强化训练

A 组 夯实基础

1．（2024·辽宁朝阳模拟）

函数 $f(x)=\log_3(x^2-1)$ 的定义域为（　　）

A．$(-\infty,1)$　　B．$\mathbf{R}$

C．$(0,+\infty)$　　D．$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

1．D

解析： 令 $x^2-1>0$ 得 $x^2>1$，所以 $x<-1$ 或 $x>1$，

故函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

2．（2024·贵州贵阳模拟）

已知 $a=\log_2 3$， $b=\log_{0.3} 2$， $c=0.3^{0.3}$，则（　　）

A．$b<c<a$　　B．$c<a<b$

C．$a<b<c$　　D．$b<a<c$

2．A

解析： $a=\log_2 3>\log_2 2=1$， $b=\log_{0.3}2<\log_{0.3}1=0$，

又 $0<0.3^{0.3}<0.3^0$，所以 $0<c<1$，故 $b<c<a$.

3．（2024·四川成都模拟）

已知 $a=\log_3 0.2$， $b=3^{0.2}$， $c=0.3^{0.2}$，则（　　）

A．$a<b<c$　　B．$c<a<b$

C．$a<c<b$　　D．$b<c<a$

3．C

解析： $a=\log_3 0.2<0$，b，c 都大于 0，所以 a 最小，

注意到 b，c 指数相同，故可构造幂函数比较大小，

设 $f(x)=x^{0.2}$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上↗，

又 $0.3<3$，所以 $f(0.3)<f(3)$，从而 $0.3^{0.2}<3^{0.2}$，故 $c<b$，

结合 a 最小可得 $a<c<b$.

4．（2024·山西大同模拟）

函数 $f(x)=\lg(4-|x|)$ 的单调递增区间为（　　）

A．$(-4,0)$　　B．$(-\infty,0)$

C．$(0,4)$　　D．$(0,+\infty)$

4．A

解析： 函数 $y=f(x)$ 由 $y=\lg u$ 和 $u=4-|x|$ 复合而成，可由同增异减准则分析单调性，下面先求定义域，

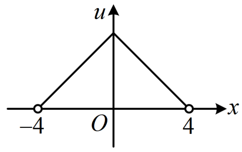
由 $4-|x|>0$ 可得 $|x|<4$，所以 $-4<x<4$，

故 $f(x)$ 的定义域是 $(-4,4)$，

函数 $u=4-|x|$ 在 $(-4,4)$ 上的图象如图，由图可知，

$u=4-|x|$ 在 $(-4,0)$ 上↗，在 $(0,4)$ 上↘，

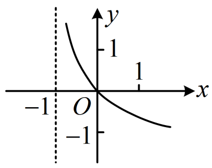
又外层函数 $y=\lg u$ 在 u 的范围内始终↗，所以由同增异减准则，$f(x)$ 在 $(-4,0)$ 上↗，在 $(0,4)$ 上↘，故选 A.

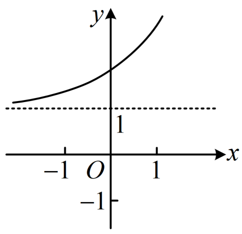


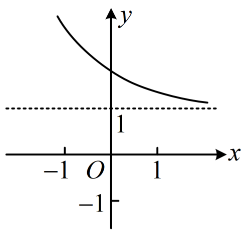
B组 强化能力

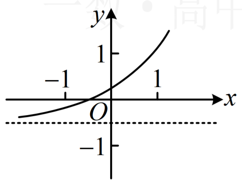
5.（2023 • 上海模拟）

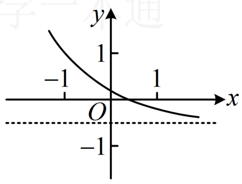
若函数 $f(x)=\log_a(x+b)$ 的大致图象如图，其中 a，b 为常数，则函数 $g(x)=a^x+b$ 的大致图象是（　　）




