5.7 三角函数的应用

►► 习题：P1

知识梳理

知识点 1：函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,x\geq 0)$ 中各量的物理意义

在物理学中，把物体受到的力（总是指向平衡位置）正比于它离开平衡位置的距离的运动称为“简谐运动”．

符号	名称	意义
A	振幅	做简谐运动的物体离开平衡位置的最大距离
T	周期	做简谐运动的物体往复运动一次所需要的时间，$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$
f	频率	做简谐运动的物体在单位时间内往复运动的次数，$f=\dfrac{1}{T}=\dfrac{\omega}{2\pi}$
$\omega x+\varphi$	相位	$\omega x+\varphi$ 称为相位
φ	初相	$x=0$ 时的相位

知识点 2：应用三角函数解决实际问题

利用三角函数解决实际问题的一般步骤如下：

第 1 步：将实际问题化归为三角函数模型，若模型中含有未知的参数，往往需要先通过曲线上的点确定参数的值；

第 2 步：利用三角函数的相关知识，得到该模型的解；

第 3 步：检验该模型的解是否具有实际意义，若具有实际意义，则该模型的解就是实际问题的解，最后回答实际问题．

本节核心题型

本节主要涉及一些具有实际背景的三角函数问题，我们分了两个类型，类型Ⅰ针对的是模型条件确定的情况，此时只需运用已知条件求模型参数即可；类型Ⅱ则针对的是拟合模型，需要我们自己选择合适的数据作为已知条件，求模型的参数．

类型Ⅰ：利用三角函数模型解决实际问题

【例 1】（多选）潮汐现象是地球上的海水受月球和太阳的万有引力作用而引起的周期性涨落现象．某观测站通过长时间观察，发现某港口的潮汐涨落规律为 $y=A\cos\left(\omega x+\dfrac{\pi}{3}\right)+6(A>0,\omega>0)$，其中 y（单位：m）为港口水深，x（单位：h）为时间 $(0\leq x\leq 24)$，该观测站观察到水位最高点和最低点的时间间隔最少为 6h，且中午 12 点的水深为 8m，为保证安全，当水深超过 8m 时，应限制船只出入，则下列说法正确的是（　　）

A．$\omega=\dfrac{\pi}{6}$

B．最高水位为 12m

C．该港口从上午 8 点开始首次限制船只出入

D．一天内限制船只出入的时长为 4h

解析：A 项，题干给出了最高水位与最低水位的最短时间间隔，即函数最大值点与最小值点之间的最短距离，由此可推断周期，进而得到 ω，

水位最高点和最低点的时间间隔最少为 6h，所以 $\dfrac{T}{2}=6\Rightarrow T=12\Rightarrow\omega=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{\pi}{6}$，故 A 项正确；

B 项，最高水位即为 $A+6$，解析式中只差 A 了，题干还给了 12 点水深为 8m，代入解析式即可建立方程求 A，

因为中午 12 点的水深为 8m，所以当 $x=12$ 时，$y=A\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\times12+\dfrac{\pi}{3}\right)+6=A\cos\left(2\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)+6=A\cos\dfrac{\pi}{3}+6$

$=\dfrac{A}{2}+6=8$，解得：$A=4$，从而最高水位为 $A+6=10$ m，故 B 项错误；

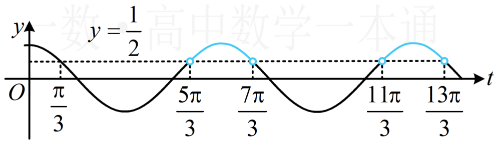
C 项，令 $y>8$ 可得 $4\cos\left(\dfrac{\pi}{6}x+\dfrac{\pi}{3}\right)+6>8$，所以 $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}x+\dfrac{\pi}{3}\right)>\dfrac{1}{2}$，令 $t=\dfrac{\pi}{6}x+\dfrac{\pi}{3}$，则 $\cos t>\dfrac{1}{2}$ ①，

当 $0\le x\le24$ 时，$\dfrac{\pi}{3}\le t\le\dfrac{13\pi}{3}$，如图，要使不等式①成立，应有 $\dfrac{5\pi}{3}<t<\dfrac{7\pi}{3}$ 或 $\dfrac{11\pi}{3}<t<\dfrac{13\pi}{3}$，

