强化训练

A 组 夯实基础

1．（2024·新疆期末）

解下列不等式：

（1）$x^2-4x+3>0$；

（2）$-3x^2+5x-2>0$；

（3）$2x^2+7x+3>0$；

（4）$2x^2<x-1$．

1．**解**：（1）令 $x^2-4x+3=0$ 可得 $(x-1)(x-3)=0$，解得：

$x=1$ 或 3，所以原不等式的解集为 $\{x\,|\,x<1$，或 $x>3\}$．

（2）$-3x^2+5x-2>0 \Leftrightarrow 3x^2-5x+2<0$，令 $3x^2-5x+2=0$

可得 $(3x-2)(x-1)=0$，解得：$x=\dfrac{2}{3}$ 或 1，

所以原不等式的解集为 $\left\{x\middle|\dfrac{2}{3}<x<1\right\}$．

（3）令 $2x^2+7x+3=0$ 可得 $(2x+1)(x+3)=0$，

解得：$x=-\dfrac{1}{2}$ 或 -3，

所以原不等式的解集为 $\left\{x\middle|x<-3,\text{或}x>-\dfrac{1}{2}\right\}$．

（4）$2x^2<x-1 \Leftrightarrow 2x^2-x+1<0$，

经尝试，不能分解因式，于是先计算方程 $2x^2-x+1=0$ 的判别式 Δ，来看看该方程根的情况，

因为判别式 $\Delta=(-1)^2-4\times2\times1=-7<0$，

所以 $2x^2-x+1>0$ 恒成立，故原不等式的解集为 $\varnothing$．

2．（2024·山东菏泽模拟）

解关于 x 的不等式：$x^2-3|x|+2\le0$．

2．**解**：（$x^2=|x|^2$，故可将 $|x|$ 换元成 t，化为一元二次不等式）

令 $t=|x|$，则原不等式即为 $t^2-3t+2\le0$ ①，

令 $t^2-3t+2=0$ 可得 $(t-1)(t-2)=0$，解得：$t=1$ 或 2，

所以不等式①的解为 $1\le t\le2$，故 $1\le|x|\le2$，

解得：$-2\le x\le-1$，或 $1\le x\le2$，

所以原不等式的解集为 $\{x\,|-2\le x\le-1$，或 $1\le x\le2\}$．

3．（2024·陕西二模）

若 $2\in\{x\,|\,ax^2+3x+a^2-3>0\}$，则 a 的取值范围（　　）

A．$\{a\,|-3<a<-1\}$

B．$\{a\,|-3\le a\le-1\}$

C．$\{a\,|\,a\le-3$，或 $a\ge-1\}$

D．$\{a\,|\,a<-3$，或 $a>-1\}$

3. D

解析：由题意，$x=2$ 满足不等式 $ax^2+3x+a^2-3>0$，

所以 $a\cdot 2^2+3\times 2+a^2-3>0$，化简得：$a^2+4a+3>0$ ①，

令 $a^2+4a+3=0$ 得 $(a+1)(a+3)=0$，解得：$a=-1$ 或 -3，

所以不等式①的解集为 $\{a\,|\,a<-3$，或 $a>-1\}$.

4.（2024 • 山西运城期末）

设 $x\in\mathbf{R}$，则“$0\le x\le 3$”是“$\dfrac{x}{x-2}\le 0$”的（　　）

A．充分不必要条件

B．必要不充分条件

C．充要条件

D．既不充分也不必要条件

4. B

解析：记 $p:0\le x\le 3$，$q:\dfrac{x}{x-2}\le 0$，

$\dfrac{x}{x-2}\le 0 \Leftrightarrow \begin{cases}x(x-2)\le 0\\ x-2\ne 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0\le x\le 2\\ x\ne 2\end{cases} \Leftrightarrow 0\le x<2$，

所以 $q:0\le x<2$，因为 $\{x\,|\,0\le x<2\}\subsetneqq\{x\,|\,0\le x\le 3\}$，所以 q 是 p 的充分不必要条件，故 p 是 q 的必要不充分条件.