A


B


C


D

5. B

解析：由所给图象可知 $f(0)=\log_a b=0$，所以 $b=1$，

从而 $f(x)=\log_a(x+1)$，$g(x)=a^x+1$，故 $g(0)=a^0+1=2$，

所以 $g(x)$ 的图象过点 $(0,2)$，排除选项 C、D；

再看选项 A、B，主要差别是单调性，要判断 $g(x)$ 的单调性，需要知道 a 与 1 的大小，可由 $f(x)$ 的单调性来分析，

$y=f(x)$ 由 $y=\log_a u$ 和 $u=x+1$ 复合而成，因为 $u=x+1$ 在 $(-1,+\infty)$ 上↗，而由图可知 $y=f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上↘，

所以由同增异减准则，$y=\log_a u$ 在 u 的取值范围内↘，

故 $0<a<1$，所以 $g(x)=a^x+1$ 在 $\mathbf{R}$ 上↘，排除 A，选 B.

6.（2024 • 上海闵行模拟）

函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+2)-x^2$，$x\in[2,6]$ 的最大值为______.

6. -6

解析：欲求最大值，先判断单调性，可拆分成 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+2)$ 和 $y=-x^2$ 两部分分别判断，

$y=\log_{\frac{1}{2}}u$ 在 u 的范围内↘，$u=x+2$ 在 $[2,6]$ 上↗，

所以由同增异减准则，$y=\log_{\frac{1}{2}}(x+2)$ 在 $[2,6]$ 上↘，

又 $y=-x^2$ 在 $[2,6]$ 上也↘，所以 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+2)-x^2$ 在 $[2,6]$ 上↘，故 $y_{\max}=\log_{\frac{1}{2}}(2+2)-2^2=\log_{\frac{1}{2}}4-4=-2-4=-6$.

7.（2024 • 广西南宁模拟）

已知函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(-x^2+2x+7)$，则 $f(x)$ 的值域是_____.

7. $[-3,+\infty)$

解析：令 $u=-x^2+2x+7$，则 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}u$，

$u=-x^2+2x+7=-(x-1)^2+8\le 8$，

结合在 $y=\log_{\frac{1}{2}}u$ 中 $u>0$ 可得 $0<u\le 8$，

函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}u$ 在 $(0,8]$ 上↘，所以 $\log_{\frac{1}{2}}u\ge\log_{\frac{1}{2}}8=-3$，

故函数 $f(x)$ 的值域是 $[-3,+\infty)$.

8.（2024 • 天津南开一模）

已知 $a=2^{-1.1}$，$b=\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{3}$，$c=\log_2 3$，则（　　）

A．$a<b<c$　　　B．$c<b<a$

C．$b<a<c$　　　D．$b<c<a$

8. A

解析：涉及指对混合比较大小，先对数据进行整数级估算，

因为 $y=2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上↗，所以 $0<a=2^{-1.1}<2^0=1$，

又 $y=\log_{\frac{1}{4}}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上↘，所以 $\log_{\frac{1}{4}}1<\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{3}<\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{4}$，

故 $0<b<1$，因为 $y=\log_2 x$ 在 $(0,+\infty)$ 上↗，

所以 $\log_2 2<\log_2 3<\log_2 4$，故 $1<c<2$，

于是 c 最大，a，b 都在 $(0,1)$ 上，可再把它们与 $\frac{1}{2}$ 比较，

因为 $a=2^{-1.1}=\frac{1}{2^{1.1}}<\frac{1}{2^1}=\frac{1}{2}$，所以 $0<a<\frac{1}{2}$，

怎样比较 b 与 $\frac{1}{2}$ 的大小？可将 $\frac{1}{2}$ 化为与 b 同底的对数来看，

因为 $\frac{1}{2}=\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{2}$，而 $\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{3}>\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{2}$，所以 $b>\frac{1}{2}$，

从而 $\frac{1}{2}<b<1$，故 $0<a<\frac{1}{2}<b<1<c<2$，所以 $a<b<c$.

