强化训练

A 组 夯实基础

1．（2024·云南曲靖期中）

下列说法正确的是（　　）

A．某人的月收入 x 元不高于 2000 元可表示为“ $x<2000$ ”

B．小明的身高为 x，小华的身高为 y，则小明比小华矮可表示为“ $x>y$ ”

C．变量 x 不小于 a 可表示为“ $x\geq a$ ”

D．变量 y 不超过 a 可表示为“ $y\geq a$ ”

1．C

解析：A 项，不高于应该用符号“ $\leq$ ”表示，所以正确的表示为“ $x\leq 2000$ ”，故 A 项错误；

B 项，正确的表示应该是“ $x<y$ ”，故 B 项错误；

C 项，“x 不小于 a”可表示为“ $x\geq a$ ”，故 C 项正确；

D 项，“变量 y 不超过 a”可表示为“ $y\leq a$ ”，故 D 项错误.

2．（2024·北京期中）

对于任意实数 a，b，c，d，有以下 5 个命题：

①若 $a>b$， $c\neq 0$，则 $ac>bc$；

②若 $a>b$，则 $ac^2>bc^2$；

③若 $ac^2>bc^2$，则 $a>b$；

④若 $a>b$，则 $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$；

⑤若 $a>b>0$， $c>d$，则 $ac>bd$.

其中真命题的个数是（　　）

A．1　　　　B．2

C．3　　　　D．4

2．A

解析：命题①，当 $c<0$ 时， $a>b\Rightarrow ac<bc$，故①错误；

命题②，当 $c=0$ 时， $ac^2=bc^2=0$，故②错误；

命题③，若 $ac^2>bc^2$，则必有 $c\neq 0$，否则 $ac^2=bc^2=0$，

与已知条件不符，所以 $c^2>0$，在 $ac^2>bc^2$ 两端同时除以 c^2 可得 $a>b$，故③正确；

命题④，当 $a>0>b$ 时， $\dfrac{1}{a}>0>\dfrac{1}{b}$，故④错误；

命题⑤，同向同正的不等式才能相乘，这里 c 和 d 不一定同正，所以可猜测此命题不一定正确，下面举个反例，

取 $a=10$， $b=1$， $c=-1$， $d=-2$，满足已知条件，

此时 $ac=-10$， $bd=-2$，所以 $ac<bd$，故⑤错误；

综上所述，只有命题③是真命题，故选 A.

3．（2024·湖南娄底期末）（多选）

设 $0<b<a<1$，则下列不等式成立的是（　　）

A．$b^2<ab<1$

B．$\sqrt{a}<\sqrt{b}<1$

C．$1<\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$

D．$a^2<ab<1$

3．AC

解析：A 项，由题意，$b>0$，所以在 $b<a$ 两端乘以 b 可得 $b^2<ab$，

又 $0<b<1$，$0<a<1$，根据同向同正可乘性，$0<ab<1$，

所以 $b^2<ab<1$，故 A 项正确；

B 项，由 $0<b<a<1$ 可得 $0<\sqrt{b}<\sqrt{a}<1$，故 B 项错误；

C 项，因为 $0<a<1$，所以 $\dfrac{1}{a}>1$，

又 $0<b<a<1$，所以 $ab>0$，在 $b<a$ 两端同除以 ab 可得

$\dfrac{b}{ab}<\dfrac{a}{ab}$，所以 $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$，从而 $1<\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$，故 C 项正确；

D 项，在 $b<a$ 两端乘以 a 可得 $ab<a^2$，故 D 项错误.

B 组　强化能力

4．（2024·浙江模拟）（多选）

若 $a,b,c\in\mathbf{R}$，则下列命题错误的是（　　）

A．若 $a>b$，则 $a^2>b^2$

B．若 $a>b$，则 $\dfrac{a}{b}>1$

C．若 $a>b>c>0$，则 $\dfrac{a}{b}<\dfrac{a+c}{b+c}$

D．若 $a>b>c>0$，则 $\dfrac{b}{a-b}>\dfrac{c}{a-c}$

4．ABC

解析：A 项，此选项看起来像不等式的可乘方性：$a>b>0$

$\Rightarrow a^n>b^n(n\in\mathbf{N}^*,n\geq 2)$，但该性质的前提是 $a>b>0$，这里无此条件，故结论不正确，我们举个反例，

