强化训练

A组 夯实基础

1.（2024·全国模拟）

$5^{2-\log_5 10}=$______.

1. $\frac{5}{2}$

解析：$5^{2-\log_5 10}=5^2\times 5^{-\log_5 10}=25\times\frac{1}{5^{\log_5 10}}=25\times\frac{1}{10}=\frac{5}{2}$.

2.（2024·福建厦门期末）

已知 $\log_x 8=2$，则 $x=$（　　）

A．2　　　　B．$2\sqrt{2}$

C．3　　　　D．4

2. B

解析：因为 $\log_x 8=2$，所以 $x^2=8$，解得：$x=\pm 2\sqrt{2}$，

又因为 x 为底数，所以 $x>0$ 且 $x\neq 1$，故 $x=2\sqrt{2}$.

3.（2024·广东深圳期末）

已知 $a=\log_2 3$，$2^b=5$，则 $2^{a-2b}=$______.

3. $\frac{3}{25}$

解析：因为 $a=\log_2 3$，所以 $2^a=3$，

又 $2^b=5$，所以 $2^{a-2b}=\frac{2^a}{2^{2b}}=\frac{2^a}{(2^b)^2}=\frac{3}{5^2}=\frac{3}{25}$.

4.（2024·全国模拟）

已知 $\log_5(\log_3(\log_2 a))=0$，则 $a^{1+\log_a 36}=$______.

4. 288

解析：所给等式涉及三层对数，从最内层考虑显然不易，我们先从最外层考虑，将最外层对数式转化为指数式，

因为 $\log_5(\log_3(\log_2 a))=0$，所以 $\log_3(\log_2 a)=5^0=1$，

从而 $\log_2 a=3^1=3$，故 $a=2^3=8$，

所以 $a^{1+\log_a 36}=a^1\cdot a^{\log_a 36}=8\times 36=288$.

5.（2024·广东模拟）

已知正数 a，b 满足 $\log_3 a=\log_4 b=\log_{12} 5$，则 $ab=$

______.

5. 5

解析：由题意，$\log_3 a=\log_{12} 5$，化为指数式得 $a=3^{\log_{12} 5}$，

同理，由 $\log_4 b=\log_{12} 5$ 可得 $b=4^{\log_{12} 5}$，

所以 $ab=3^{\log_{12} 5}\times 4^{\log_{12} 5}=(3\times 4)^{\log_{12} 5}=12^{\log_{12} 5}=5$.

6.（2024·河南模拟）

已知 $\lg 2\approx 0.3010$， $\lg 3\approx 0.4771$，则 $\log_4 12$ 的值大约为（　　）

A． 1.79　　B． 1.81

C． 1.87　　D． 1.89

6． A

解析：已知的对数底数为 10，故考虑把所求式也化为以 10 为底的对数，再观察它与已知条件的关联，

$$\log_4 12=\frac{\lg 12}{\lg 4}=\frac{\lg(3\times 4)}{\lg 2^2}=\frac{\lg 3+\lg 4}{2\lg 2}=\frac{\lg 3+2\lg 2}{2\lg 2}$$

$$=\frac{\lg 3}{2\lg 2}+1\approx\frac{0.4771}{2\times 0.301}+1\approx 1.79.$$

B 组 强化能力

7.（2024·广西柳州期末）

科学研究发现，地震时释放出的能量 E（单位：焦耳）与地震里氏震级 M 之间的关系为 $\lg E=4.8+1.5M$，里氏 9.0 级地震释放的能量是 7.0 级地震所释放能量的_____倍.

7． 1000

解析：设 9 级、7 级地震释放的能量分别为 E_9， E_7，

由题意， $\lg E_9=4.8+1.5\times 9=18.3$，所以 $E_9=10^{18.3}$，

$\lg E_7=4.8+1.5\times 7=15.3$，所以 $E_7=10^{15.3}$，

从而 $\frac{E_9}{E_7}=\frac{10^{18.3}}{10^{15.3}}=10^{18.3-15.3}=10^3=1000$，故里氏 9.0 级地震释放的能量是 7.0 级地震所释放能量的 1000 倍.

