强化训练

A 组 夯实基础

1.（2024·内蒙古包头期末）

在平面直角坐标系 xOy 中，已知角 α 的始边是 x 轴的非负半轴，终边经过点 $P(-1,2)$，则 $\cos\alpha=$（　　）

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　B. $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

C. $-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　D. $-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

1. C

解析：由题意，$r=OP=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$，

所以由三角函数定义，$\cos\alpha=\dfrac{x}{r}=\dfrac{-1}{\sqrt{5}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

2.（2024·黑龙江绥化模拟）

$\sin(-1050^\circ)=$（　　）

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

C. $-\dfrac{1}{2}$　　D. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2. A

解析：$\sin(-1050^\circ)=\sin(-3\times360^\circ+30^\circ)=\sin30^\circ=\dfrac{1}{2}$.

3.（2024·广东广州期末）

已知 θ 为第二或第四象限角，则下列说法正确的是（　　）

A. $\sin\theta\tan\theta<0$　　B. $\cos\theta\tan\theta<0$

C. $\dfrac{\sin\theta}{\tan\theta}>0$　　D. $\sin\theta\cos\theta<0$

3. D

解析：若 θ 为第二象限的角，则 $\sin\theta>0$，$\cos\theta<0$，

$\tan\theta<0$，此时 $\sin\theta\tan\theta<0$，$\cos\theta\tan\theta>0$，

$\dfrac{\sin\theta}{\tan\theta}<0$，$\sin\theta\cos\theta<0$，所以选项 B、C 错误 ①；

若 θ 为第四象限的角，则 $\sin\theta<0$，$\cos\theta>0$，$\tan\theta<0$，

此时 $\sin\theta\tan\theta>0$，$\cos\theta\tan\theta<0$，$\dfrac{\sin\theta}{\tan\theta}>0$，

$\sin\theta\cos\theta<0$，所以选项 A 错误 ②；

综合①②可知选 D.

B组 强化能力

4.（2024·安徽蚌埠期末）

若 $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，且角 α 的终边经过点 $P(\sqrt{2},y)$，则 P 点的纵坐标 y 是（　　）

A．1　　B．±1

C．-2　　D．-1

4．D

解析：由题意，$r=OP=\sqrt{(\sqrt{2})^2+y^2}=\sqrt{2+y^2}$，

所以由三角函数定义，$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{y}{\sqrt{2+y^2}}$，

又因为 $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\frac{y}{\sqrt{2+y^2}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ①，

从而 $\frac{y^2}{2+y^2}=\frac{1}{3}$，故 $3y^2=2+y^2$，解得：$y=\pm1$，

由①可知 $y<0$，所以 $y=-1$.

5.（2024·江西南昌模拟）

已知角 α 的终边在直线 $y=-2x$ 上，则

$\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha}=$（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{1}{6}$

C．$-\frac{1}{6}$　　D．$-\frac{1}{2}$

5．A

解析：已知终边所在的直线，可在该直线上任取一点（除原点外），用定义计算三角函数值，

由题意，在 $y=-2x$ 上取点 $(m,-2m)$，$m\neq0$，

由三角函数第2种定义，$\tan\alpha=\frac{-2m}{m}=-2$，

所以 $\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{1}{\tan^2\alpha+\tan\alpha}=\frac{1}{(-2)^2+(-2)}=\frac{1}{2}$.

6.（2024·河北期末）

设 $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$，若 $\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{\tan\alpha}{2}$，则 $\sin\alpha=$（　　）

A．$-\frac{4}{5}$　　B．$-\frac{3}{5}$

C．$-\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　D．$-\frac{1}{3}$

6．C

解析：所给等式较复杂，应先将其化简，有弦有切，观察发现切化弦比较容易，故按此尝试，

由题意，$\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{\tan\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{2\cos\alpha}$，所以 $2\sin\alpha\cos\alpha=$

$\sin\alpha(1-\cos\alpha)$，化简得：$\sin\alpha=3\sin\alpha\cos\alpha$ ①，

又因为 $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$，所以 $\sin\alpha<0$，

从而式①可化为 $1=3\cos\alpha$，故 $\cos\alpha=\frac{1}{3}$，

所以 $\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

7.（2024·辽宁大连模拟）

已知函数 $f(\tan x)=\sin^2 x-\sin x\cos x+2\cos^2 x$，则 $f(2)=$______.

