强化训练

A 组 夯实基础

1.（2024·江苏模拟）

定义集合运算：$A\odot B=\{z\mid z=xy(x+y),x\in A,y\in B\}$，集合 $A=\{0,1\}$，$B=\{2,3\}$，则集合 $A\odot B$ 所有元素之和为______.

1. 18

解析： x 和 y 分别来自 A 和 B，而 A，B 的元素个数较少，故所有可能的组合不多，考虑逐一罗列，分析 z 的取值，

x	0	0	1	1
y	2	3	2	3
$z=xy(x+y)$	0	0	6	12

由上表可知 z 所有可能的取值有 0，6，12，所以 $A\odot B=\{0,6,12\}$，故 $A\odot B$ 的所有元素之和为 $0+6+12=18$.

2.（2023·河南期中）（多选）

当两个集合中一个集合为另一个集合的子集时，称这两个集合构成“全食”；当两个集合有公共元素，但互不为对方子集时，称这两个集合成“偏食”．对于集合 $A=\left\{-2,0,\frac{1}{2},1\right\}$，$B=\{x\mid(ax-1)(x+a)=0\}$，若 A 与 B 构成“全食”或“偏食”，则实数 a 的取值可以是（　　）

A．-2　　　　B．$-\frac{1}{2}$　　　　C．0　　　　D．1

2. BCD

解法 1： 构成“全食”或“偏食”，意味着两个集合有公共元素，A 的元素已知，B 的元素与 a 的值有关，可考虑把选项依次代入 B 中的方程，求出 B 再看它与 A 的关系，

A 项，当 $a=-2$ 时，由 $(-2x-1)(x-2)=0$ 得 $x=-\frac{1}{2}$ 或 2，

所以 $B=\left\{-\frac{1}{2},2\right\}$，此时 $A\cap B=\varnothing$，不合题意，

故 A 项错误；

B 项，当 $a=-\frac{1}{2}$ 时，由 $(-\frac{1}{2}x-1)(x-\frac{1}{2})=0$ 得 $x=-2$ 或 $\frac{1}{2}$，所以 $B=\left\{-2,\frac{1}{2}\right\}$，

此时 $B\subsetneqq A$，A 与 B 构成“全食”，故 B 项正确；

C 项，当 $a=0$ 时，由 $-x=0$ 可得 $x=0$，所以 $B=\{0\}$，

此时 $B\subsetneqq A$，A 与 B 构成“全食”，故 C 项正确；

D 项，当 $a=1$ 时，由 $(x-1)(x+1)=0$ 得 $x=1$ 或 -1，

所以 $B=\{1,-1\}$，此时 $A\cap B=\{1\}$，A 与 B 构成“偏食”，

故 D 项正确.

解法 2： 观察发现集合 B 的方程 $(ax-1)(x+a)=0$ 好解，因此可先解方程，得到集合 B，再来分析怎样能使 A 和 B 有公共元素. 要求解 B 的方程，需要讨论 a 是否为 0，

当 $a=0$ 时，$(ax-1)(x+a)=0$ 即为 $-x=0$，解得：$x=0$，

所以 $B=\{0\}$，此时 $B\subsetneqq A$，所以 A 与 B 构成“全食”；

当 $a\neq 0$ 时，由 $(ax-1)(x+a)=0$ 可得 $x=\frac{1}{a}$ 或 $-a$，

显然 $\frac{1}{a}\neq -a$，否则 $a^2=-1$，矛盾，所以 $B=\left\{\frac{1}{a},-a\right\}$，

A 和 B 构成“全食”或“偏食”等价于 A，B 有公共元素，

故 $\frac{1}{a}=-2$ 或 $\frac{1}{a}=\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{a}=1$ 或 $-a=-2$ 或 $-a=\frac{1}{2}$ 或 $-a=1$，

解得：$a=-\frac{1}{2}$ 或 2 或 1 或 -1，

综上所述，满足题意的 a 可以为 0，$-\frac{1}{2}$，2，1，-1，

结合选项可知答案为 BCD.

