# 微专题 1：集合新定义问题

►► 习题：P1

## 内容提要

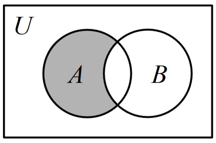
集合的常规题型我们已经学完了，但出题人有时候会将集合与新定义结合．这类题由于设问新颖、不成套路，再加上有的题目背景较复杂，所以经常让刚学习集合的同学摸不着头脑．这一节例题较少，以练习题为主，我们主要精选了各类比较有代表性的新定义练习题，通过详细的解答引导，逐步让大家感悟新定义问题的解题思路．

## 典型例题

【例 1】对于集合 $A$，$B$，我们把集合 $\{x\,|\,x\in A$ 且 $x\notin B\}$ 叫做集合 $A$ 与 $B$ 的差集，记作 $A-B$，若 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{4,5,6,7,8\}$，则 $A-B=$______.

**解析：**差集 $A-B=\{x\,|\,x\in A$ 且 $x\notin B\}$ 代表哪部分元素呢？我们可以画 Venn 图来看看，

$A-B=\{x\,|\,x\in A$ 且 $x\notin B\}$，它表示在 $A$ 中且不在 $B$ 中的部分，即如图所示的阴影区域，




该部分可看成在 $A$ 中把 $A\cap B$ 的部分去掉后，余下的区域，即 $\complement_A(A\cap B)$，故先算 $A\cap B$，

由题意，$A\cap B=\{4,5\}$，在 $A$ 中把元素 4 和 5 去掉，余下 1，2，3，

所以 $A-B=\complement_A(A\cap B)=\{1,2,3\}$.

**答案：**$\{1,2,3\}$

【变式】设全集 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$，且 $U$ 的子集可由 0，1 组成的 6 位字符串表示，如：集合 $\{2,4\}$ 可表示为自左向右的第 2 个和第 4 个字符为 1，其余字符均为 0 的 6 位字符串 010100，并规定，空集表示的字符串为 000000；对于任意两集合 $A$，$B$，定义集合运算 $A-B=\{x\,|\,x\in A$ 且 $x\notin B\}$，$A*B=(A-B)\cup(B-A)$．若 $A=\{2,3,4,5\}$，$B=\{3,5,6\}$，则 $A*B$ 表示的 6 位字符串是（　　）

一数 • 高中数学一本通

A．101010　　B．011001　　C．010101　　D．000111

**解析：**由题干信息，要算 $A*B$，需先计算 $A-B$ 和 $B-A$，这一差集运算和例 1 的相同，下面先求 $A\cap B$，

因为 $A\cap B=\{3,5\}$，所以 $A-B=\complement_A(A\cap B)=\{2,4\}$，$B-A=\complement_B(A\cap B)=\{6\}$，

由题意，$A*B=(A-B)\cup(B-A)=\{2,4\}\cup\{6\}=\{2,4,6\}$，

根据题干的描述，$A*B$ 表示的是从左到右第 2，4，6 位字符为 1，其余三位字符为 0 的 6 位字符串，即 010101.

**答案：**C

【反思】求解新定义问题没有通法，主打一个“听话”，理解题目给出的新定义，将其转化为我们学过的数学语言，一步步分析即可．本道变式相对于例 1，在“差集”定义的基础上，又新定义了“$*$”的运算，可以发现按照要求将每部分都求清楚，问题自然就解决了．

【例 2】（多选）整数集合 $\mathbf{Z}$ 中，被 4 除所得余数为 $k$ 的所有整数组成一个“类”，记作 $[k]$，其中 $k\in\{0,1,2,3\}$，即 $[k]=\{x\,|\,x=4n+k,n\in\mathbf{Z}\}$，以下判断正确的是（　　）

A．$2024\in[4]$

B．$-3\in[3]$

C．$\mathbf{Z}=[0]\cup[1]\cup[2]\cup[3]$

D．若 $a-b\in[0]$，则整数 $a$，$b$ 属于同一个类

**解法 1**：A 项，在“类”的定义中，$k$ 只能取 0，1，2，3，所以 A 项肯定不对，那正确的写法是什么呢？我们来看看 2024 除以 4 的余数，因为 $2024=506\times4+0$，所以根据“类”的定义，$2024\in[0]$，故 A 项错误；

B 项，要看 $-3$ 属于哪一类，应该把 $-3$ 写成 $4n+k$ 的形式，且 $k$ 在 0，1，2，3 中取，
因为 $-3=4\times(-1)+1$，所以 $-3\in[1]$，故 B 项错误；