7. $\frac{4}{5}$

解析：若能由已知等式求出 $f(x)$，就能代解析式求 $f(2)$．怎样求 $f(x)$？注意到给出了 $f(\tan x)$，故考虑把右边也化为关于 $\tan x$ 的式子，右边是二次齐次式，可以化正切，

由题意，$f(\tan x)=\sin^2 x-\sin x\cos x+2\cos^2 x$

$=\frac{\sin^2 x-\sin x\cos x+2\cos^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 x}=\frac{\tan^2 x-\tan x+2}{\tan^2 x+1}$，

所以 $f(x)=\frac{x^2-x+2}{x^2+1}$，故 $f(2)=\frac{2^2-2+2}{2^2+1}=\frac{4}{5}$.

8.（2024·福建泉州期末）

已知 $1-\sin\alpha=\sqrt{2}\cos\alpha$，$\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\tan\alpha=$（　　）

A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$　　B. $-\frac{\sqrt{2}}{4}$

C. $2\sqrt{2}$　　D. $-2\sqrt{2}$

8. B

解法 1：看到 $1-\sin\alpha=\sqrt{2}\cos\alpha$，想到结合 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 可求出 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$，进而求得 $\tan\alpha$，

因为 $1-\sin\alpha=\sqrt{2}\cos\alpha$，所以 $\sin\alpha=1-\sqrt{2}\cos\alpha$，

代入 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 得 $(1-\sqrt{2}\cos\alpha)^2+\cos^2\alpha=1$，

化简得：$3\cos^2\alpha-2\sqrt{2}\cos\alpha=0$，所以 $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 或 0，

又因为 $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\cos\alpha>0$，故 $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

所以 $\sin\alpha=1-\sqrt{2}\cos\alpha=1-\sqrt{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=-\frac{1}{3}$，

故 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$.

解法 2：能否由 $1-\sin\alpha=\sqrt{2}\cos\alpha$ 直接求 $\tan\alpha$？可以的，只需移项平方，就能化二次齐次式，可直接化正切，

因为 $1-\sin\alpha=\sqrt{2}\cos\alpha$，所以 $\sqrt{2}\cos\alpha+\sin\alpha=1$，

从而 $(\sqrt{2}\cos\alpha+\sin\alpha)^2=1$，

故 $2\cos^2\alpha+2\sqrt{2}\cos\alpha\sin\alpha+\sin^2\alpha=1=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$，

所以 $\cos^2\alpha+2\sqrt{2}\cos\alpha\sin\alpha=0$ ①，

又因为 $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\cos\alpha>0$，

故式①可化为 $\cos\alpha+2\sqrt{2}\sin\alpha=0$，

进一步可得 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$.

9．（2024 • 贵州遵义模拟）

已知 $\tan\alpha=3$，则 $\frac{\cos\alpha-\cos^3\alpha}{\sin\alpha}$ 的值为（　　）

A．$\frac{3}{4}$　　　　B．$\frac{3}{10}$

C．$\frac{3}{5}$　　　　D．$\frac{2}{3}$

9．B

解法 1：已知 $\tan\alpha$，尝试将所给分式化正切，观察发现上下不齐次，能化吗？可以，注意到最高次数为 3，于是我们在单独的 $\cos\alpha$ 和 $\sin\alpha$ 上都乘以 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$，就能化为齐三次分式，进而可化正切，

由题意，$\frac{\cos\alpha-\cos^3\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)-\cos^3\alpha}{\sin\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}$

$=\frac{\cos\alpha\sin^2\alpha}{\sin\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}=\frac{\cos\alpha\sin\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$

$=\frac{\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\frac{3}{3^2+1}=\frac{3}{10}$.