3．（2024 • 山东模拟）（多选）

我们知道，如果集合 $A\subseteq S$，那么 S 的子集 A 的补集为 $\complement_S A=\{x\mid x\in S\text{ 且 }x\notin A\}$，类似地，对于集合 A，B 我们把集合 $\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\notin B\}$，叫作集合 A 和 B

的差集，记作 $A-B$，例如，$A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=$

$\{4,5,6,7,8\}$，则 $A-B=\{1,2,3\}$，$B-A=\{6,7,8\}$，下列解答正确的是（　　）

A．已知 $A=\{4,5,6,7,9\}$，$B=\{3,5,6,8,9\}$，

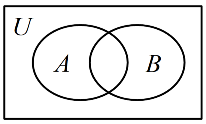
则 $B-A=\{3,7,8\}$

B．已知 $A=\{x\mid x<-1\text{ 或 }x>3\}$，$B=\{x\mid -2\leq x$

$<4\}$，则 $A-B=\{x\mid x<-2\text{ 或 }x\geq 4\}$

C．如果 $A\subseteq B$，那么 $A-B=\varnothing$

D．已知全集 U，集合 A，B 的关系如下图所示，则 $A-B=A\cap(\complement_U B)$



3．BCD

解析：A 项，由题意，$A\cap B=\{5,6,9\}$，在 B 中把 $A\cap B$ 的元素去掉可得 $B-A=\{3,8\}$，故 A 项错误；

B 项，如图 1，$A\cap B=\{x\mid -2\leq x<-1\text{ 或 }3<x<4\}$，

在 A 中把 $A\cap B$ 的元素去掉得 $A-B=\{x\mid x<-2\text{ 或 }x\geq 4\}$，

故 B 项正确；

C 项，若 $A\subseteq B$，则不存在元素 $x\in A$ 且 $x\notin B$，

所以 $A-B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\notin B\}=\varnothing$，故 C 项正确；

D 项，$A\cap(\complement_U B)$ 为如图 2 所示的阴影部分，它恰好是 $\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\notin B\}$，所以 $A-B=A\cap(\complement_U B)$，故 D 项正确.

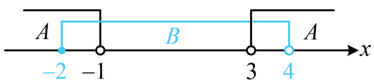


图1

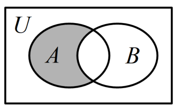


图2

B组 强化能力

4.（2023·上海徐汇期末）

若集合 A 同时具有以下三个性质：（1）$0\in A$，$1\in A$；（2）若 $x,y\in A$，则 $x-y\in A$；（3）若 $x\in A$ 且 $x\neq 0$，则 $\dfrac{1}{x}\in A$；则称 A 为“好集”.

已知命题：①集合 $\{1,0,-1\}$ 是好集；②对任意一个好集 A，若 $x,y\in A$，则 $x+y\in A$. 以下判断正确的是（　　）

A. ①和②均为真命题

B. ①和②均为假命题

C. ①为真命题，②为假命题

D. ①为假命题，②为真命题

4. D

解析：对于命题①，$0\in\{1,0,-1\}$，$1\in\{1,0,-1\}$，

满足性质（1），

因为 $1\in\{1,0,-1\}$，$-1\in\{1,0,-1\}$，但 $1-(-1)=2\notin\{1,0,-1\}$，

所以不满足性质（2），故①为假命题；

对于命题②，我们发现条件有 $x-y\in A$，让判断的是 $x+y\in A$ 是否正确，怎样由 $x-y$ 变成 $x+y$？注意到 $x+y=x-(-y)$，所以可考虑先论证 $-y\in A$，而 $-y$ 可看成 $0-y$，0 恰好也在 A 中，思路就有了，

对任意一个好集 A，由性质（1）可知 $0\in A$，

因为 $y\in A$，所以由性质（2）可得 $0-y=-y\in A$，

又因为 $x\in A$，$-y\in A$，所以再由性质（2）可得 $x-(-y)=x+y\in A$，故②为真命题.

