强化训练

A组 夯实基础

1.（2024·广东期末）

命题“存在一个五边形，它是轴对称图形”的否定是（　　）

A．存在无数个五边形，它是轴对称图形

B．存在一个五边形，它不是轴对称图形

C．任意一个五边形，它是轴对称图形

D．任意一个五边形，它不是轴对称图形

1．D

解析：否定存在量词命题，先将“存在”改为“任意”，再否定结论，结论中有“是”，其否定为“不是”，

命题的否定是“任意一个五边形，它不是轴对称图形”．

2.（2024·天津宁河期末）

命题“$\exists x\in(0,+\infty)$，$x+\frac{1}{x}=2$”的否定是（　　）

A．$\forall x\notin(0,+\infty)$，$x+\frac{1}{x}=2$

B．$\forall x\in(0,+\infty)$，$x+\frac{1}{x}\neq 2$

C．$\exists x\notin(0,+\infty)$，$x+\frac{1}{x}=2$

D．$\exists x\in(0,+\infty)$，$x+\frac{1}{x}\neq 2$

2．B

解析：否定存在量词命题，先改量词，再否结论．结论

“$x+\frac{1}{x}=2$”的否定为“$x+\frac{1}{x}\neq 2$”，

所给命题的否定是“$\forall x\in(0,+\infty)$，$x+\frac{1}{x}\neq 2$”．

3.（2024·广东肇庆模拟）

命题“对于任意$x\in\mathbf{Z}$，都有$x^2+2x+m>0$”的否定命题是（　　）

A．存在$x\in\mathbf{Z}$，使$x^2+2x+m>0$

B．存在$x\in\mathbf{Z}$，使$x^2+2x+m\le 0$

C．对于任意$x\in\mathbf{Z}$，不都有$x^2+2x+m\le 0$

D．对于任意$x\in\mathbf{Z}$，都没有$x^2+2x+m>0$

3．B

解析：否定全称量词命题，先改量词，再否结论．结论

“$x^2+2x+m>0$”的否定是“$x^2+2x+m\le 0$”，

所给命题的否定是“存在$x\in\mathbf{Z}$，使$x^2+2x+m\le 0$”．

4.（2024 • 河南开学考试）

命题“$\forall x\in \mathbf{Q}$，$\sqrt{3}x\in \mathbf{Q}$”的否定为（　　）

A．$\forall x\notin \mathbf{Q}$，$\sqrt{3}x\in \mathbf{Q}$

B．$\exists x\in \mathbf{Q}$，$\sqrt{3}x\notin \mathbf{Q}$

C．$\forall x\in \mathbf{Q}$，$\sqrt{3}x\notin \mathbf{Q}$

D．$\exists x\in \mathbf{Q}$，$\sqrt{3}x\in \mathbf{Q}$

4．B

解析：否定全称量词命题，先改量词，再否结论．结论“$\sqrt{3}x\in \mathbf{Q}$”的否定是“$\sqrt{3}x\notin \mathbf{Q}$”，