解法 2：观察发现分子可提 $\cos\alpha$，提了之后会产生 $1-\cos^2\alpha$，故能继续化简，

由题意，$\frac{\cos\alpha-\cos^3\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha(1-\cos^2\alpha)}{\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha\sin^2\alpha}{\sin\alpha}$

$=\cos\alpha\sin\alpha=\frac{\cos\alpha\sin\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\frac{\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{3}{1+3^2}=\frac{3}{10}$.

10．（2024 • 山西吕梁期末）（多选）

已知 $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$0\le\alpha\le\pi$，则下列说法正确的是（　　）

A．$\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{2}{5}$

B．$\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{3\sqrt{5}}{5}$

C．$\tan\alpha+\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{5}{3}$

D．$\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$

10．AB

解析：A 项，将 $\sin\alpha-\cos\alpha$ 平方，可与 $\sin\alpha\cos\alpha$ 建立联系，故直接平方，

由题意，$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha$

$=1-2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{5}$，所以 $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{2}{5}$，故 A 项正确；

B 项，$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha$

$=1+2\sin\alpha\cos\alpha=1+2\times\frac{2}{5}=\frac{9}{5}$，

开根号取正还是取负？我们来分析 α 的象限，

由 A 项的分析过程可知 $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{2}{5}>0$，

结合 $0\le\alpha\le\pi$ 可得 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，所以 $\sin\alpha>0$，$\cos\alpha>0$，

从而 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{3\sqrt{5}}{5}$，故 B 项正确；

C 项，$\tan\alpha+\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$

$=\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{5}{2}$，故 C 项错误；

D 项，由 $\begin{cases}\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{3\sqrt{5}}{5}\\ \sin\alpha-\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}\end{cases}$ 得 $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，故 D 项错误.

11．（2024•山东潍坊模拟）

（1）已知 $\sin\alpha=\frac{12}{13}$，且 α 是第二象限角，求 $\cos\alpha$ 和 $\tan\alpha$；

（2）若 $\tan\alpha=-\frac{15}{8}$，求 $\sin\alpha$ 的值.

11．**解**：（1）因为 α 是第二象限角，所以 $\cos\alpha<0$，

又 $\sin\alpha=\frac{12}{13}$，所以 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}$

$=-\frac{5}{13}$，$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{12}{13}}{-\frac{5}{13}}=-\frac{12}{5}$.

（2）因为 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{15}{8}$，所以 $\cos\alpha=-\frac{8}{15}\sin\alpha$，

代入 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 可得 $\sin^2\alpha+\left(-\frac{8}{15}\sin\alpha\right)^2=1$，

所以 $\frac{289}{225}\sin^2\alpha=1$，从而 $\sin^2\alpha=\frac{225}{289}$，故 $\sin\alpha=\pm\frac{15}{17}$，

（两解都可取吗，我们来看 α 的象限，可由已知的 $\tan\alpha$ 的正负来判断）

因为 $\tan\alpha=-\frac{15}{8}<0$，所以 α 是第二象限或第四象限角，

当 α 是第二象限角时，$\sin\alpha>0$，所以 $\sin\alpha=\frac{15}{17}$；

当 α 是第四象限角时，$\sin\alpha<0$，所以 $\sin\alpha=-\frac{15}{17}$；

综上所述，$\sin\alpha=\frac{15}{17}$ 或 $-\frac{15}{17}$.

C组 拓展提升

12．（2024・浙江丽水模拟）

已知角 α 的终边经过点 $P\left(2,\tan\alpha-\dfrac{3}{4}\right)$，则 $\sin\alpha+$

$\cos\alpha=$______.

