强化训练

A 组 夯实基础

1.（2024·山西一模）

已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\{x\mid x\neq 0\}$ 上不恒为 0 的函数，若 $f(xy)=\dfrac{f(x)}{y^2}+\dfrac{f(y)}{x^2}$，则（　　）

A． $f(1)=1$

B． $f(-1)=1$

C． $f(x)$ 为偶函数

D． $f(x)$ 为奇函数

1．C

解析：A 项，令 $x=y=1$ 可得 $f(1)=f(1)+f(1)$，

所以 $f(1)=0$，故 A 项错误；

B 项，令 $x=y=-1$ 可得 $f(1)=f(-1)+f(-1)$，

结合 $f(1)=0$ 可得 $f(-1)=0$，故 B 项错误；

C 项，判断奇偶性，需要构造出 $f(x)$ 和 $f(-x)$，观察发现可尝试取 $y=-1$，那么 $f(x)$ 和 $f(-x)$ 就都有了，

令 $y=-1$ 可得 $f(-x)=f(x)+\dfrac{f(-1)}{x^2}$，

结合 $f(-1)=0$ 可得 $f(-x)=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数，

故 C 项正确，同时可知 D 项错误.

2.（2024·河南模拟（改））（多选）

已知函数 $f(x)$ 的定义域为 **R**，对于任意实数 x，y，都有 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$，且 $f(0)\neq 0$，则下列结论正确的是（　　）

A． $f(0)=1$

B． $f(0)=2$

C． $f(x)$ 为偶函数

D． $f(x)$ 为奇函数

2．AC

解析：A 项，令 $x=y=0$ 可得 $f(0)+f(0)=2f(0)f(0)$，

结合 $f(0)\neq 0$ 可得 $f(0)=1$，故 A 项正确，B 项错误；

C 项，观察发现取 $x=0$ 即可产生 $f(y)$ 和 $f(-y)$，从而判断奇偶性，

令 $x=0$ 可得 $f(y)+f(-y)=2f(0)f(y)$，结合 $f(0)=1$ 可得

$f(y)+f(-y)=2f(y)$，所以 $f(-y)=f(y)$，

从而 $f(x)$ 为偶函数，故 C 项正确，D 项错误.

B组 强化能力

3.（2024·黑龙江大庆开学考试）

定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数 $y=f(x)$ 满足：对 $\forall x_1,x_2\in$ $(0,+\infty)$，$x_1\neq x_2$，都有 $\dfrac{x_2f(x_1)-x_1f(x_2)}{x_1-x_2}<0$，且 $f(4)=12$，则不等式 $f(x)>3x$ 的解集为（　　）

A．$(12,+\infty)$　　B．$(0,12)$

C．$(0,4)$　　D．$(4,+\infty)$

3．C

解析：所给不等式中 x_1，x_2 具有对称性，故尝试化同构，观察发现两端同除以 x_1x_2 即可，

由题意，对任意的 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1\neq x_2$，

都有 $\dfrac{x_2f(x_1)-x_1f(x_2)}{x_1-x_2}<0$，所以 $\dfrac{\frac{f(x_1)}{x_1}-\frac{f(x_2)}{x_2}}{x_1-x_2}<0$ ①，

令 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$，则不等式①即为 $\dfrac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}<0$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上↘，

有了 $g(x)$ 的单调性，当然考虑把要解的不等式朝 $g(x)$ 化，

$f(x)>3x\Leftrightarrow\dfrac{f(x)}{x}>3\Leftrightarrow g(x)>3$ ②，

又因为 $f(4)=12$，所以 $g(4)=\dfrac{f(4)}{4}=3$，

故不等式②即为 $g(x)>g(4)$，

结合 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上↘可得 $0<x<4$.

