强化训练

A 组 夯实基础

1．（2024·河南商丘期末）

“$x<0$”是“$\sqrt{x^2}=-x$”的（　　）

A．充分不必要条件

B．必要不充分条件

C．充要条件

D．既不充分也不必要条件

1．A

解析：若 $x<0$，则 $\sqrt{x^2}=|x|=-x$，充分性成立；

若 $\sqrt{x^2}=-x$，则 $|x|=-x$，所以 $x\le 0$，不一定有 $x<0$，

必要性不成立，故选 A.

2．（2024·山西大同模拟）

若集合 $A=\{1,m^2\}$，$B=\{3,9\}$，则“$m=3$”是“$A\cap B=\{9\}$”的（　　）

A．充分不必要条件

B．必要不充分条件

C．充要条件

D．既不充分也不必要条件

2．A

解析：若 $m=3$，则 $A=\{1,9\}$，

所以 $A\cap B=\{9\}$，充分性成立；

若 $A\cap B=\{9\}$，则 $9\in A$，所以 $m^2=9$，解得：$m=\pm 3$，

经检验，均满足 $A\cap B=\{9\}$，所以 m 不一定等于 3，

必要性不成立；故选 A.

3．（2024·内蒙古鄂尔多斯模拟）

对于实数 x，“$x\ne 1$”是“$|x-2|\ne 1$”的（　　）

A．充分不必要条件

B．必要不充分条件

C．充分必要条件

D．既不充分也不必要条件

3．B

解析：不等式 $|x-2|\ne 1$ 容易求解，故先求解再判断选项，

$|x-2|\ne 1\Leftrightarrow x-2\ne\pm 1\Leftrightarrow x\ne 1$ 且 $x\ne 3$，

当 $x\ne 1$ 时，不一定有 $x\ne 1$ 且 $x\ne 3$，充分性不成立；

而当 $x\ne 1$ 且 $x\ne 3$ 时，必有 $x\ne 1$，必要性成立，故选 B.

4.（2024 • 浙江杭州期末）

“$x<2$”是“$|x|<2$”的（　　）

A．必要不充分条件

B．充分不必要条件

C．充要条件

D．既不充分也不必要条件

4．A

解析：$|x|<2 \Leftrightarrow -2<x<2$，记 $A=\{x\,|\,x<2\}$，

$B=\{x\,|\,-2<x<2\}$，则 $B \subsetneqq A$，

所以“$-2<x<2$”是“$x<2$”的充分不必要条件，

故“$x<2$”是“$-2<x<2$”的必要不充分条件，

即“$x<2$”是“$|x|<2$”的必要不充分条件.

5.（2024 • 河南周口开学考试）

若“$x>a$”是“$x>1$”的必要不充分条件，则实数 a 的取值范围为（　　）

A．$\{a\,|\,a<1\}$　　B．$\{a\,|\,a\le 1\}$

C．$\{a\,|\,a>1\}$　　D．$\{a\,|\,a\ge 1\}$

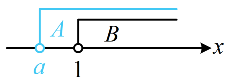
5．A

解析：记 $A=\{x\,|\,x>a\}$，$B=\{x\,|\,x>1\}$，

因为“$x>a$”是“$x>1$”的必要不充分条件，

所以“$x>1$”是“$x>a$”的充分不必要条件，

故 $B \subsetneqq A$，如图，应有 $a<1$.



B 组　强化能力

6.（2024 • 辽宁期末）

“$a>\frac{1}{2}$”是“$\frac{1}{a}<2$”的（　　）

A．充分不必要条件

B．必要不充分条件

C．充要条件

D．既不充分也不必要条件

6．A

解析：当 $a>\frac{1}{2}$ 时，$0<\frac{1}{a}<2$，所以充分性成立；

当 $\frac{1}{a}<2$ 时，$a>\frac{1}{2}$ 不一定成立，例如当 $a<0$ 时，

也满足 $\frac{1}{a}<2$，但此时不满足 $a>\frac{1}{2}$，所以必要性不成立；

故“$a>\frac{1}{2}$”是“$\frac{1}{a}<2$”的充分不必要条件.

