## 强化训练

### A 组 夯实基础

1．（2024 • 北京怀柔模拟）

已知集合 $A=\{x\mid 3-x>1\}$， $B=\{0,1,2,3,4\}$，则

$A\cap B=$（　　）

A． $\{3,4\}$　　B． $\{2,3,4\}$

C． $\{0,1\}$　　D． $\{0,1,2\}$

1．C

**解析**：由 $3-x>1$ 可得 $x<2$，所以 $A=\{x\mid x<2\}$，

又 $B=\{0,1,2,3,4\}$，所以 $A\cap B=\{0,1\}$．

2．（2024 • 甘肃白银模拟）

已知集合 $A=\{x\mid -3<x\le 2\}$， $B=\{x\mid -2\le x<3\}$，

则 $A\cup B=$（　　）

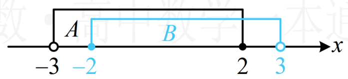
A． $\{x\mid -2<x<2\}$　　B． $\{x\mid -2\le x\le 2\}$

C． $\{x\mid -2<x\le 3\}$　　D． $\{x\mid -3<x<3\}$

2．D

**解析**：如图， $A\cup B=\{x\mid -3<x<3\}$．






3．（2024 • 四川泸州二模）

已知全集 $U=\{x\mid x+2>0\}$，集合 $A=\{x\mid x\ge 1\}$，

则 $\complement_U A=$（　　）

A． $\{x\mid -2<x<1\}$　　B． $\{x\mid -2<x\le 1\}$

C． $\{x\mid x\le 1\}$　　D． $\{x\mid x<1\}$

3．A

**解析**：由 $x+2>0$ 可得 $x>-2$，所以 $U=\{x\mid x>-2\}$，

又 $A=\{x\mid x\ge 1\}$，所以 $\complement_U A=\{x\mid -2<x<1\}$．

4．（2024 • 河南驻马店模拟）

为了坚持“五育”并举，全面发展素质教育，某学校在课余时间提供了多种社团供学生们选择，每位同学都可以选择多种社团，其中选择舞蹈社团或园艺社团的同学有 90 人，选择舞蹈社团的同学有 55 人，选择园艺社团的同学有 60 人，则同时选择舞蹈社团和园艺社团的同学人数是_____．

4．25

**解析**：题干涉及两类人，且彼此有重叠，这种情况可考虑用容斥原理来分析各部分的人数，

设选择舞蹈、园艺社团的学生分别构成集合 $A$，$B$，

由题意， $\text{card}(A\cup B)=90$， $\text{card}(A)=55$， $\text{card}(B)=60$，

由容斥原理， $\text{card}(A\cup B)=\text{card}(A)+\text{card}(B)-\text{card}(A\cap B)$，

所以 $\text{card}(A\cap B)=\text{card}(A)+\text{card}(B)-\text{card}(A\cup B)$

$=55+60-90=25$.

## B组 强化能力

5.（2024·北京海淀开学考试）

若全集 $I=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\,|\,x>0\}$， $B=\{x\,|-1\le$

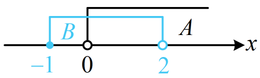
$x<2\}$，则 $\complement_I(A\cup B)=$（　　）

A. $\{x\,|\,x<-1\}$　　B. $\{x\,|\,x\le -1\}$

C. $\{x\,|\,x\ge -1\}$　　D. $\{x\,|\,x\ge 2\}$

5. A

**解析**：如图， $A\cup B=\{x\,|\,x\ge -1\}$，故 $\complement_I(A\cup B)=\{x\,|\,x<-1\}$.

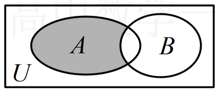



6.（2024·陕西西安模拟）

若全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{0,1,2,3,4,5,6\}$， $B=$

$\{x\,|\,x<3\}$，则图中阴影部分表示的集合为_____.






6. $\{3,4,5,6\}$

**解析**：阴影部分表示在 $A$ 中把 $A$ 和 $B$ 公共的元素去掉后，余下的部分，即 $\complement_A(A\cap B)$，故先求 $A\cap B$，

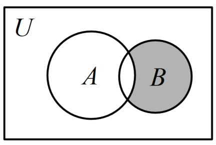
由题意，$A$ 中的元素 0，1，2 也在集合 $B$ 中，其余元素不在集合 $B$ 中，所以 $A\cap B=\{0,1,2\}$，

故所给图中阴影部分表示的集合为 $\complement_A(A\cap B)=\{3,4,5,6\}$.