B 组 强化能力

5.（2024 • 安徽宣城期末）

设 $x\in\mathbf{R}$，使得不等式 $x^2-6x+5<0$ 成立的一个充分不必要条件是（　　）

A．$1<x<5$

B．$x>0$

C．$x<4$

D．$2\le x\le 3$

5. D

解析：令 $x^2-6x+5=0$ 可得 $(x-1)(x-5)=0$，解得：$x=1$ 或 5，所以 $x^2-6x+5<0$ 的解集为 $\{x\,|\,1<x<5\}$，

选项是 $x^2-6x+5<0$ 的充分不必要条件意味着选项对应“小集合”，$\{x\,|\,1<x<5\}$ 是大集合，

A 项，$1<x<5$ 是 $x^2-6x+5<0$ 的充要条件，故 A 项错误；

B 项，因为 $\{x\,|\,1<x<5\}\subsetneqq\{x\,|\,x>0\}$，所以 $x>0$ 是 $x^2-6x+5<0$ 的必要不充分条件，故 B 项错误；

C 项，因为 $\{x\,|\,x<4\}$ 与 $\{x\,|\,1<x<5\}$ 互不包含，所以 $x<4$ 是 $x^2-6x+5<0$ 的既不充分也不必要条件，故 C 项错误；

D 项，因为 $\{x\,|\,2\le x\le 3\}\subsetneqq\{x\,|\,1<x<5\}$，所以 $2\le x\le 3$ 是 $x^2-6x+5<0$ 的充分不必要条件，故 D 项正确.

6.（2024 • 浙江模拟）

若不等式 $kx^2+(k-6)x+2>0$ 的解为全体实数，则实数 k 的取值范围是（　　）

A．$\{k\mid 2\le k\le 18\}$　　B．$\{k\mid -18<k<-2\}$

C．$\{k\mid 2<k<18\}$　　D．$\{k\mid 0<k<2\}$

6．C

解析：平方项系数为字母，其是否为 0，对不等式的类型有影响，研究方法也不同，故讨论，

当 $k=0$ 时，$kx^2+(k-6)x+2>0$ 即为 $-6x+2>0$，

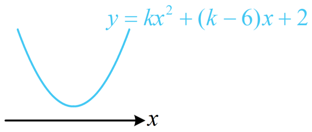
解得：$x<\dfrac{1}{3}$，所以原不等式的解集不是 $\mathbf{R}$，不合题意；

当 $k\ne 0$ 时，如图，$kx^2+(k-6)x+2>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$ 等价于二次函数 $y=kx^2+(k-6)x+2$ 开口向上，且与 x 轴无交点，

所以 $\begin{cases}k>0\\ \Delta=(k-6)^2-4k\cdot 2=k^2-20k+36=(k-2)(k-18)<0\end{cases}$，

从而 $\begin{cases}k>0\\ 2<k<18\end{cases}$，故 $2<k<18$；

综上所述，实数 k 的取值范围是 $\{k\mid 2<k<18\}$．



7.（2024 • 浙江绍兴期末）（多选）

已知 $a\in\mathbf{R}$，关于 x 的一元二次不等式 $(ax-2)(x+2)>0$ 的解集可能是（　　）

A．$\left\{x\middle|x<-2 \text{ 或 } x>\dfrac{2}{a}\right\}$　　B．$\{x\mid x>-2\}$

C．$\left\{x\middle|-2<x<\dfrac{2}{a}\right\}$　　D．$\left\{x\middle|\dfrac{2}{a}<x<-2\right\}$

7．ACD

解析：已经说了是一元二次不等式，无需考虑 $a=0$ 的情形，但 a 的正负对不等式的解有影响，故据此讨论，

令 $(ax-2)(x+2)=0$ 可得 $x=\dfrac{2}{a}$ 或 -2，

当 $a>0$ 时，$\dfrac{2}{a}>0$，$0>-2$，所以 $\dfrac{2}{a}>-2$，

从而原不等式的解集为 $\left\{x\middle|x<-2\text{或}x>\dfrac{2}{a}\right\}$，故 A 项正确；

当 $a<0$ 时，$\dfrac{2}{a}<0$，此时 $\dfrac{2}{a}$ 与 -2 的大小不确定，故又讨论它们的大小，即讨论 a 与 -1 的大小，

①若 $a<-1$，则 $-2<\dfrac{2}{a}<0$，如图 1，

原不等式的解集为 $\left\{x\middle|-2<x<\dfrac{2}{a}\right\}$，故 C 项正确；

②若 $a=-1$，则原不等式即为 $(-x-2)(x+2)>0$，

即 $(x+2)^2<0$，无解，所以原不等式的解集为 $\varnothing$；

③若 $-1<a<0$，则 $\dfrac{2}{a}<-2$，如图 2，

原不等式的解集为$\left\{x\middle|\frac{2}{a}<x<-2\right\}$，故 D 项正确.