12．$\dfrac{1}{5}$

解析：给出 α 终边上一点 P 的坐标，想到三角函数的第 2 种定义．点 P 的坐标中有 $\tan\alpha$，故考虑先用定义求正切，从而建立方程求出 $\tan\alpha$，再算 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$，

由正切函数的定义，$\tan\alpha=\dfrac{y}{x}=\dfrac{\tan\alpha-\frac{3}{4}}{2}=\dfrac{1}{2}\tan\alpha-\dfrac{3}{8}$，

解得：$\tan\alpha=-\dfrac{3}{4}$，又因为点 P 的横坐标为 $2>0$，所以 α 的终边在第一象限或第四象限或 x 轴非负半轴，

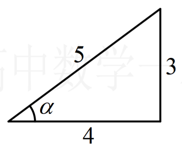
结合 $\tan\alpha=-\dfrac{3}{4}<0$ 可知 α 的终边在第四象限，

根据 $\tan\alpha=-\dfrac{3}{4}$ 画出如图所示的直角三角形，

由图可知，$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$，

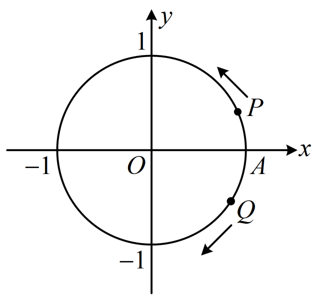
结合 α 的终边在第四象限可得 $\sin\alpha=-\dfrac{3}{5}$，$\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$，

所以 $\sin\alpha+\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}=\dfrac{1}{5}$.



13．（2024・安徽六安期末）

如图所示，在平面直角坐标系 xOy 中，动点 P，Q 从点 $A(1,0)$ 出发在单位圆上运动，点 P 按逆时针方向每秒钟转 $\dfrac{\pi}{12}$ 弧度，点 Q 按顺时针方向每秒钟转 $\dfrac{11\pi}{12}$ 弧度，则 P，Q 两点在第 4 次相遇时，点 P 的坐标是（　　）



A．$\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$　　B．$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

C．$\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$　　D．$\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

13．C

解析：设经过 t 秒，P，Q 第四次相遇，

（只要求出 t，就能得到此时以 OP 为终边的角，故能求出该角的三角函数值，于是能用三角函数定义反推 P 的坐标，怎样求 t？可以想象，P，Q 第一次相遇时，P，Q 两点共转了一整圈（如图 1），再次相遇时，两点一共又转了一整圈（如图 2），不难发现第四次相遇时，P，Q 一共应转了 4 整圈，故可由此建立方程求 t）

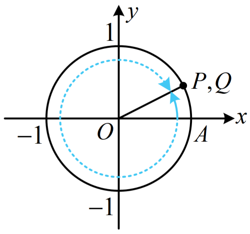


图1

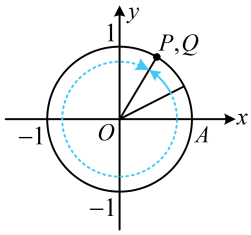


图2

由题意，经过 t 秒后，点 P 转过的角的大小是 $\frac{\pi}{12}t$，点 Q 转过的角的大小是 $\frac{11\pi}{12}t$，

所以 P，Q 一共转过的角的大小是 $\frac{\pi}{12}t+\frac{11\pi}{12}t$，

又因为 P，Q 第四次相遇时，P，Q 一共转了 4 圈，

所以 $\frac{\pi}{12}t+\frac{11\pi}{12}t=4\times 2\pi$，解得：$t=8$，

所以此时以 OP 为终边的角是 $\frac{\pi}{12}\times 8=\frac{2\pi}{3}$，

因为 $\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$，$\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以点 P 的坐标为 $\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

14．（2024·辽宁沈阳模拟）

已知关于 x 的方程 $25x^2-ax+12=0$ 的两根为 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$，其中 $\theta\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$.