7.（2024·辽宁大连期末）

设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\,|\,x\ge 2\}$， $B=\{x\,|\,1<x<$

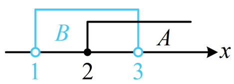
$3\}$，则图中阴影部分表示的集合为_____.




7. $\{x\,|\,1<x<2\}$

**解析**：阴影部分可看成在集合 $B$ 中把 $A\cap B$ 那一块去掉后余下的部分，即 $\complement_B(A\cap B)$，故先求 $A\cap B$，

如图， $A\cap B=\{x\,|\,2\le x<3\}$，故所求阴影部分表示的集合为 $\complement_B(A\cap B)=\{x\,|\,1<x<2\}$.




【反思】若题干给出了具体的集合，让求 Venn 图中的某一部分，则应先分析该部分可由所给集合进行怎样的运算得到.

8.（2023 • 全国乙卷）

设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $M=\{x\mid x<1\}$， $N=\{x\mid -1<x<2\}$，则 $\{x\mid x\geq 2\}=$（　　）

A. $\complement_U(M\cup N)$　　B. $N\cap\complement_U M$

C. $\complement_U(M\cap N)$　　D. $M\cap\complement_U N$

8. A

**解析**：从 $M$，$N$ 出发，通过正面推理得到 $\{x\mid x\geq 2\}$ 不易，考虑逐个验证选项，看谁是 $\{x\mid x\geq 2\}$，

A 项，如图 1， $M\cup N=\{x\mid x<2\}$，所以 $\complement_U(M\cup N)$

$=\{x\mid x\geq 2\}$，故 A 项正确；此为单选题，到此已可结束，但我们把后面的选项也做个分析，

B 项，$\complement_U M=\{x\mid x\geq 1\}$，如图 2， $N\cap\complement_U M=\{x\mid 1\leq x<2\}$，

故 B 项错误；

C 项，由图 1 可知 $M\cap N=\{x\mid -1<x<1\}$，

所以 $\complement_U(M\cap N)=\{x\mid x\leq -1$ 或 $x\geq 1\}$，故 C 项错误；

D 项，$\complement_U N=\{x\mid x\leq -1$ 或 $x\geq 2\}$，

所以如图 3， $M\cap\complement_U N=\{x\mid x\leq -1\}$，故 D 项错误.

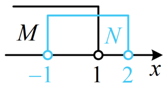


图1

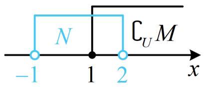


图2

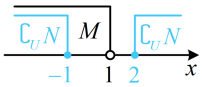


图3

9.（2023 • 全国甲卷）



设集合 $A=\{x\mid x=3k+1,k\in\mathbf{Z}\}$， $B=\{x\mid x=3k+2,k\in\mathbf{Z}\}$，$U$ 为整数集，则 $\complement_U(A\cup B)=$（　　）

A. $\{x\mid x=3k,k\in\mathbf{Z}\}$

B. $\{x\mid x=3k-1,k\in\mathbf{Z}\}$

C. $\{x\mid x=3k-2,k\in\mathbf{Z}\}$

D. $\varnothing$

9. A

**解法 1**： $A\cup B=\{x\mid x=3k+1$ 或 $x=3k+2,k\in\mathbf{Z}\}$，

它包括除以 3 后余数为 1 或 2 的整数，整数除以 3 余数只能是 0，1，2，所以取补集后剩下的是余数为 0 的，

所以 $\complement_U(A\cup B)=\{x\mid x=3k,k\in\mathbf{Z}\}$.

**解法 2**：若想象不出 $\complement_U(A\cup B)$ 中的元素有哪些，也可罗列部分元素来看规律，

由题意，集合 $A=\{\cdots,-5,-2,1,4,7,\cdots\}$，

集合 $B=\{\cdots,-4,-1,2,5,8,\cdots\}$，

所以 $A\cup B=\{\cdots,-5,-4,-2,-1,1,2,4,5,7,8,\cdots\}$，

故 $\complement_U(A\cup B)=\{\cdots,-3,0,3,6,\cdots\}=\{x\mid x=3k,k\in\mathbf{Z}\}$.

