

强化训练

A 组 夯实基础

1. (2023·重庆期中)

下列叙述能组成集合的是 ()

- A. 接近 0 的数
- B. 数学成绩好的同学
- C. 中国古代四大发明
- D. 跑得快的运动员

1. C

解析: A 项, 要多接近 0 才算接近 0? 没有准确的标准, 不满足集合元素的确定性, 不能构成集合, 故 A 项错误;

B 项, 数学成绩好的标准不清晰, 不能构成集合, 故 B 项错误;

C 项, 中国古代四大发明指造纸术、指南针、火药、印刷术, 对象明确, 可以构成集合, 故 C 项正确;

D 项, 跑得快标准不清晰, 不能构成集合, 故 D 项错误.

2. (2024·江苏常州模拟) (多选)

下列各组中 M, P 表示不同集合的是 ()

A. $M = \{3, -1\}, P = \{(3, -1)\}$

B. $M = \{(3, 1)\}, P = \{(1, 3)\}$

C. $M = \{y | y = x^2 + 1, x \in \mathbf{R}\},$

$$P = \{x | x = t^2 + 1, t \in \mathbf{R}\}$$

D. $M = \{y | y = x^2 - 1, x \in \mathbf{R}\},$

$$P = \{(x, y) | y = x^2 - 1, x \in \mathbf{R}\}$$

2. ABD

解析: A 项, M 和 P 看起来像, 但它们的元素其实完全不同! M 是由 3 和 -1 这两个实数构成的集合, 是数集, 而 P 是由一个有序实数对 $(3, -1)$ 构成的集合, $(3, -1)$ 也可以看成点的坐标, 所以 P 是点集, 故 M 与 P 必定不同;

B 项, M 是由点 $(3, 1)$ 构成的集合, P 是由点 $(1, 3)$ 构成的集合, 两个点不同, 所以 M 与 P 不同;

C 项, 因为 $x \in \mathbf{R}$, 所以 $y = x^2 + 1 \geq 1$, 故 $M = \{y | y \geq 1\}$,

同理, $t \in \mathbf{R}$, 所以 $x = t^2 + 1 \geq 1$, 故 $P = \{x | x \geq 1\}$,

尽管两个集合看起来不一样, 但它们都表示不小于 1 的实数构成的集合, 里面的元素相同, 所以 $M = P$;

D 项, 因为 $x \in \mathbf{R}$, 所以 $y = x^2 - 1 \geq -1$, 从而 $M = \{y | y \geq$

$-1\}$, 故 M 是由全体不小于 -1 的实数构成的集合,

而 P 的代表元素是 (x, y) , 满足 $y = x^2 - 1$, 所以 P 是二次

函数 $y = x^2 - 1$ 图象上的点构成的集合, 是点集,

故 M 与 P 不同.

3. (2023·浙江台州期中) (多选)

下列元素与集合的关系中, 正确的是 ()

A. $-1 \in \mathbf{N}$

B. $0 \notin \mathbf{N}^*$

C. $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$

D. $\pi \notin \mathbf{Q}$

3. BCD

解析：A 项， -1 不是自然数，即 $-1 \notin \mathbf{N}$ ，故 A 项错误；

B 项， 0 不是正整数，即 $0 \notin \mathbf{N}^*$ ，故 B 项正确；

C 项， $\sqrt{2}$ 不是有理数，即 $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$ ，故 C 项正确；

D 项， π 不是有理数，即 $\pi \notin \mathbf{Q}$ ，故 D 项正确.

B 组 强化能力

4. (2024 · 湖北武汉模拟)

集合 $A = \left\{ \frac{6}{3-x} \in \mathbf{Z} \mid x \in \mathbf{N}^* \right\}$ 用列举法可以表示为_____.