8.（2024·湖北黄冈模拟）

已知 $2^x=24^y=3$，则 $\frac{3y-x}{xy}$ 的值为_____.

8． -1

解析：因为 $2^x=24^y=3$，所以 $x=\log_2 3$， $y=\log_{24}3$，

故 $\frac{3y-x}{xy}=\frac{3\log_{24}3-\log_2 3}{\log_{24}3\times\log_2 3}$，

底数不同，怎样计算？注意到所有对数的真数都是 3，所以可用 $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$ 化同底，

$$\text{所以}\ \frac{3y-x}{xy}=\frac{\frac{3}{\log_3 24}-\frac{1}{\log_3 2}}{\frac{1}{\log_3 24}\times\frac{1}{\log_3 2}}=3\log_3 2-\log_3 24$$

$$=\log_3 2^3-\log_3 24=\log_3\frac{2^3}{24}=\log_3\frac{1}{3}=\log_3 3^{-1}=-1.$$

9.（2024·陕西西安模拟）

设 a,b,c 都是正数，且 $4^a=6^b=9^c=t$，则（　　）

A． $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$　　B． $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a}$

C． $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{c}$　　D． $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$

9．D

解析：因为$4^a=6^b=9^c=t$，所以$a=\log_4 t$，$b=\log_6 t$，

$c=\log_9 t$，又因为a，b，c都是正数，所以$t>1$，

选项涉及的是$\frac{1}{a}$，$\frac{1}{b}$，$\frac{1}{c}$，由于a，b，c底数不同，但真数相同，所以恰好可用$\frac{1}{\log_m n}=\log_n m$来把它们化同底，

$\frac{1}{a}=\frac{1}{\log_4 t}=\log_t 4$，$\frac{1}{b}=\frac{1}{\log_6 t}=\log_t 6$，$\frac{1}{c}=\frac{1}{\log_9 t}=\log_t 9$，

A 项，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\log_t 4+\log_t 6=\log_t(4\times 6)=\log_t 24\neq\frac{1}{c}$，

故 A 项错误；

B 项，$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\log_t 6+\log_t 9=\log_t(6\times 9)=\log_t 54\neq\frac{1}{a}$，

故 B 项错误；

C 项，前面已得$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\log_t 24$，又$\frac{2}{c}=2\log_t 9=\log_t 9^2$

$=\log_t 81$，所以$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\neq\frac{2}{c}$，故 C 项错误；

D 项，$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\log_t 4+\log_t 9=\log_t(4\times 9)=\log_t 6^2$

$=2\log_t 6=\frac{2}{b}$，故 D 项正确.

10．（2024•云南楚雄一模）

垃圾分类是指按一定规定或标准将垃圾分类储存、投放和搬运，从而转变成公共资源的一系列活动，做好垃圾分类是每一位公民应尽的义务．已知某种垃圾的分解率v与时间t（月）近似满足关系$v=a\cdot b^t$（其中a，b为正常数），经过 5 个月，这种垃圾的分解率为 10%，经过 10 个月，这种垃圾的分解率为 20%，则这种垃圾完全分解大约需要经过（　　）个月（参考数据：$\lg 2\approx 0.3$）

A．20　　　　B．22

C．24　　　　D．26

10．B

解析：题干给出了 5 个月和 10 个月的垃圾分解率，可用它们列两个方程，求出a和b，

由题意，$\begin{cases}a\cdot b^5=0.1\\ a\cdot b^{10}=0.2\end{cases}$，所以$\frac{a\cdot b^{10}}{a\cdot b^5}=b^5=\frac{0.2}{0.1}=2$，

