强化训练

A 组 夯实基础

1.（2024·新疆模拟）

下列函数中是幂函数的是（　　）

A．$y=3x$　　B．$y=x^2+2$

C．$y=(x+1)^2$　　D．$y=\sqrt{x}$

1．D

解析：A 项，在 $y=x^\alpha$ 中，当 $\alpha=1$ 时，$y=x$ 是幂函数，但 $y=3x$ 不是幂函数，故 A 项错误；

B 项，$y=x^2$ 是幂函数，$y=x^2+2$ 不是幂函数，故 B 项错误；

C 项，$y=(x+1)^2$ 是由幂函数 $y=u^2$ 和一次函数 $u=x+1$ 复合而成的函数，不是幂函数，故 C 项错误；

D 项，在 $y=x^\alpha$ 中，当 $\alpha=\frac{1}{2}$ 时，$y=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$，

所以 $y=\sqrt{x}$ 是幂函数，故 D 项正确.

2.（2024·全国模拟）

已知 $\alpha\in\{-1,1,2,3\}$，则使函数 $y=x^\alpha$ 的值域为 **R**，且为奇函数的所有 α 的值为______.

2．1，3

解析：当 $\alpha=-1$ 时，$y=x^{-1}=\frac{1}{x}$，值域为 $\{y\,|\,y\neq 0\}$，不合题意；

当 $\alpha=1$ 时，$y=x$ 值域为 **R**，且为奇函数，满足题意；

当 $\alpha=2$ 时，$y=x^2$ 值域为 $[0,+\infty)$，且为偶函数，不合题意；

当 $\alpha=3$ 时，$y=x^3$ 值域为 **R**，且为奇函数，满足题意；

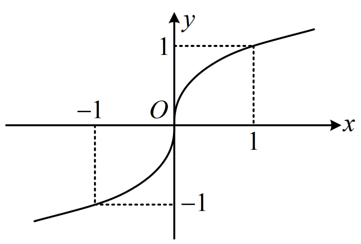
综上所述，满足题意的 α 的所有值为 1，3.

3.（2024·四川南充二模）

已知函数 $f(x)$ 的图象如图所示，则 $f(x)$ 的解析式可能是（　　）

A．$y=x^{\frac{1}{2}}$　　B．$y=x^{-\frac{1}{2}}$

C．$y=x^3$　　D．$y=x^{\frac{1}{3}}$



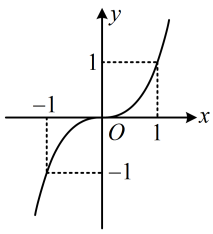
3．D

解析：A 项，$y=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$，其定义域为 $[0,+\infty)$，所以该函数在 y 轴左侧没有图象，与所给图象不符，故 A 项错误；

B 项，$y=x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$，其定义域为 $(0,+\infty)$，所以该函数在 y 轴左侧没有图象，与所给图象不符，故 B 项错误；

C 项，$y=x^3$ 的大致图象如图，它在第一象限增长趋于陡峭、第三象限增长趋于平缓，都与所给图象相反，故 C 项错误，故选

D.



4.（2024 • 重庆期末（改））

已知幂函数 $y=f(x)$ 的图象过 $\left(2,\dfrac{1}{2}\right)$，则下列结论正确的是（　　）

A． $y=f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$

B． $y=f(x)$ 在其定义域内为减函数

C． $y=f(x)$ 是偶函数

D． $y=f(x)$ 是奇函数

4．D

解析：由题意，可设 $f(x)=x^{\alpha}$，则 $f(2)=2^{\alpha}=\dfrac{1}{2}$，

所以 $\alpha=-1$，故 $f(x)=x^{-1}=\dfrac{1}{x}$，

A 项， $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，故 A 项错误；

B 项， $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$， $(0,+\infty)$ 上分别↘，在整个定义域上不单调，故 B 项错误；

C 项， $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 是奇函数，所以 C 项错误，D 项正确.

B 组 强化能力

5.（2024 • 天津模拟）

若 $a=0.99^{0.5}$， $b=1.01^{0.5}$， $c=1$，则 a，b，c 的大小关系为（　　）

A． $b>c>a$　　　B． $c>b>a$

C． $c>a>b$　　　D． $b>a>c$

5．A

解析：显然 $a<1$， $b>1$，故选 A，我们也可以通过构造幂函数来严格证明，观察发现 a 和 b 的次数都是 0.5，c 也可看成 $1^{0.5}$，故可构造函数 $f(x)=x^{0.5}$，用单调性比较 a，b，c 的大小，

设 $f(x)=x^{0.5}$，则 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上↗，

由题意， $a=f(0.99)$， $b=f(1.01)$， $c=f(1)$，

所以 $b>c>a$.