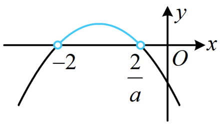


图1

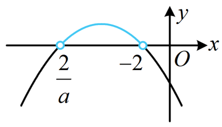


图2

8.（2024 • 河北张家口开学考试）

若不等式$ax^2+bx-6<0$的解集为$\{x\,|\,-3<x<2\}$，则不等式$x^2-bx-2a\geq0$的解集是（　　）

A．$\{x\,|\,x<-2$ 或 $x\geq3\}$

B．$\{x\,|\,-1\leq x\leq2\}$

C．$\{x\,|\,-2\leq x\leq3\}$

D．$\{x\,|\,x\leq-1$ 或 $x\geq2\}$

8．D

解析：已知$ax^2+bx-6<0$的解集，可推知一元二次方程$ax^2+bx-6=0$的根，故能求出a和b，

由题意，-3和 2 是方程$ax^2+bx-6=0$的两根，且$a>0$，

由韦达定理，$\begin{cases}-3+2=-\dfrac{b}{a}\\-3\times2=-\dfrac{6}{a}\end{cases}$，解得：$a=b=1$，

所以不等式$x^2-bx-2a\geq0$即为$x^2-x-2\geq0$　①，

令$x^2-x-2=0$可得$(x+1)(x-2)=0$，解得：$x=-1$或 2，

所以不等式①的解集为$\{x\,|\,x\leq-1$ 或 $x\geq2\}$.

9.（2024 • 山东临沂期末）（多选）

已知关于x的一元二次不等式$ax^2+bx+c\geq0$的解集为$\{x\,|\,x\leq-2$ 或 $x\geq1\}$，则（　　）

A．$b>0$且$c<0$

B．$4a+2b+c=0$

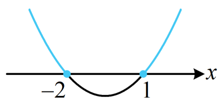
C．不等式$bx+c>0$的解集为$\{x\,|\,x>2\}$

D．不等式$cx^2-bx+a<0$的解集为$\left\{x\middle|-1<x<\frac{1}{2}\right\}$

9．AC

解析：条件给出一元二次不等式的解集，可推知对应的一元二次方程的实根，

因为$ax^2+bx+c\geq0$的解集为$\{x\,|\,x\leq-2$ 或 $x\geq1\}$，所以二次函数$y=ax^2+bx+c$的大致图象如图，



由图可知，$a>0$且$\begin{cases}-2+1=-\dfrac{b}{a}\\-2\times1=\dfrac{c}{a}\end{cases}$，所以$b=a$，$c=-2a$，

A 项，由$a>0$可知$b=a>0$，$c=-2a<0$，故 A 项正确；

B 项，$4a+2b+c=4a+2a-2a=4a>0$，故 B 项错误；

C 项，不等式 $bx+c>0$ 即为 $ax-2a>0$，所以 $ax>2a$，
两端除以 a 得 $x>2$，从而 $bx+c>0$ 的解集为 $\{x|x>2\}$，
故 C 项正确；
D 项，$cx^2-bx+a<0$ 即为 $-2ax^2-ax+a<0$，两端同除以 $-a$ 得 $2x^2+x-1>0$ ①，
令 $2x^2+x-1=0$ 得 $(x+1)(2x-1)=0$，解得：$x=-1$ 或 $\frac{1}{2}$，所以不等式①的解集为 $\left\{x\middle|x<-1\text{或}x>\frac{1}{2}\right\}$，故 D 项错误.