从而$b=2^{\frac{1}{5}}$，$a=\frac{0.1}{b^5}=\frac{0.1}{2}=\frac{1}{20}$，

故$v=a\cdot b^t=\frac{1}{20}\cdot\left(2^{\frac{1}{5}}\right)^t=\frac{1}{20}\times 2^{\frac{t}{5}}$，

令$v=1$得$\frac{1}{20}\times 2^{\frac{t}{5}}=1$，所以$2^{\frac{t}{5}}=20$，从而$\frac{t}{5}=\log_2 20$，

故$t=5\log_2 20=5(\log_2 2+\log_2 10)$

$=5\left(1+\frac{1}{\lg 2}\right)\approx 5\left(1+\frac{1}{0.3}\right)\approx 22$，

即这种垃圾完全分解大约需要经过 22 个月.

11．（2024•河北石家庄开学考试）

$\log_4 9\times\log_3 8-\lg 2\times\lg 50-\lg 25-(\lg 2)^2-e^{-3\ln 2}=$_____.

11. $\frac{7}{8}$

解析：观察发现 $\log_4 9\times\log_3 8$ 这部分底数不同，不方便计算，可尝试化同底，

$\log_4 9\times\log_3 8=\frac{\lg 9}{\lg 4}\times\frac{\lg 8}{\lg 3}=\frac{\lg 3^2}{\lg 2^2}\times\frac{\lg 2^3}{\lg 3}=\frac{2\lg 3}{2\lg 2}\times\frac{3\lg 2}{\lg 3}=3$，

再看 $-\lg 2\times\lg 50-\lg 25-(\lg 2)^2$ 这部分，底数相同，但同底的对数相乘不方便计算，考虑重组，观察发现第一、三项有公因式 $-\lg 2$ 可提，故先提出来，化简再看，

$-\lg 2\times\lg 50-\lg 25-(\lg 2)^2=-\lg 2\times(\lg 50+\lg 2)-\lg 25$

$=-\lg 2\times\lg(50\times 2)-\lg 25=-\lg 2\times\lg 100-\lg 25$

$=-2\lg 2-\lg 25=-2\lg 2-\lg 5^2=-2\lg 2-2\lg 5$

$=-2(\lg 2+\lg 5)=-2\lg(2\times 5)=-2\lg 10=-2$，

又 $e^{-3\ln 2}=e^{\ln 2^{-3}}=2^{-3}=\frac{1}{8}$，所以原式 $=3-2-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$.

12.（2024 • 山西朔州模拟）（多选）

已知 $2\log_3\frac{1}{a}+\log_3 b=0$，则下列等式一定正确的是（　　）

A. $b=a^2$　　　　B. $(2^a)^2=2^b$

C. $ae^{\ln a}=b$　　　　D. $\log_2 a=\log_8(ab)$

12. ACD

解析：A 项，观察发现所给等式对数同底，可直接合并，故先合并化简再看，

$2\log_3\frac{1}{a}+\log_3 b=\log_3\left(\frac{1}{a}\right)^2+\log_3 b=\log_3\frac{1}{a^2}+\log_3 b$

$=\log_3\frac{b}{a^2}$，由题意，$2\log_3\frac{1}{a}+\log_3 b=0$，所以 $\log_3\frac{b}{a^2}=0$，

从而 $\frac{b}{a^2}=3^0=1$，故 $b=a^2$，故 A 项正确；

B 项，$(2^a)^2=2^{2a}$，又因为 $b=a^2$，所以 $2^b=2^{a^2}$，

因为 $2a$ 与 a^2 不一定相等，所以 2^{2a} 与 2^{a^2} 不一定相等，

从而 $(2^a)^2$ 与 2^b 不一定相等，故 B 项错误；

C 项，$ae^{\ln a}=a\cdot a=a^2=b$，故 C 项正确；

D 项，虽然选项的底数 8 和 2 不同，但 8 可化为 2^3，故可按 $\log_{a^m}N^n=\frac{n}{m}\log_a N$ 来将底数统一成 2，

$\log_8(ab)=\log_8(a\cdot a^2)=\log_{2^3}a^3=\frac{3}{3}\log_2 a=\log_2 a$，故 D 项正确.