取 $a=1$，$b=-2$，满足 $a>b$，

但 $a^2=1<b^2=4$，故 A 项错误；

B 项，取 $a=1$，$b=-1$，满足 $a>b$，

但 $\dfrac{a}{b}=-1<1$，故 B 项错误；

C 项，直接观察不易看出结论是否成立，可考虑作差比较，

$\dfrac{a}{b}-\dfrac{a+c}{b+c}=\dfrac{a(b+c)-(a+c)b}{b(b+c)}=\dfrac{c(a-b)}{b(b+c)}$，

因为 $a>b>c>0$，所以 $a-b>0$，$b+c>0$，

从而 $\dfrac{a}{b}-\dfrac{a+c}{b+c}=\dfrac{c(a-b)}{b(b+c)}>0$，故 $\dfrac{a}{b}>\dfrac{a+c}{b+c}$，故 C 项错误；

D 项，$\frac{b}{a-b}-\frac{c}{a-c}=\frac{b(a-c)-c(a-b)}{(a-b)(a-c)}=\frac{ab-bc-ac+bc}{(a-b)(a-c)}$

$=\frac{a(b-c)}{(a-b)(a-c)}$，因为 $a>b>c>0$，所以 $b-c>0$，

$a-b>0$，$a-c>0$，从而 $\frac{b}{a-b}-\frac{c}{a-c}=\frac{a(b-c)}{(a-b)(a-c)}>0$，

故 $\frac{b}{a-b}>\frac{c}{a-c}$，故 D 项正确.

5.（2024 • 浙江杭州模拟）（多选）

下列表述正确的是（　　）

A．如果 $a>b>0$，$c>d>0$，那么 $\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$

B．如果 $a>b>0$，那么 $\sqrt{a}>\sqrt{b}$

C．如果 $a>b>0$，$c>d>0$，那么 $a-c>b-d$

D．如果 $a\geq b$，那么 $b\leq\frac{a+b}{2}\leq a$

5．ABD

解析：A 项，同向同正的不等式可以相乘，但不能相除，故考虑把结论看成 $a\cdot\frac{1}{d}>b\cdot\frac{1}{c}$，于是先看 $\frac{1}{d}$ 与 $\frac{1}{c}$ 的大小，

因为 $c>d>0$，所以 $\frac{1}{d}>\frac{1}{c}>0$，与 $a>b>0$ 相乘得 $\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$，

故 A 项正确；

B 项，$a>b>0\Rightarrow\sqrt{a}>\sqrt{b}$，故 B 项正确；

C 项，同向不等式可以相加，但不能相减，可猜测此选项错误，故尝试找个反例，

取 $a=2$，$b=1$，$c=4$，$d=3$，则 $a-c=b-d=-2$，

故 C 项错误；

D 项，若 $a\geq b$，则 $b-\frac{a+b}{2}=\frac{b-a}{2}\leq 0$，所以 $b\leq\frac{a+b}{2}$，

又 $\frac{a+b}{2}-a=\frac{b-a}{2}\leq 0$，所以 $\frac{a+b}{2}\leq a$，

从而 $b\leq\frac{a+b}{2}\leq a$，故 D 项正确.

6.（2024 • 全国模拟）

若 $a<b<0$，则下列不等式一定成立的是（　　）

A．$\frac{1}{a-b}>\frac{1}{b}$　　B．$a^2<ab$

C．$\frac{|b|}{|a|}<\frac{|b|+1}{|a|+1}$　　D．$a^n>b^n$

6．C

解析：A 项，作差得到 $\frac{1}{a-b}-\frac{1}{b}=\frac{b-(a-b)}{(a-b)b}=\frac{2b-a}{(a-b)b}$，分母显然为正，但 $2b-a$ 的正负不确定，所以上述差值不一定为正，结论不一定成立，我们举个反例，

取 $a=-3$，$b=-2$，满足 $a<b<0$，此时 $\frac{1}{a-b}=-1$，

$\frac{1}{b}=-\frac{1}{2}$，所以 $\frac{1}{a-b}<\frac{1}{b}$，故 A 项错误；

B 项，由题意，$a<0$，所以在 $a<b$ 两端乘以 a 得 $a^2>ab$，

故 B 项错误；

C 项，由 $a<b<0$ 可知 $|a|>|b|>0$，所以根据糖水不等式容易得到 $\frac{|b|}{|a|}<\frac{|b|+1}{|a|+1}$，下面我们也给出作差比较的过程，

