

Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Vollständige Induktion</b>	<b>1</b>
1.1	Beispiel . . . . .	1
<b>2</b>	<b>Mengen</b>	<b>1</b>
2.1	Definitionen . . . . .	1
2.2	Rechenregeln . . . . .	1
2.3	Beweise . . . . .	1
2.4	Beispiel . . . . .	1
2.5	bekannte Mengen . . . . .	1
2.6	Teilmengen von $\mathbb{R}$ . . . . .	1
2.6.1	Intervalle . . . . .	1
2.6.2	Beschränktheit . . . . .	1
2.6.3	Supremum / Infimum . . . . .	1
2.6.4	Archimedisches Prinzip . . . . .	2
2.7	Mächtigkeit . . . . .	2
2.7.1	Abzählbar . . . . .	2
2.7.2	Gleichmächtigkeit zeigen . . . . .	2
2.7.3	weitere gleichmächtige Mengen . . . . .	2
<b>3</b>	<b>Funktionen</b>	<b>2</b>
3.1	Regeln . . . . .	2
3.2	Monotonie . . . . .	2
3.2.1	Monotonie und Differenzial (Ableitung) . . . . .	2
3.3	Identität (identische Abbildung, $\text{id}_X$ ) . . . . .	2
3.4	Injektiv, surjektiv, bijektiv . . . . .	2
3.4.1	Injektiv . . . . .	2
3.4.2	Surjektiv . . . . .	3
3.4.3	Bijektiv . . . . .	3
<b>4</b>	<b>Zwischenwertsatz</b>	<b>3</b>
4.1	Beispiel (Fixpunkt) . . . . .	3
<b>5</b>	<b>Folgen in <math>\mathbb{R}</math></b>	<b>3</b>
5.1	Definitionen . . . . .	3
5.2	Rechnen mit Eigenschaften . . . . .	3
5.3	Rechnen mit Grenzwerten . . . . .	4
5.4	Hilfsmittel . . . . .	4
5.5	Konvergenzkriterien . . . . .	4
5.6	Tipps & Beispiele . . . . .	4
5.6.1	Brüche . . . . .	4
5.6.2	l'Hospital für Folgen (Folge als Funktion) . . . . .	4
5.6.3	Wurzeln . . . . .	4
5.6.4	Laufvariable im Exponent . . . . .	4
5.6.5	Gruppieren . . . . .	4
5.7	Cauchy-Folgen . . . . .	4
<b>6</b>	<b>Reihen</b>	<b>5</b>
6.1	Definitionen . . . . .	5
6.2	Rechenregeln Reihen . . . . .	5
6.3	Konvergenzkriterien . . . . .	5
6.3.1	Reihen Kriterien . . . . .	5
6.4	Potenzreihe . . . . .	5
6.4.1	Konvergenzradius . . . . .	5
<b>7</b>	<b>Taylorreihe / -entwicklung</b>	<b>5</b>
7.1	Rechenregeln . . . . .	5
7.1.1	Addition . . . . .	5
7.1.2	Multiplikation . . . . .	5