4. $\{3, 6, -6, -3, -2, -1\}$

解析：由题意， A 是由 $\frac{6}{3-x}$ 的所有可能取值构成的集合，

集合 A 的代表元素 $\frac{6}{3-x}$ 只能为整数，又 $x \in \mathbf{N}^*$ ，所以只需看 x 取哪些正整数，能使 $\frac{6}{3-x}$ 为整数，

要使 $\frac{6}{3-x}$ 为整数，则 $-6 \leq 3-x \leq 6$ 且 $3-x \neq 0$ ，

所以 $-3 \leq x \leq 9$ 且 $x \neq 3$ ，结合 $x \in \mathbf{N}^*$ 可得 x 只可能为 $1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ ，

经检验，当且仅当 $x=1, 2, 4, 5, 6, 9$ 时，

$\frac{6}{3-x}$ 分别取整数 $3, 6, -6, -3, -2, -1$ ，

所以 $A = \{3, 6, -6, -3, -2, -1\}$.

5. (2024 · 湖南怀化模拟)

一数 · 高中数学一本通

已知集合 $P = \{x \mid x = 2k, k \in \mathbf{Z}\}$ ， $Q = \{x \mid x = 2k - 1,$

$k \in \mathbf{Z}\}$ ， $M = \{x \mid x = 4k + 1, k \in \mathbf{Z}\}$ ，且 $a \in P$ ，

$b \in Q$ ，则 ()

A. $a+b \in P$ B. $a+b \in Q$

C. $a+b \in M$ D. 以上都不对

5. B

解法 1：由题意可知集合 P 是全体偶数构成的集合， Q 是全体奇数构成的集合，

又 $a \in P$ ， $b \in Q$ ，所以 a 为偶数， b 为奇数，

从而 $a+b$ 为奇数，故 $a+b \in Q$ ，故 B 项正确；

这里集合 M 中的元素显然也都是奇数，那为什么 C 项不对？我们来看看 $a+b$ 的取值和 M 中的元素有何区别，

因为 $a+b$ 能取全体奇数，而 M 中的元素是除以 4 余 1 的奇数，不是全体奇数，所以存在 $a+b \notin M$ ，下面举个例子，

取 $a=0$ ， $b=3$ 可得 $a+b=3 \notin M$ ，故 C 项错误.

解法 2： P, Q, M 中的元素都有明显的规律，也可考虑通过罗列它们的部分元素，寻找规律，从而判断选项，

由题意，集合 $P = \{\cdots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \cdots\}$ ，

$Q = \{\cdots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \cdots\}$ ， $M = \{\cdots, -7, -3, 1, 5, 9, \cdots\}$ ，

我们取几组 a, b 的值来看看 $a+b$ 是什么情况，

取 $a=-2$ ， $b=1$ 可得 $a+b=-1 \in Q$ ，

取 $a=-4$ ， $b=5$ 可得 $a+b=1 \in Q$ ，

取 $a=2$ ， $b=-5$ 可得 $a+b=-3 \in Q$ ，

由此可猜测 $a+b \in Q$ ，故尝试分析理由，

因为 $a \in P$ ， $b \in Q$ ，所以 a 为偶数， b 为奇数，

从而 $a+b$ 为奇数，故 $a+b \in Q$ ，此为单选题，故选 B.

6. (2024 · 全国模拟)

已知 $M = \{a-3, 2a-1, a^2+1\}$ ， $N = \{-2, 4a-3, 3a-1\}$ ，若 $M=N$ ，则实数 a 的值为_____.

6. 1

解析：观察发现 N 中有已知的元素 -2 ，故只需讨论 M 中谁是 -2 ，求出 a 的值，

因为 $M=N$ ， $-2 \in N$ ，所以 $-2 \in M$ ，

故 $a-3=-2$ 或 $2a-1=-2$ 或 $a^2+1=-2$ ，

当 $a-3=-2$ 时， $a=1$ ，注意，由 $-2 \in M$ 只能保证 M, N 都有元素 -2 ，不一定满足 $M=N$ ，故还需代回去检验，此时 $M=\{-2, 1, 2\}$ ， $N=\{-2, 1, 2\}$ ，满足 $M=N$ ；

当 $2a-1=-2$ 时， $a=-\frac{1}{2}$ ，此时 $M=\left\{-\frac{7}{2}, -2, \frac{5}{4}\right\}$ ，

$N=\left\{-2, -5, -\frac{5}{2}\right\}$ ，不满足 $M=N$ ，不合题意；

当 $a^2+1=-2$ 时，此方程在实数集上无解，不合题意；

综上所述，实数 a 的值为 1.

