强化训练

A 组 夯实基础

1.（2024 • 重庆长寿期末）

下列命题中，正确的个数有（　　）

① $A \subseteq A$；② $\{0\} \in \{0,1,2\}$；③著名的运动健儿能构成集合；④ $\{0\} = \varnothing$；⑤ $\varnothing \subsetneqq A$；⑥ $\{0,1,2\} \subseteq \{2,1,0\}$.

A．1　　B．2　　C．3　　D．5

1. B

解析：①项，任何集合都是本身的子集，故①项正确；

②项，$\{0\}$ 和 $\{0,1,2\}$ 都是集合，不能用“$\in$”表示二者的关系，正确的说法应该是 $\{0\} \subseteq \{0,1,2\}$，故②项错误；

③项，“著名”的标准不明确，不满足集合中元素确定性，所以著名的运动健儿不能构成集合，故③项错误；

④项，$\{0\}$ 是由元素“0”构成的集合，不是空集，故④项错误；

⑤项，A 是否为空集不确定，当 $A = \varnothing$ 时，$\varnothing \subsetneqq A$ 不成立，故⑤项错误；

⑥项，集合中的元素可以交换顺序，所以 $\{0,1,2\}$ 和 $\{2,1,0\}$ 是相同的集合，故⑥项正确.

2.（2024 • 内江期末）

已知集合 $M = \{x \in \mathbf{N} \mid 2x - 3 < 2\}$，则 M 的非空子集的个数是_____.

2. 7

解析：由 $2x - 3 < 2$ 可得 $2x < 5$，解得：$x < \dfrac{5}{2}$，

结合 $x \in \mathbf{N}$ 可知 $x = 0$，1 或 2，所以 $M = \{0,1,2\}$，

M 有 3 个元素，所以 M 的非空子集个数是 $2^3 - 1 = 7$.

3.（2024 • 山东日照模拟）

已知集合 A 满足 $\{0,1\} \subseteq A \subsetneqq \{0,1,2,3\}$，则集合 A 的个数为（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

3. C

解法 1：满足 $\{0,1\} \subseteq A \subsetneqq \{0,1,2,3\}$ 的集合 A 中必有元素 0 和 1，其它元素只能在 2 和 3 中选，且不能都选，

所以满足条件的 A 有 $\{0,1\}$，$\{0,1,2\}$，$\{0,1,3\}$，共 3 个.

解法 2：可将 A 拆分成两部分，一部分是 $\{0,1\}$，另一部分是 $\{2,3\}$ 的真子集，二者合在一起就能产生满足题意的 A，

由题意，A 的个数即为 $\{2,3\}$ 的真子集个数，该集合有 2 个元素，其真子集个数为 $2^2 - 1 = 3$，所以集合 A 的个数为 3.

B 组 强化能力

4.（2024 • 河南安阳模拟）（多选）

已知集合 $A = \{0, \varnothing\}$，则下列关系正确的是（　　）

A．$0 \in A$　　B．$\varnothing \in A$

C．$\varnothing \subsetneqq A$　　D．$0 \subsetneqq A$

4. ABC

解析：A 项，元素 0 在集合 A 中，即 $0 \in A$，故 A 项正确；

B 项，$\varnothing$ 是 A 中的元素，所以 $\varnothing \in A$，故 B 项正确；

C 项，空集是任意非空集合的真子集，这里 A 显然不是空集，所以 $\varnothing \subsetneqq A$，故 C 项正确；

D 项，0 是 A 中的元素，元素与集合的关系不能用“$\subsetneqq$”表示，故 D 项错误.

5.（2024 • 山东模拟）

设 $A=\{1,4,2x\}$，$B=\{1,x^2\}$，若 $B\subseteq A$，则 $x=$（　　）

A．0　　　　　B．0 或 2

C．0 或 -2　　　D．2 或 -2

5．C

解析：因为 $B\subseteq A$，所以 $x^2=4$ 或 $x^2=2x$，

解得：$x=-2$，2 或 0，经检验，当 $x=2$ 时，

集合 A 不满足元素互异，所以 $x=-2$ 或 0.