7.1.3	Kettenregel . . . . .	5
7.1.4	Bemerkungen / Eigenschaften / Konvergenz . . . . .	5
<b>8</b>	<b>Stetigkeit und Limes einer Funktion</b>	<b>6</b>
8.1	(Punktweise) Stetigkeit . . . . .	6
8.2	Gleichmässige Stetigkeit . . . . .	6
8.3	Lipschitz-Stetigkeit . . . . .	6
8.3.1	Beispiel . . . . .	6
8.4	Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Integrierbarkeit . . . . .	6
8.5	Abhängigkeit der Stetigkeitsbegriffe . . . . .	6
8.6	Regel von de l'Hospital . . . . .	6
8.7	Tips zur Stetigkeit . . . . .	6
<b>9</b>	<b>Stetigkeit von Funktionen mit mehreren Variablen</b>	<b>6</b>
9.1	Typische Fälle . . . . .	6
9.2	Beispiel 1 . . . . .	6
<b>10</b>	<b>Funktionsfolgen</b>	<b>7</b>
10.1	Definition . . . . .	7
<b>11</b>	<b>Differenzierbarkeit</b>	<b>7</b>
11.1	Definition . . . . .	7
11.2	Mittelwertsatz (Satz von Lagrange) . . . . .	7
11.2.1	Beispiel: Ungleichungen . . . . .	7
11.3	Monotonie . . . . .	7
11.3.1	Extremstellen . . . . .	7
11.3.2	Beispiel Wendepunkt berechnen . . . . .	7
11.4	Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit . . . . .	7
11.5	Umkehrsatz . . . . .	7
<b>12</b>	<b>Partialbruchzerlegung</b>	<b>7</b>
12.1	Beispiel . . . . .	8
<b>13</b>	<b>Integralrechnung</b>	<b>8</b>
13.1	Berechnung . . . . .	8
13.1.1	Substitutionsregel . . . . .	8
13.1.2	Integrale mit Parametern . . . . .	8
13.1.3	Beispiel: einfaches Integral . . . . .	8
13.1.4	Beispiel: Substitution . . . . .	8
<b>14</b>	<b>Riemannsummen (Riemannintegral)</b>	<b>8</b>
14.1	Riemansumme . . . . .	8
14.2	Riemann Integrabel . . . . .	9
14.3	Beispiel . . . . .	9
<b>15</b>	<b>Differentialgleichung (DGL)</b>	<b>9</b>
15.1	Klassifizierung der DGL . . . . .	9
15.2	Lineare DGL 1. Ordnung ( $y' + f(x) \cdot y = g(x)$ ) . . . . .	9
15.2.1	Variation der Konstanten, homogen . . . . .	9
15.2.2	Variation der Konstanten, inhomogener Teil . . . . .	9
15.2.3	Beispiel mit Variation der Konstanten . . . . .	10
15.2.4	Separation der Variablen . . . . .	10
15.2.5	Beispiel direkterer Lösungsweg . . . . .	10

15.3	Lineare DGL höherer Ordnung . . . . .	10
15.3.1	Euler . . . . .	11
15.3.2	Beispiel . . . . .	11
15.4	Ansätze für partikuläre Lösung . . . . .	11
<b>16</b>	<b>Kurvenintegral (Linienintegral)</b>	<b>11</b>
16.1	2. Art . . . . .	11
16.2	1. Art . . . . .	12
16.3	Parametrisierung von Kurven . . . . .	12
16.3.1	Beispiel: Kurvenintegral mit zwei Grenzgraphen . . . . .	12
16.4	Berechnung . . . . .	12
16.5	Bogenlänge . . . . .	12
16.6	Strecke . . . . .	12
<b>17</b>	<b>Differentialrechnung in <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>12</b>
17.1	Norm . . . . .	13
17.2	Partielle Differenzierbarkeit . . . . .	13
17.3	Hesse-Matrix . . . . .	13
17.4	Kritische Punkte . . . . .	13
<b>18</b>	<b>Vektoranalysis</b>	<b>13</b>
18.1	Bestimmung eines Potentials durch Raten . . . . .	14
18.2	Bestimmung eines Potentials $\mathbb{R}^2$ . . . . .	14
18.3	Bestimmung eines Potentials $\mathbb{R}^3$ . . . . .	14
18.4	Geometrisches Verständniss . . . . .	14
18.4.1	Beispiel . . . . .	14
18.5	Fläche unter Kurve . . . . .	14
<b>19</b>	<b>Formeltafel</b>	<b>15</b>
19.1	Mitternachtsformel . . . . .	15
19.2	Binomialkoeffizient . . . . .	15
19.3	Argument . . . . .	15
19.4	Kreisfunktionen . . . . .	15
19.4.1	Einheitskreis . . . . .	15
19.5	Trigonometrische Funktionen & Additionstheorem . . . . .	15
19.6	Hyperbelfunktionen . . . . .	15
19.7	Ableitungen . . . . .	15
19.7.1	Regeln . . . . .	15
19.7.2	Ableitungs-Tafel . . . . .	15
19.8	Integrale . . . . .	16
19.9	Reihen . . . . .	16
19.10	Reihenentwicklung . . . . .	16
19.11	Grenzwerte . . . . .	16
19.12	Linienintegral . . . . .	17
19.13	Kreuzprodukt . . . . .	17
19.14	Exponent . . . . .	17
19.15	Wurzel . . . . .	17
19.16	Ungleichungen . . . . .	17
19.17	Logarithmen . . . . .	17
19.18	Komplexe Zahlen . . . . .	17
19.19	Geometrische Körper . . . . .	17
19.19.1	Ellipsoid . . . . .	17
19.20	Geometrie in 3D . . . . .	17
19.21	Ausklammern . . . . .	17
19.22	Aus Serien . . . . .	17
19.23	Funktionsgraphen . . . . .	18
19.24	Pascalsches Dreieck . . . . .	18
<b>20</b>	<b>Reihen Tabellen</b>	<b>19</b>