7. (2023 · 江西模拟)

已知实数集合 $A = \{1, a, b\}$ ， $B = \{a^2, a, ab\}$ ，若

$A=B$ ，则 $a^{2023} + b^{2023} =$ ()

A. -1

B. 0

C. 1

D. 2

7. A

解析：观察发现两个集合中都有元素 a ，故就看 $1, b$ 怎样与 a^2, ab 对应了，有两种可能的情况，故讨论，

由题意， $A=B$ ，所以 $\begin{cases} 1=a^2 \\ b=ab \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 1=ab \\ b=a^2 \end{cases}$ ，

若 $\begin{cases} 1=a^2 \\ b=ab \end{cases}$ ，则 $\begin{cases} a=1 \\ b \in \mathbf{R} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=-1 \\ b=0 \end{cases}$ ，

当 $a=1$ 时，集合 A, B 都不满足元素互异，舍去，所以只能 $\begin{cases} a=-1 \\ b=0 \end{cases}$ ，此时 $A=\{1, -1, 0\}$ ， $B=\{1, -1, 0\}$ ，满足题意；

若 $\begin{cases} 1=ab \\ b=a^2 \end{cases}$ ，则 $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$ ，集合 A, B 都不满足元素互异，舍去；

综上所述， $a=-1$ ， $b=0$ ，所以 $a^{2023} + b^{2023} = -1$.

8. (2024 · 江西萍乡期末)

已知集合 $A = \{-1, a^2-2a+1, a-4\}$ ，若 $4 \in A$ ，则 a 的值可能为 ()

A. -1, 3

B. -1

C. -1, 3, 8

D. -1, 8

8. D

解析：因为 $4 \in A$ ，所以 $a^2-2a+1=4$ 或 $a-4=4$ ，

解得： $a = -1$ 或 3 或 8 ，经检验，当 $a = 3$ 时，
 $a - 4 = -1$ ，集合 A 不满足元素互异，
 当 $a = -1$ 或 8 时，集合 A 满足元素互异，故 $a = -1$ 或 8 。

9. (2024 · 重庆期末)

已知集合 $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - ax - a + 1 < 0\}$ ，若 $2 \in A$ ，则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $\left\{a \mid a > \frac{5}{3}\right\}$ B. $\left\{a \mid a < \frac{5}{3}\right\}$
 C. $\{a \mid a < 5\}$ D. $\{a \mid a < 3\}$

9. A

解析：因为 $2 \in A$ ，所以 $x = 2$ 满足不等式 $x^2 - ax - a + 1$
 < 0 ，从而 $2^2 - a \cdot 2 - a + 1 < 0$ ，故 $a > \frac{5}{3}$ 。

10. (2024 · 广东惠州模拟)

集合 $A = \left\{x \in \mathbf{R} \mid \frac{x-a}{2x+1} > 0\right\}$ ，若 $3 \in A$ 且 $-1 \notin A$ ，则 a 的取值范围是 ()

- A. $a < 3$ B. $a \leq -1$
 C. $a \leq 3$ D. $-1 < a < 3$

10. B

解析：因为 $3 \in A$ ， $-1 \notin A$ ，所以 $x = 3$ 满足不等式

$$\frac{x-a}{2x+1} > 0, \quad x = -1 \text{ 不满足该不等式,}$$

$$\text{故 } \frac{3-a}{2 \times 3+1} > 0 \text{ 且 } \frac{-1-a}{2 \times (-1)+1} \leq 0, \text{ 解得: } a \leq -1.$$

