

强化训练

A 组 夯实基础

1. (2024·辽宁抚顺开学考试)

已知函数 $f(x) = 2 + a^{2x-4}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图象恒过定点 P , 则 P 点的坐标为 ()

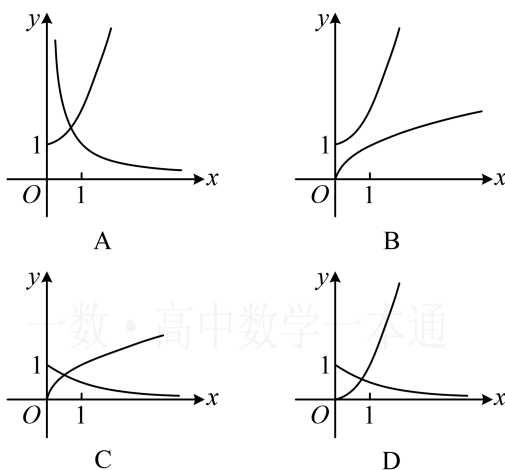
- A. (0,2) B. (2,3)
C. (2,4) D. (4,0)

1. B

解析: 令 $2x-4=0$ 可得 $x=2$, 所以 $f(2) = 2 + a^0 = 3$,
故 $f(x)$ 的图象恒过定点 $P(2,3)$.

2. (2024·山东济南模拟)

在同一直角坐标系中, 函数 $f(x) = a^x$, $g(x) = x^a$ 的部分图象可能是 ()



2. C

解析: 四个图象中过 $(0,1)$ 的是 $f(x)$ 的图象, 由其单调性能判断 a 与 1 的大小, 进而可验证 $g(x)$ 的图象是否正确,

对于 A、B 两项, 由图可知 $f(x) \nearrow$, 所以 $a > 1$, 从而 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上 \nearrow , 且增长趋于陡峭, 与所给图象不符, 故 A、B 两项错误;

对于 C、D 两项, 由图可知 $f(x) \searrow$, 所以 $0 < a < 1$, 从而 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上 \nearrow , 且增长趋于平缓, 故 C 项正确, D 项错误.

3. (2024·陕西榆林模拟)

函数 $f(x) = \sqrt{2-4^x} - \frac{1}{x}$ 的定义域为 ()

- A. $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ B. $(-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right]$
C. $(-\infty, -2]$ D. $\left(0, \frac{1}{2}\right]$

3. B

解析: 要使 $f(x)$ 的解析式有意义, 应有 $\begin{cases} 2-4^x \geq 0, \\ x \neq 0 \end{cases}$,

由 $2-4^x \geq 0$ 可得 $4^x \leq 2 = 4^{\frac{1}{2}}$, 结合 $y = 4^x$ 在 \mathbf{R} 上 \nearrow 可得 $x \leq \frac{1}{2}$,

又 $x \neq 0$ ，所以 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right]$.

4. (2024 · 全国模拟)

判断下列各数的大小关系：

(1) 1.8^a 与 1.8^{a+1} ；

(2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$ ， 3^4 ， $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ ；

(3) $2^{0.2}$ ， 2.5^0 ， $\left(\frac{1}{3}\right)^{0.3}$.

4. 解：(1) 因为 $1.8 > 1$ ，所以 $f(x) = 1.8^x$ 在 \mathbf{R} 上单调递增，

又因为 $a < a+1$ ，所以 $f(a) < f(a+1)$ ，故 $1.8^a < 1.8^{a+1}$.

(2) (3^4 可化为 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$ ，这样三个数的底数都是 $\frac{1}{3}$ ，可构造底数为 $\frac{1}{3}$ 的指数函数来比较大小)

设 $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ ，则 $g(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递减，

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}} = g\left(\frac{2}{3}\right), \quad 3^4 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = g(-4), \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = g(-2),$$

因为 $-4 < -2 < \frac{2}{3}$ ，所以 $g(-4) > g(-2) > g\left(\frac{2}{3}\right)$ ，

$$\text{故 } 3^4 > \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

一数 · 高中数学一本通

(3) (三个数据底数不同，也不方便化同底构造函数比较，怎么办？由于 $2.5^0 = 1$ ，故不妨把另外两个数据与 1 比较)

因为 $h(x) = 2^x$ 在 \mathbf{R} 上单调递增，所以 $h(0.2) > h(0)$ ，

$$\text{即 } 2^{0.2} > 2^0 = 1,$$

因为 $p(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 在 \mathbf{R} 上单调递减，所以 $p(0.3) < p(0)$ ，

$$\text{即 } \left(\frac{1}{3}\right)^{0.3} < \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1, \text{ 又 } 2.5^0 = 1, \text{ 所以 } 2^{0.2} > 2.5^0 > \left(\frac{1}{3}\right)^{0.3}.$$

B 组 强化能力

5. (2024 · 福建泉州模拟)

已知函数 $f(x) = 3^{x-1} + b$ 的图象不过第二象限，则实数 b 的取值范围是_____.

