强化训练

A 组 夯实基础

1.（2024 • 云南昭通期末）

$\sqrt{(\pi-4)^2}+\sqrt[3]{(\pi-3)^3}=$______.

1. 1

解析：$\sqrt{(\pi-4)^2}+\sqrt[3]{(\pi-3)^3}=|\pi-4|+\pi-3$

$=4-\pi+\pi-3=1$.

2.（2024 • 四川南充模拟）（多选）

已知 $xy\neq 0$，且 $\sqrt{9x^2y^4}=-3xy^2$，则下列结论正确的是（　　）

A．$x>0$，$y>0$

B．$x<0$，$y<0$

C．$x>0$，$y<0$

D．$x<0$，$y>0$

2. BD

解析：$\sqrt{9x^2y^4}=\sqrt{(3xy^2)^2}=|3xy^2|=3|x|y^2$，

由题意，$\sqrt{9x^2y^4}=-3xy^2$，所以 $3|x|y^2=-3xy^2$ ①，

因为 $xy\neq 0$，所以 x，y 均不为 0，从而 $y^2\neq 0$，

故式①可化为 $|x|=-x$，结合 $x\neq 0$ 可得 $x<0$，

所以 $x<0$，$y<0$ 或 $x<0$，$y>0$.

3.（2024 • 贵州贵阳模拟）

若 $ab<0$，则化简 $a\sqrt{-\frac{b}{a}}+b\sqrt{-\frac{a}{b}}$ 的结果是（　　）

A．-1　　B．0　　C．1　　D．2

3. B

解法 1：观察发现把两个根号外的 a，b 拿进根号，则两个根号内的结果相同，但 a，b 的正负不确定，故讨论，

因为 $ab<0$，所以 $a>0$，$b<0$ 或 $a<0$，$b>0$，

若 $a>0$，$b<0$，则 $a=|a|=\sqrt{a^2}$，$b=-|b|=-\sqrt{b^2}$，

所以 $a\sqrt{-\frac{b}{a}}+b\sqrt{-\frac{a}{b}}=\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{-\frac{b}{a}}-\sqrt{b^2}\cdot\sqrt{-\frac{a}{b}}$

$=\sqrt{a^2\left(-\frac{b}{a}\right)}-\sqrt{b^2\left(-\frac{a}{b}\right)}=\sqrt{-ab}-\sqrt{-ab}=0$；

若 $a<0$，$b>0$，则 $a=-|a|=-\sqrt{a^2}$，$b=|b|=\sqrt{b^2}$，

所以 $a\sqrt{-\frac{b}{a}}+b\sqrt{-\frac{a}{b}}=-\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{-\frac{b}{a}}+\sqrt{b^2}\cdot\sqrt{-\frac{a}{b}}$

$=-\sqrt{a^2\left(-\frac{b}{a}\right)}+\sqrt{b^2\left(-\frac{a}{b}\right)}=-\sqrt{-ab}+\sqrt{-ab}=0$；

综上所述，$a\sqrt{-\frac{b}{a}}+b\sqrt{-\frac{a}{b}}=0$.

解法 2：观察发现根号内的部分互为倒数，故可考虑先统一根号内的部分，再通分处理，

由题意，$a\sqrt{-\frac{b}{a}}+b\sqrt{-\frac{a}{b}}=a\sqrt{-\frac{b}{a}}+b\cdot\frac{1}{\sqrt{-\frac{b}{a}}}$

$=\frac{a\sqrt{-\frac{b}{a}}\cdot\sqrt{-\frac{b}{a}}+b}{\sqrt{-\frac{b}{a}}}=\frac{a\left(-\frac{b}{a}\right)+b}{\sqrt{-\frac{b}{a}}}=0$.

解法 3：在选择题中，也可对 a，b 取特值，快速求得结果，

由题意，可取 $a=1$，$b=-1$，则 $\sqrt{-\frac{b}{a}}=\sqrt{-\frac{a}{b}}=1$，

所以 $a\sqrt{-\frac{b}{a}}+b\sqrt{-\frac{a}{b}}=1+(-1)=0$.