1 Vollständige Induktion

Grundlägende Struktur um die Aussage A(n) zu beweisen:

- 1. **Induktionsanfang/Verankerung:** Die Aussage wird für n = A bewiesen. A ist dabei meistens der erste Wert für die gegebene Eingabemenge. Der Beweis wird meist durch direktes ausrechnen gemacht.
- 2. **Annahme/Induktionsvoraussetzung:** Hier schreibt man, dass man davon ausgeht die Aussage sei gültig (damit man sie im nächsten Schritt) einsetzen kann. Man kopiert also im Grunde, was man zu beweisen hat mit einigen Zierwörter.
- 3. **Induktionsschritt:** Für jedes n ≥ A wird unter Benutzung der Aussage A(n) die Aussage A(n + 1) bewiesen. Dazu wird die Induktionsannahme verwendet.

1.1 Beispiel

Es ist zu beweisen, dass für jedes n ∈ ℕ folgendes gilt: 1 + 2 + 3 + ... + n = n(n+1)/2

Lemma: ∀ ∈ ℕ. 1 + 2 + 3 + ... + n = n(n+1)/2

Beweis:  
Sei P(n) ≡ 1 + 2 + 3 + ... + n = n(n+1)/2.  
Wir zeigen ∀ ∈ ℕ. P(n) mit vollständiger Induktion.

Induktionsanfang: Zeige P(0).

0 = 0(0 + 1) / 2

Induktionsschritt:  
Sei n ∈ N beliebig und nehmen wir P(n) an (Induktionsvoraussetzung).  
Zeige P(n + 1) (Induktionsbehauptung).

1 + 2 + 3 + ... + n + (n + 1) = (1)

= n(n + 1) / 2 + (n + 1) — P(n) Induktionsvor. (2)

= n(n + 1) / 2 + 2(n + 1) — arith (3)

= (n + 1) \* ((n + 1) + 1) / 2 — arith (4)

qed.

2 Mengen

2.1 Definitionen

- Teilmenge:** A ⊆ B :⇔ ∀x : x ∈ A → x ∈ B
- Vereinigung:** A ∪ B := {x | (x ∈ A) ∨ (x ∈ B)}
- Durchschnitt:** A ∩ B := {x | (x ∈ A) ∧ (x ∈ B)}
- Differenz:** A \ B = A − B := {x | (x ∈ A) ∧ (x ∉ B)}
- Komplement:** A^c = A̅ := {x | x ∉ A}

2.2 Rechenregeln

A ∪ B = B ∪ A	A ∩ B = B ∩ A
A ∪ (B ∩ C) = (A ∪ B) ∩ C	A ∩ (B ∪ C) = (A ∩ B) ∪ C
A ∪ (B ∩ C) = (A ∪ B) ∩ (A ∪ C)	A ∩ (B ∪ C) = (A ∩ B) ∪ (A ∩ C)
(A ∪ B)^c = A^c ∩ B^c	(A ∩ B)^c = A^c ∪ B^c
(A \ B) ∪ C = (A ∪ C) ∩ (B^c ∪ C)	(A \ B) ∩ C = A \ (B ∩ C)
(A \ B) \ C = A \ (B ∪ C)	A \ B = A ∩ B^c

2.3 Beweise

Um Mengengleichungen zu beweisen überführt man üblicherweise eine Seite in eine Form, die nur noch aus

logischen Operatoren besteht (∧, ∨, ∈, ∉) und formt dann so um, dass man zur gewünschten anderen Seite kommt durch Rückführung in eine Form mit Mengenoperatoren. Dazu verwendet man am einfachsten die Definitionen weiter oben.