13.（2024 • 贵阳一模）（多选）

已知 $2^x=3^y=6$，则实数 x，y 满足（　　）

A. $(x-1)(y-1)=1$

B. $x+y>4$

C. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}>1$

D. $xy>4$

13. ABD

解法 1：因为 $2^x=3^y=6$，所以 $x=\log_2 6$， $y=\log_3 6$，

A 项，$(x-1)(y-1)=(\log_2 6-1)(\log_3 6-1)$

$=(\log_2 6-\log_2 2)(\log_3 6-\log_3 3)$

$=\log_2\frac{6}{2}\log_3\frac{6}{3}=\log_2 3\log_3 2$，

接下来无法直接计算了，可考虑用换底公式化同底再看，

因为 $\log_2 3\log_3 2=\frac{\lg 3}{\lg 2}\times\frac{\lg 2}{\lg 3}=1$，所以 $(x-1)(y-1)=1$，

故 A 项正确；

B 项，$x+y=\log_2 6+\log_3 6=\log_2(2\times 3)+\log_3(3\times 2)$

$=\log_2 2+\log_2 3+\log_3 3+\log_3 2=1+\log_2 3+1+\log_3 2$

$=2+\log_2 3+\log_3 2$，

只需比较 $\log_2 3+\log_3 2$ 与 2 的大小，即可判断选项，注意到 $\log_2 3$ 与 $\log_3 2$ 互为倒数，故联想到 $x+\frac{1}{x}\ge 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$，下面我们先判断 $\log_2 3$ 和 $\log_3 2$ 的正负，当下还没学对数函数的有关性质，怎么判断？可化为指数式，结合指数函数的单调性来判断，

设 $t=\log_2 3$，则 $2^t=3>1=2^0$，结合 $y=2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上$\nearrow$可得 $t>0$，即 $\log_2 3>0$，所以 $\log_3 2=\frac{1}{\log_2 3}>0$，

由基本不等式，$x+y=2+\log_2 3+\log_3 2=2+\log_2 3+\frac{1}{\log_2 3}$

$\ge 2+2\sqrt{\log_2 3\cdot\frac{1}{\log_2 3}}=4$ ①，

因为 $\log_2 3\ne\frac{1}{\log_2 3}$，所以式①的等号不能成立，

从而 $x+y>4$，故 B 项正确；

C 项，$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{\log_2 6}+\frac{1}{\log_3 6}=\log_6 2+\log_6 3=\log_6(2\times 3)$

$=\log_6 6=1$，故 C 项错误；

D 项，由 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$ 可得 $\frac{x+y}{xy}=1$，所以 $xy=x+y$，

又由 B 项可知 $x+y>4$，所以 $xy>4$，故 D 项正确.

解法 2：A、C、D 的判断同解法 1，对于 B 项，也可用 A 项的结论，结合基本不等式处理，

由 $x=\log_2 6$ 可得 $2^x=6>2^1$，所以 $x>1$，故 $x-1>0$，

由 $y=\log_3 6$ 可得 $3^y=6>3^1$，所以 $y>1$，故 $y-1>0$，

所以 $x+y=(x-1)+(y-1)+2\ge 2\sqrt{(x-1)(y-1)}+2=4$，

取等条件是 $x-1=y-1$，即 $x=y$，这里显然 $x\ne y$，

所以等号不能成立，从而 $x+y>4$，故 B 项正确.

