强化训练

A 组 夯实基础

1.（2024 • 北京海淀模拟）

某城市一年中 12 个月的平均气温与月份的关系可近似地用三角函数 $y=A\cos\left[\frac{\pi}{6}(x-6)\right]+B(x=1,2,\cdots,12)$ 来表示．已知 6 月份的平均气温最高为 $30^{\circ}\mathrm{C}$，12 月份的月平均气温最低为 $20^{\circ}\mathrm{C}$，此函数的最小正周期为_____，10 月份的平均气温为_____$^{\circ}\mathrm{C}$．

1．12；22.5

解析：该函数的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}}=12$；

由题意，当 $x=6$ 时，$y_{\max}=A\cos 0+B=A+B=30$ ①，

当 $x=12$ 时，$y_{\min}=A\cos\pi+B=-A+B=20$ ②，

由①②解得：$A=5$，$B=25$，

所以 $y=5\cos\left[\frac{\pi}{6}(x-6)\right]+25$，故当 $x=10$ 时，

$y=5\cos\left[\frac{\pi}{6}\times(10-6)\right]+25=5\cos\frac{2\pi}{3}+25=22.5^{\circ}\mathrm{C}$．

2.（2024 • 重庆模拟）（多选）

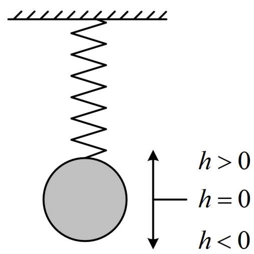
如图，弹簧挂着的小球做上下运动，它在 ts 时相对于平衡位置的高度 h（单位：cm）由关系式 $h=A\sin(\omega t+\varphi)$，$t\in[0,+\infty)$ 确定，其中 $A>0$，$\omega>0$，$\varphi\in(0,\pi]$．小球从最高点出发，经过 1.8s 后，第一次回到最高点，则（　　）

A．$\varphi=\frac{\pi}{4}$

B．$\omega=\frac{10\pi}{9}$

C．$t=9$s 与 $t=2.1$s 时相对于平衡位置的高度 h 之比为 $\frac{3}{2}$

D．$t=9$s 与 $t=2.1$s 时相对于平衡位置的高度 h 之比为 2



2．BD

解析：A 项，由题意，小球从最高点出发，

所以当 $t=0$ 时，$h=A\sin\varphi=A$，从而 $\sin\varphi=1$，

结合 $\varphi\in(0,\pi]$ 可得 $\varphi=\frac{\pi}{2}$，故 A 项错误；

B 项，题干说经过 1.8s 后，第一次回到最高点，这意味着周期为 1.8s，故可由此求 ω，

由题意，$T=1.8 \Rightarrow \omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{1.8}=\frac{10\pi}{9}$，故 B 项正确；

C 项，由前面的分析过程可知 $h=A\sin\left(\frac{10\pi}{9}t+\frac{\pi}{2}\right)$

$=A\cos\frac{10\pi}{9}t$，

所以当 $t=9$ 时，$h=A\cos\left(\frac{10\pi}{9}\times 9\right)=A\cos 10\pi=A$，

当 $t=2.1$ 时，$h=A\cos\left(\frac{10\pi}{9}\times 2.1\right)=A\cos\frac{7\pi}{3}$

$=A\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)=A\cos\frac{\pi}{3}=\frac{A}{2}$，

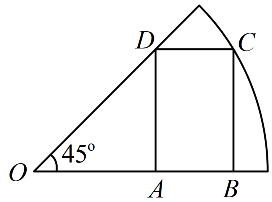
所以 $t=9\text{s}$ 与 $t=2.1\text{s}$ 时相对平衡位置的高度之比为 $\frac{A}{\frac{A}{2}}=2$，

故 C 项错误，D 项正确.

B 组 强化能力

3.（2024·北京海淀期中）

如图所示，海尔学校要在操场上一个扇形区域内开辟一个矩形花园 $ABCD$，现已知扇形圆心角为 45°，扇形半径为 10m，则该矩形花园的面积的最大值为_____m².