6.（2024 • 云南昆明模拟）

若集合 $A=\{x\in \mathbf{Z}\,|\,m<x<4\}$ 有 15 个真子集，则实数 m 的取值范围为（　　）

A．$\{m\,|\,-1\le m<0\}$　B．$\{m\,|\,-1<m\le 0\}$

C．$\{m\,|\,-1<m<0\}$　D．$\{m\,|\,-1\le m\le 0\}$

6．A

解析：给出 A 的真子集个数，可求得 A 的元素个数，

设 A 有 n 个元素，则其真子集个数为 2^n-1，

由题意，$2^n-1=15$，解得：$n=4$，

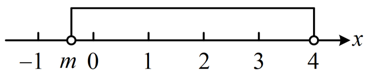
怎样能使 A 有 4 个元素？我们不妨画数轴来看看，

如图，因为集合 A 中的元素都是整数，所以要使 A 中有 4 个元素，应有 m 在 -1 和 0 之间，且 -1 能取，

此时 $A=\{x\in \mathbf{Z}\,|\,-1<x<4\}=\{0,1,2,3\}$，$A$ 中有 4 个元素，

而 0 不能取，因为此时 $A=\{x\in \mathbf{Z}\,|\,0<x<4\}=\{1,2,3\}$，

集合 A 中只有 3 个元素，所以 $-1\le m<0$.



7.（2024 • 全国模拟）

已知集合 $M=\{x\in \mathbf{R}\,|\,ax^2+2x-3=0\}$ 至多有 1 个真子集，则 a 的取值范围是_____.

7．$\left\{a\middle|a=0\text{或}a\le -\dfrac{1}{3}\right\}$

解析：真子集的个数与集合的元素个数有关，故先把条件翻译成集合 M 的元素个数，再来分析集合 M，

设 M 有 n 个元素，则其真子集个数为 2^n-1，由题意，

$2^n-1\le 1$，解得：$n\le 1$，结合 $n\in \mathbf{N}$ 可得 $n=0$ 或 1，

所以 $M=\varnothing$ 或 M 中只有 1 个元素，

故方程 $ax^2+2x-3=0$ 无解或有且仅有 1 个解，

该方程的平方项系数有字母，其是否为 0 对方程类型有影响，考虑的方法也不同，故讨论，

当 $a=0$ 时，方程 $ax^2+2x-3=0$ 即为 $2x-3=0$，

解得：$x=\dfrac{3}{2}$，满足要求；

当 $a\ne 0$ 时，要使方程 $ax^2+2x-3=0$ 无解或恰有 1 解，

应有 $\Delta=2^2-4a\cdot(-3)\le 0$，解得：$a\le -\frac{1}{3}$；

综上所述，a 的取值范围是 $\left\{a\middle|a=0或a\le -\frac{1}{3}\right\}$.

8．（2024 • 甘肃武威模拟）

已知集合 $A=\{x\,|-7\le 2x-3\le 3\}$，$B=\{x\,|\,3m-2<x<m+1\}$，若 $B\subseteq A$，则实数 m 的取值范围是（　　）

A．$\left\{m\middle|m\ge \frac{3}{2}\right\}$　　B．$\left\{m\middle|m>\frac{3}{2}\right\}$

C．$\{m\,|\,m\ge 0\}$　　D．$\{m\,|\,m>0\}$

8．C

解析：由 $-7\le 2x-3\le 3$ 可得 $-4\le 2x\le 6$，

所以 $-2\le x\le 3$，故 $A=\{x\,|-2\le x\le 3\}$，

看到 $B\subseteq A$，想到先考虑 B 为空集的情况，

当 $B=\varnothing$ 时，$3m-2\ge m+1$，解得：$m\ge\frac{3}{2}$，

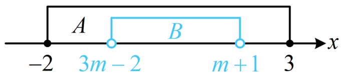
此时满足 $B\subseteq A$；

当 $B\ne\varnothing$ 时，首先，$m<\frac{3}{2}$，

其次，如图，要使 $B\subseteq A$，应有 $\begin{cases}3m-2\ge -2\\ m+1\le 3\end{cases}$，

解得：$0\le m\le 2$，结合 $m<\frac{3}{2}$ 可得 $0\le m<\frac{3}{2}$；

综上所述，实数 m 的取值范围是 $\{m\,|\,m\ge 0\}$.