C 组 拓展提升

14.（2024·四川德阳期末）

当生物死亡后，它体内原有的碳 14 含量会按确定的比率衰减（称为衰减率），大约每经过 5730 年衰减为原来的一半，这个时间称为“半衰期”．在最近的一次发掘中，三星堆 3、4 号祭祀坑出土了 170 多颗象牙．某志愿者检测到某颗象牙的碳 14 含量只剩下原来的 57%，根据该志愿者的检测结果，可推断，这头大象大约生活在距今（　　）（精确到百年，参考数据：$\log_2 0.57\approx-0.81$）

A．3800 年　　B．4200 年

C．4600 年　　D．5000 年

14. C

解析：怎样翻译“每经过 5730 年衰减为原来的一半”？如果是每年衰减为原来的一半，则 t 年后的含量为 $\left(\frac{1}{2}\right)^{t}$，由于这里是“每经过 5730 年衰减为原来的一半”，于是想到修正为 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$，

由题意，经过 t 年后生物体内碳 14 的含量 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$，

令 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}=57\%$ 可得 $\frac{t}{5730}=\log_{\frac{1}{2}}0.57=\log_{2^{-1}}0.57$

$=-\log_2 0.57\approx 0.81$，所以 $t\approx 5730\times 0.81=4641.3\approx 4600$，

故这头大象大约生活在距今 4600 年前.

15.（2024 • 江苏泰州期末）

已知 $m=5^{\log_6 3}$，$n=2^{\log_6 5}$，则 $mn=$（　　）

A．2　　　　B．3

C．4　　　　D．5

15. D

解析：由于 m，n 分别是以 5 和 2 为底的指数结构，它们无法直接相乘，怎么办呢？像这种指数上又有对数的情况不好处理，可考虑两端同时取对数，把指数部分剥离下来再看．为了统一底数，我们取以 6 为底的对数，

由 $\begin{cases}m=5^{\log_6 3}\\ n=2^{\log_6 5}\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}\log_6 m=\log_6 5^{\log_6 3}=\log_6 3\times\log_6 5\\ \log_6 n=\log_6 2^{\log_6 5}=\log_6 5\times\log_6 2\end{cases}$，

怎样构造出目标式 mn？把上述二式相加即可，

所以 $\log_6 m+\log_6 n=\log_6 3\times\log_6 5+\log_6 5\times\log_6 2$

$=\log_6 5\times(\log_6 3+\log_6 2)=\log_6 5\times\log_6(3\times 2)$

$=\log_6 5\times\log_6 6=\log_6 5$，

又 $\log_6 m+\log_6 n=\log_6(mn)$，所以 $\log_6(mn)=\log_6 5$，

故 $mn=5$.

16.（2024 • 重庆开学考试）

已知 $x>1$，$y>1$，$a=\log_2 x$，$b=\log_2\sqrt{y}$，且 $\frac{1}{a+2b}+\frac{2}{b+1}=2$，则 xy^2 的最小值为_____.

16. $4\sqrt{2}$

解析：条件给出的是关于 a，b 的等式，故考虑把目标式 xy^2 用 a，b 表示，

因为 $a=\log_2 x$，$b=\log_2\sqrt{y}$，所以 $x=2^a$，$\sqrt{y}=2^b$，

从而 $y=(2^b)^2=2^{2b}$，故 $xy^2=2^a(2^{2b})^2=2^a\cdot 2^{4b}=2^{a+4b}$，

于是只需求 $a+4b$ 的最小值，结合式子 $\frac{1}{a+2b}+\frac{2}{b+1}=2$ 可想到“1”的代换模型，为了便于观察，我们把分母换元，

令 $\begin{cases}a+2b=m\\ b+1=n\end{cases}$，则 $\begin{cases}a=m-2n+2\\ b=n-1\end{cases}$，且 $\frac{1}{m}+\frac{2}{n}=2$，