4.（2024 • 江苏泰州模拟）

（1）化简：$\sqrt{a^3\sqrt{a}}$，其中 $a\geq 0$；

（2）求值：$16^{0.75}-3^{0.3}\times 3^{1.7}+1.5^0$.

4. **解**：（1）$\sqrt{a^3\sqrt{a}}=\left(a^3\cdot a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(a^{3+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(a^{\frac{7}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{7}{2}\times\frac{1}{2}}=a^{\frac{7}{4}}$.

（2）$16^{0.75}-3^{0.3}\times 3^{1.7}+1.5^0=(2^4)^{0.75}-3^{0.3+1.7}+1$

$=2^{4\times 0.75}-3^2+1=2^3-9+1=8-9+1=0$.

B 组 强化能力

5.（2024 • 陕西汉中期末）

下列各式正确的是（　　）

A．$\sqrt[12]{(-3)^4}=\sqrt[4]{-3}$

B．$\sqrt[3]{(x+y)^4}=(x+y)^{\frac{3}{4}}$

C．$\sqrt[3]{-8}=-2$

D．$\left(\frac{n}{m}\right)^2=n^2m^{\frac{1}{2}}$

5. C

解析：A 项，负数没有偶次方根，于是 A 项错误，事实上，$\sqrt[12]{(-3)^4}=\sqrt[12]{3^4}=(3^4)^{\frac{1}{12}}=3^{4\times\frac{1}{12}}=3^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{3}$，故 A 项错误；

B 项，$\sqrt[3]{(x+y)^4}=[(x+y)^4]^{\frac{1}{3}}=(x+y)^{\frac{4}{3}}\neq(x+y)^{\frac{3}{4}}$，故 B 项错误；

C 项，$\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{(-2)^3}=-2$，故 C 项正确；

D 项，$\left(\frac{n}{m}\right)^2=\frac{n^2}{m^2}=n^2m^{-2}\neq n^2m^{\frac{1}{2}}$，故 D 项错误.

6.（2024 • 上海嘉定期末）

已知 $2^x=3$，$2^y=5$，则 $2^{2x+\frac{y}{2}}$ 的值为（　　）

A．$9+\sqrt{5}$　　B．$\frac{45}{2}$　　C．$6\sqrt{5}$　　D．$9\sqrt{5}$

6．D

解析：$2^{2x+\frac{y}{2}}=2^{2x}\times 2^{\frac{y}{2}}=(2^x)^2\times(2^y)^{\frac{1}{2}}=3^2\times 5^{\frac{1}{2}}=9\sqrt{5}$.

7.（2024·重庆期末）

化简：$0.001^{-\frac{1}{3}}-\left(\frac{7}{8}\right)^0+16^{\frac{3}{4}}+(\sqrt[3]{2}\times\sqrt{3})^6+0^2=$______.

7．125

解析：原式$=(0.1^3)^{-\frac{1}{3}}-1+(2^4)^{\frac{3}{4}}+\left(2^{\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{1}{2}}\right)^6$

$=0.1^{3\times(-\frac{1}{3})}-1+2^{4\times\frac{3}{4}}+2^{\frac{1}{3}\times 6}\times 3^{\frac{1}{2}\times 6}=0.1^{-1}-1+2^3+2^2\times 3^3$

$=\frac{1}{0.1}-1+8+108=10-1+8+108=125$.

8.（2024·重庆云阳模拟）

（1）计算：$2\times\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}-\sqrt{16^{\frac{3}{2}}}$ ；

（2）已知$a>0$，$b>0$，用分数指数幂表示并计算：$\sqrt[3]{a^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{a^2}{b^3}}}$.