此为多选题，A、B 两项均错误，则 C、D 必定都对，我们也来分析一下原因，
C 项，任意一个整数除以 4 的余数不外乎是 0，1，2，3，所以 $\mathbf{Z}=[0]\cup[1]\cup[2]\cup[3]$，故 C 项正确；

D 项，可以想象，若 $a-b$ 能被 4 整除，则 $a$，$b$ 除以 4 的余数相同，故此选项正确，下面给出严格证明，
设 $a=4n_1+k_1$，$b=4n_2+k_2$，其中 $n_1,n_2\in\mathbf{Z}$，$k_1,k_2\in\{0,1,2,3\}$，则 $a-b=4n_1+k_1-4n_2-k_2=4(n_1-n_2)+k_1-k_2$，
注意到 $n_1-n_2\in\mathbf{Z}$，所以 $4(n_1-n_2)$ 能被 4 整除，又 $a-b\in[0]$，所以 $k_1-k_2$ 也能被 4 整除，
因为 $k_1,k_2\in\{0,1,2,3\}$，所以 $k_1-k_2$ 的值只可能为 $-3$，$-2$，$-1$，0，1，2，3，
结合 $k_1-k_2$ 能被 4 整除可得 $k_1-k_2=0$，从而 $k_1=k_2$，即整数 $a$，$b$ 属于同一个类，故 D 项正确.

**解法 2**：A、B、C 三项的分析方法同解法 1，对于 D 项，若没想到上述正面论证的思路，也可考虑反证法，
假设整数 $a$，$b$ 不属于同一个类，设 $a=4n_1+k_1$，$b=4n_2+k_2$，其中 $n_1,n_2\in\mathbf{Z}$，$k_1,k_2\in\{0,1,2,3\}$，且 $k_1\neq k_2$，
则 $a-b=4n_1+k_1-4n_2-k_2=4(n_1-n_2)+k_1-k_2$，注意到 $n_1-n_2\in\mathbf{Z}$，所以 $4(n_1-n_2)$ 能被 4 整除，
由 $k_1,k_2\in\{0,1,2,3\}$ 且 $k_1\neq k_2$ 可知 $k_1-k_2$ 的取值只可能为 $-3$，$-2$，$-1$，1，2，3，所以 $k_1-k_2$ 不能被 4 整除，
从而 $4(n_1-n_2)+k_1-k_2$ 不能被 4 整除，故 $a-b\notin[0]$，与条件矛盾，所以整数 $a$，$b$ 属于同一个类，故 D 项正确.

**答案**：CD

【反思】本题看似为集合新定义问题，其实本质是分析“余数”的性质. 读者需注意，本题用到了高中数学常用的两种做题技巧：①多选题若能判断两个选项错误，则其余两个选项均正确；②当正面证明结论较困难时，可考虑先假设结论不成立，由此出发推出矛盾，从而否定假设，得出结论正确，此法叫做“反证法”.

【例 3】设数集 $M=\left\{x\middle|m\le x\le m+\frac{4}{5}\right\}$，$N=\left\{x\middle|n-\frac{1}{4}\le x\le n\right\}$，且集合 $M$，$N$ 都是集合 $U=\{x\,|\,0\le x\le1\}$ 的子集，如果把 $b-a$ 称为非空集合 $\{x\,|\,a\le x\le b\}$ 的“长度”，那么集合 $M\cap N$ 的“长度”的取值范围为______.

**解析**：$M$，$N$ 都是连续取值的集合，要分析 $M\cap N$，考虑画数轴来看，怎么画？两个集合都含参，它们图形是运动的，但观察端点可发现 $M$，$N$ 的长度不变，这样问题的模型就清晰了，

由题意，集合 $M$ 的长度是 $m+\frac{4}{5}-m=\frac{4}{5}$，集合 $N$ 的长度是 $n-(n-\frac{1}{4})=\frac{1}{4}$，所以两个集合的长度都是定值，

调整 $m$，$n$，不外乎就是这两个集合在 0 和 1 之间平移，怎样能使 $M\cap N$ 的长度最大？应该让二者重叠的区域尽可能多，这里 $N$ 的长度比 $M$ 的长度小，所以当 $N\subsetneq M$ 时，$M\cap N$ 的长度最大，