10.（2024·新疆模拟）

设集合 $A=\{1,2\}$， $B=\{m,m+1\}$，若 $A\bigcap B=\{n\}$，

则 $m=$（　　）

A．0　B．1　C．0 或 1　D．0 或 2

10．D

**解析**：$A\bigcap B=\{n\}$ 意味着 $A$，$B$ 只有 1 个公共元素，注意到 $A$ 的元素都已知，故就讨论公共元素是 $A$ 中的谁，

若 $A\bigcap B=\{1\}$，则 $1\in B$，所以 $m=1$ 或 $m+1=1$，

故 $m=1$ 或 0，由 $1\in B$ 求出的 $m$ 不能保证 $A\bigcap B=\{1\}$，故还需代回集合 $B$ 去检验，

当 $m=1$ 时， $B=\{1,2\}$，此时 $A\bigcap B=\{1,2\}$，不合题意，

当 $m=0$ 时， $B=\{0,1\}$，满足 $A\bigcap B=\{1\}$；

若 $A\bigcap B=\{2\}$，则 $2\in B$，所以 $m=2$ 或 $m+1=2$，

故 $m=2$ 或 1（舍去，前面已经检验过这种情况），

当 $m=2$ 时， $B=\{2,3\}$，满足 $A\bigcap B=\{2\}$；

综上所述， $m=0$ 或 2.

11.（2024·湖南长沙期末）

已知全集为 $U$，集合 $M$，$N$ 满足 $M\subsetneqq N\subsetneqq U$，则下列运算结果为 $U$ 的是（　　）

A．$M\bigcup N$　　B．$(\complement_U N)\bigcup(\complement_U M)$

C．$M\bigcup(\complement_U N)$　　D．$N\bigcup(\complement_U M)$



11．D

**解法 1**：A 项，因为 $M\subsetneqq N\subsetneqq U$，所以 $M\bigcup N=N\neq U$，

故 A 项错误；

B 项，$\complement_U N$ 如图 1 的阴影部分，$\complement_U M$ 如图 2 的阴影部分，

所以 $(\complement_U N)\bigcup(\complement_U M)=\complement_U M\neq U$，故 B 项错误；

C 项，如图 3， $M\bigcup(\complement_U N)$ 为阴影部分，

所以 $M\bigcup(\complement_U N)\neq U$，故 C 项错误；

D 项，$\complement_U M$ 如图 2 的阴影部分，再把 $N$ 加进去，可以覆盖全集 $U$ 的所有元素，从而 $N\bigcup(\complement_U M)=U$，故 D 项正确.

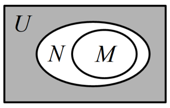


图1

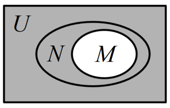


图2

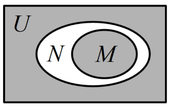


图3

**解法 2**：所给条件 $M\subsetneqq N\subsetneqq U$ 比较简单，也可考虑举出具体的集合 $M$，$N$，$U$ 来分析选项，

设 $U=\{1,2,3\}$， $M=\{1\}$， $N=\{1,2\}$，满足 $M\subsetneqq N\subsetneqq U$，

A 项， $M\bigcup N=\{1,2\}\neq U$，故 A 项错误；

B 项， $\complement_U N=\{3\}$， $\complement_U M=\{2,3\}$，

所以 $(\complement_U N)\bigcup(\complement_U M)=\{2,3\}\neq U$，故 B 项错误；

C 项， $M\bigcup(\complement_U N)=\{1\}\bigcup\{3\}=\{1,3\}\neq U$，故 C 项错误；

D 项， $N\bigcup(\complement_U M)=\{1,2\}\bigcup\{2,3\}=\{1,2,3\}=U$，故 D 项正确.

12．（2024 • 河北石家庄模拟）

已知全集$U=\mathbf{R}$，集合$A=\{x\mid -2\le x\le 5\}$，

$B=\{x\mid a\le x\le 2-a\}$．

（1）当$a=-2$时，求$A\cap(\complement_U B)$；

（2）若$A\cup(\complement_U B)=\mathbf{R}$，求实数$a$的取值范围.