4.（2024·浙江温州模拟（改））

已知 $f(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数，若对 $\forall a,b\in$ $(0,+\infty)$ 且 $a\neq b$，都有 $\dfrac{af(a)-bf(b)}{a-b}<0$，则不等式 $2f(2t^2)-\left(\dfrac{2}{t^2}+1\right)f(t^2+2)>0$ 的解集为_____.

4．$(-\sqrt{2},0)\cup(0,\sqrt{2})$

解析：由 $\dfrac{af(a)-bf(b)}{a-b}<0$ 想到构造函数 $g(x)=xf(x)$，可分析 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的单调性，

设 $g(x)=xf(x)$，则由题意，$\forall a,b\in(0,+\infty)$ 且 $a\neq b$，

$\dfrac{g(a)-g(b)}{a-b}<0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上↘，

怎样求解 $2f(2t^2)-\left(\dfrac{2}{t^2}+1\right)f(t^2+2)>0$？得到了 $g(x)$ 的单调性，当然把它往 $g(x)$ 上转化，观察发现两端乘以 t^2 就能化为 $g(x)$ 的形式，

在 $2f(2t^2)-\left(\dfrac{2}{t^2}+1\right)f(t^2+2)>0$ 两端乘以 t^2 可得

$2t^2f(2t^2)-(2+t^2)f(t^2+2)>0(t\neq0)$，

所以 $g(2t^2)-g(2+t^2)>0$，故 $g(2t^2)>g(2+t^2)$ ①，

当 $t\neq0$ 时，$2t^2>0$，$2+t^2>0$，且 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上↘，

所以不等式①等价于 $2t^2<2+t^2$，解得：$-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$，

结合 $t\neq 0$ 可得 $t\in(-\sqrt{2},0)\cup(0,\sqrt{2})$.

5.（2024·安徽开学考试）（多选）

已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，若对 $\forall x_1,x_2\in$

$[0,+\infty)$ 且 $x_1<x_2$， $f(x_1)-f(x_2)>x_2^2-x_1^2$ 恒成立， $f(1)=2$，则满足 $f(m-1)+m^2<2m+2$ 的实数 m

的值可能为（　　）

A． -2　　　　B． -1

C． 1　　　　D． 3

5．ABD

解析：观察发现通过移项把 x_1， x_2 隔离到不等号两侧，就能实现同构，从而构造函数分析，

由题意，对任意的 $\forall x_1,x_2\in[0,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，

都有 $f(x_1)-f(x_2)>x_2^2-x_1^2$，所以 $f(x_1)+x_1^2>f(x_2)+x_2^2$，

令 $g(x)=f(x)+x^2$，则上述不等式即为 $g(x_1)>g(x_2)$，

所以 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上↘，

因为 $f(x)$ 为偶函数， $y=x^2$ 也是偶函数，“偶＋偶＝偶”，

所以 $g(x)=f(x)+x^2$ 为偶函数，

有了 $g(x)$ 的性质，当然把目标不等式朝 $g(x)$ 转化，

$f(m-1)+m^2<2m+2\Leftrightarrow f(m-1)+m^2-2m+1<3$

$\Leftrightarrow f(m-1)+(m-1)^2<3\Leftrightarrow g(m-1)<3$ ①，

又因为 $f(1)=2$，所以 $g(1)=f(1)+1^2=3$，

故不等式①即为 $g(m-1)<g(1)$，

结合 $g(x)$ 为偶函数可得 $g(m-1)<g(1)\Leftrightarrow g(|m-1|)<g(1)$，

因为 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上↘，所以 $|m-1|>1$，

解得： $m<0$ 或 $m>2$，故选 ABD.