所给命题的否定是“$\exists x\in \mathbf{Q}$，$\sqrt{3}x\notin \mathbf{Q}$”．

5.（2024 • 山西大同模拟）

命题“$\exists x\in \mathbf{Z}$，x^2+2为偶数”，下列说法正确的是（　　）

A．该命题是假命题

B．该命题是真命题

C．该命题的否定为：$\exists x\in \mathbf{Z}$，x^2+2不是偶数

D．该命题的否定为：$\exists x\in \mathbf{R}$，x^2+2不是偶数

5．B

解析：取$x=0$可得$x^2+2=2$为偶数，所以该命题为真命题，故A项错误，B项正确；

该命题的否定是“$\forall x\in \mathbf{Z}$，x^2+2不是偶数”，所以C、D两项均错误．

B组 强化能力

6.（2024 • 湖南岳阳开学考试）（多选）

下列命题中是全称量词命题并且是真命题的是（　　）

A．$\forall x\in \mathbf{R}$，$x^2+2x+1\ge 0$

B．$\exists x\in \mathbf{N}$，$2x$为偶数

C．所有菱形的四条边都相等

D．π是无理数

6．AC

解析：A项，有“$\forall$”，所以该命题是全称量词命题，

且因为$x^2+2x+1=(x+1)^2\ge 0$，所以该命题为真命题，

故A项正确；

B项，有“$\exists$”，该命题是存在量词命题，故B项错误；

C项，有“所有”，该命题是全称量词命题，且菱形的四条边是相等的，所以该命题为真命题，故C项正确；

D项，“π是无理数”是真命题，但该命题既不是全称量词命题，也不是存在量词命题，故D项错误．

7.（2023·山东淄博模拟）

下列命题的否定为假命题的是（　　）

A. $\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2+1=0$

B. $\exists x\in\mathbf{R}$，$|x|+x<0$

C. $\forall x\geq 0$，$\sqrt{x+1}\leq\sqrt{x}+1$

D. $\forall x\in\mathbf{R}$，$\sqrt{x^2}\in\mathbf{Q}$

7. C

解析：要先写出各命题的否定再判断真假吗？不用，命题的否定为假意味着原命题为真，故直接判断原命题即可，

A 项，由 $x^2+1=0$ 可得 $x^2=-1$，无实数解，所以原命题为假命题，故 A 项错误；

B 项，因为 $|x|\geq -x$，所以 $|x|+x\geq 0$ 恒成立，从而不存在 $x\in\mathbf{R}$，$|x|+x<0$，故原命题为假命题，故 B 项错误；

C 项，不等式中有根号，可考虑平方去掉根号再看，能直接平方吗？观察发现两侧显然都非负，可以直接平方，

当 $x\geq 0$ 时，$\sqrt{x+1}\leq\sqrt{x}+1\Leftrightarrow(\sqrt{x+1})^2\leq(\sqrt{x}+1)^2$

$\Leftrightarrow x+1\leq x+2\sqrt{x}+1\Leftrightarrow 2\sqrt{x}\geq 0\Leftrightarrow\sqrt{x}\geq 0$ ①，

不等式①显然恒成立，所以 $\sqrt{x+1}\leq\sqrt{x}+1$ 恒成立，

从而原命题为真命题，故 C 项正确；

D 项，取 $x=\sqrt{2}$，则 $\sqrt{x^2}=|x|=|\sqrt{2}|=\sqrt{2}\notin\mathbf{Q}$，

所以原命题为假命题，故 D 项错误.

8.（2024·河南三门峡模拟）

已知命题 $p:\forall x\in\left\{x\middle|\frac{1}{2}\leq x\leq 1\right\}$，$\frac{1}{x}-a\geq 0$ 是真命题，则实数 a 的取值范围是_____.

8. $\{a\mid a\leq 1\}$

解析：观察发现 $\frac{1}{x}-a\geq 0$ 中的 a 是孤立的，可考虑通过移项将其分离出来，研究另一侧的最值，

$\frac{1}{x}-a\geq 0\Leftrightarrow a\leq\frac{1}{x}$，所以 $a\leq\left(\frac{1}{x}\right)_{\min}$，

当 $\frac{1}{2}\leq x\leq 1$ 时，$1\leq\frac{1}{x}\leq 2$，所以 $\left(\frac{1}{x}\right)_{\min}=1$，故 $a\leq 1$.

9.（2024·河北石家庄模拟（改））

命题“$\forall x\in\mathbf{R}$，$(a-2)x^2+2x+4\geq 0$”为假命题，则实数 a 的取值范围是_____.

9. $\left\{a\middle|a<\frac{9}{4}\right\}$

解法 1：涉及由所给命题为假命题求参，可考虑转化为其否定为真命题来处理，

由题意，所给命题的否定“$\exists x\in\mathbf{R}$，$(a-2)x^2+2x+4<0$”为真命题，

平方项系数含参，其是否为 0 对不等式的类型有影响，考虑的方法也不同，故讨论，

当 $a-2=0$ 时，$a=2$，$(a-2)x^2+2x+4<0$ 即 $2x+4<0$，

解得：$x<-2$，满足要求；

再看 $a-2\neq 0$ 的情形，此时其正负又影响二次函数 $y=(a-2)x^2+2x+4$ 图象的开口方向，故又讨论 $a-2$ 的正负，

当 $a-2>0$ 时，$a>2$，二次函数 $y=(a-2)x^2+2x+4$ 开口向上，如图 1，要使其函数值有小于 0 的，其图象必须与 x 轴有 2 个交点，所以 $\Delta=2^2-4(a-2)\times 4=4(9-4a)>0$，解得：$a<\frac{9}{4}$，结合 $a>2$ 可得 $2<a<\frac{9}{4}$；

当 $a-2<0$ 时，$a<2$，二次函数 $y=(a-2)x^2+2x+4$ 开口向下，如图 2，其函数值必有小于 0 的，满足要求；

综上所述，实数 a 的取值范围是 $\left\{a \middle| a<\frac{9}{4}\right\}$.