所以 $\dfrac{5\pi}{3}<\dfrac{\pi}{6}x+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{7\pi}{3}$ 或 $\dfrac{11\pi}{3}<\dfrac{\pi}{6}x+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{13\pi}{3}$，解得：$8<x<12$ 或 $20<x<24$，

所以该港口从上午 8 点开始首次限制船只出入，故 C 项正确；

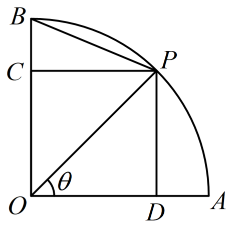
D 项，由 C 项的分析过程可知一天内限制船只出入的时长为 $(12-8)+(24-20)=8$ h，故 D 项错误.



答案：AC

【反思】在模型确定的三角函数实际问题中，解题的关键是把实际问题中的已知信息转化到模型上来，求解模型的参数.

【例 2】如图，某公园有一块扇形人工湖 OAB，其中 $\angle AOB=\dfrac{\pi}{2}$，$OA=OB=1$ 千米，为了增加人工湖的观赏性，政府计划在人工湖上建造两个观景区，其中荷花池观景区的形状为矩形 $PCOD$，喷泉观景区的形状为△PBC，且 C 在 OB 上，D 在 OA 上，P 在 $\overset{\frown}{AB}$ 上，记 $\angle POA=\theta$.



（1）试用 θ 分别表示矩形 $PCOD$ 和△PBC 的面积，并给出角 θ 的取值范围；

（2）若在 PD 的位置架起一座观景桥，已知建造观景桥的费用为每千米 8 万元（包含桥的宽度费用），建造喷泉观景区的费用为每平方千米 16 万元，建造荷花池的总费用为 6 万元，求当 θ 为多

少时，建造该观景区总费用最低，并求出最低费用.

解：（1）（计算矩形 $PCOD$ 的面积需要长和宽，故先用几何关系求 PD 和 OD）

由图可知，在 Rt$\triangle OPD$ 中，$OP=1$，$PD=OP\cdot\sin\angle POA=\sin\theta$，$OD=OP\cdot\cos\angle POA=\cos\theta$，

所以矩形 $PCOD$ 的面积 $S_{PCOD}=PD\cdot OD=\sin\theta\cos\theta$，

（再看 $\triangle PBC$ 的面积，需要 PC 和 BC，前者与 OD 相等，后者可由 $OB-OC$ 来求）

$PC=OD=\cos\theta$，$BC=OB-OC=OB-PD=1-\sin\theta$，

所以 $S_{\triangle PBC}=\frac{1}{2}PC\cdot BC=\frac{1}{2}\cos\theta(1-\sin\theta)=\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta$，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$.

（2）（建造该观景区的总费用为三部分费用之和，下面我们先分别计算各部分费用）

由题意，建造观景桥 PD 的费用为 $8PD=8\sin\theta$，

建造喷泉观景区的费用为 $16S_{\triangle PBC}=16\times\left(\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta\right)=8\cos\theta-8\sin\theta\cos\theta$，

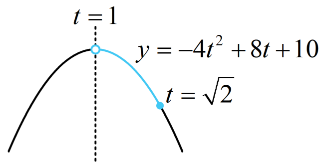
建造荷花池的总费用为 6 万元，所以建造该观景区的总费用 $f(\theta)=8\sin\theta+8\cos\theta-8\sin\theta\cos\theta+6$ ①，

（怎样求上式的最小值？观察发现有 $\sin\theta+\cos\theta$ 和 $\sin\theta\cos\theta$，将 $\sin\theta+\cos\theta$ 平方可与 $\sin\theta\cos\theta$ 联系起来，故将 $\sin\theta+\cos\theta$ 换元，并用新元表示 $\sin\theta\cos\theta$）

令 $t=\sin\theta+\cos\theta$，则 $t^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=1+2\sin\theta\cos\theta$，所以 $\sin\theta\cos\theta=\frac{t^2-1}{2}$，

代入①得 $f(\theta)=8t-8\cdot\frac{t^2-1}{2}+6=-4t^2+8t+10$，因为 $t=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$，且 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