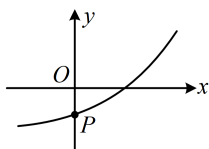
5. $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right]$

解析：怎样翻译图象不过第二象限？我们画图看看，

函数 $f(x) = 3^{x-1} + b$ 在 \mathbf{R} 上 \nearrow ，要使 $f(x)$ 的图象不过第二象限，则其大致图象如图，

由图可知，只需该图象与 y 轴的交点 P 不在原点上方，

$$\text{所以 } f(0) = 3^{-1} + b \leq 0, \text{ 故 } b \leq -\frac{1}{3}.$$



6. (2024 · 北京平谷期末)

函数 $y = 3^{|x|} - 1$ ($-1 \leq x \leq 2$) 的值域为 ()

- A. $[2, 8]$ B. $[1, 8]$
C. $[0, 8]$ D. $[-1, 8]$

6. C

解析: 当 $x \in [-1, 2]$ 时, $0 \leq |x| \leq 2$,

结合函数 $f(t) = 3^t$ 在 \mathbf{R} 上 \nearrow 可得 $3^0 \leq 3^{|x|} \leq 3^2$,

所以 $1 \leq 3^{|x|} \leq 9$, 故 $0 \leq 3^{|x|} - 1 \leq 8$, 即所求值域为 $[0, 8]$.

7. (2024 · 重庆期末)

函数 $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{x^2+2x+3}$ 的值域是_____.

7. $\left(0, \frac{1}{16}\right]$

解析: 所给函数由 $y = \left(\frac{1}{4}\right)^u$ 和 $u = x^2 + 2x + 3$ 复合而成, 可先求 u 的取值范围,

因为 $u = x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2 \geq 2$, 取等条件是 $x = -1$,

所以 u 的取值范围是 $[2, +\infty)$,

又因为函数 $y = \left(\frac{1}{4}\right)^u$ 在 $[2, +\infty)$ 上 \searrow ,

所以 $0 < \left(\frac{1}{4}\right)^u \leq \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$, 故所求值域为 $\left(0, \frac{1}{16}\right]$.

8. (2024 · 江苏苏州模拟)

若 $a = 2^{1.9}$, $b = 2^{1.5}$, $c = 3^{1.9}$, 则 ()

- A. $c > a > b$ B. $b > a > c$
C. $a > c > b$ D. $a > b > c$

8. A

解析: 观察发现 a, b 底数相同, 可构造指数函数, 用单调性比较它们的大小,

设 $f(x) = 2^x$, 则 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上 \nearrow ,

$a = 2^{1.9} = f(1.9)$, $b = 2^{1.5} = f(1.5)$,

因为 $1.9 > 1.5$, 所以 $f(1.9) > f(1.5)$, 故 $a > b$ ①;

接下来比较 c 和谁? 注意到 c 与 a 的指数相同, 故可构造幂函数, 用单调性比较它们的大小,

设 $g(x) = x^{1.9}$, 则 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上 \nearrow ,

$a = 2^{1.9} = g(2)$, $c = 3^{1.9} = g(3)$,

因为 $3 > 2$, 所以 $g(3) > g(2)$, 故 $c > a$ ②;

结合①②可得 $c > a > b$.

9. (2024 · 河北石家庄模拟 (改))

已知 $a=1.05^{0.6}$, $b=0.6^{0.8}$, $c=0.5^{-1.1}$, 则 ()

- A. $a > b > c$ B. $a > c > b$
C. $b > c > a$ D. $c > a > b$

9. D

解析: 观察发现 a, b, c 指数、底数都各不相同, 考虑估算, 先把它们与 1 比较大小,

因为 $y=1.05^x$ 在 \mathbf{R} 上 \nearrow , 所以 $a=1.05^{0.6} > 1.05^0 = 1$,

因为 $y=0.6^x$ 在 \mathbf{R} 上 \searrow , 所以 $b=0.6^{0.8} < 0.6^0 = 1$,

因为 $y=0.5^x$ 在 \mathbf{R} 上 \searrow , 所以 $c=0.5^{-1.1} > 0.5^0 = 1$,

故 $a > b$, $c > b$,

再看 a 和 c , 它们都比 1 大, 观察可发现它们的值离 2 都不远, 故再尝试将它们与 2 比较,

$$a=1.05^{0.6} < 1.05^1 = 1.05 < 2, \quad c=0.5^{-1.1} > 0.5^{-1} = \frac{1}{0.5^1} = 2,$$

所以 $c > a$, 结合前面得到的 $a > b$ 可得 $c > a > b$.