9.（2024 • 湖南衡阳模拟）

设 $a=\log_3 2$，$b=\ln 2$，$c=e^{0.1}$，$d=\frac{1}{2}$，则 a，b，c，d 的大小关系是（　　）

A．$a>b>c>d$　　　B．$b>a>c>d$

C．$c>b>a>d$　　　D．$d>a>b>c$

9. C

解析：涉及指对混合比较大小，先进行整数级估算，

因为 $y=\log_3 x$ 在 $(0,+\infty)$ 上↗，所以 $\log_3 1<\log_3 2<\log_3 3$，

故 $0<a<1$，因为 $y=\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上↗，

所以 $\ln 1<\ln 2<\ln \mathrm{e}$，故 $0<b<1$，

因为 $y=\mathrm{e}^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上↗，所以 $c=\mathrm{e}^{0.1}>\mathrm{e}^0=1$，

结合 $d=\frac{1}{2}$ 可知 c 最大，再比较 a，b，d，由于 d 的数值很清晰，不妨把 a 和 b 与 d 比较，

因为 $\log_3 2>\log_3\sqrt{3}=\frac{1}{2}$，所以 $a>\frac{1}{2}=d$，

又 $4>\mathrm{e}$，所以 $2>\sqrt{\mathrm{e}}$，故 $\ln 2>\ln\sqrt{\mathrm{e}}=\frac{1}{2}$，即 $b>\frac{1}{2}=d$，

于是 a，b，d 中 d 最小，还需比较 a 和 b，怎么比？观察发现它们的真数相同，故可用公式 $\log_m n=\frac{1}{\log_n m}$ 化同底，

$a=\log_3 2=\frac{1}{\log_2 3}$，$b=\ln 2=\frac{1}{\log_2 \mathrm{e}}$，

由 $y=\log_2 x$ 在 $(0,+\infty)$ 上↗可得 $\log_2 3>\log_2 \mathrm{e}>\log_2 1=0$，

所以 $\frac{1}{\log_2 3}<\frac{1}{\log_2 \mathrm{e}}$，故 $a<b$，

综合以上比较结果可知 $c>b>a>d$.

10.（2024·天津南开一模）

函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$，记 $a=f\left(-\frac{1}{2}\right)$，$b=f(3^{-0.5})$，$c=f\left(\log_5\frac{1}{2}\right)$，则（　　）

A．$a<b<c$　　　B．$b<a<c$

C．$c<a<b$　　　D．$c<b<a$

10．B

解析：a，b，c 都是函数值，代解析式计算再比较显然比较麻烦，考虑用单调性处理，

$f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(-x)=\frac{1}{(-x)^2+1}=\frac{1}{x^2+1}=f(x)$，

所以 $f(x)$ 为偶函数，当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$f(x)$↘，

观察发现 a，b，c 的自变量不都在 $[0,+\infty)$ 上，故先由 $f(x)$ 为偶函数把它们化到 $[0,+\infty)$ 上来，便于用单调性比较，

由题意，$a=f\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)$，$b=f(3^{-0.5})$，

$c=f\left(\log_5\frac{1}{2}\right)=f(\log_5 2^{-1})=f(-\log_5 2)=f(\log_5 2)$，

故只需比较 $\frac{1}{2}$，$3^{-0.5}$，$\log_5 2$ 的大小，$\frac{1}{2}$ 的数值很清晰，故尝试把另外两个与它比较，

$3^{-0.5}=\frac{1}{3^{0.5}}=\frac{1}{\sqrt{3}}>\frac{1}{2}$，$\log_5 2<\log_5\sqrt{5}=\frac{1}{2}$，

所以 $3^{-0.5}>\frac{1}{2}>\log_5 2$，结合 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上↘可得

$f(3^{-0.5})<f\left(\frac{1}{2}\right)<f(\log_5 2)$，故 $b<a<c$.