10.（2024·山东滨州期末）

若不等式 $x^2-ax+4\ge0$ 对任意 $1\le x\le3$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$\{a|0\le a\le4\}$　　B．$\{a|a\le4\}$

C．$\left\{a\middle|a\le\frac{13}{3}\right\}$　　D．$\{a|a\le5\}$

10．B

解析：观察发现只需在 $x^2-ax+4\ge0$ 两端除以 x，就能将 a 孤立，从而分离出 a，
当 $1\le x\le3$ 时，$x^2-ax+4\ge0\Leftrightarrow x-a+\frac{4}{x}\ge0$
$\Leftrightarrow a\le x+\frac{4}{x}$ ①，
不等式①恒成立意味着 $a\le\left(x+\frac{4}{x}\right)_{\min}$，观察发现有现成的“积定”，故考虑直接用基本不等式求最小值，
$x+\frac{4}{x}\ge2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}=4$，当且仅当 $x=\frac{4}{x}$，即 $x=2$ 时取等号，
满足 $1\le x\le3$，所以 $\left(x+\frac{4}{x}\right)_{\min}=4$，
由①可知 $a\le x+\frac{4}{x}$ 在 $1\le x\le3$ 时恒成立，所以 $a\le4$.

11.（2024·河南开学考试）

河南是华夏文明的主要发祥地之一，众多的文物古迹和著名的黄河等自然风光构成了河南丰富的旅游资源，在旅游业蓬勃发展的带动下，餐饮、酒店、工艺品等行业持续发展．某连锁酒店共有 500 间客房，若每间客房每天的定价是 200 元，则均可被租出；若每间客房每天的定价在 200 元的基础上提高 $10x$ 元 $(1\le x\le10,x\in\mathbf{Z})$，则被租出的客房会减少 $15x$ 套．若要使该连锁酒店每天租赁客房的收入超过 106600 元，则该连锁酒店每间客房每天的定价应为（　　）

A．250 元　　B．260 元

C．270 元　　D．280 元

11．C

解析：由题意，每间房定价提高 $10x$ 元后定价是 $(200+10x)$ 元，且每天被租出的客房套数是 $500-15x$，
所以每天租赁客房的收入为 $(200+10x)(500-15x)$
$=-150x^2+2000x+100000$ 元，
令 $-150x^2+2000x+100000>106600$，
则 $3x^2-40x+132<0$，
由 $3x^2-40x+132=0$ 可得 $(3x-22)(x-6)=0$，
解得：$x=\frac{22}{3}$ 或 6，

所以 $3x^2-40x+132<0$ 的解集为 $\left\{x \middle| 6<x<\dfrac{22}{3}\right\}$，

结合 $x\in\mathbf{Z}$ 可知 $x=7$，所以该连锁酒店每间客房每天的定价应为 $200+10\times7=270$ 元.

C 组 拓展提升

12.（2024 • 浙江模拟）

若存在 $-2\le x\le -1$，使 $ax^2-ax+1>0$，则实数 a 的取值范围是_____.

12. $\left\{a \middle| a>-\dfrac{1}{2}\right\}$

解析：观察发现若将前两项提公因式 a，则 a 只出现一次，容易将其分离出来，故考虑参变分离，

$ax^2-ax+1>0\Leftrightarrow a(x^2-x)>-1$ ①，

当 $-2\le x\le -1$ 时，$x^2-x=x(x-1)>0$，

所以不等式①等价于 $a>-\dfrac{1}{x^2-x}$ ②，

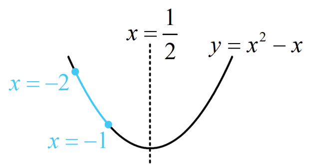
从而题设条件等价于存在 $-2\le x\le -1$，使不等式②成立，

故 $a>\left(-\dfrac{1}{x^2-x}\right)_{\min}$ ③，

怎样求该最小值？注意到当 $-2\le x\le -1$ 时，$x^2-x=x(x-1)$ >0，所以要使 $-\dfrac{1}{x^2-x}$ 最小，只需 $\dfrac{1}{x^2-x}$ 最大，即 x^2-x 最小，故可先分析 x^2-x 的最小值，

如图，当 $-2\le x\le -1$ 时，函数 $y=x^2-x$ 的最小值在 $x=-1$ 时取得，所以 $(x^2-x)_{\min}=2$，故 $\left(-\dfrac{1}{x^2-x}\right)_{\min}=-\dfrac{1}{2}$，

代入③可得 $a>-\dfrac{1}{2}$.