所以 $\theta+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$，故 $t\in(1,\sqrt{2}]$，函数 $y=-4t^2+8t+10$ 的部分图象如图，

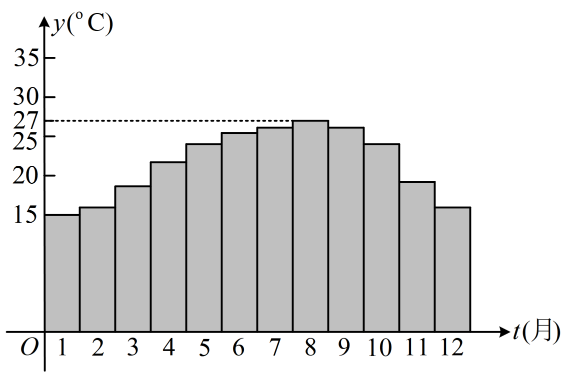


由图可知当 $t=\sqrt{2}$ 时，$f(\theta)$ 取得最小值 $2+8\sqrt{2}$，此时 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=1$，$\theta=\frac{\pi}{4}$，

所以当 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时，建造该观景区的总费用取得最小值 $(2+8\sqrt{2})$ 万元.

类型 II：建立拟合三角函数模型

【例 3】某地为发展旅游业，在旅游手册中给出了当地一年每个月的月平均气温表，根据图中提供的数据，试用 $y=A\sin(\omega t+\varphi)+b$ 近似地拟合出月平均气温 y（单位：$^\circ$C）与时间 t（单位：月）的函数关系，并求出其周期和振幅，以及气温达到最大值和最小值的时间.（答案不唯一）



解：不妨将 $t=1$ 看作最低点，此时 y 取得最小值 15，当 $t=8$ 时，y 取得最大值 27，

所以 $\begin{cases}-A+b=15\\A+b=27\end{cases}$，故 $\begin{cases}A=6\\b=21\end{cases}$，且 $8-1=\frac{T}{2}$，所以 $T=14$，从而 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{7}$，故 $y=6\sin\left(\frac{\pi}{7}t+\varphi\right)+21$，

将 $(1,15)$ 代入解析式可得 $15=6\sin\left(\frac{\pi}{7}+\varphi\right)+21$，所以 $\sin\left(\frac{\pi}{7}+\varphi\right)=-1$，从而 $\frac{\pi}{7}+\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，

故 $\varphi=2k\pi-\frac{9\pi}{14}$，所以 $y=6\sin\left(\frac{\pi}{7}t+2k\pi-\frac{9\pi}{14}\right)+21=6\sin\left(\frac{\pi}{7}t-\frac{9\pi}{14}\right)+21$，$1\le t\le 12$ 且 $t\in\mathbf{N}^*$，

该函数的周期为 14，振幅为 6，气温达到最大值的时间是 8 月，达到最小值的时间是 1 月.

【反思】建立拟合三角函数模型时，应选择一些有代表性的点来求解模型中的参数.

强化训练

A 组 夯实基础

1．（2024·北京海淀模拟）

某城市一年中 12 个月的平均气温与月份的关系可近似地用三角函数 $y=A\cos\left[\frac{\pi}{6}(x-6)\right]+B(x=1,2,$ $\cdots,12)$ 来表示．已知 6 月份的平均气温最高为 $30^\circ\mathrm{C}$，12 月份的月平均气温最低为 $20^\circ\mathrm{C}$，此函数的最小正周期为_____，10 月份的平均气温为_____$^\circ\mathrm{C}$.

2．（2024·重庆模拟）（多选）

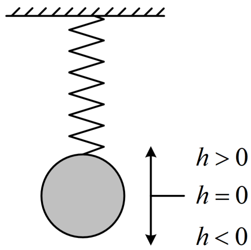
如图，弹簧挂着的小球做上下运动，它在 ts 时相对于平衡位置的高度 h（单位：cm）由关系式 $h=A\sin(\omega t+\varphi)$，$t\in[0,+\infty)$ 确定，其中 $A>0$，$\omega>0$，$\varphi\in(0,\pi]$．小球从最高点出发，经过 1.8s 后，第一次回到最高点，则（　　）