$\frac{|b|}{|a|}-\frac{|b|+1}{|a|+1}=\frac{|b|(|a|+1)-(|b|+1)|a|}{|a|(|a|+1)}=\frac{|b|-|a|}{|a|(|a|+1)}$，

因为 $a<b<0$，所以 $|b|-|a|=-b-(-a)=a-b<0$，

又 $|a|>0$，$|a|+1>0$，所以 $\frac{|b|}{|a|}-\frac{|b|+1}{|a|+1}=\frac{|b|-|a|}{|a|(|a|+1)}<0$，

从而 $\frac{|b|}{|a|}<\frac{|b|+1}{|a|+1}$，故 C 项正确；

D 项，n 的情况没给，$a^n>b^n$ 不一定成立，下面举个反例，

当 $n=1$ 时，$a^1>b^1$ 即 $a>b$，与已知不符，故 D 项错误.

7.（2024 • 全国模拟）

某生活用品价格起伏较大，每两周的价格均不相同，假设第一周、第二周价格分别为 a 元/斤、b 元/斤，甲和乙购买方式不同：甲每周买 3 斤该用品，乙每周买 10 元钱的该用品，则_____的购买方式更优惠（两周平均价格低视为更优惠）.（填“甲”或“乙”）

7. 乙

解析：甲购买该用品的平均单价为 $\frac{3a+3b}{3+3}=\frac{a+b}{2}$，

乙购买该用品的平均单价为 $\frac{10+10}{\frac{10}{a}+\frac{10}{b}}=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{2ab}{a+b}$，

故只需判断 $\frac{a+b}{2}$ 与 $\frac{2ab}{a+b}$ 的大小，可考虑作差比较，

因为 $\frac{a+b}{2}-\frac{2ab}{a+b}=\frac{(a+b)^2-4ab}{2(a+b)}=\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}$，

且由题意，$a\neq b$，所以 $\frac{a+b}{2}-\frac{2ab}{a+b}=\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}>0$，

从而 $\frac{a+b}{2}>\frac{2ab}{a+b}$，故乙的购买方式更优惠.

8.（2024 • 四川成都期末）（多选）

若 $a>b>0$，则下列不等式中一定不成立的是（　　）

A. $\frac{b}{a}>\frac{b+1}{a+1}$

B. $a+\frac{1}{a}>b+\frac{1}{b}$

C. $a+\frac{1}{b}>b+\frac{1}{a+1}$

D. $\frac{2a+b}{a+2b}>\frac{a}{b}$

8. AD

解析：A 项，$\frac{b}{a}-\frac{b+1}{a+1}=\frac{b(a+1)-(b+1)a}{a(a+1)}=\frac{b-a}{a(a+1)}$，

因为 $a>b>0$，所以 $b-a<0$，$a>0$，$a+1>0$，

从而 $\frac{b}{a}-\frac{b+1}{a+1}=\frac{b-a}{a(a+1)}<0$，故 $\frac{b}{a}<\frac{b+1}{a+1}$，

所以 A 项一定不成立；

B 项，观察发现只要 a 远大于 b，就能满足 $a+\frac{1}{a}>b+\frac{1}{b}$，下面举个例子，

取 $a=10$，$b=1$，则 $a+\frac{1}{a}=10+\frac{1}{10}$，$b+\frac{1}{b}=2$，

满足 $a+\frac{1}{a}>b+\frac{1}{b}$，所以 B 项可能成立；

C 项，取 $a=10$，$b=1$，则 $a+\frac{1}{b}=11$，$b+\frac{1}{a+1}=1+\frac{1}{11}$，

满足 $a+\frac{1}{b}>b+\frac{1}{a+1}$，所以 C 项可能成立；

多选题已排除 B、C 两个选项，余下的 D 项必选，下面我们也做个分析，

D 项，$\frac{2a+b}{a+2b}-\frac{a}{b}=\frac{(2a+b)b-a(a+2b)}{(a+2b)b}=\frac{b^2-a^2}{(a+2b)b}=\frac{(b+a)(b-a)}{(a+2b)b}$，

因为 $a>b>0$，所以 $b+a>0$，$b-a<0$，$a+2b>0$，

从而 $\frac{2a+b}{a+2b}-\frac{a}{b}=\frac{(b+a)(b-a)}{(a+2b)b}<0$，故 $\frac{2a+b}{a+2b}<\frac{a}{b}$，

所以 D 项一定不成立.