8．解：（1）原式$=2\times\left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^{-\frac{1}{3}}-\left[(2^4)^{\frac{3}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}$

$=2\times\left(\frac{2}{3}\right)^{3\times\left(-\frac{1}{3}\right)}-2^{4\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}}=2\times\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}-2^3=2\times\frac{3}{2}-8=-5$.

（2）原式$=\left[a^{\frac{1}{2}}(a^2b^{-3})^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}=\left(a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{2\times\frac{1}{2}}\cdot b^{-3\times\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$

$=\left(a^{\frac{1}{2}}\cdot a\cdot b^{-\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(a^{\frac{3}{2}}b^{-\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{3}{2}\times\frac{1}{3}}b^{-\frac{3}{2}\times\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}$.

9.（2024·广东茂名期末）

若$m-2n=1$，则$\frac{4^n}{\sqrt[3]{8^m}}=$（　　）

A．1　　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$

C．$\frac{1}{2}$　　D．$\sqrt{2}$

9．C

解析：由题意，$\frac{4^n}{\sqrt[3]{8^m}}=\frac{4^n}{\left[(2^3)^m\right]^{\frac{1}{3}}}=\frac{(2^2)^n}{2^{3m\times\frac{1}{3}}}=\frac{2^{2n}}{2^m}$

$=2^{2n-m}=2^{-(m-2n)}=2^{-1}=\frac{1}{2}$.

10．（2024 • 全国模拟）

设 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=3$，则 $x+x^{-1}$ 的值为______．

10．7

解析：先由所给等式求出 x，再计算目标式显然较麻烦，考虑整体计算．观察发现 $x^{\frac{1}{2}}$ 与 x，$x^{-\frac{1}{2}}$ 与 x^{-1} 都有平方关系，可考虑将已知条件平方，观察它与目标式的关联，

因为 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=3$，所以 $\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)^2=x+x^{-1}+2x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}$

$=x+x^{-1}+2=9$，故 $x+x^{-1}=9-2=7$．

11．（2024 • 浙江杭州模拟）

（1）计算：$\left(5\dfrac{4}{9}\right)^{0.5}+(0.1)^{-2}+\left(2\dfrac{10}{27}\right)^{\frac{2}{3}}-100\pi^0$；

（2）已知 $x+y=11$，$xy=9$，求 $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{x^2+y^2}$ 的值．

11．**解**：（1）原式 $=\left[\left(\dfrac{7}{3}\right)^2\right]^{0.5}+\dfrac{1}{0.1^2}+\left[\left(\dfrac{4}{3}\right)^3\right]^{\frac{2}{3}}-100$

$=\left(\dfrac{7}{3}\right)^{2\times0.5}+\dfrac{1}{0.01}+\left(\dfrac{4}{3}\right)^{3\times\frac{2}{3}}-100=\dfrac{7}{3}+100+\dfrac{16}{9}-100=\dfrac{37}{9}$．

（2）（由于 x 与 $x^{\frac{1}{2}}$，y 与 $y^{\frac{1}{2}}$ 都有平方关系，故可先将 $x^{\frac{1}{2}}+$

$y^{\frac{1}{2}}$ 平方，结合已知条件来算它）

由题意，$(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})^2=x+y+2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}=x+y+2\sqrt{xy}$

$=11+2\sqrt{9}=17$，所以 $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=\sqrt{17}$，

（还差 x^2+y^2，直接配方即可用已知的 $x+y$ 和 xy 来算）

又 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=11^2-2\times9=103$，

所以 $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{x^2+y^2}=\dfrac{\sqrt{17}}{103}$．

C 组 拓展提升

12．（2024 • 江苏淮安模拟）

已知正数 a，b 满足 $a+2b=2$，则 2^a+4^b 的最小值为______．

12．4

解析：所求为和的最小值，可尝试看看有没有现成的“积定”，若有，则可直接用基本不等式求和的最小值，

由题意，$2^a>0$，$2^b>0$，

且 $2^a\times4^b=2^a\times(2^2)^b=2^a\times2^{2b}=2^{a+2b}=2^2=4$，

所以 $2^a+4^b\geq2\sqrt{2^a\times4^b}=2\sqrt{4}=4$，取等条件是 $2^a=4^b$，

即 $2^a=2^{2b}$，也即 $a=2b$，结合 $a+2b=2$ 得 $a=1$，$b=\dfrac{1}{2}$，

所以 2^a+4^b 的最小值为 4.

