强化训练

A 组 夯实基础

1.（2024·上海闵行模拟）

某园林建设公司计划购买一批机器投入施工．据分析，这批机器可获得的利润 y（单位：万元）与运转时间 x（单位：年）的函数解析式为 $y=-x^2+$

$12x-9(x\le 11$ 且 $x\in \mathbf{N}^*)$．

（1）当这批机器运转几年时，可获得最大利润，最大利润为多少？

（2）当运转多少年时，这批机器的年平均利润最大？

1．**解：**（1）由题意，$y=-x^2+12x-9=-(x-6)^2+27$，

所以当 $x=6$ 时，y 取得最大值 27，故当这批机器运转 6 年时，可获得最大利润，最大利润为 27 万元.

（2）这批机器的年平均利润为 $\frac{y}{x}=-x+12-\frac{9}{x}$

$=12-\left(x+\frac{9}{x}\right)\le 12-2\sqrt{x\cdot\frac{9}{x}}=6$，

取等条件是 $x=\frac{9}{x}$，即 $x=3$，

所以当运转 3 年时，这批机器的年平均利润最大.

B 组 强化能力

2.（2024·内蒙古模拟）

设某商品的利润只由生产成本和销售收入决定，生产成本 C（万元）与产量 x（百件）的函数关系是 $C(x)=10000+20x$；销售收入 S（万元）与产量 x 的函数关系为 $S(x)=\begin{cases}\frac{1}{50}x^2+220x,0<x<120\\25488+10x,x\ge 120\end{cases}$.

（1）求该商品的利润 $W(x)$ 关于产量 x 的函数解析式；（利润 $=$ 销售收入 $-$ 生产成本）

（2）为使该商品的利润最大化，应如何安排产量？

2．**解：**（1）由题意，$C(x)=10000+20x$，

$S(x)=\begin{cases}\frac{1}{50}x^2+220x,0<x<120\\25488+10x,x\ge 120\end{cases}$，$W(x)=S(x)-C(x)$，

所以当 $0<x<120$ 时，$W(x)=\frac{1}{50}x^2+220x-(10000+20x)$

$=\frac{1}{50}x^2+200x-10000$，

当 $x\ge 120$ 时，$W(x)=25488+10x-(10000+20x)$

$=15488-10x$，

所以 $W(x)=\begin{cases}\frac{1}{50}x^2+200x-10000,0<x<120\\15488-10x,x\ge 120\end{cases}$.

（2）（问题即为求分段函数 $W(x)$ 何时取得最大值，可分两段分别考虑，再比较谁更大）

当 $0<x<120$ 时，$W(x)=\frac{1}{50}x^2+200x-10000$，

$W(x)$ 在 $(0,120)$ 上单调递增，

所以$W(x)<\frac{1}{50}\times 120^2+200\times 120-10000=14288$；

当$x\geq 120$时，$W(x)=15488-10x$，此时$W(x)$为减函数，

所以$W(x)_{\max}=W(120)=15488-10\times 120=14288$；

综上所述，为使商品的利润最大化，产量应为120百件.

3．（2024·河南模拟）

某乡镇为全面实施乡村振兴战略，大力发展特色农产业，提升特色农产品的知名度，邀请了一家广告牌制作公司设计一个宽为x米、长为y米的长方形展牌，其中$y>x$，并要求其面积为$2(x-y+10)$平方米.

（1）求y关于x的函数$f(x)$；

（2）用定义证明$f(x)$在其定义域内的单调性；

（3）如何设计展牌的长和宽，才能使展牌的周长最小？

3．**解**：（1）由题意，长方形的面积$xy=2(x-y+10)$，

所以$xy=2x-2y+20$，从而$(x+2)y=2x+20$，

故$y=\frac{2x+20}{x+2}$，所以$f(x)=\frac{2x+20}{x+2}$，

（还要给出定义域，$x>0$是显然的，但题干还要求$y>x$，故还需由此进一步求x的范围）

由$y>x$可得$\frac{2x+20}{x+2}>x$，所以$2x+20>x^2+2x$，

结合$x>0$解得：$0<x<2\sqrt{5}$，

所以$f(x)=\frac{2x+20}{x+2}$，$x\in(0,2\sqrt{5})$.