【反思】画数轴分析集合包含关系时，端点一定要单独考虑. 本题两个端点都可以重合，因为即使重合，B 也不会比 A 多出端点处的元素，仍然满足 $B\subseteq A$.

9．（2024 • 上海浦东新区模拟）

已知集合 $A=\{x\,|\,x\ge 1$ 或 $x<-1\}$，$B=\{x\,|\,2a<x$

$\le a+1\}$，若 $B\subseteq A$，则 a 的取值范围是______.

9．$\left\{a\middle|a<-2或a\ge\frac{1}{2}\right\}$

解析：看到 $B\subseteq A$，想到先考虑 B 为空集的情况，

当 $B=\varnothing$ 时，$2a\ge a+1$，解得：$a\ge 1$，此时满足 $B\subseteq A$；

当 $B\ne\varnothing$ 时，首先，$a<1$，其次，要使 $B\subseteq A$，

如图 1 和图 2，应有 $a+1<-1$（这里不能取等，否则 B 会比 A 多出 -1 这个元素）或 $2a\ge 1$（这里可以取等，因为即使取等，B 也不会比 A 多出 1 这个元素），

解得：$a<-2$ 或 $a\ge\frac{1}{2}$，结合 $a<1$ 得 $a<-2$ 或 $\frac{1}{2}\le a<1$，

综上所述，a 的取值范围是 $\left\{a\middle|a<-2或a\ge\frac{1}{2}\right\}$.

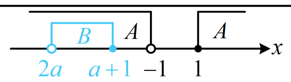


图1

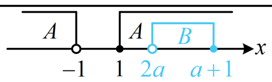


图2

10.（2024·广东深圳模拟）

已知集合 $M=\left\{x\middle|x=m+\frac{1}{6},m\in\mathbf{Z}\right\}$， $N=\left\{x\middle|x=\frac{n}{2}-\frac{1}{3},n\in\mathbf{Z}\right\}$， $P=\left\{x\middle|x=\frac{p}{2}+\frac{1}{6},p\in\mathbf{Z}\right\}$，

则 M，N，P 的关系为（　　）

A． $M=N\subsetneqq P$　　B． $N=P\subsetneqq M$

C． $M\subsetneqq N\subsetneqq P$　　D． $M\subsetneqq N=P$

10．D

解法 1：三个集合中的元素比较好列，故可考虑列出部分元素来看看三个集合的关系. 为了便于观察，不妨先通分，

$M=\left\{x\middle|x=\frac{6m+1}{6},m\in\mathbf{Z}\right\}=\left\{\cdots,-\frac{11}{6},-\frac{5}{6},\frac{1}{6},\frac{7}{6},\cdots\right\}$，

$N=\left\{x\middle|x=\frac{3n-2}{6},n\in\mathbf{Z}\right\}=\left\{\cdots,-\frac{11}{6},-\frac{8}{6},-\frac{5}{6},-\frac{2}{6},\frac{1}{6},\frac{4}{6},\frac{7}{6},\cdots\right\}$，$P=\left\{x\middle|x=\frac{3p+1}{6},p\in\mathbf{Z}\right\}=\left\{\cdots,-\frac{11}{6},-\frac{8}{6},-\frac{5}{6},-\frac{2}{6},\frac{1}{6},\frac{4}{6},\frac{7}{6},\cdots\right\}$，

观察三个集合中的部分元素可得 $M\subsetneqq N=P$.

