强化训练

A组 夯实基础

1.（2024·河北邢台模拟）

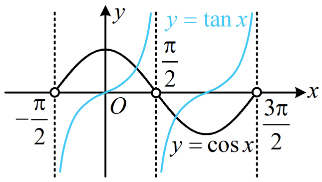
当 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ 时，函数 $y=\cos x$ 与函数 $y=\tan x$ 的图象的交点个数为（　　）

A．0　　　　B．1

C．2　　　　D．4

1．C

解析：如图，当 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ 时，$y=\cos x$ 与 $y=\tan x$ 的图象的交点个数为 2.



2.（2024·黑龙江哈尔滨期末）

函数 $y=2\tan x+a$ 在 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值为 4，则实数 a 的值为_____.

2．2

解析：函数 $y=2\tan x+a$ 在 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$ 上↗，所以当 $x=\frac{\pi}{4}$

时，该函数取得最大值 $2\tan\frac{\pi}{4}+a=2+a$，

由题意，$2+a=4$，所以 $a=2$.

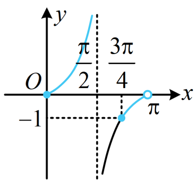
3.（2024·云南大理模拟）

借助函数 $y=\tan x$ 的图象，可知不等式 $\tan x\geq -1$，$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 的解集为_____.

3．$\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right)$

解析：函数 $y=\tan x$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 上的图象如图，

由图可知 $\tan x\geq -1$ 的解集为 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right)$.



4.（2024·天津滨海新区模拟）

函数 $f(x)=2\tan\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的定义域是_____；最小正周期是_____.

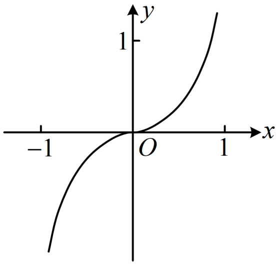
4. $\left\{x \middle| x \neq \frac{k\pi}{2}+\frac{3}{8}\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$； $\frac{\pi}{2}$

解析：由 $2x-\frac{\pi}{4} \neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ 得 $x \neq \frac{k\pi}{2}+\frac{3\pi}{8}$，所以 $f(x)$ 的定义域是 $\left\{x \middle| x \neq \frac{k\pi}{2}+\frac{3\pi}{8}, k \in \mathbf{Z}\right\}$， $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{\pi}{|\omega|}=\frac{\pi}{2}$.

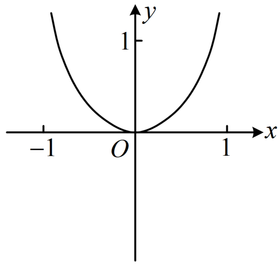
B组 强化能力

5.（2024 • 江苏模拟）

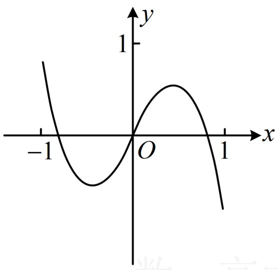
函数 $f(x)=x\tan x\ (-1<x<1)$ 的图象可能是（　　）



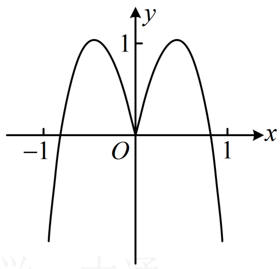
A



B



C



D

5. B

解析：观察发现选项 A、C 关于原点对称，B、D 关于 y 轴对称，故可通过判断奇偶性排除两个选项，

因为 $f(-x)=-x\tan(-x)=-x(-\tan x)=x\tan x=f(x)$，

所以 $f(x)$ 为偶函数，其图象关于 y 轴对称，排除 A、C；

观察 B、D 可发现，B 项的函数在 $(0,1)$ 上函数值恒为正，D 项则有正有负，故可通过判断函数值的正负确定选谁，

当 $x\in(0,1)$ 时， $x>0$， $\tan x>0$，所以 $f(x)=x\tan x>0$，

从而排除 D，故选 B.

6.（2024 • 吉林长春期末）

函数 $y=\lg(1+\tan x)$ 的定义域为_____.