如图 1，$M\cap N$ 的长度的最大值等于集合 $N$ 的长度，即 $\frac{1}{4}$；

怎样能使 $M\cap N$ 的长度最小？应该让二者重叠的区域最少，此时不妨让 $M$ 靠最左边，$N$ 靠最右边（也可 $M$ 靠最右边，$N$ 靠最左边，结果不变），

如图 2，当 $m=0$，$n=1$ 时，$m+\frac{4}{5}=\frac{4}{5}$，$n-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$，$M\cap N=\left\{x\middle|\frac{3}{4}\le x\le\frac{4}{5}\right\}$，此时 $M\cap N$ 的长度最小，

所以 $M\cap N$ 的长度的最小值为 $\frac{4}{5}-\frac{3}{4}=\frac{1}{20}$；

由图 2 出发，若将集合 $N$ 逐渐左移，直至 $N$ 包含于 $M$，则 $M\cap N$ 的长度由 $\frac{1}{20}$ 逐渐增大到 $\frac{1}{4}$，

所以 $M\cap N$ 的长度的取值范围是 $\left\{x\middle|\frac{1}{20}\le x\le\frac{1}{4}\right\}$.

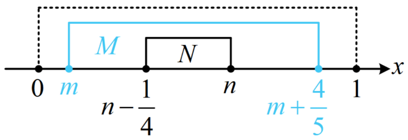



图1

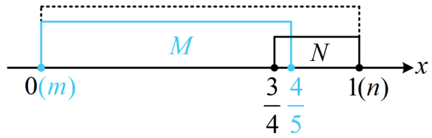



图2

答案：$\left\{x\middle|\frac{1}{20}\le x\le\frac{1}{4}\right\}$

【反思】可以发现四道题的逻辑分析难度逐渐增加. 新定义问题想变难，不外乎就是让“新定义内容”与“逻辑分析”变得更复杂，但无论怎样变，解决问题的基本步骤是差不多的，我们总是先熟悉新定义，用学过的知识去理解新定义，再分析新定义与要解决的问题的关联，从而找到解题思路.

## 强化训练

### A 组 夯实基础

1．（2024 • 江苏模拟）

定义集合运算：$A\odot B=\{z\,|\,z=xy(x+y),x\in A,y\in B\}$，集合 $A=\{0,1\}$，$B=\{2,3\}$，则集合 $A\odot B$ 所有元素之和为______.

一数 • 高中数学一本通

2．（2023 • 河南期中）（多选）

当两个集合中一个集合为另一个集合的子集时，称这两个集合构成“全食”；当两个集合有公共元素，但互不为对方子集时，称这两个集合成“偏食”．对于集合 $A=\left\{-2,0,\frac{1}{2},1\right\}$，$B=\{x\,|\,(ax-1)(x+a)=0\}$，若 $A$ 与 $B$ 构成“全食”或“偏食”，则实数 $a$ 的取值可以是（　　）

A．$-2$　　B．$-\frac{1}{2}$　　C．$0$　　D．$1$

3.（2024·山东模拟）（多选）

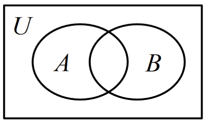
我们知道，如果集合 $A\subseteq S$，那么 $S$ 的子集 $A$ 的补集为 $\complement_S A=\{x\mid x\in S 且 x\notin A\}$，类似地，对于集合 $A$，$B$ 我们把集合 $\{x\mid x\in A 且 x\notin B\}$，叫作集合 $A$ 和 $B$ 的差集，记作 $A-B$，例如，$A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{4,5,6,7,8\}$，则 $A-B=\{1,2,3\}$，$B-A=\{6,7,8\}$，下列解答正确的是（　　）

A．已知 $A=\{4,5,6,7,9\}$，$B=\{3,5,6,8,9\}$，则 $B-A=\{3,7,8\}$

B．已知 $A=\{x\mid x<-1 或 x>3\}$，$B=\{x\mid -2\le x<4\}$，则 $A-B=\{x\mid x<-2 或 x\ge 4\}$

C．如果 $A\subseteq B$，那么 $A-B=\varnothing$

D．已知全集 $U$，集合 $A$，$B$ 的关系如下图所示，则 $A-B=A\cap(\complement_U B)$




B组 强化能力

4.（2023·上海徐汇期末）

若集合 $A$ 同时具有以下三个性质：（1）$0\in A$，$1\in A$；（2）若 $x,y\in A$，则 $x-y\in A$；（3）若 $x\in A$ 且 $x\ne 0$，则 $\frac{1}{x}\in A$；则称 $A$ 为“好集”.