11．（2024·四川成都开学考试）（多选）

已知函数 $f(x)=\log_2(x+2)-\log_2(2-x)$，则下列说法正确的有（　　）

A．函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-2,2)$

B．函数 $f(x)$ 的值域为 $(-\infty,0]$

C．函数 $f(x)$ 是定义域上的奇函数

D．函数 $f(x)$ 是定义域上的偶函数

11．AC

解析：A 项，由 $\begin{cases}x+2>0\\2-x>0\end{cases}$ 可得 $-2<x<2$，所以 $f(x)$ 的定义域为 $(-2,2)$，故 A 项正确；

B 项，$f(x)=\log_2\frac{x+2}{2-x}=\log_2\frac{4+(x-2)}{2-x}=\log_2\left(\frac{4}{2-x}-1\right)$，

因为 $-2<x<2$，所以 $0<2-x<4$，从而 $\frac{4}{2-x}>1$，

故 $\frac{4}{2-x}-1>0$，所以 $\log_2\left(\frac{4}{2-x}-1\right)\in\mathbf{R}$，

从而 $f(x)$ 的值域为 **R**，故 B 项错误；

C 项，$f(-x)=\log_2(-x+2)-\log_2[2-(-x)]$

$=\log_2(2-x)-\log_2(x+2)=-f(x)$，

所以 $f(x)$ 为奇函数，故 C 项正确；

D 项，$f(x)$ 是奇函数，不是偶函数，故 D 项错误.

12．（2024·黑龙江哈尔滨一模）

酒驾是严重危害交通安全的违法行为. 为保障交通安全，根据国家有关规定：100mL 血液中酒精含量达到 20~79mg 的驾驶员即为酒后驾车，80mg 及以上认定为醉酒驾车. 假设某驾驶员饮酒后，其血液中的酒精含量上升到了 0.6mg/mL，若停止喝酒，则他血液中酒精含量会以每小时 30%的速度减少，那么他至少经过几个小时才能驾驶？（结果取整数，参考数据：$\lg 3\approx 0.48$，$\lg 7\approx 0.85$）（　　）

A．1　　　　B．2

C．3　　　　D．4

12．D

解析：由题意，该驾驶员饮酒后每 100mL 血液中酒精含量为 $0.6\times100=60\text{mg}$，经过 x 个小时后，他每 100mL 血液中酒精含量为 $60\times(1-30\%)^x=60\times0.7^x$ mg，

令 $60\times0.7^x<20$ 可得 $0.7^x<\frac{1}{3}$，

参考数据中给的都是一些常用对数值，于是考虑将上式两端取常用对数，

所以 $\lg 0.7^x<\lg\frac{1}{3}$，故 $x\lg 0.7<-\lg 3$，

又 $\lg 0.7<0$，所以 $x>-\frac{\lg 3}{\lg 0.7}=-\frac{\lg 3}{\lg\frac{7}{10}}=-\frac{\lg 3}{\lg 7-1}=\frac{\lg 3}{1-\lg 7}$

$\approx\frac{0.48}{1-0.85}=3.2$，题干说结果取整数，但需注意，由于交通法规要求，这里不能四舍五入，只能向上取整，

所以该驾驶员至少经过 4 小时才能驾驶.

13．（2024 • 辽宁葫芦岛开学考试）（多选）

已知函数 $f(x)=\lg(x^2+ax-a-1)$，则下列说法正确的有（　　）

A．当 $a=0$ 时，函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

B．函数 $f(x)$ 有最小值

C．当 $a=0$ 时，函数 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$

D．若 $f(x)$ 在区间 $[2,+\infty)$ 上单调递增，则实数 a 的取值范围是 $[-4,+\infty)$

13．AC

解析：A 项，当 $a=0$ 时，$f(x)=\lg(x^2-1)$，

令 $x^2-1>0$ 可得 $x^2>1$，所以 $x<-1$ 或 $x>1$，

从而 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$，故 A 项正确；

B 项，$f(x)$ 有最小值意味着 $u=x^2+ax-a-1$ 有最小值，可以想象，$x^2+ax-a-1$ 在 $f(x)$ 定义域内的取值范围可能是 $(0,+\infty)$，不一定有最小值，故此项错误，下面举个例子，