2.4 Beispiel

Zu Zeigen: (A ∪ B)^c = A^c ∩ B^c wobei A, B, C Untermengen von X sind.

(A ∪ B)^c = {x ∈ X : x ∉ (A ∪ B)} = {x ∈ X : x ∉ A ∧ x ∉ B} = {x ∈ X : x ∉ A} ∩ {x ∈ X : x ∉ B} = A^c ∩ B^c

2.5 bekannte Mengen

- ℕ, **natürliche Zahlen:** {1, 2, 3, ...}
- ℤ, **ganze Zahlen:** {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...}
- ℚ, **rationale Zahlen:** {p/q | p ∈ ℤ, q ∈ ℕ \ {0}}
- ℝ, **reelle Zahlen:** "alle" Zahlen, die wir im Alltag brauchen. Genauer: rationale Zahlen und die irrationalen Zahlen.

2.6 Teilmengen von ℝ

2.6.1 Intervalle

Schreibweise	Definition	Bezeichnung
]a, b[, (a, b)	{x ∈ ℝ   a < x < b}	offen
[a, b[, [a, b)	{x ∈ ℝ   a ≤ x < b}	(rechts) halboffen
]a, b], (a, b]	{x ∈ ℝ   a < x ≤ b}	(links) halboffen
[a, b]	{x ∈ ℝ   a ≤ x ≤ b}	abgeschlossen

Achtung: Ist a oder b "unendlich" (±∞), so muss es auf der entsprechenden Seite offen sein: z.B. [a, ∞[, ]-∞, b]. Unendlich ist keine konkrete Zahl und kann somit nicht gleich einer anderen Zahl sein, was nötig wäre für ≤.

In der Topologie sind reelle Intervalle Beispiele für zusammenhängende Mengen. Offene Intervalle sind offene Mengen und abgeschlossene Intervalle sind abgeschlossene Mengen. Halboffene Mengen sind weder offen noch abgeschlossen. Abgeschlossene beschränkte Intervalle sind kompakt.

2.6.2 Beschränktheit

Die Menge M sei eine nicht-leere Teilmenge von ℝ (M ⊂ ℝ, M ≠ ∅).

Die Menge M ist beschränkt, wenn C1, C2 ∈ ℝ existieren, sodass gilt: ∀x ∈ M : C1 ≤ x ≤ C2. Äquivalent dazu ist die Aussage: ∃C ∈ ℝ ∀x ∈ M : |x| ≤ C

Die Menge M ist nach oben beschränkt, wenn C existiert, sodass gilt: ∀x ∈ M : x ≤ C. *Nach unten beschränkt* ist entsprechend: ∃C ∈ ℝ ∀x ∈ M : C ≤ x.

2.6.3 Supremum / Infimum

Ist M ⊂ ℝ nach oben beschränkt, so nennt man jedes C mit x ≤ C, ∀x ∈ M eine obere Schranke von M. Die kleinste obere Schranke (existiert immer in ℝ) nennt man Supremum von M (sup M).

Analog dazu wird die untere Schranke und das Infimum (inf M) definiert.

Falls die Menge M ein grösstes (bzw. kleinstes) Element besitzt, so nennt man es Maximum (bzw. Minimum). Es gilt:

- Ist M ⊂ ℝ abgeschlossen und beschränkt, so existieren Minimum und Maximum von M
- Wenn max M existiert, dann ist sup M = max M
- Ist sup M ∈ M, so ist max M = sup M
- Wenn min M existiert, dann ist inf M = min M
- Ist inf M ∈ M, so ist min M = inf M

### 2.6.3.1 mathematische Definition

$\sup M = a$  gilt genau dann, wenn

- $\forall x \in M : x \leq a$ ,  $a$  ist somit obere Schranke von  $M$
- $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in M : x > a - \varepsilon$ , d.h.  $a - \varepsilon$  ist keine obere Schranke mehr, egal wie klein man  $\varepsilon$  auch wählt  $\rightarrow a$  ist kleinste obere Schranke.