10. (2024 · 江西赣州模拟 (改))

已知 $a=0.3^{1.1}$, $b=2^{0.1}$, $c=3^{-0.2}$, 则 ()

- A. $b < a < c$ B. $a < c < b$
C. $b < c < a$ D. $c < b < a$

10. B

解析: 观察发现 a, b, c 指数、底数都各不相同, 考虑估算, 先把它们与 1 比较大小,

因为 $y=0.3^x$ 在 \mathbf{R} 上 \searrow , 所以 $0 < a=0.3^{1.1} < 0.3^0 = 1$,

因为 $y=2^x$ 在 \mathbf{R} 上 \nearrow , 所以 $b=2^{0.1} > 2^0 = 1$,

因为 $y=3^x$ 在 \mathbf{R} 上 \nearrow , 所以 $0 < c=3^{-0.2} < 3^0 = 1$,

故 $a < b$, $c < b$,

再比较 a 和 c , 它们都在 $(0,1)$ 上, 故又尝试把它们与 0.5 比较,

$$a=0.3^{1.1} < 0.3^1 < 0.5, \quad c=3^{-0.2} = \frac{1}{3^{0.2}},$$

$$\text{因为 } 3^{0.2} = 3^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{3} < \sqrt[5]{32} = 2, \text{ 所以 } c = \frac{1}{3^{0.2}} > \frac{1}{2} = 0.5,$$

故 $a < c$, 结合前面得到的 $c < b$ 可得 $a < c < b$.

11. (2024 · 广东茂名模拟) (多选)

函数 $y=a^x (a>0 \text{ 且 } a \neq 1)$, 当 $-2 \leq x \leq 2$ 时, 值域为 $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$, 则 a 的值可能是 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
C. $\sqrt{2}$ D. 2

11. BC

解析: 研究 $y=a^x$ 在 $[-2,2]$ 上的值域需要其单调性, 但没给 a 与 1 的大小, 所以 $y=a^x$ 的单调性不确定, 故讨论,

当 $0 < a < 1$ 时, $y=a^x$ 在 $[-2,2]$ 上 \searrow ,

所以 $y_{\min} = a^2$, $y_{\max} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$, 因为其值域为 $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$,

$$\text{所以 } \begin{cases} a^2 = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{a^2} = 2 \end{cases}, \text{ 结合 } 0 < a < 1 \text{ 可得 } a = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

当 $a > 1$ 时, $y = a^x$ 在 $[-2, 2]$ 上 \nearrow ,

所以 $y_{\min} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$, $y_{\max} = a^2$, 因为其值域为 $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$,

$$\text{所以 } \begin{cases} \frac{1}{a^2} = \frac{1}{2} \\ a^2 = 2 \end{cases}, \text{ 结合 } a > 1 \text{ 可得 } a = \sqrt{2};$$

综上所述, a 的值可能是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $\sqrt{2}$.

12. (2024 · 重庆期末)

已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x-1}, & x < 1 \\ 2^x - a, & x \geq 1 \end{cases}$ 的值域为 \mathbf{R} , 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, 0]$ B. $[0, +\infty)$

C. $(-\infty, 1]$ D. $[1, +\infty)$

12. B

解析: 观察发现 $x < 1$ 那段不含参, 故先求该段的值域,

$$\text{当 } x < 1 \text{ 时, } f(x) = \frac{2x}{x-1} = \frac{2(x-1)+2}{x-1} = 2 + \frac{2}{x-1},$$

因为 $x < 1$, 所以 $x-1 < 0$, 故 $\frac{2}{x-1} < 0$, 故 $2 + \frac{2}{x-1} < 2$,

所以 $f(x)$ 在 $x \in (-\infty, 1)$ 时的值域是 $(-\infty, 2)$ ①;

再看 $x \geq 1$ 这段, 这段上函数 $f(x)$ 是单调的, 也能求值域,

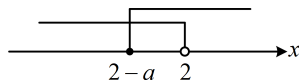
当 $x \geq 1$ 时, $f(x) = 2^x - a$ 是增函数,

所以 $f(x) \geq 2^1 - a = 2 - a$,

故 $f(x)$ 在 $x \in [1, +\infty)$ 时的值域为 $[2 - a, +\infty)$ ②;

综合①②可知 $f(x)$ 的值域是 $(-\infty, 2) \cup [2 - a, +\infty)$,

如图, 要使 $f(x)$ 的值域为 \mathbf{R} , 应有 $2 - a \leq 2$, 故 $a \geq 0$.