C 组 拓展提升

11. (2024 · 江苏南通期末 (改))

集合 $A = \{x \in \mathbf{R} \mid ax^2 - 3x + 2 = 0, a \in \mathbf{R}\}$ ，若 A 中的元素至少有 1 个，则 a 的取值范围是_____。

11. $\left\{a \mid a \leq \frac{9}{8}\right\}$

解析： A 中至少 1 个元素即方程 $ax^2 - 3x + 2 = 0$ 至少 1 个实数解，该方程的平方项系数为字母，其是否为 0 对方程类型有影响，考虑的方法不同，故据此讨论，

当 $a = 0$ 时， $ax^2 - 3x + 2 = 0$ 即为 $-3x + 2 = 0$ ，

解得： $x = \frac{2}{3}$ ，所以 $A = \left\{\frac{2}{3}\right\}$ ，满足题意；

当 $a \neq 0$ 时，要使方程 $ax^2 - 3x + 2 = 0$ 至少 1 个实数解，

应有 $\Delta = (-3)^2 - 4a \cdot 2 \geq 0$ ，解得： $a \leq \frac{9}{8} (a \neq 0)$ ；

综上所述， a 的取值范围是 $\left\{a \mid a \leq \frac{9}{8}\right\}$ 。

12. (2024 · 四川成都期末)

已知集合 $A = \{1, 2, 3\}$ ，则集合 $B = \{(x, y) | x \in A,$

$y \in A, |x - y| \in A\}$ 中所含元素的个数为 ()

A. 2

B. 4

C. 6

D. 8

12. C

解析：在集合 B 中， x 和 y 都来自集合 A ，不难发现它们可能的组合方式不多，故考虑逐一罗列来看，

因为 $x \in A, y \in A$ ，所以 x, y 的可能取值如下表，

x	1	1	1	2	2	2	3	3	3
y	1	2	3	1	2	3	1	2	3
$ x - y $	0	1	2	1	0	1	2	1	0

由表可知满足 $|x - y| \in A$ 的有 $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ ， $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ ， $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ ，

$\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ ， $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$ ， $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$ ，共 6 种，

所以集合 B 中有 6 个元素.

13. (2024 · 江西模拟)

若集合 $M = \{(x - y, x + y) | y = 2x\}$ ，则 ()

A. $(1, 3) \in M$ B. $(-1, 3) \in M$ C. $(-1, 2) \in M$ D. $(1, 2) \in M$

13. B

一数 · 高中数学一本通

解法 1：集合中的元素是 $(x - y, x + y)$ ，故将选项代入可建立方程组，求出 x 和 y ，再检验是否满足 $y = 2x$ 即可，

A 项，若 $(1, 3) \in M$ ，则 $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$ ，解得： $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ ，

经检验，不满足 $y = 2x$ ，所以 $(1, 3) \notin M$ ，故 A 项错误；

B 项，若 $(-1, 3) \in M$ ，则 $\begin{cases} x - y = -1 \\ x + y = 3 \end{cases}$ ，解得： $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ ，

经检验，满足 $y = 2x$ ，所以 $(-1, 3) \in M$ ，故 B 项正确；

C 项，若 $(-1, 2) \in M$ ，则 $\begin{cases} x - y = -1 \\ x + y = 2 \end{cases}$ ，解得： $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$ ，

经检验，不满足 $y = 2x$ ，所以 $(-1, 2) \notin M$ ，故 C 项错误；

D 项，若 $(1, 2) \in M$ ，则 $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$ ，解得： $\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$ ，

经检验，不满足 $y = 2x$ ，所以 $(1, 2) \notin M$ ，故 D 项错误.