已知命题：①集合 $\{1,0,-1\}$ 是好集；②对任意一个好集 $A$，若 $x,y\in A$，则 $x+y\in A$．以下判断正确的是（　　）

A．①和②均为真命题

B．①和②均为假命题

C．①为真命题，②为假命题

D．①为假命题，②为真命题

5.（2023·北京期中）

定义集合 $P=\{x\mid a\le x\le b\}$ 的“长度”是 $b-a$，其中 $a,b\in\mathbf{R}$．已如集合 $M=\left\{x\middle| m\le x\le m+\frac{1}{2}\right\}$，$N=\left\{x\middle| n-\frac{3}{5}\le x\le n\right\}$，且 $M$，$N$ 都是集合 $\{x\mid 1\le x\le 2\}$ 的子集，则 $M\cap N$ 的“长度”的最小值是______；若 $m=\frac{6}{5}$，$M\cup N$ 的“长度”大于 $\frac{3}{5}$，则 $n$ 的取值范围是______.

6．（2023·山东临沂期中）（多选）

给定数集 $M$，若对于任意 $a,b\in M$，有 $a+b\in M$，且 $a-b\in M$，则称集合 $M$ 为闭集合，则下列说法中不正确的是（　　）

A．集合 $M=\{-2,-1,0,1,2\}$ 为闭集合

B．整数集是闭集合

C．集合 $M=\{n\mid n=2k,k\in \mathbf{Z}\}$ 为闭集合

D．若集合 $A_1$，$A_2$ 为闭集合，则 $A_1\cup A_2$ 为闭集合

## C组　拓展提升

7．（2024·全国模拟）（多选）

一数·高中数学一本通

由无理数引发的数学危机一直延续到19世纪，直到1872年，德国数学家戴德金从连续性的要求出发，用有理数的“分割”来定义无理数（史称戴德金分割），并把实数理论建立在严格的科学基础上，才结束了无理数被认为“无理”的时代，也结束了持续2000多年的数学史上的第一次大危机．所谓戴德金分割，是指将有理数集 $\mathbf{Q}$ 划分为两个非空的子集 $M$ 与 $N$，且满足 $M\cup N=\mathbf{Q}$，$M\cap N=\varnothing$，$M$ 中的每一个元素小于 $N$ 中的每一个元素，则称 $(M,N)$ 为戴德金分割，试判断下列选项中，可能成立的是（　　）

A．$M=\{x\in \mathbf{Q}\mid x<0\}$，$N=\{x\in \mathbf{Q}\mid x>0\}$ 是一个戴德金分割

B．$M$ 没有最大元素，$N$ 有一个最小元素

C．$M$ 有一个最大元素，$N$ 有一个最小元素

D．$M$ 没有最大元素，$N$ 也没有最小元素

8.（2024 • 全国模拟）

大数据时代，需要对数据库进行检索，检索过程中有时会出现笛卡尔积现象，而笛卡尔积会产生大量的数据，对内存、计算资源都会产生巨大压力，为优化检索软件，编程人员需要了解笛卡尔积. 两个集合 $A$ 和 $B$，用 $A$ 中元素为第一元素，$B$ 中元素为第二元素构成有序对，所有这样的有序对组成的集合叫作 $A$ 与 $B$ 的笛卡尔积，又称直积，记为 $A\times B$ . 即 $A\times B=\{(x,y)\,|\,x\in A$ 且 $y\in B\}$ ，关于任意非空集合 $M$，$N$，$T$，下列说法一定正确的是（　　）

A．$M\times N=N\times M$

B．$(M\times N)\times T=M\times(N\times T)$

C．$M\times(N\cup T)\subsetneqq(M\times N)\cup(M\times T)$

D．$M\times(N\cap T)=(M\times N)\cap(M\times T)$

9.（2024 • 全国模拟）

设 $A$ 为非空数集，若对一切 $a\in A$ ， $b\in A$ ，都有

一数 • 高中数学一本通

$ab\in A$ ，那么就说集合 $A$ 对乘法运算是封闭的.

（1）设 $A=\{x\,|\,x=m+\sqrt{2}n,m,n\in \mathbf{Z}\}$ ，判断 $A$ 对乘法运算是否封闭？证明你的结论.

（2）设 $B=\{x\,|\,x=m+\sqrt{2}n,m,n\in \mathbf{Z}$ ，且 $n\neq 0\}$ ，问 $B$ 对乘法运算是否封闭？证明你的结论.