强化训练

A 组 夯实基础

1.（2024·上海模拟）

了解某些细菌、病毒的生存条件、繁殖习性等对于预防该细菌、病毒引起的疾病传播有重要的意义. 科研团队在培养基中放入一定量某种菌落进行研究，设经过时间 x（单位：min），菌落的覆盖面积为 y（单位：mm^2）. 团队提出如下假设：①当 $x\ge 0$ 时，$y\ge 0$；②y 随 x 的增加而增加，且增加的速度越来越快. 则下列选项中，符合团队假设的模型是（　　）

A．$y=ka^x(k>0,a>1)$

B．$y=\log_b x+c(b>1,c>0)$

C．$y=kx+b(k>0,b>0)$

D．$y=p\sqrt{x}+q(p>0,q>0)$

1. A

解析：对于①，在 B 项中，当 $0<x<b^{-c}$ 时，$y=\log_b x+c$
$<\log_b b^{-c}+c=-c+c=0$，不满足①，其余三个选项都能满足当 $x\ge 0$ 时，$y\ge 0$，所以排除 B；

对于②，ACD 三个选项都能满足 y 随 x 的增加而增加，但 A 项是增长速度越来越快，D 项是增长速度越来越慢，C 项是匀速增长，所以只有 A 项满足②，故选 A.

2.（2024·贵州安顺期末）

人类已经进入大数据时代，目前，数据量已经从 TB(1TB＝1024GB) 级别跃升到 PB(1PB＝1024TB)，EB(1EB＝1024PB) 乃至 ZB(1ZB＝1024EB) 级别．国际数据公司（IDC）的研究结果表明，2008 年起全球每年产生的数据量如下表所示：

年份	2008	2009	2010	2011	…	2020
数据量（ZB）	0.49	0.8	1.2	1.82	…	80

（1）设 2008 年为第一年，为较好地描述 2008 年起第 x 年全球产生的数据量 y（单位：ZB）与 x 的关系，根据上述信息，试从 $y=a\cdot b^x$ $(a>0,b>0$ 且 $b\ne 1)$，$y=ax+b(a>0)$，$y=a\cdot\log_b x$ $(a>0,b>0$ 且 $b\ne 1)$ 三种函数模型中选择一个，应该选哪一个更合适？（不用说明理由）；

（2）根据（1）中所选的函数模型，若选取 2009 年和 2020 年的数据量来估计模型中的参数，预计到哪一年，全球产生的数据量将达到 2020 年的 100 倍？

2．**解**：（1）（观察表中数据可知，数据量呈现爆炸式增长，所以选择指数模型更合适）选择 $y=a\cdot b^x$ 更合适.

（2）将 $(2,0.8)$ 和 $(13,80)$ 代入 $y=a\cdot b^x$ 可得 $\begin{cases}0.8=ab^2\\80=ab^{13}\end{cases}$，

两式相除得 $\dfrac{80}{0.8}=\dfrac{ab^{13}}{ab^2}$，所以 $b^{11}=100$ ①，

设第 n 年全球产生的数据量将达到 2020 年的 100 倍，

则 $ab^n=80\times 100$，（怎样由此求 n？有了式①，相当于 b 已知，故考虑消去 a，观察发现将 80 替换成 ab^{13} 即可）

因为 $80=ab^{13}$，所以 $ab^n=ab^{13}\times 100$，故 $b^{n-13}=100$，

结合式①可得 $b^{n-13}=b^{11}$，所以 $n-13=11$，故 $n=24$，

所以预计到 2031 年，全球产生的数据量将达到 2020 年的 100 倍.

B 组 强化能力

3.（2024·四川德阳三模）

如今我国物流行业蓬勃发展，极大地促进了社会经济发展和资源整合，已知某类果蔬的保鲜时间 y（单位：小时）与储藏温度 x（单位：$^{\circ}\mathrm{C}$）满足函数关系 $y=\mathrm{e}^{ax+b}(a,b$ 为常数$)$，若该果蔬在 $7^{\circ}\mathrm{C}$ 的保鲜时间为 288 小时，在 $21^{\circ}\mathrm{C}$ 的保鲜时间为 32 小时，且该果蔬所需物流时间为 4 天，则物流过程中果蔬的储藏温度（假设物流过程中恒温）最高不能超过（　　）

A．$14^{\circ}\mathrm{C}$　　B．$15^{\circ}\mathrm{C}$

C．$13^{\circ}\mathrm{C}$　　D．$16^{\circ}\mathrm{C}$

3．A

解析：由题意，$\begin{cases}288=\mathrm{e}^{7a+b}\\32=\mathrm{e}^{21a+b}\end{cases}$，两式相除得 $\dfrac{288}{32}=\dfrac{\mathrm{e}^{7a+b}}{\mathrm{e}^{21a+b}}$，