13. (2024 · 浙江期末)

函数 $f(x) = 2^{ax^2-2x-1}$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 则 a 的取值范围是_____.

13. $(-\infty, 0]$

解析: $f(x)$ 由 $y = 2^u$ 和 $u = ax^2 - 2x - 1$ 复合而成, 可用同增异减准则分析单调性,

$y = 2^u$ 在 u 的取值范围内始终 \nearrow , 由同增异减准则, 要使 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上 \searrow , 只需 $u = ax^2 - 2x - 1$ 在 $(1, +\infty)$ 上 \searrow ,

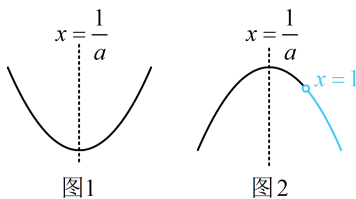
观察发现 a 与 0 的大小会影响函数类型以及开口方向, 单调性也随之而不同, 故据此讨论,

当 $a > 0$ 时, 如图 1, 无论 $x = 1$ 在对称轴 $x = \frac{1}{a}$ 的左侧还是右侧, $u = ax^2 - 2x - 1$ 都不可能在 $(1, +\infty)$ 上 \searrow ;

当 $a = 0$ 时, $u = -2x - 1$, 满足在 $(1, +\infty)$ 上 \searrow ;

当 $a < 0$ 时, 如图 2, 因为 $\frac{1}{a} < 0 < 1$, 所以总有 $u = ax^2 - 2x - 1$ 在 $(1, +\infty)$ 上 \searrow ;

综上所述, 满足条件的 a 的取值范围是 $(-\infty, 0]$.



14. (2024 · 湖北荆州期中) (多选)

已知函数 $f(x) = 2^{x^2 - 4x + 3}$, 则 ()

A. $f(x)$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调递增

B. $f(x)$ 的值域为 $(0, +\infty)$

C. 不等式 $f(x) < 256$ 的解集为 $(-1, 5)$

D. 若 $g(x) = 2^{-ax} \cdot f(x)$ 在 $(-\infty, 1]$ 上单调递减, 则实数 a 的取值范围为 $[-2, +\infty)$

14. ACD

解析: A 项, $f(x)$ 由 $y = 2^u$ 和 $u = x^2 - 4x + 3$ 复合而成, 可由同增异减准则分析单调性,

$u = x^2 - 4x + 3$ 开口向上, 对称轴是 $x = 2$, 所以该函数在 $[2, +\infty)$ 上 \nearrow , 又 $y = 2^u$ 在 \mathbf{R} 上 \nearrow , 所以 $f(x)$ 在 $[2, +\infty)$ 上 \nearrow , 故 A 项正确;

B 项, 因为 $u = x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 - 1 \geq -1$,

取等条件是 $x = 2$, 所以 $f(x) = 2^u \geq 2^{-1} = \frac{1}{2}$,

从而 $f(x)$ 的值域是 $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$, 故 B 项错误;

C 项, $f(x) < 256 \Leftrightarrow 2^{x^2 - 4x + 3} < 2^8 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 < 8$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = (x + 1)(x - 5) < 0$, 解得: $-1 < x < 5$,

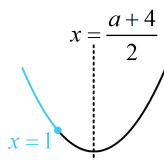
故 C 项正确;

D 项, $g(x) = 2^{-ax} \cdot f(x) = 2^{-ax} \cdot 2^{x^2 - 4x + 3} = 2^{x^2 - (a+4)x + 3}$,

该函数由 $y = 2^t$ 和 $t = x^2 - (a+4)x + 3$ 复合而成,

因为 $y = 2^t$ 在 \mathbf{R} 上 \nearrow , 所以由同增异减准则, $g(x)$ 在 $(-\infty, 1]$ 上 \searrow 等价于 $t = x^2 - (a+4)x + 3$ 在 $(-\infty, 1]$ 上 \searrow ,

如图, 应有 $\frac{a+4}{2} \geq 1$, 解得: $a \geq -2$, 故 D 项正确.