$\inf M = a$  gilt genau dann, wenn

- $\forall x \in M : x \geq a$ ,  $a$  ist somit untere Schranke von  $M$
- $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in M : x < a + \varepsilon$ , d.h.  $a + \varepsilon$  ist keine untere Schranke mehr, egal wie klein man  $\varepsilon$  auch wählt  $\rightarrow a$  ist grösste untere Schranke.

### 2.6.4 Archimedisches Prinzip

**Satz 2.1** (Archimedisches Prinzip V. 1). Zu jeder Zahl  $0 < b \in \mathbb{R}$  gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $b < n$

oder

**Satz 2.2** (Archimedisches Prinzip V. 2). Zu den zwei Zahlen  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $y > x > 0$  existiert eine Zahl  $n \in \mathbb{N}$ , sodass gilt:  $nx > y$

Geometrisch: Hat man zwei Strecken auf einer Geraden, so kann man die grössere von beiden übertreffen, wenn man die kleinere nur oft genug abträgt.

## 2.7 Mächtigkeit

Eine Menge  $A$  ist gleichmächtig zu einer Menge  $B$ , wenn es eine Bijektion  $f : A \rightarrow B$  gibt. Man schreibt dann  $|A| = |B|$ .

Hat man zwischen zwei Mengen eine Funktion  $f : A \rightarrow B$  gefunden, die bijektiv ist, so gibt es eine Umkehrfunktion, die ebenfalls Bijektiv ist. Diese bildet jedes Element von  $B$  auf eines aus  $A$  ab.

### 2.7.1 Abzählbar

Eine Menge  $A$  ist abzählbar, wenn sie gleichmächtig zur Menge  $\mathbb{N}$  (natürliche Zahlen) ist.

### 2.7.2 Gleichmächtigkeit zeigen

Zeigt man durch angeben einer bijektiven Funktion.

#### 2.7.2.1 Beispiel

Zu zeigen:  $U := \{2k + 1 : k \in \mathbb{N}\}$  gleichmächtig zu  $\mathbb{N}$  ist.

**Beweis:** Sei  $f : \mathbb{N} \rightarrow U$  gegeben durch

$$f(n) = \begin{cases} n & n \text{ ungerade} \\ -n - 1 & n \text{ gerade} \end{cases}$$

Diese Funktion ist offensichtlich bijektiv (sonst Umkehrfunktion angeben), wodurch  $U$  gleichmächtig  $\mathbb{N}$  ist.

### 2.7.3 weitere gleichmächtige Mengen

- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$  sind gleichmächtig
- $\mathbb{R}, ]0, 1[$  sind gleichmächtig
- $\mathbb{R}$  ist mächtiger ("überabzählbar") als  $\mathbb{N}$

## 3 Funktionen

Eine Funktion  $f : D \rightarrow W$  ist eine Vorschrift, nach der jedem Element aus  $D$  ein Element aus  $W$  zugeordnet wird.  $D$  ist der Definitionsbereich (Bereich der gültigen Eingaben) und  $W$  der Wertebereich (Bereich der gültigen Ausgaben).

Ist  $f : M \rightarrow N$  und  $g : N \rightarrow P$ , so ist die Funktion  $g \circ f : M \rightarrow P$ ,  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ , eine Komposition von  $f$  und  $g$ .

### 3.1 Regeln

- $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$
- $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

### 3.2 Monotonie

Die Funktion  $f$  ist...