解法 2：三个集合中的元素格式都很清晰，也可考虑直接由此分析它们的包含关系，

当 n 取任意整数时， $n+1$ 也取任意整数，

所以在集合 N 中将 n 换成 $n+1$ 可得

$N=\left\{x\middle|x=\frac{n+1}{2}-\frac{1}{3},n\in\mathbf{Z}\right\}=\left\{x\middle|x=\frac{n}{2}+\frac{1}{6},n\in\mathbf{Z}\right\}=P$，

怎样分析 M 与 N 的关系？观察发现我们需要把 $\frac{n}{2}$ 转换成 m，才能看出二者的关系，可考虑对 n 分奇偶讨论，

当 n 为奇数时，设 $n=2m+1(m\in\mathbf{Z})$，则 $\frac{n}{2}-\frac{1}{3}=\frac{2m+1}{2}-\frac{1}{3}=m+\frac{1}{6}$，这说明集合 M 中的元素都在集合 N 中，且对应的是 n 为奇数的那些元素，所以 $M\subseteq N$　①，

此时结合选项其实已可知选 D，我们把 n 为偶数的情形也来做个分析，解释为什么 M 与 N 不相等，

当 n 为偶数时，设 $n=2m(m\in\mathbf{Z})$，则 $\frac{n}{2}-\frac{1}{3}=\frac{2m}{2}-\frac{1}{3}=m-\frac{1}{3}$，这与 $m+\frac{1}{6}$ 的取值不重合，所以 n 为偶数时，N 中的那些元素不在 M 中，结合①可得 $M\subsetneqq N$.

C 组　拓展提升

11.（2024·全国竞赛）

设非空集合 $A\subseteq\{1,2,\cdots,9\}$，且对任意的 $a\in A$， 都有 $10-a\in A$， 则这样的 A 的个数为_____.

11．31

解析：题设条件怎样翻译？举个例子，如果 1 在 A 中，那么 $10-1=9$ 也得在 A 中，这就说明 1 和 9 要么都在 A 中，要么都不在 A 中，于是 1 和 9 我们选个代表来考虑就行了，不妨选 1. 同理，2 和 8，3 和 7，4 和 6，5 也都如此，

记 $B=\{1,2,3,4,5\}$，则 A 的个数等于 B 的非空子集个数，

集合 B 有 5 个元素，其非空子集个数为 $2^5-1=31$，

举个例子，$\{1,2,5\}$ 是 B 的一个非空子集，由它可以得到一个满足题意的集合 $A=\{1,9,2,8,5\}$.

12.（2024 • 四川南充模拟）

已知集合 $A=\{x\mid -4\le x\le 4\}$，$B=\{x\mid m+1\le x\le$

$2m+2,m$ 为常数$\}$.

（1）若 $B\subsetneqq A$，求实数 m 的取值范围；

（2）是否存在实数 m，使 $A\subsetneqq B$？若存在，求实数 m 的取值范围；若不存在，说明理由.

12．**解**：(1)（由于 $m+1\le x\le 2m+2$ 的两侧都含参，所以 B 可能为空集，此时自然能满足 $B\subsetneqq A$，先考虑这种情况）

当 $B=\varnothing$ 时，$m+1>2m+2$，解得：$m<-1$，
此时满足 $B\subsetneqq A$；

当 $B\ne\varnothing$ 时，首先应有 $m\ge -1$，

（分析连续取值集合的包含关系，可画数轴来看）

其次，要使 $B\subsetneqq A$，如图 1，应有 $\begin{cases}m+1\ge -4\\2m+2\le 4\end{cases}$，

解得：$-5\le m\le 1$，结合 $m\ge -1$ 可得 $-1\le m\le 1$，
（由于题设要求 $B\subsetneqq A$，所以 A，B 不能相等，从而端点

$m+1$ 与 -4，$2m+2$ 与 4 不能同时重合，故还需检验）

经检验，方程组 $\begin{cases}m+1=-4\\2m+2=4\end{cases}$ 无解，故 $A\ne B$，满足 $B\subsetneqq A$；

综上所述，实数 m 的取值范围是 $\{m\mid m\le 1\}$.