当 $a=0$ 时，$f(x)=\lg(x^2-1)$，定义域为 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$，

此时 $x^2-1\in(0,+\infty)$，所以 $\lg(x^2-1)\in\mathbf{R}$，从而 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$，$f(x)$ 没有最小值，故 B 项错误；

C 项，由 B 项的分析过程可知 C 项正确；

D 项，$f(x)$ 由 $y=\lg u$ 和 $u=x^2+ax-a-1$ 复合而成，可用同增异减准则分析单调性，

$y=\lg u$ 在 u 的范围内↗，由同增异减准则，要使 $f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上↗，应有 $u=x^2+ax-a-1$ 在 $[2,+\infty)$ 上↗，

如图，应有 $x=2$ 在对称轴的右侧（或恰好在对称轴处），

所以 $-\dfrac{a}{2}\le 2$，解得：$a\ge -4$，

结束了吗？还没有！$f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上↗隐含了 $f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上有定义，所以还需考虑这一点，

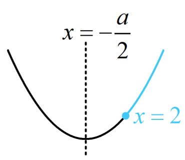
由题意，$f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上有定义，所以 $u=x^2+ax-a-1$

>0 在 $[2,+\infty)$ 上恒成立，

由下图可知 $u=x^2+ax-a-1>0$ 在 $[2,+\infty)$ 上↗，

所以 $u_{\min}=2^2+a\cdot 2-a-1=a+3$，故 $a+3>0$，故 $a>-3$，

所以 a 的取值范围是 $(-3,+\infty)$，故 D 项错误.



14．（2024 • 浙江杭州期末）

已知函数 $f(x)=\log_2(ax^2+2x-1)$，$a\in\mathbf{R}$．

（1）若 $f(x)$ 过点 $(1,2)$，求 $f(x)$ 的单调递减区间；

（2）若 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$，求 a 的取值范围.

14．**解**：（1）因为 $f(x)$ 过点 $(1,2)$，所以 $f(1)=\log_2(a+1)=2$，

从而 $a+1=2^2$，故 $a=3$，$f(x)=\log_2(3x^2+2x-1)$，

由 $3x^2+2x-1>0$ 得 $(x+1)(3x-1)>0$，故 $x<-1$ 或 $x>\dfrac{1}{3}$，

所以 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,-1)\cup\left(\dfrac{1}{3},+\infty\right)$，

函数 $y=f(x)$ 由 $y=\log_2 u$ 和 $u=3x^2+2x-1$ 复合而成，

$y=\log_2 u$ 在 u 的范围内始终单调递增，$u=3x^2+2x-1$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$ 上单调递增，

所以由同增异减准则，$f(x)$ 的单调递减区间是 $(-\infty,-1)$.

（2）令 $t=ax^2+2x-1$，则 $f(x)=\log_2 t$，

（函数 $f(x)=\log_2 t$ 的值域为 $\mathbf{R}$ 意味着 t 能取遍所有正数，那要翻译为 $t=ax^2+2x-1>0$ 恒成立吗？不是的，这里需要的是 t 取遍所有正数，至于负数和 0 能否取到，其实无所谓，因为即使能取到，定义域也会自动把这部分排除掉. 注意到 t 的取值情况受 a 的正负影响，故讨论）

当 $a>0$ 时，$\Delta=2^2-4a\cdot(-1)=4+4a>4>0$，如图 1，$t$ 能取遍所有正数，满足 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$；

当 $a=0$ 时，$t=2x-1$，如图 2，t 能取遍所有正数，满足 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$；

当 $a<0$ 时，二次函数 $t=ax^2+2x-1$ 开口向下，t 不可能取遍所有正数，不满足 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$；

综上所述，a 的取值范围是 $[0,+\infty)$.