6.（2024·全国模拟）

已知函数 $f(x)$ 满足对任意 $x,y\in\mathbf{R}$，恒有 $f(x+y)$

$=f(x)+f(y)$，且当 $x<0$ 时， $f(x)<0$， $f(2)=3$，若 $\exists x\in[-2,2]$，使得 $f(x)>m^2-2m$ 成立，则实数 m 的

取值范围是（　　）

A． $(-3,3)$　　　　B． $(-3,1)$

C． $(-1,1)$　　　　D． $(-1,3)$

6．D

解法 1：“存在 $x\in[-2,2]$， $f(x)>m^2-2m$ ”意味着 $f(x)_{\max}$

$>m^2-2m$，而要求 $f(x)_{\max}$，在没有解析式的情况下，只

能分析单调性，故先用已知等式构造出 $f(x_1)-f(x_2)$，

因为 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，所以 $f(x+y)-f(x)=f(y)$，

令 $\begin{cases}x=x_2\\y=x_1-x_2\end{cases}$，则 $f(x_1)-f(x_2)=f(x_1-x_2)$，

假设 $x_1<x_2$，则 $x_1-x_2<0$，由题意可知， $f(x_1-x_2)<0$，

所以 $f(x_1)-f(x_2)=f(x_1-x_2)<0$，从而 $f(x_1)<f(x_2)$，

故 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上↗，

所以当 $x\in[-2,2]$ 时，$f(x)_{\max}=f(2)=3$，

因为 $\exists x\in[-2,2]$，使 $f(x)>m^2-2m$，所以 $3>m^2-2m$，

故 $m^2-2m-3=(m+1)(m-3)<0$，解得：$-1<m<3$.

解法 2：正比例函数满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，故也可考虑举一个满足题意的正比例函数，用于解决问题，

假设 $f(x)=kx(k\neq 0)$，由 $f(2)=3$ 可知 $2k=3$，

所以 $k=\dfrac{3}{2}$，故 $f(x)=\dfrac{3}{2}x$，经检验，满足其他条件，

此时 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上的最大值为 $f(2)=\dfrac{3}{2}\times 2=3$，

因为 $\exists x\in[-2,2]$，使 $f(x)>m^2-2m$，所以 $3>m^2-2m$，

从而 $m^2-2m-3=(m+1)(m-3)<0$，故 $-1<m<3$.

【反思】在抽象函数的小题中，若由所给的函数性质能联想到函数的类型，也可考虑由此举一个满足题设所有条件的具体函数，并用该函数来解决问题.

C 组 拓展提升

7.（2024·上海期末）

已知 $g(x)=x+\dfrac{b}{x}$，若对任意的 $x_1,x_2\in(1,2)$，都有

$\dfrac{g(x_1)-g(x_2)}{x_2-x_1}>1(x_1\neq x_2)$，则实数 b 的取值范围是______.

7. $[8,+\infty)$

解法 1：$\dfrac{g(x_1)-g(x_2)}{x_2-x_1}>1$ 右侧不是 0，不能简单地看成 $g(x)$ 的单调性，怎么办呢？注意到 x_1，x_2 的结构是对称的，可考虑把 x_2-x_1 乘过去，再通过移项来化同构形式，

假设 $1<x_1<x_2<2$，则 $x_2-x_1>0$，因为 $\dfrac{g(x_1)-g(x_2)}{x_2-x_1}>1$，

所以 $g(x_1)-g(x_2)>x_2-x_1$，故 $g(x_1)+x_1>g(x_2)+x_2$，

设 $f(x)=g(x)+x=2x+\dfrac{b}{x}$，则 $f(x_1)>f(x_2)$，

所以 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 上↘，怎样由此求 b 的范围？观察发现 b 的正负会影响函数 $y=2x+\dfrac{b}{x}$ 的研究方法，故讨论，

当 $b<0$ 时，因为 $y=2x$ 和 $y=\dfrac{b}{x}$ 在 $(1,2)$ 上都↗，

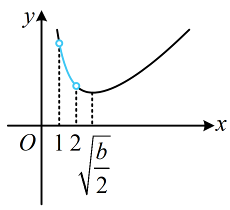
所以 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 上↗，不合题意；

当 $b=0$ 时，$f(x)=2x$ 在 $(1,2)$ 上↗，不合题意；

当 $b>0$ 时，$f(x)=2x+\dfrac{b}{x}=2\left(x+\dfrac{\frac{b}{2}}{x}\right)$，如图，

要使 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 上↘，应有 $\sqrt{\dfrac{b}{2}}\geq 2$，解得：$b\geq 8$；

综上所述，实数 b 的取值范围是 $[8,+\infty)$.