C 组 拓展提升

15. (2024 · 重庆沙坪坝模拟)

函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{-x^2 + 2x + 3}}$ 的值域为____, 单调递增区间为_____.

15. $\left[\frac{1}{4}, 1\right], [1, 3]$

解析：由 $-x^2 + 2x + 3 \geq 0$ 可得 $(-x-1)(x-3) \geq 0$ ，

解得： $-1 \leq x \leq 3$ ，所以函数的定义域是 $[-1, 3]$ ，

令 $u = \sqrt{-x^2 + 2x + 3}$ ， $-1 \leq x \leq 3$ ，则 $u = \sqrt{-(x-1)^2 + 4} \leq 2$ ，

取等条件是 $x = 1$ ，结合 $u \geq 0$ 可得 $0 \leq u \leq 2$ ，

又因为 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在 \mathbf{R} 上 \searrow ，所以 $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^u \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0$ ，

从而 $\frac{1}{4} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^u \leq 1$ ，故所给函数的值域是 $\left[\frac{1}{4}, 1\right]$ ；

函数由 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^u$ ， $u = \sqrt{t}$ ， $t = -x^2 + 2x + 3$ 复合而成，复合方法较复杂，不方便用同增异减准则判断单调性，怎么办呢？注意

到二次函数 $t = -x^2 + 2x + 3$ 的对称轴是 $x = 1$ ，故可考虑以 $x = 1$ 来划分定义域，直接分析当 x 增大时， y 是增大还是减小，来确定所给函数是 \nearrow 还是 \searrow ，

当 $x \in [-1, 1]$ 时， $t = -x^2 + 2x + 3 \nearrow$ ，若 x 增大，则 t 增大， $u = \sqrt{t}$ 也增大，所以 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^u$ 减小，

故 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{-x^2 + 2x + 3}}$ 在 $[-1, 1]$ 上 \searrow ；

当 $x \in [1, 3]$ 时， $t = -x^2 + 2x + 3 \searrow$ ，若 x 增大，则 t 减小， $u = \sqrt{t}$ 也减小，所以 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^u$ 增大，

故 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{-x^2 + 2x + 3}}$ 在 $[1, 3]$ 上 \nearrow ；

综上所述， $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{-x^2 + 2x + 3}}$ 的单调递增区间是 $[1, 3]$ 。

16. (2024 · 全国模拟)

一数 · 高中数学一本通

如果函数 $y = a^{2x} + 2a^x - 1$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 在区间 $[-1, 1]$ 上的最大值是 14，则 a 的值为 ()

- A. 3 B. $\frac{1}{3}$
C. -5 D. $\frac{1}{3}$ 或 3

16. D

解析：注意到 $a^{2x} = (a^x)^2$ ，故可考虑将 a^x 换元成 t ，化为关于 t 的二次函数来分析最值，

令 $t = a^x$ ，则 $y = a^{2x} + 2a^x - 1 = t^2 + 2t - 1$ ，

求上式的最大值需要 t 的范围，而 $t = a^x$ ，所以又需要 a^x 的单调性，该单调性由 a 与 1 的大小决定，故讨论，

当 $0 < a < 1$ 时， $t = a^x$ 在 $[-1, 1]$ 上 \searrow ，所以 $t_{\min} = a^1 = a$ ，

$t_{\max} = a^{-1} = \frac{1}{a}$ ，故 $t \in \left[a, \frac{1}{a}\right]$ ，

二次函数 $y = t^2 + 2t - 1$ 开口向上，对称轴是 $t = -1$ ，

如图 1， $y = t^2 + 2t - 1$ 在 $\left[a, \frac{1}{a}\right]$ 上 \nearrow ，

所以 $y_{\max} = \left(\frac{1}{a}\right)^2 + \frac{2}{a} - 1$ ，由题意， $\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \frac{2}{a} - 1 = 14$ ，

解得： $a = \frac{1}{3}$ 或 $-\frac{1}{5}$ (不满足 $0 < a < 1$ ，舍去)；

当 $a > 1$ 时， $t = a^x$ 在 $[-1, 1]$ 上 \nearrow ，所以 $t_{\min} = a^{-1} = \frac{1}{a}$ ，