7.（2024 • 浙江期末）

若$a,b\in\mathbf{R}$，则“$ab>2$”是“$a>\sqrt{2}$且$b>\sqrt{2}$”

的（　　）

A．充分不必要条件

B．必要不充分条件

C．充分必要条件

D．既不充分也不必要条件

7．B

解析：当$ab>2$时，直观想象可发现无需a，b都大于$\sqrt{2}$，例如若a远大于$\sqrt{2}$，则b小于$\sqrt{2}$也行，举个例子，

取$a=10$，$b=1$，满足$ab>2$，但$b<\sqrt{2}$，充分性不成立，

当$a>\sqrt{2}$且$b>\sqrt{2}$时，$ab>\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$，

所以必要性成立，故选 B.

8.（2024 • 重庆模拟）

若$p:a+b\neq 4$，$q:a\neq 1$且$b\neq 3$，则p是q的（　　）

A．充分不必要条件

B．必要不充分条件

C．充要条件

D．既不充分也不必要条件

8．D

解析：若p成立，则$a+b\neq 4$，此时$a\neq 1$和$b\neq 3$不一定都成立，例如，当$a=1$，$b=4$时，满足$a+b\neq 4$，

但由于$a=1$，所以q不成立，故充分性不成立；

若q成立，则$a\neq 1$且$b\neq 3$，此时p也不一定成立，

例如，$a=b=2$，满足q，但$a+b=4$，不满足p，

所以必要性不成立；故选 D.

9.（2024 • 河南模拟）

已知U为全集，集合A，B为U的子集，则

“$A\subseteq\complement_U B$”的充要条件是（　　）

A．$B\subseteq\complement_U A$　　　B．$A\subseteq B$

C．$B\subseteq A$　　　D．$\complement_U A\subseteq B$

9．A

解析：$A\subseteq\complement_U B$ 意味着A在B的外面，由此可画出 Venn 图，分析哪个选项的 Venn 图与之吻合即可，

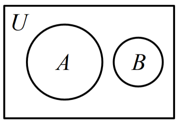
$A\subseteq\complement_U B$对应的 Venn 图如图，

A 项，$B\subseteq\complement_U A$意味着$B$在$A$的外面，其 Venn 图与下图一样，故 A 项正确；

B 项，$A\subseteq B$的 Venn 图与下图不符，故 B 项错误；

C 项，$B \subseteq A$ 的 Venn 图与下图不符，故 C 项错误；

D 项，由 $\complement_U A \subseteq B$ 可得 A 外面的部分全部在 B 中，与下图不符，故 D 项错误.



10.（2024 • 湖南岳阳模拟）

等式 $|a-2b|=|a|+|2b|$ 成立的充要条件是（　　）

A．$ab<0$　　　　B．$ab \geq 0$

C．$ab=0$　　　　D．$ab \leq 0$

10．D

解析：所给等式较复杂，可尝试先将其等价变形，再判断选项．观察发现有绝对值，故考虑平方去绝对值，

$|a-2b|=|a|+|2b| \Leftrightarrow |a-2b|^2=(|a|+|2b|)^2$

$\Leftrightarrow a^2-4ab+4b^2=a^2+4|ab|+4b^2 \Leftrightarrow |ab|=-ab$，

因为 $|ab|=-ab$ 成立的充要条件是 $ab \leq 0$，所以选 D.

11.（2024 • 湖南岳阳模拟）（多选）

已知 p 是 q 成立的必要条件，q 是 r 成立的充要条件，r 是 s 成立的充分条件，s 不是 q 成立的充分条件，则下列说法不正确的是（　　）

A．p 是 r 成立的充要条件

B．s 是 r 成立的必要不充分条件

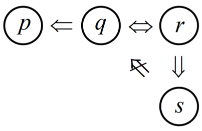
C．p 是 s 成立的充分不必要条件

D．q 是 s 成立的必要不充分条件

11．ACD

解析：题干的描述较为抽象，我们先把它画成逻辑图，再来判断选项，

由题意，$q \Rightarrow p$，$q \Leftrightarrow r$，$r \Rightarrow s$，$s \nRightarrow q$，所以 p，q，r，s 的逻辑图如图所示，



A 项，由图可知，$r \Rightarrow q \Rightarrow p$，所以 p 是 r 的必要条件，但 p 不一定能推出 q，也就不一定能推出 r，所以 p 不一定是 r 的充分条件，故 A 项错误；