3．$50\sqrt{2}-50$

解析：求面积需要 AB 和 BC，观察发现矩形 $ABCD$ 由点 C 在圆弧上的位置确定，而该位置又由 $\angle BOC$ 确定，故可考虑设 $\angle BOC$ 为变量，表示 AB 和 BC，

如图，设 $\angle BOC=\theta$，则 $BC=OC\cdot\sin\angle BOC=10\sin\theta$，

$OB=OC\cdot\cos\angle BOC=10\cos\theta$，

又 $\angle AOD=45^\circ$，所以 $OA=AD=BC=10\sin\theta$，

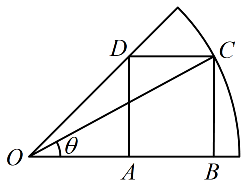
从而 $AB=OB-OA=10\cos\theta-10\sin\theta$，故矩形 $ABCD$ 的面积 $S=AB\cdot BC=(10\cos\theta-10\sin\theta)\cdot 10\sin\theta$

$=100\sin\theta\cos\theta-100\sin^2\theta=50\sin 2\theta-100\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2}$

$=50\sin 2\theta+50\cos 2\theta-50=50\sqrt{2}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)-50$，

由图可知 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$，所以当 $\theta=\frac{\pi}{8}$ 时，

$\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$，$S$ 取得最大值 $(50\sqrt{2}-50)\,\text{m}^2$.



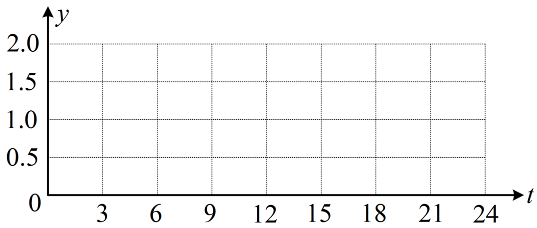
4.（2024·湖北武汉模拟）

海水受日月的引力，在一定的时候发生涨落的现象叫做潮汐，一般早潮叫潮，晚潮叫汐，潮汐具有周期现象.某海滨浴场内水位 y（单位：m）是时间 $t(0\le t\le 24$，单位：h) 的函数，记作 $y=f(t)$，下面是某天水深的数据：

t	0	3	6	9	12	15	18	21	24
y	2	1.5	1	1.5	2	1.5	1	1.5	2

经长期观察，$y=f(t)$ 的曲线可近似满足函数 $y=$

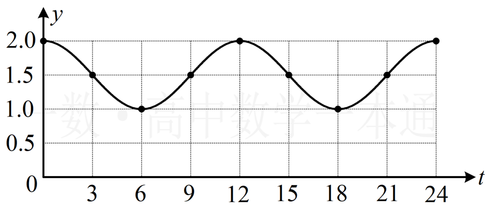
$A\sin(\omega t+\varphi)+b(A>0,\omega>0)$.



（1）根据表中数据，作出函数简图，并求出函数 $y=f(t)$ 的一个近似表达式；

（2）一般情况下，水深超过 1.25 米该海滨浴场方可开放，另外，当水深不低于 1.75 米时，由于安全原因，会被关闭，那么该海滨浴场在一天内的上午 7:00 到晚上 19:00，有多长时间可以开放？

4．**解**：（1）函数 $y=f(t)$ 的简图如下：



（接下来求模型中的参数，我们选择图上有代表性的最值点来分析）由图可知函数 $y=f(t)$ 在 $t=6$ 时取得最小值 1，

在 $t=12$ 时取得最大值 2，所以 $\begin{cases}-A+b=1\\A+b=2\end{cases}$，解得：$A=\frac{1}{2}$，

$b=\frac{3}{2}$，且 $\frac{T}{2}=12-6=6$，所以 $T=12$，$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{6}$，

故 $f(t)=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{6}t+\varphi\right)+\frac{3}{2}$，

又 $f(12)=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{6}\times 12+\varphi\right)+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\sin(2\pi+\varphi)+\frac{3}{2}$

$=\frac{1}{2}\sin\varphi+\frac{3}{2}=2$，所以 $\sin\varphi=1$，故 $\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，

所以 $f(t)=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{6}t+2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{6}t+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{3}{2}$

$=\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{6}t+\frac{3}{2}(0\le t\le 24)$.