13.（2024 • 全国模拟）

已知关于 x 的不等式 $ax^3+bx^2+cx>0$．若 $a=1$，$b=2$，$c=-3$，则该不等式的解集为_____；若该不等式的解集为 $\{x\,|-2<x<0$ 或 $x>1\}$，则 $\dfrac{b}{c}=$_____.

13. $\{x\,|-3<x<0$，或 $x>1\}$；$-\dfrac{1}{2}$

解析：若 $a=1$，$b=2$，$c=-3$，则原不等式即为 $x^3+2x^2-3x>0$，令 $x^3+2x^2-3x=0$ 可得 $x(x+3)(x-1)=0$，

解得：$x=0$ 或 -3 或 1，“穿针引线”的结果如图 1，

由图可知，原不等式的解集为 $\{x\,|-3<x<0$，或 $x>1\}$；

$ax^3+bx^2+cx>0\Leftrightarrow x(ax^2+bx+c)>0$ ①，

此为高次不等式，可用“穿针引线法”分析其解的情况，

要使不等式①的解集为$\{x|-2<x<0$或$x>1\}$，则方程

$x(ax^2+bx+c)=0$有-2，0，1三个解，

且“穿针引线”的结果如图2，

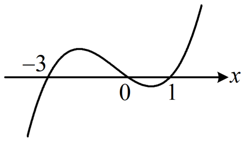


图1

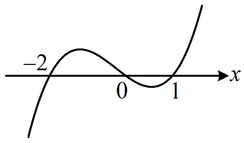


图2

因为$x(ax^2+bx+c)=0 \Leftrightarrow x=0$或$ax^2+bx+c=0$，

所以-2和1是方程$ax^2+bx+c=0$的两个解，

从而$\begin{cases}-2+1=-\dfrac{b}{a}\\ -2\times1=\dfrac{c}{a}\end{cases}$，故$\begin{cases}b=a\\ c=-2a\end{cases}$，

此时原不等式可化为$ax(x+2)(x-1)>0$，只需$a>0$，就有该不等式的解集为$\{x|-2<x<0$或$x>1\}$，

所以$\dfrac{b}{c}=\dfrac{a}{-2a}=-\dfrac{1}{2}$.

14．（2024·四川成都开学考试）

（1）若关于x的不等式$x^2-2ax+3\geq0$的解集为**R**，求实数a的取值范围；

（2）解关于x的不等式$x^2-2ax+3<0$.

14．**解**：（1）（题设条件等价于二次函数$y=x^2-2ax+3$的图象位于x轴上方（可与x轴有交点），故可用判别式处理）

$x^2-2ax+3\geq0$的解集为**R**，如图1或图2，

$\Delta=(-2a)^2-4\times1\times3=4(a^2-3)\leq0$，解得：$-\sqrt{3}\leq a\leq\sqrt{3}$，

所以实数a的取值范围是$\{a|-\sqrt{3}\leq a\leq\sqrt{3}\}$.

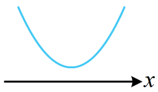


图1

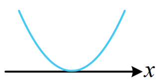


图2

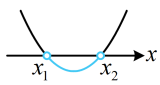


图3

（2）（求解$x^2-2ax+3<0$，先求方程$x^2-2ax+3=0$的实根，该方程的实根个数不确定，故讨论Δ）

方程$x^2-2ax+3=0$的判别式$\Delta=4(a^2-3)$，

当$a<-\sqrt{3}$或$a>\sqrt{3}$时，$\Delta>0$，所以方程$x^2-2ax+3=0$

有两个实根$x_1=a-\sqrt{a^2-3}$，$x_2=a+\sqrt{a^2-3}$，

如图3，不等式$x^2-2ax+3<0$的解集为$\{x|x_1<x<x_2\}$，

即$\{x|a-\sqrt{a^2-3}<x<a+\sqrt{a^2-3}\}$；

当$-\sqrt{3}\leq a\leq\sqrt{3}$时，由（1）可知$x^2-2ax+3\geq0$恒成立，

所以$x^2-2ax+3<0$的解集为$\varnothing$.