12．**解**：（1）当$a=-2$时，$B=\{x\mid -2\le x\le 4\}$，所以$\complement_U B=\{x\mid x<-2$ 或 $x>4\}$，

又$A=\{x\mid -2\le x\le 5\}$，如图 1，$A\cap(\complement_U B)=\{x\mid 4<x\le 5\}$．

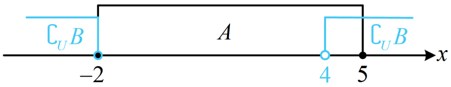


图1

（2）（集合$B$中$a\le x\le 2-a$的两边都含参，所以$B$可能为空集，此时$\complement_U B=\mathbf{R}$，当然满足要求，先考虑这种情况）

当$B=\varnothing$时，$a>2-a$，解得：$a>1$，此时$\complement_U B=\mathbf{R}$，

所以$A\cup(\complement_U B)=\mathbf{R}$，满足题意；

当$B\ne\varnothing$时，首先，$a\le 2-a$，所以$a\le 1$，

其次，$\complement_U B=\{x\mid x<a$ 或 $x>2-a\}$，如图 2，

要使$A\cup(\complement_U B)=\mathbf{R}$，应有$\begin{cases}a\ge -2\\ 2-a\le 5\end{cases}$，解得：$a\ge -2$，

结合$a\le 1$可得$-2\le a\le 1$；

综上所述，实数$a$的取值范围是$\{a\mid a\ge -2\}$．

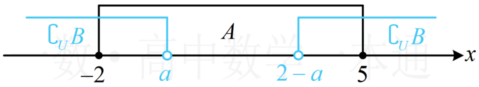


图2

13．（2024 • 重庆期末）

已知集合$A=\{x\mid 2-m\le x\le m\}$，$B=\{x\mid 1\le x\le 2\}$．

（1）当$m=2$时，求$\complement_{\mathbf{R}}(A\cup B)$；

（2）若$A\cap B=A$，求实数$m$的取值范围.

13．**解**：（1）当$m=2$时，$A=\{x\mid 0\le x\le 2\}$，

又$B=\{x\mid 1\le x\le 2\}$，所以$A\cup B=\{x\mid 0\le x\le 2\}$，

故$\complement_{\mathbf{R}}(A\cup B)=\{x\mid x<0$ 或 $x>2\}$．

（2）因为$A\cap B=A$，所以$A\subseteq B$，（看到$A\subseteq B$，想到先考虑$A$为空集的情况）

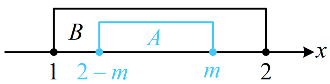
当$A=\varnothing$时，$2-m>m$，解得：$m<1$，此时满足$A\subseteq B$；

当$A\ne\varnothing$时，首先，$2-m\le m$，解得：$m\ge 1$，

其次，如图，要使$A\subseteq B$，应有$\begin{cases}2-m\ge 1\\ m\le 2\end{cases}$，

解得：$m\le 1$，结合$m\ge 1$可得$m=1$；

综上所述，实数$m$的取值范围是$\{m\mid m\le 1\}$．



## C 组 拓展提升

14．（2024 • 河南郑州模拟）

某年级先后举办了数学、历史、音乐讲座，其中有 75 人听了数学讲座，68 人听了历史讲座，61 人听了音乐讲座，记 $A=\{x\mid x$ 是听了数学讲座的学生$\}$， $B=\{x\mid x$ 是听了历史讲座的学生$\}$， $C=\{x\mid x$ 是听了音乐讲座的学生$\}$．用 $\operatorname{card}(M)$ 来表示有限集合 $M$ 中元素的个数，若 $\operatorname{card}(A\cap B)=17$， $\operatorname{card}(A\cap C)=12$， $\operatorname{card}(B\cap C)=9$， $A\cap B\cap C=\varnothing$，则（　　）

A． $\operatorname{card}(A\cup B)=143$

B． $\operatorname{card}(A\cup B\cup C)=166$

C． $\operatorname{card}(B\cup C)=129$

D． $\operatorname{card}(A\cap B\cap C)=38$

14．B

**解析**：观察已知和选项发现可用容斥原理处理，

由题意， $\operatorname{card}(A)=75$， $\operatorname{card}(B)=68$， $\operatorname{card}(C)=61$，

$\operatorname{card}(A\cap B)=17$， $\operatorname{card}(A\cap C)=12$， $\operatorname{card}(B\cap C)=9$，

由 $A\cap B\cap C=\varnothing$ 可得 $\operatorname{card}(A\cap B\cap C)=0$，故 D 项错误；

A 项，由容斥原理， $\operatorname{card}(A\cup B)=\operatorname{card}(A)+\operatorname{card}(B)$