解法 2：集合 M 描述法“ $|$ ”左侧的代表元素格式较复杂，可考虑将其换元，把代表元素化简，以便于判断选项，

令 $\begin{cases} a = x - y \\ b = x + y \end{cases}$ ，则 $x = \frac{a + b}{2}$ ， $y = \frac{b - a}{2}$ ，

所以 $y = 2x$ 即为 $\frac{b - a}{2} = 2 \cdot \frac{a + b}{2}$ ，化简得： $b = -3a$ ，

所以集合 M 可改写为 $\{(a, b) | b = -3a\}$ ，结合选项可知只有 $a = -1$ ， $b = 3$ 满足 $b = -3a$ ，所以 $(-1, 3) \in M$ ，故选 B.

14. (2023 · 河南模拟) (多选)

若集合 $\{x \in \mathbf{R} \mid ax^2 + x + a = 0\} = \{x \mid x - b = 0\}$ ，则 b 的值可能为 ()

- A. -1 B. 0 C. $\frac{1}{2}$ D. 1

14. ABD

解析：观察发现方程 $x - b = 0$ 容易求解，故先求解该方程，将问题明朗化，

由 $x - b = 0$ 可得 $x = b$ ，所以题设条件等价于

$$\{x \in \mathbf{R} \mid ax^2 + x + a = 0\} = \{b\} \quad ①,$$

故方程 $ax^2 + x + a = 0$ 有且仅有一个实数解 $x = b$ ，

该方程平方项系数为字母，其是否为 0 对方程的类型有影响，分析方法也不同，故据此讨论，

当 $a = 0$ 时，方程 $ax^2 + x + a = 0$ 即为 $x = 0$ ，

所以①即为 $\{0\} = \{b\}$ ，故 $b = 0$ ；

当 $a \neq 0$ 时，要使方程 $ax^2 + x + a = 0$ 有且仅有一个实数

解，应有 $\Delta = 1^2 - 4a^2 = 0$ ，解得： $a = \pm \frac{1}{2}$ ，

若 $a = \frac{1}{2}$ ，则代回原方程化简得： $(x+1)^2 = 0$ ，

所以 $x = -1$ ，此时①即为 $\{-1\} = \{b\}$ ，故 $b = -1$ ；

若 $a = -\frac{1}{2}$ ，则代回原方程化简得： $(x-1)^2 = 0$ ，

所以 $x = 1$ ，此时①即为 $\{1\} = \{b\}$ ，故 $b = 1$ ；

综上所述， b 的值可能为 $0, -1, 1$.

15. (2024 · 上海奉贤期末)

集合 $A = \{x \mid (x-1)(x^2 - 4x + a) = 0, a \in \mathbf{R}\}$ 中恰好有 2 个元素，则实数 a 满足的条件是_____.

15. $a = 4$ 或 3

解析：由 $(x-1)(x^2 - 4x + a) = 0$ 可得 $x = 1$ 或 $x^2 - 4x + a = 0$

$+ a = 0$ ，所以 $1 \in A$ ，怎样能使 A 中恰有 2 个元素？要么方程 $x^2 - 4x + a = 0$ 只有 1 个实数解，且这个解不是 1，要么该方程有 2 个实数解，且其中 1 个恰好是 1，故讨论，

若方程 $x^2 - 4x + a = 0$ 恰有 1 个实数解，

则 $\Delta = (-4)^2 - 4a = 0$ ，解得： $a = 4$ ，

代回原方程可得 $x^2 - 4x + 4 = 0$ ，即 $(x-2)^2 = 0$ ，

解得： $x = 2$ ，所以 $A = \{1, 2\}$ ，满足题意；

若方程 $x^2 - 4x + a = 0$ 有 2 个实数解，则其中 1 个解为 1，

所以 $1^2 - 4 \times 1 + a = 0$ ，解得： $a = 3$ ，

此时原方程即为 $x^2 - 4x + 3 = 0$ ，解得： $x = 1$ 或 3 ，

所以 $A = \{1, 3\}$ ，满足题意；

综上所述，实数 a 满足的条件是 $a = 4$ 或 3 .