13.（2024·浙江温州模拟）

已知 $a^{2m+n}=\frac{1}{4}$， $a^{m-n}=256$， $a>0$ 且 $a\neq1$，则

$a^{5m+n}=$______.

13．16

解法 1： 所求式 a^{5m+n} 容易拆分成 a^m 和 a^n，故考虑由已知的两个等式求出它们，观察发现两式相乘可消去 a^n，

因为 $a^{2m+n}=\frac{1}{4}$， $a^{m-n}=256$，所以 $a^{2m+n}a^{m-n}=a^{3m}=(a^m)^3$

$=\frac{1}{4}\times256=64$，故 $a^m=4$，

又 $a^{m-n}=256$，所以 $\frac{a^m}{a^n}=256$，故 $a^n=\frac{a^m}{256}=\frac{4}{256}=\frac{1}{64}$，

所以 $a^{5m+n}=a^{5m}a^n=(a^m)^5a^n=4^5\times\frac{1}{64}=16$.

解法 2： 注意到能用待定系数法由 $2m+n$ 和 $m-n$ 直接凑出 $5m+n$，故也可直接用已知条件求 a^{5m+n}，

设 $\lambda(2m+n)+\mu(m-n)=5m+n$，则 $(2\lambda+\mu)m+(\lambda-\mu)n$

$=5m+n$，所以 $\begin{cases}2\lambda+\mu=5\\ \lambda-\mu=1\end{cases}$，解得：$\begin{cases}\lambda=2\\ \mu=1\end{cases}$，

所以 $a^{5m+n}=a^{2(2m+n)+(m-n)}=a^{2(2m+n)}a^{m-n}=(a^{2m+n})^2a^{m-n}$

$=\left(\frac{1}{4}\right)^2\times256=16$.

14.（2024·辽宁抚顺模拟）

已知 $f(x)=4\left(\frac{a^x}{a^x+\sqrt{a}}\right)$，则 $f(0.01)+f(0.02)+\cdots$

$+f(0.99)=$______.

14．198

解析： 逐个计算 $f(0.01)$， $f(0.02)$ 等显然过于麻烦，观察发现 $0.01+0.99=0.02+0.98=\cdots=1$，故可尝试用所给解析式计算 $f(x)+f(1-x)$，看有没有规律，

由题意， $f(x)+f(1-x)=4\left(\frac{a^x}{a^x+\sqrt{a}}\right)+4\left(\frac{a^{1-x}}{a^{1-x}+\sqrt{a}}\right)$

$=4\left(\frac{a^x}{a^x+\sqrt{a}}\right)+4\left(\frac{a}{a+\sqrt{a}\cdot a^x}\right)=4\left(\frac{a^x}{a^x+\sqrt{a}}\right)+4\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+a^x}\right)$

$=\frac{4(a^x+\sqrt{a})}{a^x+\sqrt{a}}=4$，

有了这一规律，求和时我们按自变量之和为 1 来两两组合，为了便于观察，我们用倒序相加法，

记 $S=f(0.01)+f(0.02)+\cdots+f(0.99)$ ①，

则 $S=f(0.99)+f(0.98)+\cdots+f(0.01)$ ②，

①+②可得 $2S=[f(0.01)+f(0.99)]+[f(0.02)+f(0.98)]$

$+\cdots+[f(0.99)+f(0.01)]=4+4+\cdots+4$(共99个4)

$=99\times4=396$，所以 $S=\frac{396}{2}=198$.