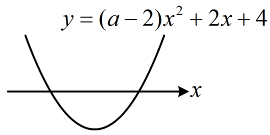


图1

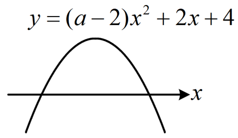


图2

解法 2：观察发现由所给命题为真命题容易求参数的范围，故也可考虑先按此处理，最后再取补集，

假设原命题为真命题，则 $(a-2)x^2+2x+4\geq 0$ 恒成立，

平方项系数含参，我们仍然讨论参数是否为 0，

当 $a-2=0$ 时，$a=2$，$(a-2)x^2+2x+4\geq 0$ 即 $2x+4\geq 0$，

解得：$x\geq -2$，不满足要求；

当 $a-2\neq 0$ 时，$a\neq 2$，要使 $(a-2)x^2+2x+4\geq 0$ 恒成立，

如图 3 或图 4，应有 $\begin{cases} a-2>0 \\ \Delta=2^2-4(a-2)\times 4=4(9-4a)\leq 0 \end{cases}$，

解得：$a\geq \frac{9}{4}$；

综上所述，在原命题为真命题的情况下，$a\geq \frac{9}{4}$，

因为原命题为假命题，所以 $a<\frac{9}{4}$.

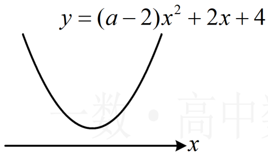


图3

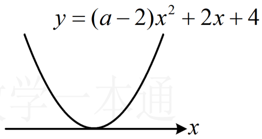


图4

10.（2024•安徽安庆模拟）

命题 $p:\forall x\in \mathbf{R}$，$ax^2+2x+3>0$ 的否定是真命题的一个充分不必要条件是（　　）

A．$a<\frac{1}{3}$　　　　B．$a\leq 1$

C．$a\leq \frac{1}{3}$　　　　D．$a\geq \frac{1}{3}$

10．A

解法 1：命题 p 的否定为“$\exists x\in \mathbf{R}$，$ax^2+2x+3\leq 0$”，

所求为上述命题为真命题的充分不必要条件，可先求出其充要条件，再选所得范围的一个真子集即可，

当 $a=0$ 时，$ax^2+2x+3\leq 0$ 即 $2x+3\leq 0$，解得：$x\leq -\frac{3}{2}$，

所以 p 的否定为真命题；

当 $a>0$ 时，要使 p 的否定为真命题，如图 1，

应有 $\Delta=2^2-4a\times 3=4-12a\geq 0$，解得：$a\leq \frac{1}{3}$，

结合 $a>0$ 可得 $0<a\leq \frac{1}{3}$；

当 $a<0$ 时，二次函数 $y=ax^2+2x+3$ 开口向下，

其函数值必有小于 0 的，满足 p 的否定为真命题；

综上所述，p 的否定为真命题的充要条件是 $a \le \frac{1}{3}$，选项中只有 $a < \frac{1}{3}$ 是该范围代表的集合的真子集，故选 A.

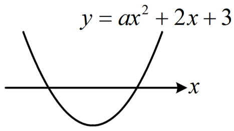


图1

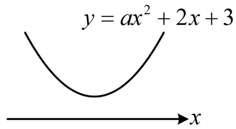


图2

解法 2：命题 p 的否定为真命题等价于命题 p 为假命题，

涉及根据 p 为假命题求参，也可考虑先把 p 当成真命题，求出 a 的范围，再取补集，

假设 p 为真命题，则 $\forall x \in \mathbf{R}$， $ax^2 + 2x + 3 > 0$ 恒成立，

平方项系数为字母，其是否为 0 对不等式类型有影响，研究的方法也不同，故据此讨论，

当 $a = 0$ 时， $ax^2 + 2x + 3 > 0$ 即为 $2x + 3 > 0$，

解得： $x > -\frac{3}{2}$，不满足 $ax^2 + 2x + 3 > 0$ 恒成立；

当 $a \ne 0$ 时，要使 $ax^2 + 2x + 3 > 0$ 恒成立，如图 2，

应有 $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta = 2^2 - 4a \cdot 3 = 4(1 - 3a) < 0 \end{cases}$，解得： $a > \frac{1}{3}$；

综上所述，当 p 为真命题时， $a > \frac{1}{3}$，

由前面的分析可知 p 为假命题，所以 $a \le \frac{1}{3}$，

即 p 的否定为真命题的充要条件是 $a \le \frac{1}{3}$，接下来同解法 1.