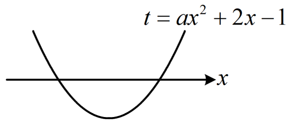


图1

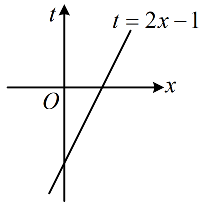


图2

C 组 拓展提升

15.（2024 • 云南模拟）

若 $f(x)=\ln\left(1+\frac{2}{x+b}\right)$ 为奇函数，则 $b=$______.

15. -1

解法 1：根据奇函数求参，可考虑用 $f(-x)+f(x)=0$ 处理，

因为 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(-x)+f(x)=$

$\ln\left(1+\frac{2}{-x+b}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{x+b}\right)=\ln\frac{b+2-x}{b-x}+\ln\frac{b+2+x}{b+x}$

$=\ln\left(\frac{b+2-x}{b-x}\cdot\frac{b+2+x}{b+x}\right)=\ln\frac{(b+2)^2-x^2}{b^2-x^2}=0$，

从而 $\frac{(b+2)^2-x^2}{b^2-x^2}=1$，故 $(b+2)^2=b^2$，解得：$b=-1$，

此时 $f(x)=\ln\left(1+\frac{2}{x-1}\right)=\ln\frac{x+1}{x-1}$，满足 $f(x)$ 为奇函数.

解法 2：根据奇函数求参，也可考虑从定义域出发分析，

由题意，$f(x)=\ln\left(1+\frac{2}{x+b}\right)=\ln\frac{x+b+2}{x+b}$，

令 $\frac{x+b+2}{x+b}>0$ 可得 $(x+b)(x+b+2)>0$，

所以 $x<-b-2$ 或 $x>-b$，

故 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,-b-2)\cup(-b,+\infty)$，

奇函数的定义域关于原点对称，所以 $-b-2=-(-b)$，

解得：$b=-1$，经检验，满足 $f(x)$ 为奇函数.

16.（2024 • 全国模拟）

设 $a=\log_{0.3}0.4$， $b=\log_3 0.4$，则下列不等关系正确的是（　　）

A． $ab<a+b<0$

B． $a+b<ab<0$

C． $ab<0<a+b$

D． $a+b<0<ab$

16．A

解析：由对数判正负的口诀“同正异负”可知 $a>0$，

$b<0$，所以 $ab<0$，

怎样比较 ab 与 $a+b$，以及 $a+b$ 与 0 的大小？观察发现 a，b 的真数相同，故可考虑用 $\log_m n=\dfrac{1}{\log_n m}$ 来化同底分析，

因为 $a=\log_{0.3}0.4=\dfrac{1}{\log_{0.4}0.3}$，所以 $\dfrac{1}{a}=\log_{0.4}0.3$，

因为 $b=\log_3 0.4=\dfrac{1}{\log_{0.4}3}$ ，所以 $\dfrac{1}{b}=\log_{0.4}3$，

所以 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\log_{0.4}0.3+\log_{0.4}3=\log_{0.4}(0.3\times 3)=\log_{0.4}0.9$，

因为 $y=\log_{0.4}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上↘，且 $0.4<0.9<1$，

所以 $\log_{0.4}0.4>\log_{0.4}0.9>\log_{0.4}1$，即 $1>\log_{0.4}0.9>0$，

所以 $1>\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>0$，同时乘以 ab 可得 $ab<a+b<0$.