6.（2024 • 山西吕梁模拟）

若幂函数 $f(x)$ 的图象过点 $\left(8,\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$，则 $f(x-2x^2)$ 的定义域为（　　）

A． $(0,2)$　　　B． $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$　　　C． $(0,2]$　　　D． $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$

6．B

解析：由题意，可设 $f(x)=x^{\alpha}$，则 $f(8)=8^{\alpha}=\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$

$=\frac{1}{\sqrt{8}}=8^{-\frac{1}{2}}$，所以 $\alpha=-\frac{1}{2}$，故 $f(x)=x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$，

所以 $f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，

故在 $f(x-2x^2)$ 中，$x-2x^2>0$，解得：$0<x<\frac{1}{2}$，

所以 $f(x-2x^2)$ 的定义域是 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

7．（2024·广西百色开学考试）

若幂函数 $f(x)=mx^{m-\frac{1}{2}}$ 满足条件 $f(3-a)>f(a)$，则实数 a 的取值范围是_____.

7．$\left[0,\frac{3}{2}\right)$

解析：因为 $f(x)$ 为幂函数，所以 $m=1$，故 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$，

所以 $f(x)$ 的定义域是 $[0,+\infty)$，且在定义域上↗，

故 $f(3-a)>f(a)\Leftrightarrow\begin{cases}3-a\geq 0\\ a\geq 0\\ 3-a>a\end{cases}$，解得：$0\leq a<\frac{3}{2}$.

8．（2024·江苏南京期末）

已知幂函数 $f(x)$ 的图象过点 $\left(2,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，则函数 $y=$

$f(x^2+2x)$ 的单调递增区间为（　　）

A．$(-\infty,-2)$　　　B．$(-\infty,-1)$

C．$(0,+\infty)$　　　D．$(1,+\infty)$

8．A

解析：由题意，可设 $f(x)=x^{\alpha}$，则 $f(2)=2^{\alpha}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}=2^{-\frac{1}{2}}$，所以 $\alpha=-\frac{1}{2}$，故 $f(x)=x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$，$x>0$，

在 $y=f(x^2+2x)$ 中，$x^2+2x>0$，解得：$x<-2$ 或 $x>0$，

$y=f(x^2+2x)$ 可看成由 $y=f(u)$ 和 $u=x^2+2x$ 复合而成，故用同增异减准则分析单调性，

当 $x\in(-\infty,-2)$ 时，$u=x^2+2x$ ↘，$y=f(u)$ 也↘，

内外层单调性相同，所以 $y=f(x^2+2x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 上↗，

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$u=x^2+2x$ ↗，$y=f(u)$ ↘，

内外层单调性不同，所以 $y=f(x^2+2x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上↘，

所以 $y=f(x^2+2x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty,-2)$.

9.（2024•海南模拟）

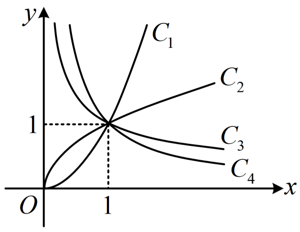
幂函数 $y=x^2$， $y=x^{-1}$， $y=x^{\frac{1}{3}}$， $y=x^{-\frac{1}{2}}$ 在第一象限内的图象依次是如图中的曲线（　　）

A． C_1， C_2， C_3， C_4

B． C_1， C_4， C_3， C_2

C． C_3， C_2， C_1， C_4

D． C_1， C_4， C_2， C_3



9．D

解析：由图可知， C_1， C_2 在第一象限↗，它们对应 $y=x^{\alpha}$ 中 $\alpha>0$ 的情形，且 C_1 的增长趋于陡峭，对应 $\alpha>1$，

C_2 的增长趋于平缓，对应 $0<\alpha<1$ 的情形，所以 $C_1: y=x^2$， $C_2: y=x^{\frac{1}{3}}$，

怎样区分 C_3， C_4？不妨取 $x=2$，看看谁的函数值更大，

设 $f(x)=x^{-1}$， $g(x)=x^{-\frac{1}{2}}$，则 $f(2)=2^{-1}=\frac{1}{2}$，

$g(2)=2^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $f(2)<g(2)$，这就说明在 $x=2$ 处，上方的是 $g(x)$，下面的是 $f(x)$，

结合图象可知 $C_3: y=x^{-\frac{1}{2}}$， $C_4: y=x^{-1}$，故选 D.