B 项，由图可知，$r \Rightarrow s$，所以 s 是 r 的必要条件，

那 s 是否为 r 的充分条件呢？表面上题干没说，好像可能是，也可能不是．但需注意，题干的"s 不是 q 的充分条件"还没有用到，所以我们再结合它来分析，

假设 s 是 r 的充分条件，则 $s \Rightarrow r \Rightarrow q$，所以 s 是 q 的充分条件，与已知矛盾，从而 s 不是 r 的充分条件，

故 s 是 r 的必要不充分条件，故 B 项正确；

C 项，由图可知，p 不一定能推出 q，也就不一定能推出 s，所以 p 不一定是 s 的充分条件，故 C 项错误；

D 项，由图可知，$q \Rightarrow r \Rightarrow s$，所以 q 是 s 的充分条件，又由题意，$s \nRightarrow q$，所以 q 不是 s 的必要条件，从而 q 是 s 的充分不必要条件，故 D 项错误.

12．（2024 • 云南德宏期末）

已知集合 $A=\{x\mid m-3<x<m+3,m\in\mathbf{R}\}$，集合 $B=\{x\mid x<2$ 或 $x>6\}$.

（1）当 $m=2$ 时，求 $A\cap B$，$A\cup B$；

（2）设命题 $p:x\in A$，命题 $q:x\in B$，若 p 是 q 的充分不必要条件，求实数 m 的取值范围.

12．**解**：（1）当 $m=2$ 时，$A=\{x\mid -1<x<5\}$，

又 $B=\{x\mid x<2$ 或 $x>6\}$，所以如图 1，$A\cap B=\{x\mid -1<x<2\}$，$A\cup B=\{x\mid x<5$ 或 $x>6\}$.

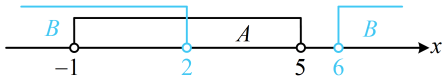


图1

（2）（p，q 分别代表集合 A，B，故可将 p 是 q 的充分不必要条件翻译成 $A\subsetneqq B$，由此求 m 的范围）

由 p 是 q 的充分不必要条件可得 $A\subsetneqq B$，

（尽管这里 A 的左右端点都含参，但观察发现 $m-3$ 始终比 $m+3$ 小，所以 A 不可能为 $\varnothing$，故无需讨论这种情况）

如图 2，$m+3\le 2$，或如图 3，$m-3\ge 6$，所以 $m\le -1$ 或 $m\ge 9$，故实数 m 的取值范围是 $\{m\mid m\le -1$ 或 $m\ge 9\}$.

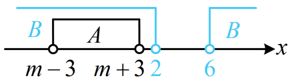


图2

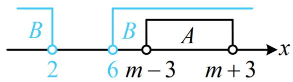


图3

13．（2024 • 辽宁葫芦岛期末）

设集合 $A=\{x\mid x^2-4x-12=0\}$，$B=\{x\mid ax-1=0\}$，$C=\{x\mid 1-m\le x\le 1+m\}$，且 $A\cup B=A$.

（1）求实数 a 的值组成的集合；

（2）若 $a=-\dfrac{1}{2}$，且“$x\in(A\cap B)$”是“$x\in C$”的充分不必要条件，求实数 m 的取值范围.

13．**解**：（1）由 $x^2-4x-12=0$ 可得 $(x+2)(x-6)=0$，

解得：$x=-2$ 或 6，所以 $A=\{-2,6\}$，

因为 $A\cup B=A$，所以 $B\subseteq A$，（看到 $B\subseteq A$，联想到 B 可能为空集，下面先考虑这种情况）

当 $a=0$ 时，方程 $ax-1=0$ 即为 $-1=0$，无解，

所以 $B=\varnothing$，满足 $B\subseteq A$；

当 $a\ne 0$ 时，由 $ax-1=0$ 可得 $ax=1$，

所以 $x=\dfrac{1}{a}$，故 $B=\left\{\dfrac{1}{a}\right\}$，

要使 $B\subseteq A$，应有 $\dfrac{1}{a}=-2$ 或 $\dfrac{1}{a}=6$，解得：$a=-\dfrac{1}{2}$ 或 $\dfrac{1}{6}$；

综上所述，实数 a 的值组成的集合为 $\left\{0,-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{6}\right\}$.