$-\operatorname{card}(A\cap B)=75+68-17=126\neq 143$，故 A 项错误；

B 项，由容斥原理， $\operatorname{card}(A\cup B\cup C)=\operatorname{card}(A)+$

$\operatorname{card}(B)+\operatorname{card}(C)-\operatorname{card}(A\cap B)-\operatorname{card}(A\cap C)-\operatorname{card}(B\cap C)$

$+\operatorname{card}(A\cap B\cap C)=75+68+61-17-12-9+0=166$，



故 B 项正确；

C 项，由容斥原理， $\operatorname{card}(B\cup C)=\operatorname{card}(B)+\operatorname{card}(C)$

$-\operatorname{card}(B\cap C)=68+61-9=120$，故 C 项错误．

15．（2024 • 全国竞赛）

设集合 $A=\{1,2,3,4\}$， $B=\{1,2\}$，若 $C\subseteq A$ 且 $B\cap C\neq\varnothing$，则所有满足条件的集合 $C$ 的个数为_____．

15．12

**解法 1**：逐一罗列 $C$ 的可能情况较麻烦，我们先来分析 $C$ 要满足的两个条件，

因为 $C\subseteq A$，所以 $C$ 是 $A$ 的子集，

因为 $A$ 有 4 个元素，所以其子集有 $2^4=16$ 个，

再考虑 $B\cap C\neq\varnothing$，看看上述 16 个子集中哪些要剔除，

因为 $B\cap C\neq\varnothing$，所以元素 1 和 2 至少有 1 个在 $C$ 中，

这意味着元素 1 和 2 都不在 $C$ 中的情况是要剔除的，这种情况有几种呢？将 $A$ 中的元素 1，2 去掉后为 $\{3,4\}$，该集合有几个子集，元素 1 和 2 都不在 $C$ 中的情况就有几种，

集合 $\{3,4\}$ 有 $2^2=4$ 个子集，它们也都是 $A$ 的子集，

若以这些子集作为 $C$，则不满足 $B\cap C\neq\varnothing$，

所以所有满足条件的集合 $C$ 的个数为 $16-4=12$．

**解法 2**：能否正面求解？我们先看 $C$ 的元素应满足的条件，

因为 $C\subseteq A$，所以 $C$ 的元素不超出 1，2，3，4，

又 $B\cap C\neq\varnothing$，所以元素 1，2 至少有一个要出现在 $C$ 中，

于是可把 $A$ 的元素拆成 1 和 2，3 和 4 两部分来考虑，集合 $C$ 的元素就从这两部分里选，

对于元素 1 和 2，出现在 $C$ 中的可以只有 1，可以只有 2，也可以 1，2 都有，共 3 种情况，

以“只有 1”为例，再考虑元素 3 和 4，集合 $\{3,4\}$ 有 $2^2=4$ 个子集，这 4 个子集中的元素各自都可以和元素 1 组成一个集合 $C$，

所以有 4 种情况，同理，“只有 2”，以及“1，2 都有”各自也有 4 种情况，

所以满足条件的集合 $C$ 共有 $4+4+4=12$ 个.

16.（2024·全国竞赛）（多选）设全集为 $U$，设 $A$，$B$ 是两个集合，定义集合 $T(A,B)=(A\cap\complement_U B)\cup(B\cap\complement_U A)$，则下列说法正确的是（　　）

A．$T(A,A)=\varnothing$　　B．$T(\varnothing,A)=A$　　C．$T(A,U)=A$　　D．$T(A,B)=T(B,A)$

16. ABD

解析：$T(A,B)$ 的定义式结构较复杂，不太容易用 Venn 图分析其结果，考虑直接将选项代入定义式分析，

A 项，由题意，$T(A,A)=(A\cap\complement_U A)\cup(A\cap\complement_U A)$

$=A\cap\complement_U A=\varnothing$，故 A 项正确；

B 项，$T(\varnothing,A)=(\varnothing\cap\complement_U A)\cup(A\cap\complement_U\varnothing)$ ①，

下面分别计算 $\varnothing\cap\complement_U A$ 和 $A\cap\complement_U\varnothing$，

空集与任意集合的交集都是空集，所以 $\varnothing\cap\complement_U A=\varnothing$，

又 $\complement_U\varnothing=U$，所以 $A\cap\complement_U\varnothing=A\cap U=A$，

代入①得 $T(\varnothing,A)=\varnothing\cup A=A$，故 B 项正确；

C 项，$T(A,U)=(A\cap\complement_U U)\cup(U\cap\complement_U A)$

$=(A\cap\varnothing)\cup(U\cap\complement_U A)=\varnothing\cup\complement_U A=\complement_U A$，故 C 项错误；

D 项，$T(B,A)=(B\cap\complement_U A)\cup(A\cap\complement_U B)$

$=(A\cap\complement_U B)\cup(B\cap\complement_U A)=T(A,B)$，故 D 项正确.