所以 $\mathrm{e}^{7a+b-21a-b}=\mathrm{e}^{-14a}=\dfrac{1}{(\mathrm{e}^{7a})^2}=9$，故 $\mathrm{e}^{7a}=\dfrac{1}{3}$ ①，

（物流时间为 4 天意味着至少需保鲜 96 小时，我们发现 96 恰好是 288 的 $\dfrac{1}{3}$，故可先求出保鲜 96 小时所需的温度）

由 $288=\mathrm{e}^{7a+b}$ 可得 $96=\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{7a+b}=\mathrm{e}^{7a}\cdot\mathrm{e}^{7a+b}=\mathrm{e}^{14a+b}$，

令 $\mathrm{e}^{ax+b}\ge\mathrm{e}^{14a+b}$，则 $ax+b\ge14a+b$，所以 $ax\ge14a$ ②，

由①可知 $a<0$，否则 $\mathrm{e}^{7a}>1$，与 $\mathrm{e}^{7a}=\dfrac{1}{3}$ 矛盾，

所以式②等价于 $x\le14$，

故物流过程中果蔬的储藏温度最高不能超过 $14\,^{\circ}\mathrm{C}$.

4.（2024·北京东城期末）

当药品 A 注射到人体内，它在血液中的残余量会以每小时 25%的速度减少.

（1）按照医嘱，护士给患者甲注射了 $a$mg 药品 A 两小时后，患者甲血液中药品 A 的残余量为 225mg，求 a 的值；

（2）另一种药物 B 注射到人体内，它在血液中的残余量会以每小时 10%的速度减少．如果同时给两位患者分别注射 800mg 药品 A 和 500mg 药品 B，请你计算注射后几个小时两位患者体内两种药品的残余量恰好相等.（第（2）问计算结果保留 2 位小数，参考值：$\lg2\approx0.301$，$\lg3\approx0.477$）

4．**解**：（1）由题意，$a\cdot(1-25\%)^2=225$，解得：$a=400$.

（2）由题意，注射 x 小时后，A 药品的残余量为

$800\times(1-25\%)^x=800\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^x$，

B 药品的残余量为 $500\times(1-10\%)^x=500\times\left(\dfrac{9}{10}\right)^x$，

令 $800\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^x=500\times\left(\dfrac{9}{10}\right)^x$，则 $\dfrac{\left(\dfrac{3}{4}\right)^x}{\left(\dfrac{9}{10}\right)^x}=\dfrac{5}{8}$，

因为 $\dfrac{\left(\frac{3}{4}\right)^x}{\left(\frac{9}{10}\right)^x}=\left(\frac{3}{4}\times\frac{10}{9}\right)^x=\left(\frac{5}{6}\right)^x$，所以 $\left(\frac{5}{6}\right)^x=\frac{5}{8}$，

从而 $x=\log_{\frac{5}{6}}\frac{5}{8}=\dfrac{\lg\frac{5}{8}}{\lg\frac{5}{6}}=\dfrac{\lg\frac{10}{16}}{\lg\frac{10}{12}}=\dfrac{1-\lg 16}{1-\lg 12}=\dfrac{1-4\lg 2}{1-\lg 3-2\lg 2}$

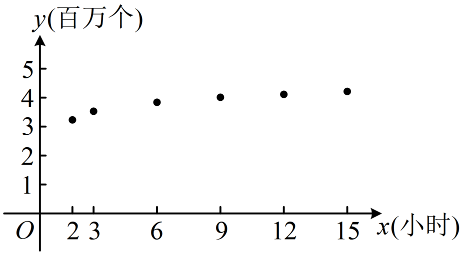
$\approx\dfrac{1-4\times 0.301}{1-0.477-2\times 0.301}\approx 2.58$，

故注射后 2.58 小时两位患者体内两种药品的残余量恰好相等.

5.（2024·四川泸州期末）

在密闭培养环境中，某类细菌的繁殖在初期会较快，随着单位体积内细菌数量的增加，繁殖速度又会减慢. 在一次实验中，检测到这类细菌在培养皿中的数量 y（单位：百万个）与培养时间 x（单位：小时）的关系为：

x	2	3	6	9	12	15
y	3.2	3.5	3.8	4	4.1	4.2



为了描述从第 2 小时开始细菌数量随时间变化的关系，现有以下三种函数模型供选择：

① $y=m\log_3 x+n$，② $y=m\sqrt{x-3}+n$，

③ $y=2^{x-m}+n$.

（1）选出你认为最符合实际的函数模型，并说明理由；

（2）请选取表格中的两组数据，求出你选择的函数模型的解析式，并预测至少培养多少个小时，细菌数量达到 5 百万个.

5. **解**：（1）所选模型需满足在 $[2,+\infty)$ 上有定义，排除模型②，

又由题意，随着单位体积内细菌数量的增加，繁殖速度会减慢，排除模型③，

而模型①能满足上述两点，所以最符合实际的是模型①.