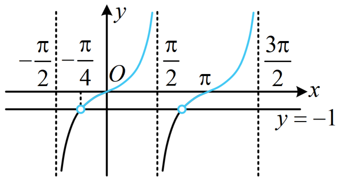
6. $\left(-\frac{\pi}{4}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right), k\in\mathbf{Z}$

解析：由题意， $1+\tan x>0$，所以 $\tan x>-1$ ①，

正切函数有周期，所以该不等式的解集也有周期，可画图在一个周期内解该不等式，再加上周期的整数倍即可，

如图，当且仅当 $k\pi-\frac{\pi}{4}<x<k\pi+\frac{\pi}{2}$ 时，不等式①成立，

故所给函数的定义域是 $\left\{x \middle| k\pi-\frac{\pi}{4}<x<k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\right\}$.



7.（2024·福建莆田模拟）

函数 $y=\tan^2 x+4\tan x-1$，$x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$的值域为______.

7. $[-4,4]$

解析： 令 $u=\tan x$，则 $y=\tan^2 x+4\tan x-1=u^2+4u-1$，

当 $x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$时，$u=\tan x\nearrow$，所以 $u_{\min}=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

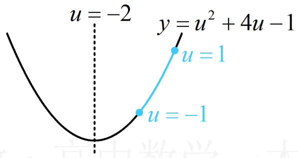
$=-\tan\frac{\pi}{4}=-1$，$u_{\max}=\tan\frac{\pi}{4}=1$，故 $u\in[-1,1]$，

如图，$y=u^2+4u-1$ 在 $[-1,1]$ 上$\nearrow$，所以当 $u=-1$ 时，

y 取得最小值 $(-1)^2+4\times(-1)-1=-4$，

当 $u=1$ 时，y 取得最大值 $1^2+4\times1-1=4$，

故所求值域为 $[-4,4]$.



8.（2024·湖北开学考试（改））（多选）

已知 $f(x)=-\sqrt{3}\tan\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，则下列说法正确的有（　　）

A．$f(x)$ 的图象对称中心为 $\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},0\right)(k\in\mathbf{Z})$

B．$f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$

C．$f(x)$ 的减区间为 $\left(-\frac{5\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\right)(k\in\mathbf{Z})$

D．若 $f(x)\geq1$，则 $x\in\left(-\frac{5\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},-\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$

8. BCD

解析： A 项，令 $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{k\pi}{2}$ 可得 $x=\frac{k\pi}{4}-\frac{\pi}{6}$，所以 $f(x)$ 图象的对称中心是 $\left(\frac{k\pi}{4}-\frac{\pi}{6},0\right)(k\in\mathbf{Z})$，故 A 项错误；

B 项，$f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{\pi}{2}$，故 B 项正确；

C 项，解析式中 $\tan\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的系数 $-\sqrt{3}<0$，故要求 $f(x)$ 的减区间，只需求 $y=\tan\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的增区间，

令 $k\pi-\frac{\pi}{2}<2x+\frac{\pi}{3}<k\pi+\frac{\pi}{2}$ 得 $\frac{k\pi}{2}-\frac{5\pi}{12}<x<\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12}$，

所以 $f(x)$ 的单调递减区间是 $\left(\frac{k\pi}{2}-\frac{5\pi}{12},\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12}\right)(k\in\mathbf{Z})$，

故 C 项正确；

D 项，$f(x)\geq 1\Leftrightarrow -\sqrt{3}\tan\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\geq 1$

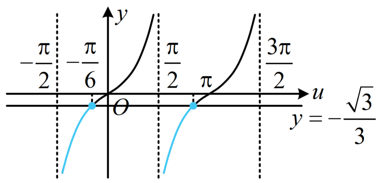
$\Leftrightarrow \tan\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\leq -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ①，

令 $u=2x+\frac{\pi}{3}$，则不等式①即为 $\tan u\leq -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ②，

如图，不等式②的解为 $k\pi-\frac{\pi}{2}<u\leq k\pi-\frac{\pi}{6}$，

所以 $k\pi-\frac{\pi}{2}<2x+\frac{\pi}{3}\leq k\pi-\frac{\pi}{6}$，故 $\frac{k\pi}{2}-\frac{5\pi}{12}<x\leq\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{4}$，

其中 $k\in\mathbf{Z}$，故 D 项正确.



9.（2024 • 湖北模拟）

已知函数 $f(x)=\tan(2x+\varphi)\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{\pi}{8},0\right)$ 对称.

（1）求 φ；

（2）求 $f(x)$ 的单调递增区间.

9．**解**：（1）因为 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{\pi}{8},0\right)$ 对称，

所以 $2\times\left(-\frac{\pi}{8}\right)+\varphi=\frac{k\pi}{2}$，故 $\varphi=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$，

又 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $k=0$，$\varphi=\frac{\pi}{4}$.