5.（2023·北京期中）

定义集合 $P=\{x\,|\,a\le x\le b\}$ 的“长度”是 $b-a$，其中 $a,b\in\mathbf{R}$. 已如集合 $M=\left\{x\middle|m\le x\le m+\dfrac{1}{2}\right\}$，$N=\left\{x\middle|n-\dfrac{3}{5}\le x\le n\right\}$，且 M，N 都是集合 $\{x\,|\,1\le x\le 2\}$ 的子集，则 $M\cap N$ 的“长度”的最小值是______；若 $m=\dfrac{6}{5}$，$M\cup N$ 的“长度”大于 $\dfrac{3}{5}$，则 n 的取值范围是______.

5. $\dfrac{1}{10}$；$\left\{n\middle|\dfrac{8}{5}\le n<\dfrac{17}{10}\text{ 或 }\dfrac{9}{5}<n\le 2\right\}$

解析：由题意，集合 M 的长度是 $m+\dfrac{1}{2}-m=\dfrac{1}{2}$，集合 N 的长度是 $n-(n-\dfrac{3}{5})=\dfrac{3}{5}$，

集合 M，N 的长度都不随 m，n 的变化而改变，调整 m，n，不外乎就是这两个集合在数轴上的位置会移动，于是考虑画图分析，找 $M\cap N$ 长度最小的临界状态，

如图 1，集合 M，N 可在数轴上滑动，但它们的长度保持不变，且都不超出 1 到 2 的范围，

怎样能使 $M\cap N$ 的长度最小？应该让二者重叠的区域最少，此时不妨让 M 靠最左边，N 靠最右边（反过来也行），

如图 2，当 $m=1$，$n=2$ 时，$m+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$，$n-\dfrac{3}{5}=\dfrac{7}{5}$，此时 $M\cap N$ 的长度最小，

所以 $M\cap N$ 的长度的最小值为 $\dfrac{3}{2}-\dfrac{7}{5}=\dfrac{1}{10}$；

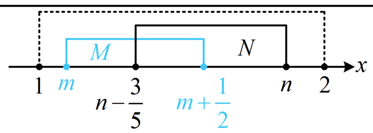


图1

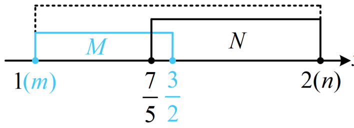


图2

注意到集合 N 的长度恰为 $\frac{3}{5}$，M 的长度为 $\frac{1}{2}<\frac{3}{5}$，故要使 $M\cup N$ 的长度大于 $\frac{3}{5}$，只需 M 不包含于 N 就行了，否则 $M\cup N=N$，其长度等于 $\frac{3}{5}$. 显然 M 包含于 N 比正面考虑 M 不包含于 N 更容易，故按此求 n 的范围，再取补集，

若 $m=\frac{6}{5}$，则 $m+\frac{1}{2}=\frac{17}{10}$，假设 $M\subseteq N$，则如图 3，

应有 $n-\frac{3}{5}\le\frac{6}{5}$ 且 $\frac{17}{10}\le n$，解得：$\frac{17}{10}\le n\le\frac{9}{5}$ ①，

由 $N\subseteq\{x\,|\,1\le x\le 2\}$ 得 $n-\frac{3}{5}\ge 1$ 且 $n\le 2$，所以 $\frac{8}{5}\le n\le 2$ ②，

要使 $M\cup N$ 长度大于 $\frac{3}{5}$，应有 M 不包含于 N，故在②中把①去掉得 n 的取值范围为 $\left\{n\left|\frac{8}{5}\le n<\frac{17}{10}\text{ 或 }\frac{9}{5}<n\le 2\right.\right\}$.