15．（2024·湖北模拟）

（1）解关于x的不等式：$x^2+(4-a)x+a-4\leq1$；

（2）命题“$\forall x>1$，$x^2+(4-a)x+a-4\geq0$”是真命题，求a的最大值.

15．**解**：（1）$x^2+(4-a)x+a-4\leq1 \Leftrightarrow x^2+(4-a)x+a-5\leq0$，

令$x^2+(4-a)x+a-5=0$可得$(x+5-a)(x-1)=0$，

解得：$x=a-5$或1，

（“小于取中间”，那解集是$\{x|a-5\leq x\leq1\}$，还是$\{x|1\leq x\leq a-5\}$呢？这要看$a-5$与1的大小，故讨论）

当 $a>6$ 时，$a-5>1$，原不等式的解集为 $\{x\,|\,1\le x\le a-5\}$；
当 $a=6$ 时，原不等式可化为 $(x-1)^2\le 0$，
所以其解集为 $\{x\,|\,x=1\}$；
当 $a<6$ 时，$a-5<1$，原不等式的解集为 $\{x\,|\,a-5\le x\le 1\}$.

（2）**解法 1**：（观察发现若将含 a 的两项拿到一起，则可把 a 提出去，进而分离出来，故可按此尝试）

$\forall x>1$，$x-1>0$，故 $x^2+(4-a)x+a-4\ge 0\Leftrightarrow x^2+4x-4$
$-a(x-1)\ge 0\Leftrightarrow x^2+4x-4\ge a(x-1)\Leftrightarrow a\le\dfrac{x^2+4x-4}{x-1}$ ①，

（①恒成立意味着 $a\le\left(\dfrac{x^2+4x-4}{x-1}\right)_{\min}$，这是“$\dfrac{二次}{一次}$”结构，可考虑将“一次”部分换元，再拆开处理）

令 $t=x-1$，则 $x=t+1$，当 $x>1$ 时，$t>0$，
所以 $\dfrac{x^2+4x-4}{x-1}=\dfrac{(t+1)^2+4(t+1)-4}{t}=\dfrac{t^2+6t+1}{t}$
$=t+\dfrac{1}{t}+6\ge 2\sqrt{t\cdot\dfrac{1}{t}}+6=8$，
取等条件是 $t=\dfrac{1}{t}$，即 $t=1$，故 $\left(\dfrac{x^2+4x-4}{x-1}\right)_{\min}=8$，
由①知 $a\le\dfrac{x^2+4x-4}{x-1}$ 恒成立，所以 $a\le 8$，故 $a_{\max}=8$.

解法 2：（所给命题为真意味着 $[x^2+(4-a)x+a-4]_{\min}\ge 0$，故也可考虑分析该二次函数的最小值，由于其对称轴是含参的，所以通过讨论对称轴的位置来求最小值）

二次函数 $y=x^2+(4-a)x+a-4$ 的对称轴是 $x=\dfrac{a-4}{2}$，
当 $\dfrac{a-4}{2}>1$ 时，$a>6$，如图 1，函数 $y=x^2+(4-a)x+a$
-4 在 $x>1$ 时的最小值在对称轴处取得，
要使 $x^2+(4-a)x+a-4\ge 0$ 恒成立，只需 $\Delta=(4-a)^2-$
$4(a-4)=(a-4)(a-8)\le 0$，解得：$4\le a\le 8$，
结合 $a>6$ 可得 $6<a\le 8$；
当 $\dfrac{a-4}{2}\le 1$ 时，$a\le 6$，如图 2，函数 $y=x^2+(4-a)x+a$
-4 在 $x=1$ 处取得下界（这里因为 $x>1$，所以函数没有最小值，故我们改称 $x=1$ 处的函数值为下界），
要使 $x^2+(4-a)x+a-4\ge 0$ 恒成立，
应有 $1^2+(4-a)\cdot 1+a-4\ge 0$，化简得：$1\ge 0$，恒成立，
所以 $a\le 6$ 满足题意；
综上所述，当原命题为真命题时，$a\le 8$，
所以 a 的最大值是 8.

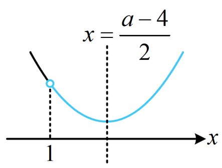


图1

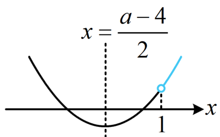


图2