解法 2：所给的 $g(x)$ 的解析式不复杂，也可直接代解析式翻译不等式 $\dfrac{g(x_1)-g(x_2)}{x_2-x_1}>1$，

由题意，$\dfrac{g(x_1)-g(x_2)}{x_2-x_1}=\dfrac{x_1+\dfrac{b}{x_1}-x_2-\dfrac{b}{x_2}}{x_2-x_1}$

$=\dfrac{x_1-x_2+\dfrac{b(x_2-x_1)}{x_1x_2}}{x_2-x_1}=-1+\dfrac{b}{x_1x_2}$，

所以 $\dfrac{g(x_1)-g(x_2)}{x_2-x_1}>1\Leftrightarrow -1+\dfrac{b}{x_1x_2}>1\Leftrightarrow \dfrac{b}{x_1x_2}>2$ ①，

又 $x_1,x_2\in(1,2)$ 且 $x_1\neq x_2$，所以不等式①$\Leftrightarrow b>2x_1x_2$ ②，

当 $x_1,x_2\in(1,2)$ 时，$2<2x_1x_2<8$，

所以要使不等式②恒成立，只需 $b\geq 8$，

故 b 的取值范围是 $[8,+\infty)$．

8．（2024 • 广西柳州三模）

设函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且对于任意的 $x,y\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq y$，都有 $|f(x)-f(y)|<|x-y|$，若 $g(x)-f(x)=x$，则不等式 $g(2x-x^2)+g(x-2)<0$ 的解集是（　　）

A．$(-1,2)$

B．$(1,2)$

C．$(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$

D．$(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$

8．D

解析：要解的是关于 $g(x)$ 的不等式，故应分析 $g(x)$ 的性质，且由 $g(\cdots)+g(\cdots)<0$ 的形式想到看看 $g(x)$ 是不是奇函数，如果是，则移项，用奇偶性化为 $g(\cdots)<g(\cdots)$ 的结构，便于用单调性处理，

因为 $g(x)-f(x)=x$，所以 $g(x)=f(x)+x$，因为 $y=f(x)$ 是奇函数，$y=x$ 也是奇函数，所以 $g(x)$ 为奇函数，

故 $g(2x-x^2)+g(x-2)<0\Leftrightarrow g(2x-x^2)<-g(x-2)$

$\Leftrightarrow g(2x-x^2)<g(2-x)$ ①，

要求解不等式①，又考虑分析 $g(x)$ 的单调性，

假设 $x<y$，则由题意，$|f(x)-f(y)|<|x-y|$，

所以 $\left|\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|<1$ ②，

又 $\left|\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|=\left|\dfrac{f(x)+x-[f(y)+y]-x+y}{x-y}\right|$

$=\left|\dfrac{g(x)-g(y)}{x-y}-1\right|$，代入②得 $\left|\dfrac{g(x)-g(y)}{x-y}-1\right|<1$，

所以 $-1<\dfrac{g(x)-g(y)}{x-y}-1<1$，故 $0<\dfrac{g(x)-g(y)}{x-y}<2$，

由上述不等式中的 $\dfrac{g(x)-g(y)}{x-y}>0$ 可知 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上↗，

所以不等式①等价于 $2x-x^2<2-x$，

即 $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)>0$，解得：$x<1$ 或 $x>2$．

9.（2024·安徽开学考试）

已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-1,1)$，$f(x)+f(y)=f\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)$，且当 $x\in(-1,0)$ 时，$f(x)>0$.