11．（2024 • 北京模拟）

已知命题 p:存在 $-1 \le x \le 3$， $x - a - 2 \le 0$．若命题 p 为假命题，则 a 的取值范围为（　　）

A． $\{a \mid a \le -3\}$　　B． $\{a \mid a \le 1\}$

C． $\{a \mid a < -3\}$　　D． $\{a \mid a < 1\}$

11．C

解法 1：涉及由命题 p 为假命题求参，考虑转换成 p 的否定为真命题来处理，

命题 p 为假命题等价于 p 的否定“对任意的 $-1 \le x \le 3$，

$x - a - 2 > 0$”为真命题，

观察发现参数 a 是孤立的，故可通过移项将其分离出来，

不等式 $x - a - 2 > 0$ 等价于 $a < x - 2$，

上述不等式要恒成立，应有 $a < (x-2)_{\min}$，

当 $-1 \le x \le 3$ 时， $(x-2)_{\min} = -1 - 2 = -3$，所以 $a < -3$.

解法 2：题设条件等价于 p 的否定“对任意的 $-1 \le x \le 3$，

$x - a - 2 > 0$”为真命题，

要使 $x - a - 2 > 0$ 恒成立，只需 $(x - a - 2)_{\min} > 0$，观察发现该最小值好求，故也可不分离出 a，直接求最小值，

当 $-1 \le x \le 3$ 时， $(x - a - 2)_{\min} = -1 - a - 2 = -a - 3$，

所以 $-a - 3 > 0$，解得： $a < -3$.

C 组 拓展提升

12．（2024 • 陕西西安模拟）

已知集合 $A=\{x\,|\,0\le x\le a\}$，集合 $B=\{x\,|\,m^2+3\le x\le m^2+4\}$，如果命题“$\exists m\in\mathbf{R}$，$A\cap B\ne\varnothing$”为假命题，则实数 a 的取值范围为（　　）

A．$\{a\,|\,a<3\}$　　B．$\{a\,|\,a<4\}$

C．$\{a\,|\,1<a<5\}$　　D．$\{a\,|\,0<a<4\}$

12．A

解析： 由假命题求参，可转化为其否定为真命题来处理，

所给命题的否定“$\forall m\in\mathbf{R}$，$A\cap B=\varnothing$”为真命题，

注意到 a 与 0 的大小不确定，所以 A 可能为 $\varnothing$，此时当然满足 $A\cap B=\varnothing$，下面先考虑这种情况，

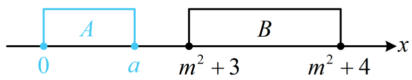
当 $a<0$ 时，$A=\varnothing$，此时 $\forall m\in\mathbf{R}$，都有 $A\cap B=\varnothing$；

当 $a\ge 0$ 时，$A\ne\varnothing$，因为 $m^2+3>0$，所以如图，

要使 $\forall m\in\mathbf{R}$，$A\cap B=\varnothing$，应有 $a<m^2+3$ 恒成立，

因为 $(m^2+3)_{\min}=3$，所以 $a<3$，结合 $a\ge 0$ 得 $0\le a<3$；

综上所述，实数 a 的取值范围是 $\{a\,|\,a<3\}$．



13．（2024 • 江苏盐城模拟）

若“存在 $0<x\le 2$，$ax^2-2x+1<0$”为真命题，则实数 a 的取值范围是_____．

13．$\{a\,|\,a<1\}$

解析： 观察 ax^2-2x+1 可发现，只需两端同除以 x^2，就能将参数 a 孤立，从而把它分离出来，

$ax^2-2x+1<0\Leftrightarrow a-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}<0\Leftrightarrow a<\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}$　①，

所以题设条件等价于存在 $0<x\le 2$，使①成立，这意味着 $a<\left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)_{\max}$，怎样求此最大值？若将 $\dfrac{1}{x}$ 换元成 t，则①的右侧可化为关于 t 的二次函数，故可按此求最大值，