9.（2024·四川成都模拟）（多选）

若实数 a，b 满足：$\begin{cases}1\le a+b\le 5\\-1\le a-b\le 3\end{cases}$，则下列叙述正确的是（　　）

A．a 的取值范围是 $0\le a\le 4$

B．b 的取值范围是 $-1\le b\le 3$

C．$3a-2b$ 的范围是 $-2\le 3a-2b\le 10$

D．$3a-2b$ 的范围是 $-6\le 3a-2b\le 14$

9．ABC

解法 1：A 项，将所给的两个不等式相加得 $0\le 2a\le 8$，

所以 $0\le a\le 4$，故 A 项正确；

B 项，将 $-1\le a-b\le 3$ 各项同时乘以 -1 得 $1\ge b-a\ge -3$，

所以 $-3\le b-a\le 1$，与 $1\le a+b\le 5$ 相加得 $-2\le 2b\le 6$，

从而 $-1\le b\le 3$，故 B 项正确；

余下两项都是 $3a-2b$ 的范围，D 项的 $-6\le 3a-2b\le 14$ 是将 A、B 两项得到的 $\begin{cases}0\le a\le 4\\-1\le b\le 3\end{cases}$ 先化为 $\begin{cases}0\le 3a\le 12\\-6\le -2b\le 2\end{cases}$，再相加得到的，那选 D 吗？不妨看看 $3a-2b=14$ 能否成立，怎样能使 $3a-2b=14$？由 $\begin{cases}0\le 3a\le 12\\-6\le -2b\le 2\end{cases}$ 可知只能 $\begin{cases}3a=12\\-2b=2\end{cases}$，即 $\begin{cases}a=4\\b=-1\end{cases}$，但此时 $a-b=5$，不满足 $-1\le a-b\le 3$，所以 D 项必定不正确. 上述推理过程貌似没有问题，那为什么错了？这是因为尽管前面得到了 $\begin{cases}0\le a\le 4\\-1\le b\le 3\end{cases}$，但这里 a 和 b 并不是独立的变量，二者的取值不能在各自的范围内任意组合，例如，当 $a=0$ 时，代回原不等式组可以得到 $\begin{cases}1\le b\le 5\\-3\le b\le 1\end{cases}$，此时 b 只能取 1，不能在 $-1\le b\le 3$ 这个范围内任取. 那正确的解法是怎样的呢？我们应该用原始条件 $\begin{cases}1\le a+b\le 5\\-1\le a-b\le 3\end{cases}$ 直接求 $3a-2b$ 的范围，为了便于观察已知和所求的联系，先把已知的不等式换元，

设$\begin{cases}x=a+b\\y=a-b\end{cases}$，则$\begin{cases}1\le x\le 5\\-1\le y\le 3\end{cases}$，且$a=\dfrac{x+y}{2}$，$b=\dfrac{x-y}{2}$，

所以$3a-2b=3\cdot\dfrac{x+y}{2}-2\cdot\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}y$，

由$\begin{cases}1\le x\le 5\\-1\le y\le 3\end{cases}$可得$\begin{cases}\dfrac{1}{2}\le\dfrac{1}{2}x\le\dfrac{5}{2}\\-\dfrac{5}{2}\le\dfrac{5}{2}y\le\dfrac{15}{2}\end{cases}$，

两式相加得$-2\le\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}y\le 10$，所以$-2\le 3a-2b\le 10$，

故C项正确，D项错误.

解法2：A、B两项的分析同解法1，要由$\begin{cases}1\le a+b\le 5\\-1\le a-b\le 3\end{cases}$求$3a-2b$的范围，也可以用待定系数法，

设$\lambda(a+b)+\mu(a-b)=3a-2b$，则$(\lambda+\mu)a+(\lambda-\mu)b=$
$3a-2b$，所以$\begin{cases}\lambda+\mu=3\\\lambda-\mu=-2\end{cases}$，解得：$\lambda=\dfrac{1}{2}$，$\mu=\dfrac{5}{2}$，

由$\begin{cases}1\le a+b\le 5\\-1\le a-b\le 3\end{cases}$可得$\begin{cases}\dfrac{1}{2}\le\dfrac{1}{2}(a+b)\le\dfrac{5}{2}\\-\dfrac{5}{2}\le\dfrac{5}{2}(a-b)\le\dfrac{15}{2}\end{cases}$，

两式相加得：$-2\le 3a-2b\le 10$.