17.（2024 • 全国模拟）

已知函数 $f(x)=\log_a(x^2-ax+1)$ 在区间 $\left(\dfrac{1}{4},2\right)$ 上有最大值或最小值，则实数 a 的取值范围为（　　）

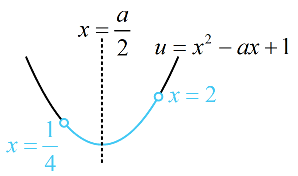
A． $\left(\dfrac{1}{4},2\right)$　　B． $\left(\dfrac{1}{2},1\right)\cup(1,2)$

C． $\left(\dfrac{1}{2},1\right)\cup(1,4)$　　D． $\left(\dfrac{1}{4},1\right)\cup(1,2)$

17．B

解析：令 $u=x^2-ax+1$，则 $f(x)=\log_a u$， $a>0$ 且 $a\neq 1$，

$f(x)$ 在 $\left(\dfrac{1}{4},2\right)$ 上有最大值或最小值意味着 u 在 $x\in\left(\dfrac{1}{4},2\right)$ 时有最大值或最小值．由于 $u=x^2-ax+1$ 开口向上，所以它在任意开区间上都没有最大值，只可能有最小值，且最小值在对称轴处取得，如图，



由 u 在 $\left(\dfrac{1}{4},2\right)$ 上有最小值得 $\dfrac{1}{4}<\dfrac{a}{2}<2\Rightarrow\dfrac{1}{2}<a<4$，

结合 $a>0$ 且 $a\neq 1$ 可得 $\dfrac{1}{2}<a<1$ 或 $1<a<4$ ①，

结束了吗？没有，到此只能保证二次函数 $u=x^2-ax+1$ 在 $\left(\dfrac{1}{4},2\right)$ 内存在最小值，但若 $u_{\min}\le 0$，则 $\log_a u_{\min}$ 没有意义，也不满足题意，故还应补充该最小值大于 0，

由 $u_{\min}=\left(\dfrac{a}{2}\right)^2-a\cdot\dfrac{a}{2}+1=1-\dfrac{a^2}{4}>0$ 可得 $-2<a<2$，

结合①得 $\dfrac{1}{2}<a<1$ 或 $1<a<2$，

所以 a 的取值范围是 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)\cup(1,2)$.

18.（2024·河南周口模拟）

已知函数 $f(x)=\ln(ae^{2x}-2e^x+1)-x$ 是定义在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的偶函数.

（1）求实数 a 的值；

（2）请问是否存在正数 m，n，使得当 $x\in[m,n]$时，函数 $f(x)$ 的值域为$[2m,2n]$？若存在这样的正数 m，n，请求出 m，n 的值；若不存在，请说明理由.

18．**解**：（1）**解法 1**：（已知 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的偶函数，可通过取特值建立方程求 a，再检验）

由题意，$f(-1)=f(1)$，所以 $\ln(ae^{-2}-2e^{-1}+1)+1=\ln(ae^2-2e+1)-1$，从而 $\ln(ae^2-2e+1)-\ln(ae^{-2}-2e^{-1}+1)=2$，

故 $\ln\dfrac{ae^2-2e+1}{ae^{-2}-2e^{-1}+1}=2=\ln e^2$，所以 $\dfrac{ae^2-2e+1}{ae^{-2}-2e^{-1}+1}=e^2$，

故 $ae^2-2e+1=a-2e+e^2$，化简得：$(a-1)(e^2-1)=0$，

所以 $a=1$，此时 $f(x)=\ln(e^{2x}-2e^x+1)-x$

$=\ln(e^{2x}-2e^x+1)-\ln e^x=\ln\dfrac{e^{2x}-2e^x+1}{e^x}$

$=\ln\left(e^x+\dfrac{1}{e^x}-2\right)=\ln(e^x+e^{-x}-2)$，

因为 $e^x+e^{-x}-2\ge 2\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}-2=0$，当且仅当 $e^x=e^{-x}$，

即 $x=0$ 时取等号，所以当 $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 时，

$e^x+e^{-x}-2>0$，满足 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，

又 $f(-x)=\ln(e^{-x}+e^x-2)=f(x)$，满足 $f(x)$ 为偶函数，

所以 $a=1$ 满足题意.