（1）求 a 的值；

（2）求 $\dfrac{\sin\theta}{1-\dfrac{1}{\tan\theta}}+\dfrac{\cos\theta}{1-\tan\theta}$ 的值；

（3）求 $\sin^3\theta-\cos^3\theta$ 的值.

14．**解**：（1）（由一元二次方程的两根想到韦达定理，故可用 $\sin\theta+\cos\theta$ 和 $\sin\theta\cos\theta$ 的关系处理）

由题意，$\begin{cases}\sin\theta+\cos\theta=\frac{a}{25}\\ \sin\theta\cos\theta=\frac{12}{25}\end{cases}$，

又因为 $(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta$

$=1+2\sin\theta\cos\theta$，所以 $\left(\frac{a}{25}\right)^2=1+2\times\frac{12}{25}$，

解得：$a=\pm 35$，（两个都可取吗？注意到题干规定了 θ 的范围，我们结合该范围来做个分析）

因为 $\theta\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$，所以 $\sin\theta>0$，

又因为 $\sin\theta\cos\theta=\frac{12}{25}>0$，所以 $\cos\theta>0$，

从而 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{a}{25}>0$，故 $a>0$，所以 $a=35$．

（2）$\frac{\sin\theta}{1-\frac{1}{\tan\theta}}+\frac{\cos\theta}{1-\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{1-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}+\frac{\cos\theta}{1-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$

$=\frac{\sin^2\theta}{\sin\theta-\cos\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\cos\theta-\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{\sin\theta-\cos\theta}$

$=\frac{(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)}{\sin\theta-\cos\theta}=\sin\theta+\cos\theta=\frac{a}{25}=\frac{35}{25}=\frac{7}{5}$．

（3）（看到 $\sin^3\theta-\cos^3\theta$，想到立方差公式 $a^3-b^3=(a-b)(a^2+b^2+ab)$）

$\sin^3\theta-\cos^3\theta=(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta)$

$=(\sin\theta-\cos\theta)\left(1+\frac{12}{25}\right)=\frac{37}{25}(\sin\theta-\cos\theta)$ ①，

（还差 $\sin\theta-\cos\theta$，已有 $\sin\theta\cos\theta$，可用它先算 $(\sin\theta-\cos\theta)^2$，再开根号）

$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta$

$=1-2\times\frac{12}{25}=\frac{1}{25}$，

又因为 $\theta\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$，结合前面的 $\cos\theta>0$ 可知 $\theta\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$，

所以 $\sin\theta>\cos\theta$，从而 $\sin\theta-\cos\theta>0$，

故 $\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{5}$，代入①得 $\sin^3\theta-\cos^3\theta=\frac{37}{25}\times\frac{1}{5}=\frac{37}{125}$．

15．（2024·上海浦东开学考试）

证明：$\frac{1-\sin^6x-\cos^6x}{1-\sin^4x-\cos^4x}=\frac{3}{2}$．

15．**证法1**：（分子有 $\sin^6x+\cos^6x$，想到立方和公式，分母有 $\sin^4x+\cos^4x$，想到配方可产生 $\sin^2x+\cos^2x$）

左边 $=\frac{1-(\sin^2x+\cos^2x)(\sin^4x+\cos^4x-\sin^2x\cos^2x)}{1-\sin^4x-\cos^4x}$

$=\frac{1-\sin^4x-\cos^4x+\sin^2x\cos^2x}{1-\sin^4x-\cos^4x}=1+\frac{\sin^2x\cos^2x}{1-\sin^4x-\cos^4x}$

$=1+\frac{\sin^2x\cos^2x}{1-[(\sin^2x+\cos^2x)^2-2\sin^2x\cos^2x]}$

$=1+\frac{\sin^2x\cos^2x}{1-1+2\sin^2x\cos^2x}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$．