由 $x>1$，$y>1$ 可知 $a=\log_2 x>0$，$b=\log_2\sqrt{y}>0$，

所以 $m=a+2b>0$，$n=b+1>1$，

故 $a+4b=(m-2n+2)+4(n-1)=m+2n-2$

$=(m+2n)\left(\frac{1}{m}+\frac{2}{n}\right)\cdot\frac{1}{2}-2=\frac{1}{2}\left(1+\frac{2m}{n}+\frac{2n}{m}+4\right)-2$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{2m}{n}+\frac{2n}{m}+5\right)-2\ge\frac{1}{2}\left(2\sqrt{\frac{2m}{n}\cdot\frac{2n}{m}}+5\right)-2=\frac{5}{2}$，

取等条件是 $\frac{2m}{n}=\frac{2n}{m}$，即 $m=n$，

结合 $\frac{1}{m}+\frac{2}{n}=2$ 可得 $m=n=\frac{3}{2}$，满足 $m>0$， $n>1$，

所以 $(a+4b)_{\min}=\frac{5}{2}$，

又 $xy^2=2^{a+4b}$，所以 $(xy^2)_{\min}=2^{\frac{5}{2}}=4\sqrt{2}$.

17.（2024 • 全国模拟）

已知 $16^{\log_{12}x}-9^{\log_{12}x}=x$， $16^{\log_9 y}-12^{\log_9 y}=y$，则 $\frac{x}{y}=$______.

17. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

解析：观察发现已知的等式都是指数上又有对数，不好处理，但这里又不方便两端取对数，怎么办呢？注意到指数部分只有 $\log_{12}x$ 和 $\log_9 y$，不妨把它们换元，

令 $a=\log_{12}x$， $b=\log_9 y$，则 $x=12^a$， $y=9^b$，

且由题意，$\begin{cases}16^a-9^a=12^a\\16^b-12^b=9^b\end{cases}$，

接下来怎么处理？仔细观察会发现，两个式子可通过移项，化为同构形式，故先同构再看，

所以 $\begin{cases}12^a+9^a=16^a\\12^b+9^b=16^b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{12^a}{16^a}+\frac{9^a}{16^a}=1\\\frac{12^b}{16^b}+\frac{9^b}{16^b}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left(\frac{3}{4}\right)^a+\left(\frac{9}{16}\right)^a=1\\\left(\frac{3}{4}\right)^b+\left(\frac{9}{16}\right)^b=1\end{cases}$，

设 $f(x)=\left(\frac{3}{4}\right)^x+\left(\frac{9}{16}\right)^x$，则 $f(a)=f(b)=1$ ①，

因为 $y=\left(\frac{3}{4}\right)^x$ 和 $y=\left(\frac{9}{16}\right)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上都↘，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上↘，结合①可得 $a=b$，所以 $\frac{x}{y}=\frac{12^a}{9^b}=\frac{12^a}{9^a}=\left(\frac{4}{3}\right)^a$，

怎样求 $\left(\frac{4}{3}\right)^a$？我们发现 $\left(\frac{9}{16}\right)^a=\left[\left(\frac{3}{4}\right)^a\right]^2$，于是用前面的 $\left(\frac{3}{4}\right)^a+\left(\frac{9}{16}\right)^a=1$ 可求出 $\left(\frac{3}{4}\right)^a$， $\left(\frac{4}{3}\right)^a$ 也就有了，

因为 $\left(\frac{3}{4}\right)^a+\left(\frac{9}{16}\right)^a=1$，所以 $\left(\frac{3}{4}\right)^a+\left[\left(\frac{3}{4}\right)^a\right]^2=1$ ②，

令 $t=\left(\frac{3}{4}\right)^a$，则式②即为 $t+t^2=1$，所以 $t^2+t-1=0$，

解得： $t=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times1\times(-1)}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$，

又 $t=\left(\frac{3}{4}\right)^a>0$，所以 $t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，

从而 $\left(\frac{3}{4}\right)^a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，故 $\frac{x}{y}=\left(\frac{4}{3}\right)^a=\frac{2}{\sqrt{5}-1}$

$=\frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.