（2）令 $1.25<f(t)<1.75$ 可得 $1.25<\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{6}t+\frac{3}{2}<1.75$，

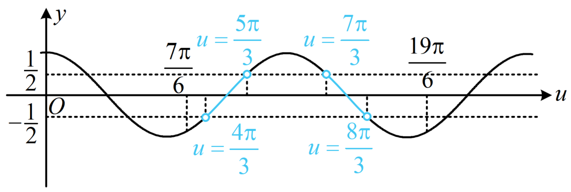
所以 $-\frac{1}{2}<\cos\frac{\pi}{6}t<\frac{1}{2}$ ①，（要解此不等式，可将 $\frac{\pi}{6}t$ 换元成 u，画 $y=\cos u$ 的图象来看）

令 $u=\frac{\pi}{6}t$，则不等式①即为 $-\frac{1}{2}<\cos u<\frac{1}{2}$ ②，

当 $7\le t\le 19$ 时，$\frac{7\pi}{6}\le u\le\frac{19\pi}{6}$，如图，要使不等式②成立，应有 $\frac{4\pi}{3}<u<\frac{5\pi}{3}$ 或 $\frac{7\pi}{3}<u<\frac{8\pi}{3}$，

所以 $\frac{4\pi}{3}<\frac{\pi}{6}t<\frac{5\pi}{3}$ 或 $\frac{7\pi}{3}<\frac{\pi}{6}t<\frac{8\pi}{3}$，

从而 $8<t<10$ 或 $14<t<16$，故该海滨浴场在一天内的上午 7:00 到晚上 19:00 可以开放 $(10-8)+(16-14)=4$ h.



C 组 拓展提升

5.（2024·江西模拟）

4 月 11 日至 13 日，我校组织高一高二全体师生一千六百余人前往九江、景德镇、上饶、抚州等地开展为期三天的研学实践活动，汤显祖文化馆是此次研学的路线点之一，该文化馆每年都会接待大批游客，在该文化馆区的一家专门为游客提供住宿的客栈中，工作人员发现为游客准备的食物有些月份剩余较多，浪费很严重．为了控制经营成本，减少浪费，计划适时调整投入．为此他们统计每个月入住的游客人数，发现每年各个月份来客栈入住的游客人数呈周期性变化，并且有以下规律：①每年相同的月份，入住客栈的游客人数基本相同；②入住客栈的游客人数在 2 月份最少，在 8 月份最多，相差约 400；③2 月份入住客栈的游客约为 100 人，随后逐月递增，在 8 月份达到最多．

（1）试用一个正弦型三角函数描述一年中入住客栈的游客人数与月份之间的关系；

（2）请问客栈在哪几个月份要准备不低于 400 份的食物？

5．**解**：(1)（已经说了用正弦型三角函数，故直接设解析式，结合已知条件求解所设解析式中的参数）

设入住客栈的游客人数 y 与月份 x 之间的关系为

$y=A\sin(\omega x+\varphi)+B$，$A>0$，$\omega>0$，

由②③可知，y 的最小值为 100，在 2 月份取得，最大值为 $100+400=500$，在 8 月份取得，所以 $\begin{cases}-A+B=100\\A+B=500\end{cases}$，

解得：$A=200$，$B=300$，故 $y=200\sin(\omega x+\varphi)+300$，

（再求 ω，可由周期来求，根据题干的①，可以直接得到周期，于是 ω 就有了）

由②③可知 $8-2=\frac{T}{2}$，所以函数的周期为 $T=12$，

从而 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{6}$，故 $y=200\sin\left(\frac{\pi}{6}x+\varphi\right)+300$，

（只剩 φ 了，代一个最值点即可，这里最小值点和最大值点都有，任选其一均可）

由③可知，当 $x=2$ 时，y 取得最小值 100，

所以 $200\sin\left(\frac{\pi}{6}\times 2+\varphi\right)+300=100$，

从而 $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=-1$，故 $\frac{\pi}{3}+\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，

所以 $\varphi=2k\pi-\frac{5\pi}{6}$，故 $y=200\sin\left(\frac{\pi}{6}x+2k\pi-\frac{5\pi}{6}\right)+300$

$=200\sin\left(\frac{\pi}{6}x-\frac{5\pi}{6}\right)+300$，$x=1,2,3,\cdots,12$.