10.（2024•辽宁模拟）

已知幂函数 $f(x)=(m^2-2m-2)x^{5-m^2}$ 的图象与坐标轴无交点.

（1）求 $f(x)$ 的解析式；

（2）解不等式： $f(x+1)>f(x-2)$.

10．**解**：（1）因为 $f(x)$ 是幂函数，所以 $m^2-2m-2=1$，

故 $m^2-2m-3=(m+1)(m-3)=0$，解得： $m=-1$ 或 3，

当 $m=-1$ 时， $f(x)=x^4$，其图象过原点，与坐标轴有交点，不合题意；

当 $m=3$ 时， $f(x)=x^{-4}$，其定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，

图象与坐标轴没有交点，满足题意；所以 $f(x)=x^{-4}$.

（2）由（1）可知 $f(x)=x^{-4}$，所以 $f(x)$ 为偶函数，

且 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上↘，故 $f(x+1)>f(x-2)\Leftrightarrow f(|x+1|)$

$>f(|x-2|)\Leftrightarrow\begin{cases}|x+1|<|x-2|\\|x+1|\neq 0\\|x-2|\neq 0\end{cases}$，

由 $|x+1|<|x-2|$ 得 $x^2+2x+1<x^2-4x+4$，解得： $x<\frac{1}{2}$，

由 $|x+1|\neq 0$ 可得 $x\neq -1$，由 $|x-2|\neq 0$ 得 $x\neq 2$，

所以不等式 $f(x+1)>f(x-2)$ 的解集为 $(-\infty,-1)\cup\left(-1,\frac{1}{2}\right)$.

C组 拓展提升

11．（2024 • 山东烟台模拟）

写出一个同时具有下列性质①②③的函数 $f(x)$：______.

① $f(x_1x_2)=f(x_1)f(x_2)$；

②当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)$ 为增函数；

③ $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的偶函数.

11． $f(x)=x^2$（答案不唯一）

解析：我们知道，$(x_1x_2)^\alpha=x_1^\alpha x_2^\alpha$，所以幂函数 $y=x^\alpha$ 满足性质①，故在此基础上继续考虑性质②③，

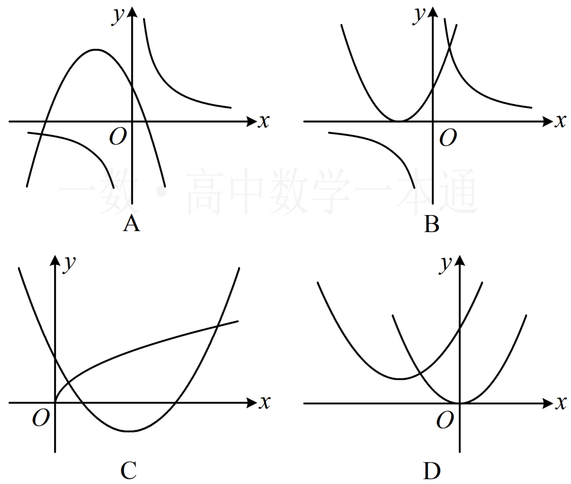
设 $f(x)=x^\alpha$，要使 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上↗，应有 $\alpha>0$；

要使 $f(x)$ 为偶函数，可取 α 为偶数，

所以满足要求的 $f(x)$ 可以为 $f(x)=x^2$.

12．（2024 • 重庆北碚期末）（多选）

函数 $f(x)=ax^2-2x+1$ 与 $g(x)=x^a$ 在同一直角坐标系中的图象不可能为（　　）



12．BD

解析：$g(x)$ 是幂函数，容易根据其图象分析 a 要满足的条件，故先判断哪条是 $g(x)$，并得到 a 的信息，再看 $f(x)$ 的图象与这些信息是否吻合，

A 项，图中第一、三象限那两支是幂函数 $g(x)$ 的图象，该图象在第一象限↘，所以 $a<0$，

故二次函数 $f(x)$ 开口向下，对称轴 $x=\frac{1}{a}<0$ 在 y 轴左侧，$\Delta=4-4a>0$，图象与 x 轴有 2 个交点，$f(0)=1>0$，