【反思】在抽象的集合运算问题中，如果 Venn 图不好画，可考虑直接用并、交、补的基本性质来进行推理.

17.（2024·陕西西安期末（改））

已知集合 $A=\{x\,|\,x^2-2x+9-a=0\}$，$B=\{x\,|\,ax^2-4x+1=0\}$，若集合 $A$，$B$ 中至少有一个是非空集合，则实数 $a$ 的取值范围是_____.

17. $\{a\,|\,a\le 4$ 或 $a\ge 8\}$

解析：$A$，$B$ 至少有一个非空，可能的情形较多，其反面只有 $A$，$B$ 都为空集 1 种情况，故先从反面考虑，再取补集，

假设 $A$，$B$ 都是空集，则方程 $x^2-2x+9-a=0$ 和 $ax^2-4x+1=0$ 都没有实数解，

对于 $x^2-2x+9-a=0$，应有 $\Delta_1=(-2)^2-4(9-a)$

$=4a-32<0$，解得：$a<8$ ①，

对于方程 $ax^2-4x+1=0$，$a=0$ 与 $a\neq0$ 时的分析的方法不同，故考虑分类讨论，

当 $a=0$ 时，方程 $ax^2-4x+1=0$ 即为 $-4x+1=0$，

解得：$x=\dfrac{1}{4}$，所以该方程有实数解，

当 $a\neq0$ 时，要使方程 $ax^2-4x+1=0$ 没有实数解，

应有 $\Delta_2=(-4)^2-4a=16-4a<0$，解得：$a>4$，

所以当方程 $ax^2-4x+1=0$ 没有实数解时，$a>4$ ②，

综合①②可得 $4<a<8$，由题意，$A$，$B$ 至少有 1 个是非空集合，所以取补集得 $a\le4$ 或 $a\ge8$.

18.（2024·山东青岛模拟）

已知集合 $D=\{x\mid ax^2+bx+1=0\}$，$E=\{x\mid x^2+ax+b=0\}$，若 $D\cap E\neq\varnothing$，且 $-3\in(\complement_{\mathbf{R}}D)\cap E$，则 $a+b=$______.

18. $-1$

**解析：** 怎样翻译 $-3\in(\complement_{\mathbf{R}}D)\cap E$？可翻译为 $-3\in E$ 且 $-3\notin D$，其中 $-3\in E$ 可用于寻找 $a$，$b$ 的关系，进而消元，

由题意，$-3\in E$ 且 $-3\notin D$，所以 $x=-3$ 是方程 $x^2+ax+b=0$ 的解，故 $(-3)^2+a\cdot(-3)+b=0$，化简得：$b=3a-9$ ①，

求 $a$，$b$ 还差一个方程，怎样建立？有了式①，可代回 $E$ 的方程并求解，得到集合 $E$，再来看条件 $D\cap E\neq\varnothing$，

将①代入 $x^2+ax+b=0$ 可得 $x^2+ax+3a-9=0$，

即 $(x+3)(x+a-3)=0$，解得：$x=-3$ 或 $3-a$，

这里必有 $3-a\neq-3$，否则 $E=\{-3\}$，不能同时满足 $D\cap E$ $\neq\varnothing$ 和 $-3\notin D$，所以 $E=\{-3,3-a\}$，

元素 $-3$ 不在 $D$ 中，而 $D$，$E$ 又有公共元素，所以只能 $3-a$ 在 $D$ 中，由此可再建立一个方程，

因为 $D\cap E\neq\varnothing$，且 $-3\notin D$，所以 $3-a\in D$，

将 $x=3-a$ 代入 $ax^2+bx+1=0$ 得 $a(3-a)^2+b(3-a)+1=0$，

结合式①可得 $a(3-a)^2+(3a-9)(3-a)+1=0$，

所以 $a(a-3)^2-3(a-3)^2+1=(a-3)^3+1=0$，

从而 $(a-3)^3=-1$，故 $a-3=-1$，所以 $a=2$，

代入①得 $b=-3$，所以 $a+b=-1$.