$，故 $f(x)$ 在 $[0,7)$ 上单调递增，

当 $7\le x_1<x_2$ 时，$(x_2+1)(x_1+1)>(7+1)\times(7+1)=64$，所以 $0<\dfrac{64}{(x_2+1)(x_1+1)}<1$，故 $1-\dfrac{64}{(x_2+1)(x_1+1)}>0$，

又 $x_2-x_1>0$，所以结合式③可得 $f(x_1)-f(x_2)>0$，从而 $f(x_1)>f(x_2)$，故 $f(x)$ 在 $[7,+\infty)$ 上单调递减，

因为 $f(x)$ 在 $[0,7)$ 上单调递增，在 $[7,+\infty)$ 上单调递减，所以当促销费用 $x=7$ 万元时，

该产品的利润 $f(x)$ 最大，最大利润为 $f(7)=138-\dfrac{64}{7+1}-7=123$ 万元.

解法 2：（由于 $-\dfrac{64}{x+1}-x=-\left(\dfrac{64}{x+1}+x\right)$，故容易通过添项凑出“积定”，进而用基本不等式求得 $\dfrac{64}{x+1}+x$ 的最小值，此时 y 也就最大）$y=138-\dfrac{64}{x+1}-x=138-\left(\dfrac{64}{x+1}+x\right)=139-\left(\dfrac{64}{x+1}+x+1\right)$，

因为 $\dfrac{64}{x+1}+x+1\ge 2\sqrt{\dfrac{64}{x+1}\cdot(x+1)}=16$，当且仅当 $\dfrac{64}{x+1}=x+1$，即 $x=7$ 时取等号，

所以 $y \le 139-16=123$，故当促销费用 $x=7$ 万元时，该产品的利润最大，最大利润为 123 万元.

【反思】建立起实际问题的函数模型后，分析最值可以用函数的观点，比如研究单调性、画图等，也可以用基本不等式的方法，哪种方便就选哪种.

【例 3】某出租车租赁公司收费标准如下：起价费 10 元（里程不超过 5 公里，按 10 元收费），超过 5 公里，但不超过 20 公里的部分，每公里按 1.5 元收费，超过 20 公里的部分，每公里再加收 0.3 元.

（1）请建立租赁总价 y（元）关于行驶里程 x（公里）的函数关系式；

（2）若某人的租车总价为 50.5 元，则他的行驶里程为多少公里？

解：（1）由题意，当 $0<x\le 5$ 时，$y=10$；当 $5<x\le 20$ 时，$y=10+(x-5)\times 1.5=1.5x+2.5$；

当 $x>20$ 时，$y=10+(20-5)\times 1.5+(x-20)\times(1.5+0.3)=1.8x-3.5$；

综上所述，租赁总价 y 关于行驶里程 x 的函数关系式为 $y=\begin{cases}10,0<x\le 5\\1.5x+2.5,5<x\le 20\\1.8x-3.5,x>20\end{cases}$.

（2）（不确定行驶里程在分段函数的哪一段，故通过讨论代入解析式）

当 $0<x\le 5$ 时，$y=10\ne 50.5$，不合题意；

当 $5<x\le 20$ 时，$y=50.5$ 即为 $1.5x+2.5=50.5$，解得：$x=32$，不满足 $5<x\le 20$，舍去；

当 $x>20$ 时，$y=50.5$ 即为 $1.8x-3.5=50.5$，解得：$x=30$，满足 $x>20$；

所以若某人的租车总价为 50.5 元，则他的行驶里程为 30 公里.

【例 4】新冠疫情发生以后，口罩供不应求，某口罩厂日夜加班生产，为抗击疫情做贡献．生产口罩的固定成本为 400 万元，每生产 x 万箱，需另投入生产成本 $p(x)$ 万元，当产量不足 40 万箱时，$p(x)=x^2+100x$；当产量不小于 40 万箱时，$p(x)=161x+\dfrac{4900}{x}-1100$，若每箱口罩售价 160 元，通过市场分析，该口罩厂生产的口罩可以全部销售完.

（1）求口罩销售利润 y（万元）关于产量 x（万箱）的函数关系式；（销售利润 = 销售总价 − 固定成本 − 生产成本）

（2）当产量为多少万箱时，该口罩生产厂所获得利润最大，最大利润值是多少（万元）？

解：（1）由题意，生产成本 $p(x)=\begin{cases}x^2+100x,0<x<40\\161x+\dfrac{4900}{x}-1100,x\ge 40\end{cases}$，

所以当 $0<x<40$ 时，$y=160x-400-p(x)=160x-400-(x^2+100x)=-x^2+60x-400$，

当 $x\ge 40$ 时，$y=160x-400-p(x)=160x-400-\left(161x+\dfrac{4900}{x}-1100\right)=700-\left(x+\dfrac{4900}{x}\right)$，

综上所述，$y=\begin{cases}-x^2+60x-400,0<x<40\\700-\left(x+\dfrac{4900}{x}\right),x\ge 40\end{cases}$.