这些都与图象吻合，所以 A 项的图象是有可能出现的；

B 项，$g(x)$ 的情况与 A 项相同，所以 $a<0$，而 $f(x)$ 却开口向上，矛盾，所以不可能出现 B 项的图象；

C 项，过原点的那条曲线是 $g(x)$ 的图象，该图形在第一象限呈增长趋于平缓的趋势，所以 $0<a<1$，

故二次函数 $f(x)$ 开口向上，对称轴 $x=\frac{1}{a}>1$，

$\Delta=4-4a>0$，图象与 x 轴有 2 个交点，$f(0)=1>0$，

这些都与图象吻合，所以 C 项的图象是有可能出现的；

D 项，过原点的那条曲线是 $g(x)$ 的图象，该图象在第一象限呈增长趋于陡峭的趋势，所以 $a>1$，

故二次函数 $f(x)$ 开口向上，对称轴 $x=\frac{1}{a}>0$，与所给图象不符，所以不可能出现 D 项的图象.

13.（2024·河北石家庄开学考试）

已知幂函数 $f(x)=(m^2-4m+4)\cdot x^{2m-4}$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减．

（1）求函数 $f(x)$ 的解析式；

（2）若 $f(1-2x)<f(x+2)$，求 x 的取值范围；

（3）若对 $\forall x\in[1,2]$，都 $\exists a\in[1,2]$，使得 $f(x)\le at^2-t+a+1$ 成立，求实数 t 的取值范围．

13．**解**：（1）因为 $f(x)$ 为幂函数，所以 $m^2-4m+4=1$，

故 $m^2-4m+3=(m-1)(m-3)=0$，解得：$m=1$ 或 3，

当 $m=1$ 时，$f(x)=x^{-2}$，

此时 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，不合题意；

当 $m=3$ 时，$f(x)=x^2$，

满足 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，所以 $f(x)=x^2$．

（2）**解法 1**：由（1）可得 $f(x)=x^2$，所以 $f(x)$ 为偶函数，

且 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

（函数 $f(x)$ 在定义域上不单调，不能直接用单调性求解目标不等式，但注意到 $f(x)$ 为偶函数，故可将括号内加绝对值，化到 $[0,+\infty)$ 这个单调区间上来）

所以 $f(1-2x)<f(x+2)\Leftrightarrow f(|1-2x|)<f(|x+2|)$

$\Leftrightarrow|1-2x|<|x+2|$，两端平方得：$1-4x+4x^2<x^2+4x+4$，

化简得：$3x^2-8x-3<0$，解得：$-\dfrac{1}{3}<x<3$，

所以 x 的取值范围是 $\left(-\dfrac{1}{3},3\right)$．

解法 2：（本题由于 $f(x)$ 的解析式非常简单，故也可直接代解析式求解目标不等式）

由（1）可得 $f(x)=x^2$，所以 $f(1-2x)<f(x+2)$ 即为

$(1-2x)^2<(x+2)^2$，也即 $1-4x+4x^2<x^2+4x+4$，

化简得：$3x^2-8x-3<0$，解得：$-\dfrac{1}{3}<x<3$，

所以 x 的取值范围是 $\left(-\dfrac{1}{3},3\right)$．

（3）（涉及双量词不等式，且变量 x 和 a 已经位于不等号两侧，可分别考虑．由于左边 $f(x)$ 不含参，故先考虑 x）

由题意，对 $\forall x\in[1,2]$，$f(x)\le at^2-t+a+1$，

所以 $f(x)_{\max}\le at^2-t+a+1$ ①，

因为 $f(x)=x^2$ 在 $[1,2]$ 上单调递增，所以 $f(x)_{\max}=f(2)=4$，

代入①得 $4\le at^2-t+a+1$，即 $at^2-t+a-3\ge0$ ②，

（再考虑变量 a，观察发现 a 都是一次的，故可将含 a 的项拿到一起，提公因式 a，化为关于 a 的一次函数来分析）

不等式②等价于 $(t^2+1)a-t-3\ge0$，

记 $h(a)=(t^2+1)a-t-3(1\le a\le2)$，

则 $\exists a\in[1,2]$，使 $h(a)\ge0$，所以 $h(a)_{\max}\ge0$ ③，

因为 $t^2+1>0$，所以 $h(a)$ 在 $[1,2]$ 上单调递增，

故 $h(a)_{\max}=h(2)=(t^2+1)\cdot2-t-3=2t^2-t-1$，

代入③得 $2t^2-t-1\ge0$，解得：$t\le-\dfrac{1}{2}$ 或 $t\ge1$，

所以实数 t 的取值范围是 $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty)$．