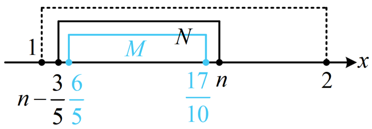


图3

6.（2023 • 山东临沂期中）（多选）

给定数集 M，若对于任意 $a,b\in M$，有 $a+b\in M$，且 $a-b\in M$，则称集合 M 为闭集合，则下列说法中不正确的是（　　）

A．集合 $M=\{-2,-1,0,1,2\}$ 为闭集合

B．整数集是闭集合

C．集合 $M=\{n\,|\,n=2k,k\in\mathbf{Z}\}$ 为闭集合

D．若集合 A_1，A_2 为闭集合，则 $A_1\cup A_2$ 为闭集合

6．AD

解析：A 项，由题意，$1\in M$，$2\in M$，但 $1+2=3\notin M$，

所以集合 M 不是闭集合，故 A 项错误；

B 项，对任意的 $a\in\mathbf{Z}$，$b\in\mathbf{Z}$，都有 $a+b\in\mathbf{Z}$，$a-b\in\mathbf{Z}$，

所以整数集 $\mathbf{Z}$ 是闭集合，故 B 项正确；

C 项，因为 $M=\{n\,|\,n=2k,k\in\mathbf{Z}\}$，所以 M 是全体偶数构成的集合，对 M 中的任意两个偶数 a,b，$a\pm b$ 仍是偶数，所以 $a\pm b\in M$，从而集合 M 是闭集合，故 C 项正确；

D 项，C 项的集合 M 可看成所有能被 2 整除的整数构成的集合，受此启发，可以想象，所有能被 3，4，5，⋯ 整除的数各自也都能构成闭集合，但从中取两个求并集后就不一定是闭集合了，下面我们举个例子，

设 $A_1=\{x\,|\,x=2k,k\in\mathbf{Z}\}$，$A_2=\{x\,|\,x=3k,k\in\mathbf{Z}\}$，则 A_1，A_2 都是闭集合，$A_1\cup A_2=\{x\,|\,x=2k\text{ 或 }x=3k,k\in\mathbf{Z}\}$，

元素 2 和 3 在 $A_1\cup A_2$ 中，但 $2+3=5$ 不在 $A_1\cup A_2$ 中，

所以 $A_1\cup A_2$ 不是闭集合，故 D 项错误.

C组 拓展提升

7.（2024·全国模拟）（多选）

由无理数引发的数学危机一直延续到19世纪，直到1872年，德国数学家戴德金从连续性的要求出发，用有理数的“分割”来定义无理数（史称戴德金分割），并把实数理论建立在严格的科学基础上，才结束了无理数被认为“无理”的时代，也结束了持续2000多年的数学史上的第一次大危机．所谓戴德金分割，是指将有理数集 $\mathbf{Q}$ 划分为两个非空的子集 M 与 N，且满足 $M\cup N=\mathbf{Q}$，$M\cap N=\varnothing$，M 中的每一个元素小于 N 中的每一个元素，则称 (M,N) 为戴德金分割，试判断下列选项中，可能成立的是（　　）

A．$M=\{x\in\mathbf{Q}\,|\,x<0\}$，$N=\{x\in\mathbf{Q}\,|\,x>0\}$ 是一个戴德金分割

B．M 没有最大元素，N 有一个最小元素

C．M 有一个最大元素，N 有一个最小元素

D．M 没有最大元素，N 也没有最小元素

7．BD

解析：A项，由题意，$M\cup N=\{x\in\mathbf{Q}\,|\,x<0$ 或 $x>0\}$，

所以有理数0不在 $M\cup N$ 中，从而 $M\cup N\neq\mathbf{Q}$，

故 (M,N) 不是一个戴德金分割，故A项错误；

B项，受A项的启发，把0补上就能产生戴德金分割，能否满足此项结论呢？可以，把0补到 N 中即可，

设 $M=\{x\in\mathbf{Q}\,|\,x<0\}$，$N=\{x\in\mathbf{Q}\,|\,x\geq 0\}$，则 $M\cup N=\mathbf{Q}$，