（2）任取x_1，x_2满足$0<x_1<x_2<2\sqrt{5}$，则$f(x_1)-f(x_2)$

$=\frac{2x_1+20}{x_1+2}-\frac{2x_2+20}{x_2+2}=\frac{2(x_1+2)+16}{x_1+2}-\frac{2(x_2+2)+16}{x_2+2}$

$=2+\frac{16}{x_1+2}-2-\frac{16}{x_2+2}=\frac{16}{x_1+2}-\frac{16}{x_2+2}=\frac{16(x_2-x_1)}{(x_1+2)(x_2+2)}$，

由$0<x_1<x_2<2\sqrt{5}$可得$x_2-x_1>0$，$(x_1+2)(x_2+2)>0$，

所以$f(x_1)-f(x_2)=\frac{16(x_2-x_1)}{(x_1+2)(x_2+2)}>0$，故$f(x_1)>f(x_2)$，

所以$f(x)$在其定义域上单调递减.

（3）展牌的周长$L=2x+2y=2x+2\cdot\frac{2x+20}{x+2}$

$=2x+2\left(2+\frac{16}{x+2}\right)=2\left(x+2+\frac{16}{x+2}\right)$

$\geq 2\times 2\sqrt{(x+2)\cdot\frac{16}{x+2}}=16$，

取等条件是$x+2=\frac{16}{x+2}$，即$x=2$，此时$y=\frac{2x+20}{x+2}=6$，

所以当展牌的长和宽分别为6米、2米时，展牌周长最小.

C 组 拓展提升

4.（2024·江西上饶期末）

随着我国经济发展、医疗消费需求增长、人们健康观念转变以及人口老龄化进程加快等因素的影响，医疗器械市场近年来一直保持着持续高增长的趋势．上饶市医疗器械公司为了进一步增加市场竞争力，计划改进技术生产某产品．已知生产该产品的年固定成本为 400 万元，最大产能为 100 台．每生产 x 台，还需另外投入成本 $G(x)$ 万元，且 $G(x)=\begin{cases}2x^2+80x, 0<x\le 40\\ 201x+\dfrac{3600}{x}-2100, 40<x\le 100\end{cases}$，由市场调研可知，该产品每台的售价为 200 万元，且全年内生产的该产品当年能全部销售完．

（1）写出年利润 $W(x)$ 万元关于年产量 x 台的函数解析式（利润 = 销售收入 − 成本）；

（2）当该产品的年产量为多少时，公司所获利润最大？最大利润是多少？

4．**解**：（1）由题意，$W(x)=200x-400-G(x)$，

当 $0<x\le 40$ 时，$G(x)=2x^2+80x$，

所以 $W(x)=200x-400-(2x^2+80x)=-2x^2+120x-400$；

当 $40<x\le 100$ 时，$G(x)=201x+\dfrac{3600}{x}-2100$，

所以 $W(x)=200x-400-\left(201x+\dfrac{3600}{x}-2100\right)$

$=1700-\left(x+\dfrac{3600}{x}\right)$；

综上所述，$W(x)=\begin{cases}-2x^2+120x-400, 0<x\le 40\\ 1700-\left(x+\dfrac{3600}{x}\right), 40<x\le 100\end{cases}$．

（2）（求分段函数的最值，可先求各段上的最值，再比较）

当 $0<x\le 40$ 时，$W(x)=-2x^2+120x-400$

$=-2(x-30)^2+1400\le 1400$，取等条件是 $x=30$，

所以 $W(x)$ 在 $(0,40]$ 上的最大值为 1400；

当 $40<x\le 100$ 时，$W(x)=1700-\left(x+\dfrac{3600}{x}\right)$

$\le 1700-2\sqrt{x\cdot\dfrac{3600}{x}}=1580$，

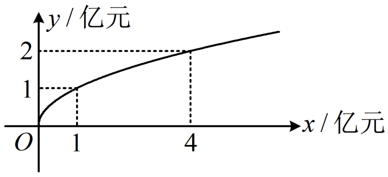
取等条件是 $x=\dfrac{3600}{x}$，即 $x=60$，

所以 $W(x)$ 在 $(40,100]$ 上的最大值是 1580；

因为 $1580>1400$，所以当该产品的年产量为 60 台时，公司所获利润最大，最大利润是 1580 万元.