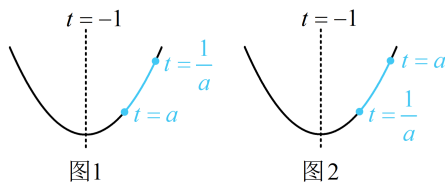
$t_{\max} = a^1 = a$ ，故 $t \in \left[\frac{1}{a}, a\right]$ ，

如图 2, $y = t^2 + 2t - 1$ 在 $\left[\frac{1}{a}, a\right]$ 上 ↗,

所以 $y_{\max} = a^2 + 2a - 1$, 由题意, $a^2 + 2a - 1 = 14$,

解得: $a = 3$ 或 -5 (不满足 $a > 1$, 舍去);

综上所述, a 的值为 $\frac{1}{3}$ 或 3 .



17. (2024 · 安徽宣城期末)

已知函数 $f(x) = -4^x + m \cdot 2^x + 1$, $x \in [-2, 1]$.

(1) 当 $m = 1$ 时, 求函数 $f(x)$ 的值域;

(2) 设函数 $g(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2 - 4x + 3}$, 若对任意 $x_1 \in [-2, 1]$, 存在 $x_2 \in [-1, 2]$, 使得 $f(x_1) \geq g(x_2)$, 求实数 m 的取值范围.

17. 解: (1) 当 $m = 1$ 时, $f(x) = -4^x + 2^x + 1$,

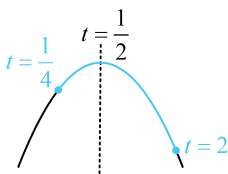
令 $t = 2^x$, 则 $4^x = (2^2)^x = (2^x)^2 = t^2$, $f(x) = -t^2 + t + 1$,

因为 $x \in [-2, 1]$, 所以 $2^{-2} \leq 2^x \leq 2^1$, 故 $\frac{1}{4} \leq t \leq 2$,

即 $t \in \left[\frac{1}{4}, 2\right]$, 如图, $y = -t^2 + t + 1$ 在 $t = 2$, $t = \frac{1}{2}$ 处分别取得最小值、最大值,

所以 $y_{\min} = -2^2 + 2 + 1 = -1$, $y_{\max} = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{4}$,

故 $f(x)$ 的值域是 $\left[-1, \frac{5}{4}\right]$.



(2) (条件涉及双量词不等式, 可分别考虑, x_2 的部分不含参, 于是先考虑这部分)

$\exists x_2 \in [-1, 2]$, 使 $f(x_1) \geq g(x_2)$, 所以 $g(x_2)_{\min} \leq f(x_1)$ ①,

由题意可知, $g(x_2) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{2x_2^2 - 4x_2 + 3}$,

令 $u = 2x_2^2 - 4x_2 + 3 = 2(x_2 - 1)^2 + 1$, 则 $g(x_2) = -\left(\frac{1}{2}\right)^u$,

因为 $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^u$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 所以 u 最小时 y 也最小,

而 $u = 2(x_2 - 1)^2 + 1$, 所以当 $x_2 = 1$ 时, u 取得最小值 1,

故 $g(x_2)_{\min} = -\left(\frac{1}{2}\right)^1 = -\frac{1}{2}$, 代入①得 $f(x_1) \geq -\frac{1}{2}$,

即 $-4^{x_1} + m \cdot 2^{x_1} + 1 \geq -\frac{1}{2}$ ②,

(观察发现 m 容易分离, 故可先将其分离出来再研究)

不等式②等价于 $m \cdot 2^{x_1} \geq 4^{x_1} - \frac{3}{2}$,

所以 $m \geq 2^{x_1} - \frac{3}{2 \times 2^{x_1}} = 2^{x_1} - \frac{3}{2^{x_1+1}}$ ③,

从而对任意的 $x_1 \in [-2, 1]$, 都有不等式③成立,

故 $m \geq \left(2^{x_1} - \frac{3}{2^{x_1+1}} \right)_{\max}$ ④,

因为函数 $y = 2^{x_1}$ 和 $y = -\frac{3}{2^{x_1+1}}$ 在 $x_1 \in [-2, 1]$ 时都单调递增,

所以 $y = 2^{x_1} - \frac{3}{2^{x_1+1}}$ 也单调递增,

故 $\left(2^{x_1} - \frac{3}{2^{x_1+1}} \right)_{\max} = 2^1 - \frac{3}{2^{1+1}} = \frac{5}{4}$, 代入④得 $m \geq \frac{5}{4}$,

所以实数 m 的取值范围是 $\left[\frac{5}{4}, +\infty \right)$.