(2)（显然 A 不是空集，若 $A\subsetneqq B$，则 B 也不可能是空集，故无需考虑 B 为空集的情形）

假设存在实数 m 使 $A\subsetneqq B$，则 $B\ne\varnothing$，所以首先 $m\ge -1$，

其次，如图 2，$\begin{cases}m+1\le -4\\2m+2\ge 4\end{cases}$ 且两等号不同时成立，无解，

所以不存在实数 m 使 $A\subsetneqq B$.

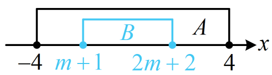


图1

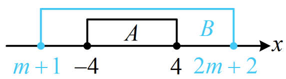


图2

【反思】对于集合包含关系中的存在性问题，一般先假设存在，再由此出发去探索参数应满足的条件.

13.（2024 • 安徽安庆模拟）

已知 $A=\{x\mid 0<ax+1\le 5\}$，$B=\left\{x\middle|-\dfrac{1}{2}<x\le 2\right\}$.

（1）若 $A\subseteq B$，求实数 a 的取值范围；

（2）是否存在实数 a，使得 $A=B$？若存在，求出 a 的值；若不存在，说明理由.

13．**解**：(1) 由 $0<ax+1\le 5$ 可得 $-1<ax\le 4$ ①，

（要解此不等式，可能要同除以 a，故讨论 a 的正负）

(i)当 $a>0$ 时，将①各部分同除以 a 得：$-\dfrac{1}{a}<x\le\dfrac{4}{a}$，

所以 $A=\left\{x\left|-\frac{1}{a}<x\le\frac{4}{a}\right.\right\}$，要使 $A\subseteq B$，如图 1，

应有 $\begin{cases}-\frac{1}{a}\ge-\frac{1}{2} & ② \\ \frac{4}{a}\le 2 & ③\end{cases}$，

怎样解这两个不等式？观察发现变量 a 都在分母上，且 a 的正负已知，故考虑两端同乘以 a，把变量化到分子上去，

因为 $a>0$，所以在不等式②两端乘以 a 得 $-1\ge-\frac{a}{2}$，

故 $-\frac{a}{2}\le-1$，再两端乘以 -2 可得 $a\ge 2$ ④，

在不等式③两端乘以 a 可得 $4\le 2a$，所以 $a\ge 2$ ⑤，

由④⑤结合 $a>0$ 可得 $a\ge 2$；

(ii)当 $a=0$ 时，$0<ax+1\le 5$ 即为 $0<1\le 5$，此不等式对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 都成立，所以 $A=\mathbf{R}$，不满足 $A\subseteq B$；

(iii)当 $a<0$ 时，将①各部分同除以 a 得：$\frac{4}{a}\le x<-\frac{1}{a}$，

所以 $A=\left\{x\left|\frac{4}{a}\le x<-\frac{1}{a}\right.\right\}$，

要使 $A\subseteq B$，如图 2，应有 $\begin{cases}\frac{4}{a}>-\frac{1}{2} & ⑥ \\ -\frac{1}{a}\le 2 & ⑦\end{cases}$，

因为 $a<0$，所以在⑥两端乘以 a 得 $4<-\frac{a}{2}$，故 $-\frac{a}{2}>4$，

再两端乘以 -2 可得 $a<-8$ ⑧，

在⑦两端乘以 a 得 $-1\ge 2a$，所以 $2a\le-1$，故 $a\le-\frac{1}{2}$ ⑨，

由⑧⑨结合 $a<0$ 可得 $a<-8$；

综上所述，实数 a 的取值范围是 $\{a\,|\,a<-8$ 或 $a\ge 2\}$.