证法2：（左边上下都有1，想到将1代换成 $\sin^2x+\cos^2x$，但若直接按此代换，下一步化简不易，注意到分子、分母余下项的次数，可将分子的1换成 $(\sin^2x+\cos^2x)^3$，分母则换成 $(\sin^2x+\cos^2x)^2$，展开后可进一步化简）

$\frac{1-\sin^6x-\cos^6x}{1-\sin^4x-\cos^4x}=\frac{(\sin^2x+\cos^2x)^3-\sin^6x-\cos^6x}{(\sin^2x+\cos^2x)^2-\sin^4x-\cos^4x}=$

$\frac{\sin^6x+3\sin^4x\cos^2x+3\sin^2x\cos^4x+\cos^6x-\sin^6x-\cos^6x}{\sin^4x+2\sin^2x\cos^2x+\cos^4x-\sin^4x-\cos^4x}$

$=\frac{3\sin^4x\cos^2x+3\sin^2x\cos^4x}{2\sin^2x\cos^2x}=\frac{3}{2}(\sin^2x+\cos^2x)=\frac{3}{2}$．

【反思】$(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)$

$=a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+b^2a+b^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$．

16．（2024·辽宁沈阳模拟（改））

已知 $f(x)=\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}-\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$， α 为第三象限角， $f(\alpha)=-\dfrac{2}{3}$，求 $\dfrac{\cos^4\alpha+2\cos\alpha\sin\alpha-\sin^4\alpha}{2\cos^2\alpha+1}$.

16．**解**：（ $f(x)$ 的解析式较复杂，先尝试化简，分母有 $1-\sin x$ 和 $1+\sin x$ ，可分别乘以 $1+\sin x$ 和 $1-\sin x$ ，凑出 $1-\sin^2 x$ 这一结构，再继续化简）

由题意， $f(x)=\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}-\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$

$=\sqrt{\dfrac{(1+\sin x)^2}{(1-\sin x)(1+\sin x)}}-\sqrt{\dfrac{(1-\sin x)^2}{(1+\sin x)(1-\sin x)}}$

$=\sqrt{\dfrac{(1+\sin x)^2}{1-\sin^2 x}}-\sqrt{\dfrac{(1-\sin x)^2}{1-\sin^2 x}}=\sqrt{\dfrac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x}}-\sqrt{\dfrac{(1-\sin x)^2}{\cos^2 x}}$

$=\dfrac{|1+\sin x|}{|\cos x|}-\dfrac{|1-\sin x|}{|\cos x|}$，所以 $f(\alpha)=\dfrac{|1+\sin\alpha|}{|\cos\alpha|}-\dfrac{|1-\sin\alpha|}{|\cos\alpha|}$，

因为 α 为第三象限角，所以 $\cos\alpha<0$， $1+\sin\alpha>0$，

$1-\sin\alpha>0$，故 $f(\alpha)=\dfrac{1+\sin\alpha}{-\cos\alpha}-\dfrac{1-\sin\alpha}{-\cos\alpha}=-\dfrac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$=-2\tan\alpha$，又由题意， $f(\alpha)=-\dfrac{2}{3}$，

所以 $-2\tan\alpha=-\dfrac{2}{3}$，故 $\tan\alpha=\dfrac{1}{3}$，

（条件翻译完了，怎样求目标式？其结构较复杂，先尝试化简，且由于已知 $\tan\alpha$ ，所以最好化为正切形式）

所求式 $=\dfrac{(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+2\cos\alpha\sin\alpha}{2\cos^2\alpha+1}=$

$\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+2\cos\alpha\sin\alpha}{2\cos^2\alpha+1}=\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+2\cos\alpha\sin\alpha}{2\cos^2\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}$

$=\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+2\cos\alpha\sin\alpha}{3\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\dfrac{1-\tan^2\alpha+2\tan\alpha}{3+\tan^2\alpha}$

$=\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+2\times\dfrac{1}{3}}{3+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{1}{2}$.