$M\cap N=\varnothing$，且 M 中的每一个元素小于 N 中的每一个元素，所以 (M,N) 是戴德金分割，此时 M 没有最大的元素，

N 有一个最小元素，此最小元素是0，故B项正确；

C项，任意两个有理数之间都有无穷多个有理数，所以直观想象可知，若 M 有一个最大元素，N 有一个最小元素，则它们之间的有理数必不在 $M\cup N$ 中，不满足 $M\cup N=\mathbf{Q}$，故此选项不可能成立，若要严格论证，可用反证法，

假设存在戴德金分割 (M,N)，M 有一个最大元素 a，N 有一个最小元素 b，则 $a<b$，且 $a,b\in\mathbf{Q}$，所以 $\frac{a+b}{2}\in\mathbf{Q}$，

因为 $a<\frac{a+b}{2}<b$，所以 $\frac{a+b}{2}\notin M$，$\frac{a+b}{2}\notin N$，

从而 $M\cup N\neq\mathbf{Q}$，与 (M,N) 为戴德金分割矛盾，

故不存在戴德金分割 (M,N)，使 M 有一个最大元素 a，

N 有一个最小元素 b，故C项错误；

D项，此为多选题，已排除选项A、C，则D项必定正确，下面我们举一个满足D项结论的戴德金分割，

设 $M=\{x\in\mathbf{Q}\,|\,x<\sqrt{2}\}$，$N=\{x\in\mathbf{Q}\,|\,x>\sqrt{2}\}$，

则 $M\cup N=\mathbf{Q}$，$M\cap N=\varnothing$，且 M 中的每一个元素小于 N 中的每一个元素，所以 (M,N) 是戴德金分割，

此时 M 没有最大元素，N 也没有最小元素，故D项正确．

8.（2024•全国模拟）

大数据时代，需要对数据库进行检索，检索过程中有时会出现笛卡尔积现象，而笛卡尔积会产生大量的数据，对内存、计算资源都会产生巨大压力，为优化检索软件，编程人员需要了解笛卡尔积．两个集合 A 和 B，用 A 中元素为第一元素，B 中元素为第二元素构成有序对，所有这样的有序对组成的集合叫作 A 与 B 的笛卡尔积，又称直积，记为 $A\times B$．即 $A\times B=\{(x,y)\mid x\in A$ 且 $y\in B\}$，关于任意非空集合 M，N，T，下列说法一定正确的是（　　）

A．$M\times N=N\times M$

B．$(M\times N)\times T=M\times(N\times T)$

C．$M\times(N\cup T)\subsetneqq(M\times N)\cup(M\times T)$

D．$M\times(N\cap T)=(M\times N)\cap(M\times T)$

8．D

解析：四个选项都不容易直接看出是否成立，正面论证也较难，故考虑取特值排除选项，

假设 $M=\{1\}$，$N=\{2\}$，$T=\{3\}$，

A 项，$M\times N=\{(x,y)\mid x\in M,y\in N\}=\{(1,2)\}$，

$N\times M=\{(x,y)\mid x\in N,y\in M\}=\{(2,1)\}$，

所以 $M\times N\neq N\times M$，故 A 项错误；

B 项，$(M\times N)\times T=\{(x,y)\mid x\in M\times N,y\in T\}$

$=\{((1,2),3)\}$，$N\times T=\{(x,y)\mid x\in N,y\in T\}=\{(2,3)\}$，

所以 $M\times(N\times T)=\{(x,y)\mid x\in M,y\in N\times T\}=\{(1,(2,3))\}$，

从而 $(M\times N)\times T\neq M\times(N\times T)$，故 B 项错误；

C 项，$N\cup T=\{2,3\}$，所以 $M\times(N\cup T)=$

$\{(x,y)\mid x\in M,y\in N\cup T\}=\{(1,2),(1,3)\}$，

又 $M\times N=\{(1,2)\}$，$M\times T=\{(1,3)\}$，

所以 $(M\times N)\cup(M\times T)=\{(1,2),(1,3)\}$，

从而 $M\times(N\cup T)=(M\times N)\cup(M\times T)$，故 C 项错误；

此为单选题，A、B、C 均错误，必定选 D，下面我们也给出严格的证明．注意到 $M\times(N\cap T)=(M\times N)\cap(M\times T)$ 的左右都是集合，证集合相等，可考虑证它们相互包含，于是不失一般性地设集合中的元素来分析，