（2）若 $a=-\dfrac{1}{2}$，则 $B=\{-2\}$，$A\cap B=\{-2\}$，

（涉及集合间的充分不必要条件，可用包含关系处理）

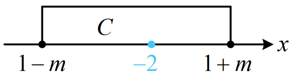
因为“$x\in(A\cap B)$”是“$x\in C$”的充分不必要条件，

所以 $(A\cap B)\subsetneqq C$，如图，首先应有 $1-m\le -2\le 1+m$，

解得：$m\ge 3$，（注意，还需检验此时 $A\cap B$ 和 C 是否相等，即 $1-m$ 和 $1+m$ 是否同时与 -2 重合）

令 $\begin{cases}1-m=-2\\1+m=-2\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}m=3\\m=-3\end{cases}$，无解，所以 $m\ge 3$ 满足题意，

故实数 m 的取值范围是 $\{m\mid m\ge 3\}$.



C 组 拓展提升

14.（2024 • 安徽亳州模拟）（多选）

若 $A=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2-ax+a^2-3=0\}$，$B=\{x\mid x<0\}$，则“ $A\cap B=\varnothing$ ”是真命题的一个充分不必要条件是（　　）

A． $a<-2$ 或 $a\ge\sqrt{3}$

B． $a<-2$

C． $a>\sqrt{3}$

D． $a<-2$ 或 $a>2$

14．BCD

解析：直接求充分不必要条件不好想，可考虑先求充要条件，得到 a 的范围，再取它的一个真子集，

$A\cap B=\varnothing\Leftrightarrow A$ 为空集或 A 的元素都非负 $\Leftrightarrow$ 方程 $x^2-ax+a^2-3=0$ 没有实数解或只有非负实数解，

当方程 $x^2-ax+a^2-3=0$ 没有实数解时，$\Delta=(-a)^2-4(a^2-3)=12-3a^2<0$，解得：$a<-2$ 或 $a>2$；

当方程 $x^2-ax+a^2-3=0$ 只有非负实数解时，此时可由判别式结合韦达定理来翻译，

$\begin{cases}\Delta=12-3a^2\ge 0\\x_1+x_2=a\ge 0\\x_1x_2=a^2-3\ge 0\end{cases}$，解得：$\sqrt{3}\le a\le 2$；

综上所述，$A\cap B=\varnothing$ 的充要条件是 $a<-2$ 或 $a\ge\sqrt{3}$，这恰好是 A 项的结果，所以 A 项是 $A\cap B=\varnothing$ 的充要条件，

选项 B、C、D 对应的集合都是集合 $\{a\mid a<-2$ 或 $a\ge\sqrt{3}\}$ 的真子集，所以它们都是 $A\cap B=\varnothing$ 的充分不必要条件.

15.（2023 • 安徽阜阳期中）

已知 $a,b,c\in\mathbf{R}$，且 $a+b+c=0$，证明：“ $a=b=c=0$ ”是“ $ab+bc+ac=0$ ”的充要条件.

15．**证法 1**：（先证充分性，应以 $a=b=c=0$ 为条件，证明 $ab+bc+ac=0$ ）

若 $a=b=c=0$，则 $ab+bc+ac=0$，所以充分性成立；

（再证必要性，应以 $ab+bc+ac=0$ 为条件，证明 $a=b=c=0$ ）

若 $ab+bc+ac=0$，则 $ab+(a+b)c=0$ ①，

由题意，$a+b+c=0$，所以 $a+b=-c$，

代入①得 $ab-c^2=0$，所以 $ab=c^2$，

同理，$bc=a^2$，$ac=b^2$，

代入 $ab+bc+ac=0$ 可得 $c^2+a^2+b^2=0$，

所以 $a=b=c=0$，故必要性成立；

所以“ $a=b=c=0$ ”是“ $ab+bc+ac=0$ ”的充要条件.

证法 2：（充分性的证明同证法 1，对于必要性，注意到将 $a+b+c=0$ 平方，能与 $ab+bc+ac$ 建立联系，故先平方）

若 $ab+bc+ac=0$，则 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+$

$2(ab+bc+ac)=a^2+b^2+c^2$ ②，

由题意，$a+b+c=0$，代入②得 $a^2+b^2+c^2=0$，

所以 $a=b=c=0$，故必要性成立.