【反思】上面解法1我们从现象层面解释了由$\begin{cases}0\le a\le 4\\-1\le b\le 3\end{cases}$求$3a-2b$的范围的错因，而若要更深层次考虑，可从逻辑层面来看，$\begin{cases}0\le a\le 4\\-1\le b\le 3\end{cases}$与题干的$\begin{cases}1\le a+b\le 5\\-1\le a-b\le 3\end{cases}$并不等价，它是$\begin{cases}1\le a+b\le 5\\-1\le a-b\le 3\end{cases}$的必要不充分条件，所以$\begin{cases}0\le a\le 4\\-1\le b\le 3\end{cases}$代表的范围更大，于是用它求出的$3a-2b$的范围也更大，这才是错误的本质原因.

10.（2024•全国模拟）

若$a>1$，$b>1$，证明：$\sqrt{1+ab}>\sqrt{a+b}$.

10. **证明**：（目标不等式有根号，直接作差不好变形，可先平方去根号，再作差比较）

$(\sqrt{1+ab})^2-(\sqrt{a+b})^2=1+ab-a-b=(1-a)(1-b)$，

因为$a>1$，$b>1$，所以$1-a<0$，$1-b<0$，

从而$(\sqrt{1+ab})^2-(\sqrt{a+b})^2=(1-a)(1-b)>0$，

故$(\sqrt{1+ab})^2>(\sqrt{a+b})^2$，

又因为$\sqrt{1+ab}>0$，$\sqrt{a+b}>0$，所以$\sqrt{1+ab}>\sqrt{a+b}$.

11.（2024•河北石家庄模拟）

已知$a>b>0$，证明：$\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}>\dfrac{a-b}{a+b}$.

11. **证法1**：（证明两个代数式的大小，可先尝试作差比较）

$\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}-\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{(a^2-b^2)(a+b)-(a-b)(a^2+b^2)}{(a^2+b^2)(a+b)}$

$=\dfrac{(a-b)(a+b)^2-(a-b)(a^2+b^2)}{(a^2+b^2)(a+b)}$

$=\dfrac{(a-b)[(a+b)^2-(a^2+b^2)]}{(a^2+b^2)(a+b)}$

$=\dfrac{(a-b)(a^2+2ab+b^2-a^2-b^2)}{(a^2+b^2)(a+b)}=\dfrac{2ab(a-b)}{(a^2+b^2)(a+b)}$，

因为 $a>b>0$，所以 $a-b>0$， $a^2+b^2>0$， $a+b>0$，

从而 $\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}-\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{2ab(a-b)}{(a^2+b^2)(a+b)}>0$，

故 $\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}>\dfrac{a-b}{a+b}$.

证法 2：（观察发现要证的不等式左右都是正数，且左边的 a^2-b^2 可化为 $(a+b)(a-b)$，右边也有 $a-b$，于是可通过作商约去这部分，故也可考虑用作商比较法处理）

因为 $a>b>0$，所以 $\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}>0$， $\dfrac{a-b}{a+b}>0$，

又 $\dfrac{\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}{\dfrac{a-b}{a+b}}=\dfrac{\dfrac{(a+b)(a-b)}{a^2+b^2}}{\dfrac{a-b}{a+b}}=\dfrac{(a+b)^2}{a^2+b^2}=\dfrac{a^2+b^2+2ab}{a^2+b^2}$

$=1+\dfrac{2ab}{a^2+b^2}>1$，所以 $\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}>\dfrac{a-b}{a+b}$.

【反思】什么时候用作商比较法来证明不等式？一般来说，若目标不等式左右都是正数，且通过观察发现作商后容易变形，并判断与 1 的大小，就可以考虑作商比较法.

12．（2024・安徽模拟）

（1） $a=x^3+y^3$， $b=x^2y+xy^2$，其中 x，y 均为正实数，比较 a，b 的大小；

（2）已知 $a>b>c$，且 $a+b+c=0$，

求证： $\dfrac{a}{c-a}>\dfrac{a}{b-a}$.