令 $t=\dfrac{1}{x}$，则不等式①即为 $a<2t-t^2$，既然换了元，那么在用新的变量分析问题之前，应先研究其范围，

当 $0<x\le 2$ 时，$\dfrac{1}{x}\ge\dfrac{1}{2}$，所以 $t\ge\dfrac{1}{2}$，

因为 $2t-t^2=-(t-1)^2+1$，所以当 $t=1$ 时，$2t-t^2$ 取得最大值 1，故 $a<1$．

14．（2024 • 安徽亳州模拟）（多选）

使得命题“对任意的 $-2\le x\le 1$，$ax^2+2ax<1-3a$”为真命题的必要不充分条件是（　　）

A．$a\le\dfrac{1}{6}$　　B．$a<\dfrac{1}{6}$

C．$a\le\dfrac{1}{3}$　　D．$a<\dfrac{1}{3}$

14．ACD

解析： 怎样处理 $ax^2+2ax<1-3a$？观察发现只要把含 a 的三项放到一起，就能提公因式 a 到外面，再将 a 分离出来，

$ax^2+2ax<1-3a\Leftrightarrow a(x^2+2x+3)<1$　①，

因为 $x^2+2x+3=(x+1)^2+2\geq 2>0$，所以不等式①又等价于 $a<\dfrac{1}{x^2+2x+3}$ ②，

要使②在 $-2\leq x\leq 1$ 时恒成立，应有 $a<\left(\dfrac{1}{x^2+2x+3}\right)_{\min}$，怎样求此最小值？由于分母 $x^2+2x+3=(x+1)^2+2>0$，分子又为正常数 1，所以只需分母最大，

因为函数 $y=x^2+2x+3$ 的对称轴是 $x=-1$，所以如图，

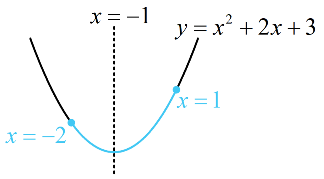
当 $x=1$ 时，x^2+2x+3 取得最大值 6，

此时 $\dfrac{1}{x^2+2x+3}$ 取最小值 $\dfrac{1}{6}$，

由②可知 $a<\dfrac{1}{x^2+2x+3}$ 恒成立，所以 $a<\dfrac{1}{6}$，

所给命题为真命题意味着 $a<\dfrac{1}{6}$，题干让选它的必要不充分条件，说明 $a<\dfrac{1}{6}$ 是选项的充分不必要条件，故 $a<\dfrac{1}{6}$ 对应“小集合”，选项对应“大集合”，

选项之中，只有 $a\leq\dfrac{1}{6}$，$a\leq\dfrac{1}{3}$，$a<\dfrac{1}{3}$ 是 $a<\dfrac{1}{6}$ 的必要不充分条件，故选 ACD.



【反思】在含参不等式问题中，对于参数多次出现且不孤立的情形，只要能将参数作为公因式提出来，也可考虑分离出参数，转化为最值问题来研究.

15．（2024·宁夏吴忠模拟）

已知集合 $A=\{x\,|\,6\leq x\leq 20\}$，集合 $B=\{x\,|\,x\leq 2a\}$，

命题 $p:\exists x\in A$，$x\in B$，

命题 $q:\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2+2x-a>0$.

（1）若命题 p 为假命题，求实数 a 的取值范围；

（2）若命题 p 和命题 q 至少有一个为真命题，求实数 a 的取值范围.

15．**解**：（1）（涉及由命题 p 为假命题求参，考虑转换成 p 的否定为真命题来处理）

由题意，命题 p 的否定“$\forall x\in A$，$x\notin B$”为真命题，

所以 $A\cap B=\varnothing$，如图 1，应有 $2a<6$，解得：$a<3$，

所以实数 a 的取值范围是 $\{a\,|\,a<3\}$.

（2）（正面考虑 p，q 至少有一个为真命题，可能的情形较多，但其反面只有 p，q 均为假命题一种情况，故考虑先由反面求出参数的范围，再取补集）

由（1）可知当 p 为假命题时，$a<3$ ①；

若 q 为假命题，则 q 的否定“$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2+2x-a\leq 0$”为

真命题，如图 2 或图 3，应有 $\Delta=2^2-4\times1\times(-a)$

$=4(1+a)\geq 0$，解得：$a\geq -1$ ②；

结合①②可知当 p，q 都为假命题时，$-1\leq a<3$，

因为 p，q 至少有一个为真命题，所以实数 a 的取值范围是 $\{a\,|\,a<-1$ 或 $a\geq 3\}$.

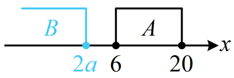


图1

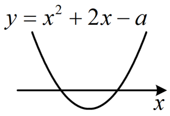


图2

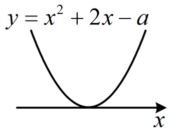


图3