5．（2024 • 湖北宜昌模拟）

美国对中国芯片的技术封锁，激发了中国“芯”的研究热潮．某公司研发的 A, B 两种芯片都已经获得成功．该公司研发芯片已经耗费资金 2 亿元，现在准备投入资金进行生产，经市场调查与预测，生产 A 芯片的毛收入与投入的资金成正比，已知每投入 1 亿元，公司获得毛收入 0.25 亿元；生产 B 芯片的毛收入 y（亿元）与投入的资金 x（亿元）的函数关系为 $y=kx^{\alpha}(x>0)$，其图象如图所示．



（1）试分别求出生产 A，B 两种芯片的毛收入 y（亿元）与投入资金 x（亿元）的函数关系式；

（2）如果公司只生产一种芯片，那么生产哪种芯片毛收入更大？

（3）现在公司准备投入 40 亿元资金同时生产 A，B 两种芯片，设投入 x 亿元生产 B 芯片，用 $f(x)$ 表示公司所获净利润，当 x 为多少时，可以获得最大净利润？并求出最大净利润．（净利润 = A 芯片毛收入 + B 芯片毛收入 − 研发耗费资金）

5．**解**：（1）由题意，可设投入 x 亿元生产 A 芯片时，毛收入

为 $y=mx(m>0)$，

由题意，每投入 1 亿元，公司获得毛收入 0.25 亿元，

所以 $m=0.25=\frac{1}{4}$，故 $y=\frac{1}{4}x(x>0)$；

投入 x 亿元生产 B 芯片时，其毛收入 $y=kx^{\alpha}$，且由所给图象可知，$(1,1)$ 和 $(4,2)$ 两点在该图象上，

所以 $\begin{cases}1=k\cdot 1^{\alpha}\\ 2=k\cdot 4^{\alpha}\end{cases}$，解得：$k=1$，$\alpha=\frac{1}{2}$，

故 $y=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}(x>0)$．

（2）（问题即为比较 $\frac{1}{4}x$ 与 $\sqrt{x}$ 谁大，观察发现二者的大小与 x 的范围有关，故讨论）

令 $\frac{1}{4}x>\sqrt{x}$ 可得 $\sqrt{x}>4$，所以 $x>16$；

同理，令 $\frac{1}{4}x=\sqrt{x}$ 可得 $x=16$；令 $\frac{1}{4}x<\sqrt{x}$ 可得 $0<x<16$；

所以当 $x>16$ 时，生产 A 芯片毛收入更大，当 $x=16$ 时，生产 A，B 两种芯片毛收入一样大，当 $0<x<16$ 时，生产 B 芯片毛收入更大．

（3）由题意，A，B 两种芯片的投入分别为 $(40-x)$ 亿元、x 亿元，所以毛收入之和为 $\sqrt{x}+\frac{1}{4}(40-x)$，

故 $f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{4}(40-x)-2=-\frac{1}{4}x+\sqrt{x}+8$，$0<x<40$，

（怎样求 $f(x)$ 的最大值？观察发现 x 与 $\sqrt{x}$ 为平方关系，故只需将 $\sqrt{x}$ 换元成 t，就能化为二次函数求最大值）

令 $t=\sqrt{x}$，则 $x=t^2$，$f(x)=-\frac{1}{4}t^2+t+8=-\frac{1}{4}(t-2)^2+9$，

由 $0<x<40$ 可得 $0<t<2\sqrt{10}$，所以当 $t=2$ 时，$f(x)$ 取得最大值 9，此时 $x=t^2=4$，

故当 $x=4$ 时，可以获得最大净利润 9 亿元．