（2）（问题即为求 y 的最大值及对应的 x 的值，涉及分段函数求最值，可先求各段上的最值，再进行比较）

当 $0<x<40$ 时，$y=-x^2+60x-400=-(x-30)^2+500$，所以这段上当 $x=30$ 时，y 取得最大值 500；

当 $x \ge 40$ 时，$y = 700 - \left(x + \dfrac{4900}{x}\right) \le 700 - 2\sqrt{x \cdot \dfrac{4900}{x}} = 560$，取等条件是 $x = \dfrac{4900}{x}$，即 $x = 70$，

所以这段上当 $x = 70$ 时，y 取得最大值 560；

因为 $560 > 500$，所以当产量为 70 万箱时，该口罩生产厂所获得利润最大，最大利润值是 560 万元.

强化训练

A 组 夯实基础

1.（2024·上海闵行模拟）

某园林建设公司计划购买一批机器投入施工. 据分析，这批机器可获得的利润 y（单位：万元）与运转时间 x（单位：年）的函数解析式为 $y = -x^2 + 12x - 9(x \le 11 \text{ 且 } x \in \mathbf{N}^*)$.

（1）当这批机器运转几年时，可获得最大利润，最大利润为多少？

（2）当运转多少年时，这批机器的年平均利润最大？

B 组 强化能力

2.（2024·内蒙古模拟）

设某商品的利润只由生产成本和销售收入决定，生产成本 C（万元）与产量 x（百件）的函数关系是 $C(x) = 10000 + 20x$；销售收入 S（万元）与产量 x 的函数关系为 $S(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{50}x^2 + 220x, 0 < x < 120 \\ 25488 + 10x, x \ge 120 \end{cases}$.

（1）求该商品的利润 $W(x)$ 关于产量 x 的函数解析式;（利润 = 销售收入 − 生产成本）

（2）为使该商品的利润最大化，应如何安排产量？

3.（2024·河南模拟）

某乡镇为全面实施乡村振兴战略，大力发展特色农产业，提升特色农产品的知名度，邀请了一家广告牌制作公司设计一个宽为 x 米、长为 y 米的长方形展牌，其中 $y>x$，并要求其面积为 $2(x-y+10)$ 平方米.

（1）求 y 关于 x 的函数 $f(x)$；

（2）用定义证明 $f(x)$ 在其定义域内的单调性；

（3）如何设计展牌的长和宽，才能使展牌的周长最小？

C组 拓展提升

4.（2024·江西上饶期末）

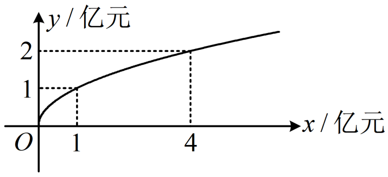
随着我国经济发展、医疗消费需求增长、人们健康观念转变以及人口老龄化进程加快等因素的影响，医疗器械市场近年来一直保持着持续高增长的趋势．上饶市医疗器械公司为了进一步增加市场竞争力，计划改进技术生产某产品．已知生产该产品的年固定成本为 400 万元，最大产能为 100 台．每生产 x 台，还需另外投入成本 $G(x)$ 万元，且 $G(x)=\begin{cases}2x^2+80x, 0<x\le 40\\ 201x+\dfrac{3600}{x}-2100, 40<x\le 100\end{cases}$，由市场调研可知，该产品每台的售价为 200 万元，且全年内生产的该产品当年能全部销售完.

（1）写出年利润 $W(x)$ 万元关于年产量 x 台的函数解析式（利润 = 销售收入 − 成本）；

（2）当该产品的年产量为多少时，公司所获利润最大？最大利润是多少？

5．（2024·湖北宜昌模拟）

美国对中国芯片的技术封锁，激发了中国“芯”的研究热潮. 某公司研发的 A，B 两种芯片都已经获得成功. 该公司研发芯片已经耗费资金 2 亿元，现在准备投入资金进行生产，经市场调查与预测，生产 A 芯片的毛收入与投入的资金成正比，已知每投入 1 亿元，公司获得毛收入 0.25 亿元；生产 B 芯片的毛收入 y（亿元）与投入的资金 x（亿元）的函数关系为 $y = kx^{\alpha}\ (x > 0)$，其图象如图所示.



（1）试分别求出生产 A，B 两种芯片的毛收入 y（亿元）与投入资金 x（亿元）的函数关系式；

（2）如果公司只生产一种芯片，那么生产哪种芯片毛收入更大？

（3）现在公司准备投入 40 亿元资金同时生产 A，B 两种芯片，设投入 x 亿元生产 B 芯片，用 $f(x)$ 表示公司所获净利润，当 x 为多少时，可以获得最大净利润？并求出最大净利润.（净利润 $=$ A 芯片毛收入 $+$ B 芯片毛收入 $-$ 研发耗费资金）