（1）判断 $f(x)$ 的奇偶性，并说明理由；

（2）解不等式：$f(2x-1)>f(x)$；

（3）已知 $f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=1$，$g(x)=x^2+bx+1$，若对 $\forall x_1\in\left[-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right]$，$\exists x_2\in[-1,2]$，使得 $f(x_1)>g(x_2)$ 成立，求实数 b 的取值范围.

9. **解**：（1）$f(x)$ 为奇函数，下面给出证明，

（要判断奇偶性，需构造出 $f(-x)$ 和 $f(x)$，观察发现在所给等式中令 $y=-x$ 即可）

令 $y=-x$ 可得 $f(x)+f(-x)=f(0)$ ①，

令 $x=y=0$ 可得 $f(0)+f(0)=f(0)$，所以 $f(0)=0$，

代入①得 $f(x)+f(-x)=0$，所以 $f(-x)=-f(x)$，

故 $f(x)$ 为奇函数.

（2）（看到 $f(\cdots)>f(\cdots)$，想到分析 $f(x)$ 的单调性，需构造 $f(x_1)-f(x_2)$，并判断正负，怎样构造？注意到 $f(x)$ 为奇函数，所以可直接将其调整为 $f(x_1)+f(-x_2)$，进而运用题干所给的等式合并）

设 $-1<x_1<x_2<1$，则 $f(x_1)-f(x_2)=f(x_1)+f(-x_2)$

$=f\left(\dfrac{x_1+(-x_2)}{1+x_1\cdot(-x_2)}\right)=f\left(\dfrac{x_1-x_2}{1-x_1x_2}\right)$ ②，

因为 $-1<x_1<x_2<1$，所以 $x_1-x_2<0$，$-1<x_1x_2<1$，

$1-x_1x_2>0$，所以 $\dfrac{x_1-x_2}{1-x_1x_2}<0$，

另一方面，$x_1-x_2+(1-x_1x_2)=-x_1x_2+x_1-x_2+1$

$=-(x_1+1)(x_2-1)>0$，所以 $x_1-x_2>-(1-x_1x_2)$，

从而 $\dfrac{x_1-x_2}{1-x_1x_2}>-1$，故 $-1<\dfrac{x_1-x_2}{1-x_1x_2}<0$，

因为当 $x\in(-1,0)$ 时，$f(x)>0$，所以 $f\left(\dfrac{x_1-x_2}{1-x_1x_2}\right)>0$，

代入②可得 $f(x_1)-f(x_2)=f\left(\dfrac{x_1-x_2}{1-x_1x_2}\right)>0$，

所以 $f(x_1)>f(x_2)$，故 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上单调递减，

所以 $f(2x-1)>f(x)\Leftrightarrow\begin{cases}-1<2x-1<1\\-1<x<1\\2x-1<x\end{cases}$，解得：$0<x<1$，

故不等式 $(2x-1)>f(x)$ 的解集为 $(0,1)$.

（3）**解法 1**：（涉及“任意”和“存在”两个量词，可分别考虑，观察发现 $f(x_1)$ 这一侧不含参，故先考虑含 x_1 这部分）

因为 $\forall x_1\in\left[-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right]$，$f(x_1)>g(x_2)$，所以 $f(x_1)_{\min}>g(x_2)$，

由（2）可知当 $x_1\in\left[-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right]$ 时，$f(x_1)_{\min}=f\left(\dfrac{1}{3}\right)$