（2）（题干没规定选哪两组数据来求模型中的参数，理论上讲，任选两组均可，但由于涉及以 3 为底的对数，所以选择 $x=3$ 和 $x=9$ 的两组显然比较好算）

选取 $(3,3.5)$ 和 $(9,4)$ 这两组数据，将它们代入 $y=m\log_3 x$

$+n$ 可得 $\begin{cases}3.5=m\log_3 3+n\\4=m\log_3 9+n\end{cases}$，

所以 $\begin{cases}m+n=3.5\\2m+n=4\end{cases}$，解得：$\begin{cases}m=0.5\\n=3\end{cases}$，

所以 $y=0.5\log_3 x+3$，令 $y\ge 5$ 可得 $0.5\log_3 x+3\ge 5$，

所以 $\log_3 x\ge 4$，从而 $x\ge 3^4=81$，故至少培养 81 个小时，细菌数量达到 5 百万个.

C组 拓展提升

6.（2024·广东茂名模拟）

中国的5G技术领先世界，5G技术的数学原理之一便是著名的香农公式$C=W\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right)$，它表示在受噪声干扰的信道中，最大信息传递速率$C$取决于信道带宽$W$、信道内信号的平均功率$S$、信道内部的高斯噪声功率$N$的大小，其中$\frac{S}{N}$叫做信噪比．当信噪比较大时，公式里真数中的1可以忽略不计，按照香农公式，由于技术提升，带宽W在原来的基础上增加20%，信噪比$\frac{S}{N}$从1000提升至5000，则C大约增加了（　　）

（附：$\lg 2\approx 0.3010$）

A．48%　　　　B．37%

C．28%　　　　D．15%

6．A

解析：技术提升前，$C=W\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right)$

$=W\log_2(1+1000)\approx W\log_2 1000$，

技术提升后，带宽W增加20%，信噪比$\frac{S}{N}$提升至5000，

所以$C'=1.2W\log_2(1+5000)\approx 1.2W\log_2 5000$，

从而$\frac{C'}{C}=\frac{1.2W\log_2 5000}{W\log_2 1000}=1.2\log_{1000}5000$

$=1.2(\log_{1000}1000+\log_{1000}5)=1.2(1+\log_{10^3}5)=1.2\left(1+\frac{1}{3}\lg 5\right)$

$=1.2+0.4\lg 5=1.2+0.4\lg\frac{10}{2}=1.2+0.4(\lg 10-\lg 2)$

$\approx 1.2+0.4\times(1-0.301)\approx 1.48$，

故C大约增加了48%.

7.（2024·贵州毕节期末）

人们通常以分贝（符号是dB）为单位来表示声音强度的等级，其中0dB是人们能听到的等级最低的声音．一般地，如果强度为x的声音对应的等级为$f(x)$dB，则有：$f(x)=a\lg\left(\frac{x}{10^{-12}}\right)$，其中$a$为常数．已知人正常说话时声音约为60dB，嘈杂的马路声音等级约为90dB，而90dB的声音强度是60dB的声音强度的1000倍．

（1）求函数$f(x)$的解析式；

（2）若某种喷气式飞机起飞时，声音约为150dB，计算该种喷气式飞机起飞时的声音强度是人正常说话时声音强度的多少倍？

7．**解**：（1）（解析式中只有a是未知的参数，翻译条件“90dB的声音强度是60dB的声音强度的1000倍”即可求a）

设90dB和60dB的声音强度分别为x_1，x_2，则由题意，

$x_1=1000x_2$，且$\begin{cases}a\lg\frac{x_1}{10^{-12}}=90\\ a\lg\frac{x_2}{10^{-12}}=60\end{cases}$，所以$\begin{cases}a(\lg x_1+12)=90\\ a(\lg x_2+12)=60\end{cases}$，

两式作差得 $a(\lg x_1 - \lg x_2) = 30$，所以 $a\lg\frac{x_1}{x_2} = 30$ ①，

又 $x_1 = 1000x_2$，所以 $\lg\frac{x_1}{x_2} = \lg\frac{1000x_2}{x_2} = \lg 1000 = 3$，

代入①得 $3a = 30$，解得：$a = 10$，

故 $f(x) = 10\lg\frac{x}{10^{-12}} = 10(\lg x + 12)$，$x > 0$.

（2）设该种喷气式飞机起飞时，声音强度为 x_3，

则由题意，$f(x_3) = 10(\lg x_3 + 12) = 150$，

所以 $\lg x_3 = 3$，故 $x_3 = 10^3$，

又 $f(x_2) = 10(\lg x_2 + 12) = 60$，所以 $\lg x_2 = -6$，故 $x_2 = 10^{-6}$，

所以该种喷气式飞机起飞时的声音强度是人正常说话时声音强度的 $\frac{x_3}{x_2} = \frac{10^3}{10^{-6}} = 10^9$ 倍.