（2）令 $k\pi-\frac{\pi}{2}<2x+\frac{\pi}{4}<k\pi+\frac{\pi}{2}$ 得 $\frac{k\pi}{2}-\frac{3\pi}{8}<x<\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$，

所以 $f(x)$ 的单调递增区间是 $\left(\frac{k\pi}{2}-\frac{3\pi}{8},\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\right)(k\in\mathbf{Z})$.

10.（2024 • 江西南昌模拟）

设函数 $f(x)=\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$.

（1）求 $f(x)$ 的定义域、最小正周期及对称中心；

（2）解不等式 $f(x)\leq\sqrt{3}$.

10．**解**：（1）由 $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ 可得 $x\neq 2k\pi+\frac{5\pi}{3}$，

所以 $f(x)$ 的定义域是 $\left\{x\left|x\neq 2k\pi+\frac{5\pi}{3},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$，

（再看周期，可直接代公式 $T=\frac{\pi}{|\omega|}$ 计算）

$f(x)$ 的最小正周期 $T=\dfrac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$，

令 $\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{k\pi}{2}$ 可得 $x=k\pi+\dfrac{2\pi}{3}$，

所以 $f(x)$ 的对称中心是 $\left(k\pi+\dfrac{2\pi}{3},0\right)(k\in\mathbf{Z})$.

（2）（解正切不等式，常考虑结合图象来看，直接画 $f(x)$ 的图象不方便，可将 $\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{3}$ 换元成 u，转为画 $y=\tan u$ 的图象来分析）

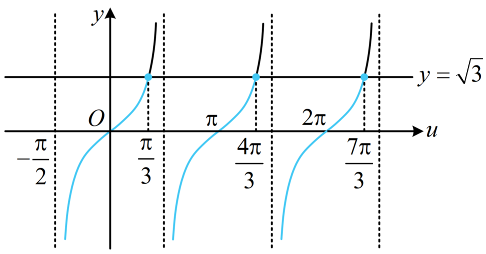
令 $u=\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{3}$，则 $f(x)=\tan u$，所以 $f(x)\le\sqrt{3}$ 即为 $\tan u\le\sqrt{3}$，

函数 $y=\tan u$ 的部分图象如图，

由图可知，$\tan u\le\sqrt{3}\Leftrightarrow k\pi-\dfrac{\pi}{2}<u\le k\pi+\dfrac{\pi}{3}$，

所以 $k\pi-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{3}\le k\pi+\dfrac{\pi}{3}$，解得：$2k\pi-\dfrac{\pi}{3}<x\le 2k\pi+\dfrac{4\pi}{3}$，

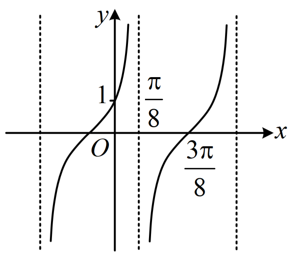
故所求不等式的解集是 $\left\{x\middle|2k\pi-\dfrac{\pi}{3}<x\le 2k\pi+\dfrac{4\pi}{3},k\in\mathbf{Z}\right\}$.



C 组 拓展提升

11.（2024·河南许昌模拟）

已知函数 $f(x)=A\tan(\omega x+\varphi)$，$\omega>0$，$|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，$y=f(x)$ 的部分图象如图，则 $f\left(\dfrac{7\pi}{24}\right)=$______.



11. $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

解析：求 $f\left(\dfrac{7\pi}{24}\right)$ 需要 A，ω，φ，观察发现图上 $\dfrac{\pi}{8}$ 和 $\dfrac{3\pi}{8}$ 之间那段是半个周期，故能推断周期，进而求出 ω，

由所给图象可知，$T=2\times\left(\dfrac{3\pi}{8}-\dfrac{\pi}{8}\right)=\dfrac{\pi}{2}$，

又 $T=\dfrac{\pi}{\omega}$，所以 $\dfrac{\pi}{\omega}=\dfrac{\pi}{2}$，故 $\omega=2$，$f(x)=A\tan(2x+\varphi)$，

还差 φ 和 A，先看 φ，我们发现 $x=\dfrac{\pi}{8}$ 处没有定义，可由此建立方程求 φ，

由所给图象可知 $2\times\dfrac{\pi}{8}+\varphi=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，故 $\varphi=k\pi+\dfrac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$，

又 $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $k=0$，$\varphi=\dfrac{\pi}{4}$，$f(x)=A\tan\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，

只剩 A 不知道了，图中 y 轴上专门标了个 1，故可将该点代入解析式求 A，

由所给图象可知 $f(0)=A\tan\frac{\pi}{4}=A=1$，

所以 $f(x)=\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，

故 $f\left(\frac{7\pi}{24}\right)=\tan\left(2\times\frac{7\pi}{24}+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

12.（2024 • 河南模拟）

已知函数 $f(x)=2\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+1$.