$=-f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-1$，所以 $g(x_2)<-1$，

于是 $\exists x_2\in[-1,2]$，使 $g(x_2)<-1$，所以 $g(x_2)_{\min}<-1$ ③，

（观察发现 $g(x_2)$ 是对称轴运动的二次函数，故通过讨论对称轴与区间 $[-1,2]$ 的位置关系来求 $g(x_2)$ 的最小值）

当 $-\dfrac{b}{2}>2$，即 $b<-4$ 时，如图 1，$g(x_2)_{\min}=g(2)$

$=2^2+b\cdot 2+1=2b+5$，代入③得 $2b+5<-1$，

解得：$b<-3$，结合 $b<-4$ 可得 $b<-4$；

当 $-1\le -\dfrac{b}{2}\le 2$，即 $-4\le b\le 2$ 时，如图 2，$g(x_2)_{\min}=g\left(-\dfrac{b}{2}\right)$

$\left(-\dfrac{b}{2}\right)^2+b\left(-\dfrac{b}{2}\right)+1=1-\dfrac{b^2}{4}$，代入③得 $1-\dfrac{b^2}{4}<-1$，

解得：$b<-2\sqrt{2}$ 或 $b>2\sqrt{2}$，

结合 $-4\le b\le 2$ 可得 $-4\le b<-2\sqrt{2}$；

当 $-\dfrac{b}{2}<-1$，即 $b>2$ 时，如图 3，$g(x_2)_{\min}=g(-1)$

$=(-1)^2+b\cdot(-1)+1=2-b$，代入③得 $2-b<-1$，

解得：$b>3$，满足 $b>2$；

综上所述，实数 b 的取值范围是 $(-\infty,-2\sqrt{2})\cup(3,+\infty)$.

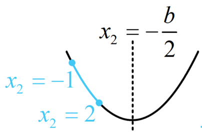


图1

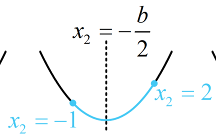


图2

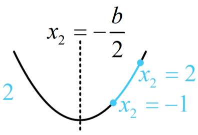


图3

解法 2：（按解法 1 得到“$\exists x_2\in[-1,2]$，使 $g(x_2)<-1$，即 $x_2^2+bx_2+1<-1$”后，观察发现此不等式中参数 b 容易分离出来，故也可考虑先分离出 b 再看，但这里 x_2 正负都能取到，故需讨论）

$g(x_2)<-1\Leftrightarrow x_2^2+bx_2+1<-1\Leftrightarrow bx_2<-x_2^2-2$ ④，

当 $x_2\in[-1,0)$ 时，不等式④等价于 $b>-\left(x_2+\dfrac{2}{x_2}\right)$，

如图 4，函数 $y=-\left(x_2+\dfrac{2}{x_2}\right)$ 在 $x_2\in[-1,0)$ 时单调递增，

所以当 $x_2=-1$ 时，$-\left(x_2+\dfrac{2}{x_2}\right)$ 取得最小值 3，故 $b>3$；

当 $x_2=0$ 时，经检验，不等式④即为 $0<-2$，不成立；

当 $x_2\in(0,2]$ 时，不等式④等价于 $b<-\left(x_2+\dfrac{2}{x_2}\right)$，

如图 5，当 $x_2\in(0,2]$ 时，函数 $y=-\left(x_2+\dfrac{2}{x_2}\right)$ 的最大值在

$x_2=\sqrt{2}$ 处取得，为 $-\left(\sqrt{2}+\dfrac{2}{\sqrt{2}}\right)=-2\sqrt{2}$，所以 $b<-2\sqrt{2}$；

（由于是 $\exists x_2\in[-1,2]$，使 $g(x_2)<-1$，所以 x_2 在 $[-1,0)$ 上可以，在 $(0,2]$ 上也行，故上述结果应取并集）

综上所述，b 的取值范围是 $(-\infty,-2\sqrt{2})\cup(3,+\infty)$.

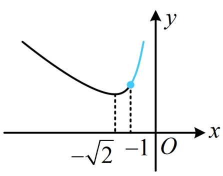


图4

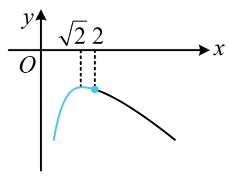


图5