D 项，对任意的 $(x,y)\in M\times(N\cap T)$，应有 $x\in M$，

$y\in N\cap T$，所以 $y\in N$ 且 $y\in T$，

由 $x\in M$，$y\in N$ 可得 $(x,y)\in M\times N$，

由 $x\in M$，$y\in T$ 可得 $(x,y)\in M\times T$，

所以 $(x,y)\in(M\times N)\cap(M\times T)$，

故 $M\times(N\cap T)\subseteq(M\times N)\cap(M\times T)$　①；

对任意的 $(x,y)\in(M\times N)\cap(M\times T)$，应有 $(x,y)\in M\times N$

且 $(x,y)\in M\times T$，

由 $(x,y)\in M\times N$ 可得 $x\in M$，$y\in N$　②，

由 $(x,y)\in M\times T$ 可得 $x\in M$，$y\in T$　③，

结合②③可得 $y\in N\cap T$，

又因为 $x\in M$，所以 $(x,y)\in M\times(N\cap T)$，

故 $(M\times N)\cap(M\times T)\subseteq M\times(N\cap T)$　④；

综合①④可得 $M\times(N\cap T)=(M\times N)\cap(M\times T)$，

故 D 项正确.

9.（2024 • 全国模拟）

设 A 为非空数集，若对一切 $a\in A$， $b\in A$，都有 $ab\in A$，那么就说集合 A 对乘法运算是封闭的.

（1）设 $A=\{x\mid x=m+\sqrt{2}n,m,n\in\mathbf{Z}\}$，判断 A 对乘法运算是否封闭？证明你的结论.

（2）设 $B=\{x\mid x=m+\sqrt{2}n,m,n\in\mathbf{Z}$，且 $n\neq 0\}$，问 B 对乘法运算是否封闭？证明你的结论.

9．**解：**（1）（要判断 A 是否封闭，只需从 A 中任取两个元素，看看它们相乘的结果是否仍在 A 中）

设 $a=x+\sqrt{2}y$， $b=k+\sqrt{2}p$ 为 A 中任意的两个元素，

其中 $x,y,k,p\in\mathbf{Z}$，则 $ab=(x+\sqrt{2}y)(k+\sqrt{2}p)$

$=xk+\sqrt{2}xp+\sqrt{2}yk+2yp=(xk+2yp)+\sqrt{2}(xp+yk)$，

由 $x,y,k,p\in\mathbf{Z}$ 可知 $xk+2yp$ 和 $xp+yk$ 都是整数，

记 $m=xk+2yp$， $n=xp+yk$，则 $ab=m+\sqrt{2}n$，

且 $m,n\in\mathbf{Z}$，所以 $ab\in A$，故 A 对乘法运算是封闭的.

（2）（集合 B 只是在 A 的基础上新增了 $n\neq 0$，故要看 ab 是否在 B 中，只需看（1）问求得的 ab 中， $xp+yk$ 是否可能为 0，直观感觉可以为 0，故尝试举个反例）

对于（1）中的 a，b，取 $x=2$， $y=1$， $k=-2$， $p=1$ 可

得 $a=2+\sqrt{2}$， $b=-2+\sqrt{2}$，则 $a\in B$， $b\in B$，

但此时 $ab=(2+\sqrt{2})(-2+\sqrt{2})=-2\notin B$，

所以 B 对乘法运算不封闭.