16．（2024·湖南怀化模拟（改））

已知 $A=\{x\mid x<1$ 或 $x>2\}$，集合 $B=\{x\mid ax-2<0\}$.

（1）若 $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=\varnothing$，求实数 a 的取值范围；

（2）设 $p:x\in A$，$q:x\in\complement_{\mathbf{R}}B$，若 p 是 q 的必要不充分条件，求实数 a 的取值范围.

16．**解**：（1）由题意，$\complement_{\mathbf{R}}A=\{x\mid 1\le x\le 2\}$，

（要求集合 B，需要解不等式 $ax-2<0$，可能会涉及到不等号两端同除以 a，故讨论 a 与 0 的大小）

当 $a=0$ 时，$ax-2<0$ 即为 $-2<0$，恒成立，故 $B=\mathbf{R}$，

此时 $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=\{x\mid 1\le x\le 2\}\ne\varnothing$，不合题意；

当 $a>0$ 时，由 $ax-2<0$ 可得 $ax<2$，所以 $x<\dfrac{2}{a}$，

故 $B=\left\{x\middle|x<\dfrac{2}{a}\right\}$，如图 1，要使 $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=\varnothing$，

应有 $\dfrac{2}{a}\le 1$，两端乘以 a 得 $2\le a$，所以 $a\ge 2$；

当 $a<0$ 时，由 $ax-2<0$ 可得 $ax<2$，所以 $x>\dfrac{2}{a}$，

故 $B=\left\{x\middle|x>\dfrac{2}{a}\right\}$，因为此时 $\dfrac{2}{a}<0$，所以如图 2，

$(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=\{x\mid 1\le x\le 2\}\ne\varnothing$，不合题意；

综上所述，实数 a 的取值范围是 $\{a\mid a\ge 2\}$.

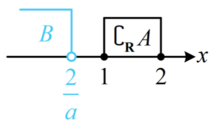


图1

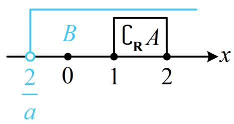


图2

（2）（根据必要不充分条件求参，可先转化为充分不必要条件，再用集合包含关系处理）

因为 p 是 q 的必要不充分条件，所以 q 是 p 的充分不必要条件，故 $(\complement_{\mathbf{R}}B)\subsetneqq A$，（第（1）问已经通过讨论 a 与 0 的大小求得了集合 B，故第（2）问可沿用这一结果）

当 $a=0$ 时，由（1）可知 $B=\mathbf{R}$，

所以 $\complement_{\mathbf{R}}B=\varnothing$，此时满足 $(\complement_{\mathbf{R}}B)\subsetneqq A$；

当 $a>0$ 时，由（1）可知 $B=\left\{x\middle|x<\dfrac{2}{a}\right\}$，

故 $\complement_{\mathbf{R}}B=\left\{x\middle|x\ge\dfrac{2}{a}\right\}$，如图 3，要使 $(\complement_{\mathbf{R}}B)\subsetneqq A$，应有 $\dfrac{2}{a}>2$，

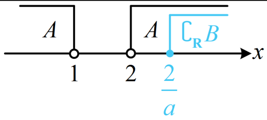
两端乘以 a 得 $2>2a$，所以 $a<1$，结合 $a>0$ 得 $0<a<1$；

当 $a<0$ 时，由（1）可知 $B=\left\{x\middle|x>\dfrac{2}{a}\right\}$，

故 $\complement_{\mathbf{R}}B=\left\{x\middle|x\le\dfrac{2}{a}\right\}$，如图 4，要使 $(\complement_{\mathbf{R}}B)\subsetneqq A$，应有 $\dfrac{2}{a}<1$，

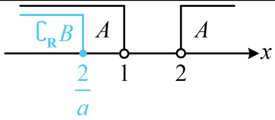
因为 $a<0$，所以 $\dfrac{2}{a}<1$ 恒成立，故 $a<0$ 满足题意；

综上所述，实数 a 的取值范围是 $\{a\mid a<1\}$.



A
1
2
A
$\complement_{\mathbf{R}}B$
$\frac{2}{a}$
x

图3



$\complement_{\mathbf{R}}B$
A
$\frac{2}{a}$
1
2
A
x

图4