12．**解**：（1）由题意， $a-b=x^3+y^3-x^2y-xy^2$

$=x^2(x-y)+y^2(y-x)=(x-y)(x^2-y^2)=(x-y)^2(x+y)$，

因为 x，y 均为正实数，所以 $x+y>0$，

又 $(x-y)^2\ge 0$，所以 $a-b=(x-y)^2(x+y)\ge 0$，故 $a\ge b$.

（2）（观察发现要证的不等式左右都有 a，可考虑把 a 约掉，故先分析 a 的正负）

若 $a\le 0$，则 $c<b<a\le 0$，所以 $a+b+c<0$，

与 $a+b+c=0$ 矛盾，所以 $a>0$，

所以 $\dfrac{a}{c-a}>\dfrac{a}{b-a}\Leftrightarrow\dfrac{1}{c-a}>\dfrac{1}{b-a}$ ①，（这就说明要证原不等式成立，只需证①成立，可作差通分）

$\dfrac{1}{c-a}-\dfrac{1}{b-a}=\dfrac{b-a-(c-a)}{(c-a)(b-a)}=\dfrac{b-c}{(c-a)(b-a)}$，

因为 $a>b>c$，所以 $c-a<0$， $b-a<0$， $b-c>0$，

所以 $\dfrac{1}{c-a}-\dfrac{1}{b-a}=\dfrac{b-c}{(c-a)(b-a)}>0$，故 $\dfrac{a}{c-a}>\dfrac{a}{b-a}$.

C 组 拓展提升

13.（2024•湖北襄阳期末）（多选）

19 世纪戴德金利用他提出的分割理论，从对有理数集的分割精确地给出了实数的定义，并且该定义作为现代数学实数理论的基础之一，可以推出实数理论中的六大基本定理，那么在证明有理数的不完备性时，经常会用到以下两个式子，已知正有理数 p，满足 $p^2<2$，$q=p-\dfrac{p^2-2}{p+2}$，则下列说法正确的是（　　）

A．$p<q$　　　　B．$p>q$

C．$q<\sqrt{2}$　　　　D．$q>\sqrt{2}$

13．AC

解法 1：因为 p 是正有理数，且 $p^2<2$，所以 $0<p<\sqrt{2}$，

又 $q=p-\dfrac{p^2-2}{p+2}$，所以 $p-q=\dfrac{p^2-2}{p+2}<0$，

从而 $p<q$，故 A 项正确，B 项错误；

再看 q 与 $\sqrt{2}$ 的大小，已有 p 的范围，故可考虑直接根据所给的 q 与 p 的关系式分析 q 的范围，

$q=p-\dfrac{p^2-2}{p+2}=\dfrac{p(p+2)-p^2+2}{p+2}=\dfrac{2p+2}{p+2}$

$=\dfrac{2(p+2)-2}{p+2}=2-\dfrac{2}{p+2}$　①，

因为 $0<p<\sqrt{2}$，所以 $2<p+2<2+\sqrt{2}$，

从而 $\dfrac{2}{2+\sqrt{2}}<\dfrac{2}{p+2}<1$，故 $1<2-\dfrac{2}{p+2}<2-\dfrac{2}{2+\sqrt{2}}$，

又 $2-\dfrac{2}{2+\sqrt{2}}=2-\dfrac{2(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}=2-\dfrac{2(2-\sqrt{2})}{2}=\sqrt{2}$，

所以 $1<2-\dfrac{2}{p+2}<\sqrt{2}$，由①可知 $q=2-\dfrac{2}{p+2}$，

所以 $1<q<\sqrt{2}$，故 C 项正确，D 项错误.

解法 2：观察发现 A、B 两项必有一个错误，C、D 两项也是如此，故可通过取特值排除两个选项，得到答案，

取 $p=1$，则 $q=1-\dfrac{1^2-2}{1+2}=\dfrac{4}{3}$，所以 $p<q$，故 B 项错误；

又 $q=\dfrac{4}{3}\approx 1.333<\sqrt{2}\approx 1.414$，所以 D 项错误；

此为多选题，B、D 均错误，故选 AC.

14.（2024•湖南邵阳竞赛）

已知等式 $xy-2y-2=0$.

（1）若 x，y 均为正整数，求 x，y 的值；

（2）设 $p=\dfrac{4}{(x_1-2)+(x_2-2)}$，$q=\dfrac{y_1+y_2}{2}$，$y_1$，$y_2$ 分别是分式 $\dfrac{2}{x-2}$ 中的 x 取 x_1，x_2 $(x_2>x_1>2)$ 时所对应的值，试比较 p，q 的大小，说明理由.