（1）求 $f(x)$ 的定义域；

（2）设 $g(x)=[f(x)]^2+mf(x)-2m+\frac{9}{4}$，对任意的 $x\in\left[-\frac{\pi}{4},0\right]$，$g(x)\geq 0$ 恒成立，求 m 的取值范围.

12. **解**：（1）由 $2x+\frac{\pi}{4}\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ 可得 $x\neq\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$，

所以 $f(x)$ 的定义域是 $\left\{x\middle|x\neq\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

（2）（观察发现 $g(x)$ 含 x 的部分以 $f(x)$ 整体出现，考虑将 $f(x)$ 换元成 t，将 $g(x)$ 的解析式化简再做分析）

令 $t=f(x)$，则 $g(x)=t^2+mt-2m+\frac{9}{4}$，

所以 $g(x)\geq 0\Leftrightarrow t^2+mt-2m+\frac{9}{4}\geq 0$ ①，

（接下来有两个考虑的方向，要么将参数 m 分离出来，要么直接求不等式①左侧的最小值，选哪一种呢？我们先来看看 t 的范围再决定）

令 $u=2x+\frac{\pi}{4}$，则 $t=f(x)=2\tan u+1$，当 $x\in\left[-\frac{\pi}{4},0\right]$ 时，

$u\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$，函数 $t=2\tan u+1$ 在 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增，

所以 $t_{\min}=2\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)+1=-2\tan\frac{\pi}{4}+1=-1$，

$t_{\max}=2\tan\frac{\pi}{4}+1=3$，故 $t\in[-1,3]$，

（此时可发现 $t-2$ 不恒为正或恒为负，若将 m 分离出来，则需讨论 $t-2$ 的正负，且可以想象，分离后计算量也较大，于是我们直接求不等式①左侧的最小值，故讨论区间与对称轴的位置关系）

令 $h(t)=t^2+mt-2m+\frac{9}{4}$，则 $h(t)$ 的对称轴是 $t=-\frac{m}{2}$，

(i)当 $-\frac{m}{2}<-1$，即 $m>2$ 时，如图 1，$h(t)$ 在 $[-1,3]$ 上的最小值为 $h(-1)=(-1)^2+m\cdot(-1)-2m+\frac{9}{4}=-3m+\frac{13}{4}$，

所以不等式①恒成立 $\Leftrightarrow -3m+\frac{13}{4}\geq 0$，即 $m\leq\frac{13}{12}$，

与 $m>2$ 矛盾，舍去；

(ii)当 $-\frac{m}{2}>3$，即 $m<-6$ 时，如图 2，$h(t)$ 在 $[-1,3]$ 上的最小值为 $h(3)=3^2+m\cdot 3-2m+\frac{9}{4}=m+\frac{45}{4}$，

所以不等式①恒成立 $\Leftrightarrow m+\frac{45}{4}\geq 0$，即 $m\geq-\frac{45}{4}$，

结合 $m<-6$ 可得 $-\frac{45}{4}\leq m<-6$；

(iii)当 $-1\leq-\frac{m}{2}\leq 3$，即 $-6\leq m\leq 2$ 时，如图 3，$h(t)$ 在 $[-1,3]$ 上的最小值为 $h\left(-\frac{m}{2}\right)=\left(-\frac{m}{2}\right)^2+m\left(-\frac{m}{2}\right)-2m+\frac{9}{4}$

$=-\dfrac{m^2}{4}-2m+\dfrac{9}{4}$，

所以不等式①恒成立 $\Leftrightarrow -\dfrac{m^2}{4}-2m+\dfrac{9}{4}\geq 0$，故 $-9\leq m\leq 1$，

结合 $-6\leq m\leq 2$ 可得 $-6\leq m\leq 1$；

综上所述，实数 m 的取值范围是 $\left[-\dfrac{45}{4},1\right]$.

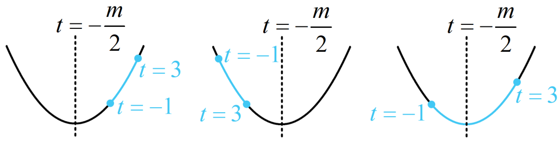


图1　图2　图3