解法 2：（已知 $f(x)$ 为偶函数，也可考虑直接用定义处理）

$f(x)=\ln(ae^{2x}-2e^x+1)-x=\ln(ae^{2x}-2e^x+1)-\ln e^x$

$=\ln\dfrac{ae^{2x}-2e^x+1}{e^x}=\ln(ae^x+e^{-x}-2)$，

因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(-x)=f(x)$ 恒成立，

从而 $\ln(ae^{-x}+e^x-2)=\ln(ae^x+e^{-x}-2)$，

故 $ae^{-x}+e^x-2=ae^x+e^{-x}-2$，所以 $(a-1)(e^x-e^{-x})=0$，

因为当 $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 时，$e^x-e^{-x}\ne 0$，所以要使上式恒成立，只能 $a-1=0$，故 $a=1$.

（2）（分析 $x\in[m,n]$ 时 $f(x)$ 的值域需要 $f(x)$ 的单调性，$f(x)$ 是复合函数，我们先来看内层函数的单调性）

由（1）可得 $f(x)=\ln(e^x+e^{-x}-2)$，

设 $g(x)=e^x+e^{-x}-2$，任取 $0<x_1<x_2$，$g(x_1)-g(x_2)=$

$e^{x_1}+e^{-x_1}-2-(e^{x_2}+e^{-x_2}-2)=e^{x_1}-e^{x_2}+\dfrac{1}{e^{x_1}}-\dfrac{1}{e^{x_2}}$

$=e^{x_1}-e^{x_2}+\dfrac{e^{x_2}-e^{x_1}}{e^{x_1}\cdot e^{x_2}}=(e^{x_1}-e^{x_2})\left(1-\dfrac{1}{e^{x_1+x_2}}\right)$，

因为 $0<x_1<x_2$，所以 $e^{x_1}<e^{x_2}$，故 $e^{x_1}-e^{x_2}<0$，

且 $e^{x_1+x_2}>e^0=1$，所以 $\dfrac{1}{e^{x_1+x_2}}<1$，故 $1-\dfrac{1}{e^{x_1+x_2}}>0$，

所以 $g(x_1)-g(x_2)=(e^{x_1}-e^{x_2})\left(1-\dfrac{1}{e^{x_1+x_2}}\right)<0$，

从而 $g(x_1)<g(x_2)$，故 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

又 $f(x)=\ln g(x)$，所以由同增异减准则可知，

$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

假设存在正数 m，n 使 $f(x)$ 在 $[m,n]$ 上的值域为 $[2m,2n]$，

则 $\begin{cases}f(m)=2m\\f(n)=2n\end{cases}$，即 $\begin{cases}\ln(e^m+e^{-m}-2)=2m\\\ln(e^n+e^{-n}-2)=2n\end{cases}$，

所以 $\begin{cases}\ln(e^m+e^{-m}-2)=\ln e^{2m}\\\ln(e^n+e^{-n}-2)=\ln e^{2n}\end{cases}$，从而 $\begin{cases}e^m+e^{-m}-2=e^{2m}\\e^n+e^{-n}-2=e^{2n}\end{cases}$，

故 $\begin{cases}e^{2m}-e^m+2-e^{-m}=0 & ①\\e^{2n}-e^n+2-e^{-n}=0 & ②\end{cases}$，

由 m 是正数可得 $2m>m$，所以 $e^{2m}>e^m$，故 $e^{2m}-e^m>0$，

又 $e^m>e^0=1$，所以 $e^{-m}=\dfrac{1}{e^m}<1$，故 $2-e^{-m}>2-1=1>0$，

所以 $e^{2m}-e^m+2-e^{-m}>0$，同理，$e^{2n}-e^n+2-e^{-n}>0$，

这与方程①②矛盾，所以不存在正数 m，n 使 $f(x)$ 在 $[m,n]$ 上的值域为 $[2m,2n]$.