14．**解**：（1）（直接由 $xy-2y-2=0$ 不易看出 x，y 能取哪些正整数，不妨由它反解出 x 或 y，再来分析）

由 $xy-2y-2=0$ 可得 $xy=2y+2$，所以 $x=2+\dfrac{2}{y}$　①，

因为 y 为正整数，所以只有当 $y=1$ 或 2 时，$2+\frac{2}{y}$ 才为正整数，将 $y=1$，$y=2$ 分别代入①可得 $x=4$，$x=3$，

所以 x，y 的值为 $x=4$，$y=1$ 或 $x=3$，$y=2$．

（2）（p，q 的结构较复杂，不易直接看出它们的大小，考虑作差比较）由题意，$p-q=\frac{4}{(x_1-2)+(x_2-2)}-\frac{y_1+y_2}{2}$

$$=\frac{4}{(x_1-2)+(x_2-2)}-\frac{\frac{2}{x_1-2}+\frac{2}{x_2-2}}{2}$$

$$=\frac{4}{(x_1-2)+(x_2-2)}-\frac{1}{x_1-2}-\frac{1}{x_2-2}\quad ②,$$

（观察发现 x_1 和 x_2 以 x_1-2，x_2-2 的整体结构出现，故考虑将它们整体换元，简化上述式子）

令 $a=x_1-2$，$b=x_2-2$，由 $x_2>x_1>2$ 可得 $b>a>0$，

式②即为 $p-q=\frac{4}{a+b}-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{4}{a+b}-\frac{b+a}{ab}$

$$=\frac{4ab-(a+b)^2}{(a+b)ab}=\frac{4ab-(a^2+2ab+b^2)}{(a+b)ab}=-\frac{(a-b)^2}{(a+b)ab},$$

因为 $b>a>0$，所以 $(a-b)^2>0$，$a+b>0$，

从而 $p-q=-\frac{(a-b)^2}{(a+b)ab}<0$，故 $p<q$．

15．（2024·吉林长春模拟）

不等关系是数学中一种最基本的数的关系，生活中随处可见．例如，已知 b 克糖水中含有 a 克糖 $(b>a>0)$，再添加 m 克糖 $(m>0)$，假设全部溶解，糖水变甜了．

（1）请将这一事实表示为一个不等式，并证明这个不等式成立；

（2）利用（1）中的结论证明：若 a，b，c 为三角形的三边长，则 $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}<2$．

15．**解**：（1）由题意，加糖前，糖水的浓度为 $\frac{a}{b}$，

加入 m 克糖后，糖水的浓度变为 $\frac{a+m}{b+m}$，

加糖后糖水更甜即糖水的浓度升高了，所以 $\frac{a}{b}<\frac{a+m}{b+m}$，

（下面给出此不等式的证明，可用作差比较法来证）

证明：$\frac{a}{b}-\frac{a+m}{b+m}=\frac{a(b+m)-(a+m)b}{b(b+m)}=\frac{m(a-b)}{b(b+m)}$，

因为 $b>a>0$，$m>0$，所以 $a-b<0$，$b+m>0$，

从而 $\frac{a}{b}-\frac{a+m}{b+m}=\frac{m(a-b)}{b(b+m)}<0$，故 $\frac{a}{b}<\frac{a+m}{b+m}$．

（2）（题干已经提示了用（1）的结论，故考虑在三个分式上下同时加 m，那 m 怎么取？要让三者相加与右边的常数 2 联系起来，应统一分母，我们发现在 $b+c$，$a+c$，$a+b$ 上分别加个 a，b，c，就能统一分母，m 就有了）

在 $\triangle ABC$ 中，$b+c>a$，所以分式 $\frac{a}{b+c}$ 满足第（1）问结论的使用场景，故 $\frac{a}{b+c}<\frac{a+a}{b+c+a}=\frac{2a}{a+b+c}$，

同理，$\frac{b}{a+c}<\frac{2b}{a+b+c}$，$\frac{c}{a+b}<\frac{2c}{a+b+c}$，

所以 $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}<\frac{2a}{a+b+c}+\frac{2b}{a+b+c}+\frac{2c}{a+b+c}$

$$=\frac{2(a+b+c)}{a+b+c}=2.$$