A．$\varphi=\frac{\pi}{4}$

B．$\omega=\frac{10\pi}{9}$

C．$t=9\text{s}$ 与 $t=2.1\text{s}$ 时相对于平衡位置的高度 h 之比为 $\frac{3}{2}$

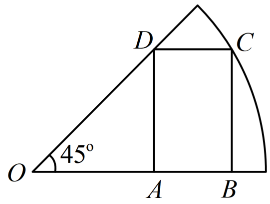
D．$t=9\text{s}$ 与 $t=2.1\text{s}$ 时相对于平衡位置的高度 h 之比为 2



B 组 强化能力

3.（2024•北京海淀期中）

如图所示，海尔学校要在操场上一个扇形区域内开辟一个矩形花园 $ABCD$，现已知扇形圆心角为 45°，扇形半径为 10m，则该矩形花园的面积的最大值为______m².

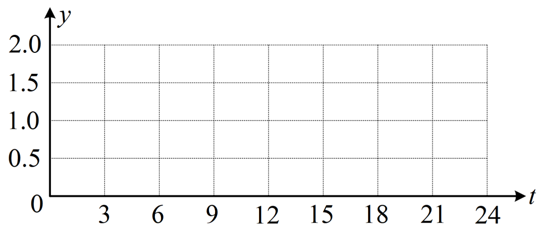


4.（2024•湖北武汉模拟）

海水受日月的引力，在一定的时候发生涨落的现象叫做潮汐，一般早潮叫潮，晚潮叫汐，潮汐具有周期现象.某海滨浴场内水位 y（单位：m）是时间 $t(0 \le t \le 24$，单位：h) 的函数，记作 $y=f(t)$，下面是某天水深的数据：

t	0	3	6	9	12	15	18	21	24
y	2	1.5	1	1.5	2	1.5	1	1.5	2

经长期观察，$y=f(t)$ 的曲线可近似满足函数 $y=$
$A\sin(\omega t+\varphi)+b(A>0,\omega>0)$.



（1）根据表中数据，作出函数简图，并求出函数 $y=f(t)$ 的一个近似表达式；

（2）一般情况下，水深超过 1.25 米该海滨浴场方可开放，另外，当水深不低于 1.75 米时，由于安全原因，会被关闭，那么该海滨浴场在一天内的上午 7:00 到晚上 19:00，有多长时间可以开放？

C组 拓展提升

5.（2024·江西模拟）

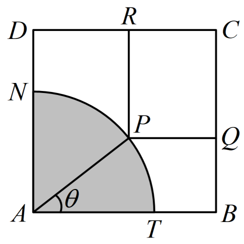
4 月 11 日至 13 日，我校组织高一高二全体师生一千六百余人前往九江、景德镇、上饶、抚州等地开展为期三天的研学实践活动，汤显祖文化馆是此次研学的路线点之一，该文化馆每年都会接待大批游客，在该文化馆区的一家专门为游客提供住宿的客栈中，工作人员发现为游客准备的食物有些月份剩余较多，浪费很严重．为了控制经营成本，减少浪费，计划适时调整投入．为此他们统计每个月入住的游客人数，发现每年各个月份来客栈入住的游客人数呈周期性变化，并且有以下规律：①每年相同的月份，入住客栈的游客人数基本相同；②入住客栈的游客人数在 2 月份最少，在 8 月份最多，相差约 400；③2 月份入住客栈的游客约为 100 人，随后逐月递增，在 8 月份达到最多．

（1）试用一个正弦型三角函数描述一年中入住客栈的游客人数与月份之间的关系；

（2）请问客栈在哪几个月份要准备不低于 400 份的食物？

6.（2024·上海嘉定期中）

如图，有一块边长为 3m 的正方形铁皮 $ABCD$，其中阴影部分 ATN 是一个半径为 2m 的扇形，设这个扇形已经腐蚀不能使用，但其余部分均完好，工人师傅想在未被腐蚀的部分截下一块其中两边落在 BC 与 CD 上的矩形铁皮 $PQCR$，使点 P 在弧 TN 上，设 $\angle TAP=\theta$，矩形 $PQCR$ 的面积为 $S\text{m}^2$．



（1）求 S 关于 θ 的函数表达式；

（2）求 S 的最大值及 S 最大时 θ 的值．