(2)（准备不低于 400 份的食物意味着游客人数不低于 400，故应直接令 $y\ge 400$，求解 x 的范围）

令 $y\ge 400$ 可得 $200\sin\left(\frac{\pi}{6}x-\frac{5\pi}{6}\right)+300\ge 400$，

所以 $\sin\left(\frac{\pi}{6}x-\frac{5\pi}{6}\right)\ge\frac{1}{2}$ (i)，（解三角不等式，常考虑画图，为了便于作图，我们将 $\frac{\pi}{6}x-\frac{5\pi}{6}$ 换元成 t）

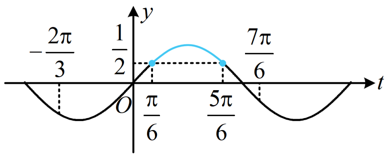
令 $t=\frac{\pi}{6}x-\frac{5\pi}{6}$，则不等式(i)即为 $\sin t\ge\frac{1}{2}$，

当 $1\le x\le 12$ 时，$-\frac{2\pi}{3}\le t\le\frac{7\pi}{6}$，如图，在 $\left[-\frac{2\pi}{3},\frac{7\pi}{6}\right]$ 上，

要使 $\sin t\ge\frac{1}{2}$ 成立，应有 $\frac{\pi}{6}\le t\le\frac{5\pi}{6}$，

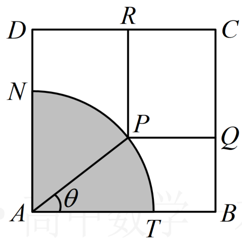
所以 $\frac{\pi}{6}\le\frac{\pi}{6}x-\frac{5\pi}{6}\le\frac{5\pi}{6}$，解得：$6\le x\le 10$，又 $x\in\mathbf{N}^*$，

故客栈在 6，7，8，9，10 月份要准备不低于 400 份的食物.



6.（2024•上海嘉定期中）

如图，有一块边长为 3m 的正方形铁皮 $ABCD$，其中阴影部分 ATN 是一个半径为 2m 的扇形，设这个扇形已经腐蚀不能使用，但其余部分均完好，工人师傅想在未被腐蚀的部分截下一块其中两边落在 BC 与 CD 上的矩形铁皮 $PQCR$，使点 P 在弧 TN 上，设 $\angle TAP=\theta$，矩形 $PQCR$ 的面积为 $S\text{m}^2$.



（1）求 S 关于 θ 的函数表达式；

（2）求 S 的最大值及 S 最大时 θ 的值.

6．**解**：（1）（计算 S 需要 PQ 和 PR，直接计算这两段长不易，

如图 1，注意到 $\angle TAP=\theta$，故在 $\triangle PAG$ 中容易求得 PG 和 AG，用它们就能间接计算 PR 和 PQ）

设 PQ 与 AD 交于点 H，PR 与 AB 交于点 G，

在 $\triangle PAG$ 中，$PG=AP\cdot\sin\angle PAG=2\sin\theta$，

$AG=AP\cdot\cos\angle PAG=2\cos\theta$，

所以 $PQ=HQ-HP=AB-AG=3-2\cos\theta$，

$PR=GR-PG=AD-PG=3-2\sin\theta$，

故矩形 $PQCR$ 的面积 $S=PQ\cdot PR=(3-2\cos\theta)(3-2\sin\theta)$

$=9-6(\sin\theta+\cos\theta)+4\sin\theta\cos\theta$，$0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$.

（2）（看到 $\sin\theta+\cos\theta$ 和 $\sin\theta\cos\theta$，想到将 $\sin\theta+\cos\theta$ 换元成 t，化为关于 t 的二次函数分析最值）

令 $t=\sin\theta+\cos\theta$，则 $t^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta$

$=1+2\sin\theta\cos\theta$，所以 $\sin\theta\cos\theta=\frac{t^2-1}{2}$，

故 $S=9-6t+4\cdot\frac{t^2-1}{2}=2t^2-6t+7$，

因为 $t=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$，且 $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$，

所以 $\frac{\pi}{4}\le\theta+\frac{\pi}{4}\le\frac{3\pi}{4}$，从而 $\frac{\sqrt{2}}{2}\le\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\le 1$，

故$1\le t\le\sqrt{2}$，$S=2t^2-6t+7$的图象如图2，

由图可知，当$t=1$时，S取得最大值$2\times1^2-6\times1+7=3$，

此时$\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=1$，所以$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

结合$\frac{\pi}{4}\le\theta+\frac{\pi}{4}\le\frac{3\pi}{4}$可得$\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$或$\frac{3\pi}{4}$，故$\theta=0$或$\frac{\pi}{2}$.

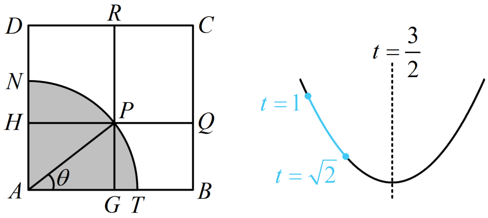


图1　图2