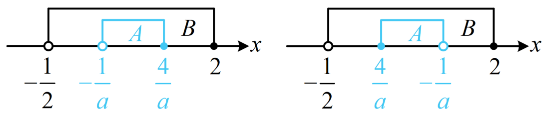


图1　　图2

（2）（第（1）问我们已经通过讨论 a 的正负，求出了集合 A，第（2）问仍可按此来分析怎样使 A，B 相等）

当 $a>0$ 时，由（1）可知，$A=\left\{x\left|-\frac{1}{a}<x\le\frac{4}{a}\right.\right\}$，

要使 $A=B$，应有 $\begin{cases}-\frac{1}{a}=-\frac{1}{2} \\ \frac{4}{a}=2\end{cases}$，解得：$a=2$，满足 $a>0$；

当 $a=0$ 时，由（1）可知，$A=\mathbf{R}$，不满足 $A=B$；

当 $a<0$ 时，由（1）可知，$A=\left\{x\left|\frac{4}{a}\le x<-\frac{1}{a}\right.\right\}$，

注意到此时集合 A 取了左端点，没取右端点，而 B 取了右端点，没取左端点，所以 A，B 不可能相等；

综上所述，存在 $a=2$，使 $A=B$.

14．（2024•吉林四平模拟）

已知集合 $P=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2-3x+b=0\}$，

$Q=\{x\in\mathbf{R}\mid (x+1)(x^2+3x-4)=0\}$．

（1）若 $b=4$，存在集合 M 使得 P 为 M 的真子集且 M 为 Q 的真子集，求这样的集合 M;

（2）若集合 P 是集合 Q 的一个子集，求 b 的取值范围.

14．**解**：（1）当 $b=4$ 时，方程 $x^2-3x+4=0$ 的判别式 $\Delta=$
$(-3)^2-4\times4=-7<0$，所以该方程无实数解，故 $P=\varnothing$，
由 $(x+1)(x^2+3x-4)=0$ 可得 $(x+1)(x+4)(x-1)=0$，
解得：$x=-1$，-4 或 1，所以 $Q=\{-1,-4,1\}$，
由题意，$P\subsetneqq M\subsetneqq Q$，（注意到 $P=\varnothing$，所以只要 M 非空，就有 $P\subsetneqq M$，结合 $M\subsetneqq Q$ 可知 M 是 Q 的非空真子集）

所以 M 是 Q 的非空真子集，因为 Q 中有 3 个元素，所以满足题意的 M 有 $2^3-2=6$ 个，
分别为 $\{-1\}$，$\{-4\}$，$\{1\}$，$\{-1,-4\}$，$\{-1,1\}$，$\{-4,1\}$．

（2）（条件涉及 $P\subseteq Q$，首先想到 P 为空集的情形）
当 $P=\varnothing$ 时，方程 $x^2-3x+b=0$ 无解，其判别式 $\Delta=$
$(-3)^2-4b<0$，解得：$b>\dfrac{9}{4}$，此时满足 $P\subseteq Q$；
当 $P\neq\varnothing$ 时，$b\le\dfrac{9}{4}$，由（1）可知，$Q=\{-1,-4,1\}$，
所以集合 P 中的元素只可能是 -1，-4 或 1，
（接下来若直接考虑 Q 的子集，则情况较多，可站在三个元素的角度来看，即分别讨论它们在 P 中的情形）
(i)若 $-1\in P$，则 $x=-1$ 是方程 $x^2-3x+b=0$ 的解，
所以 $(-1)^2-3\times(-1)+b=0$，故 $b=-4$，
代回原方程得：$x^2-3x-4=0$，解得：$x=-1$ 或 4，
所以 $P=\{-1,4\}$，不满足 $P\subseteq Q$；
(ii)若 $-4\in P$，则 $x=-4$ 是方程 $x^2-3x+b=0$ 的解，
所以 $(-4)^2-3\times(-4)+b=0$，故 $b=-28$，
代回原方程得：$x^2-3x-28=0$，解得：$x=-4$ 或 7，
所以 $P=\{-4,7\}$，不满足 $P\subseteq Q$；
(iii)若 $1\in P$，则 $x=1$ 是方程 $x^2-3x+b=0$ 的解，
所以 $1^2-3\times1+b=0$，故 $b=2$，
代回原方程得：$x^2-3x+2=0$，解得：$x=1$ 或 2，
所以 $P=\{1,2\}$，不满足 $P\subseteq Q$；
综上所述，满足条件的 b 的取值范围是 $\left\{b\middle|b>\dfrac{9}{4}\right\}$．