**monoton steigend**, falls aus  $x_1 < x_2$  immer  $f(x_1) \leq f(x_2)$  folgt

**streng monoton steigend**, falls aus  $x_1 < x_2$  immer  $f(x_1) < f(x_2)$  folgt

**monoton fallend**, falls aus  $x_1 < x_2$  immer  $f(x_1) \geq f(x_2)$  folgt

**streng monoton fallend**, falls aus  $x_1 < x_2$  immer  $f(x_1) > f(x_2)$  folgt

#### 3.2.1 Monotonie und Differenzial (Ableitung)

Ist  $f$  auf dem Intervall  $I$  differenzierbar, so gilt

- $f'(x) > 0 \forall x \in I \Rightarrow f$  streng monoton steigend
- $f'(x) \geq 0 \forall x \in I \Leftrightarrow f$  monoton steigend
- $f'(x) < 0 \forall x \in I \Rightarrow f$  streng monoton fallend
- $f'(x) \leq 0 \forall x \in I \Leftrightarrow f$  monoton fallend

### 3.3 Identität (identische Abbildung, $\text{id}_X$ )

Sei  $M$  eine Menge, dann ist die *identische Abbildung* von  $M$  definiert durch:  $\text{id}_M : M \rightarrow M$  mit  $\text{id}_M(x) = x$ .

Sei  $f : M \rightarrow N$  eine beliebige Funktion, dann gilt:

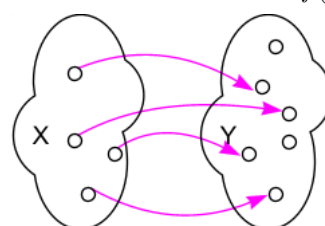
- $\text{id}_N \circ f = f$
- $f \circ \text{id}_M = f$

### 3.4 Injektiv, surjektiv, bijektiv

#### 3.4.1 Injektiv

Sei  $f : M \rightarrow N$ ,  $f$  ist injektiv, wenn folgendes gilt:

- $\forall x_1, x_2 \in M : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
- $\forall x_1, x_2 \in M : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
- $\forall y \in N : \exists! x \in M : f(x) = y \vee \neg(\exists x \in M : f(x) = y)$ : wenn zu jedem  $y \in N$  höchstens (genau eins oder keins) ein  $x \in M$  existiert mit  $f(x) = y$



#### 3.4.1.1 Injektivität zeigen

Injektiv wird meist direkt über die zweite Eigenschaft gemacht oder per Widerspruchsbeweis (indirekter Beweis) mittels der ersten Eigenschaft bewiesen. **»» TODO [Beispiel?]**

#### 3.4.1.2 Eigenschaften

- Die Gleichung  $f(x) = y$ ,  $f$  ist injektiv und  $y$  gegeben, verfügt über eine oder keine Lösung für  $x$
- Eine *stetige reellwertige* Funktion auf einem *reellen Intervall* ist genau dann injektiv, wenn sie in ihrem gesamten Definitionsbereich *streng monoton* steigend oder fallend ist.

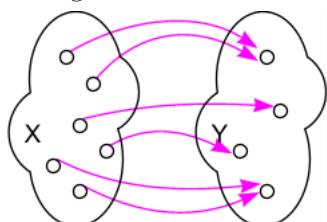
- Sind die beiden Funktionen  $g, f$  injektiv, so ist die Komposition  $g \circ f$  ebenfalls injektiv
- Ist  $g \circ f$  injektiv, so ist  $f$  injektiv
- $f : M \rightarrow N$  ist injektiv, wenn es die links inverse Funktion  $g : N \rightarrow M$  gibt, so dass  $g \circ f = \text{id}_M$

### 3.4.2 Surjektiv

Sei  $f : M \rightarrow N$ ,  $f$  ist surjektiv, wenn folgendes gilt:

$$\forall y \in N : \exists x \in M : f(x) = y$$

Wenn also für jedes Element aus  $N$  mindestens ein (können auch mehr sein) Element in  $M$  gibt, dass auf das Element aus  $N$  zeigt.

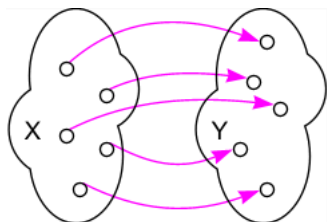


#### 3.4.2.1 Eigenschaften

- Die Gleichung  $f(x) = y$ ,  $f$  ist surjektiv und  $y$  gegeben, verfügt über eine oder mehrere Lösungen für  $x$ .
- Sind die Funktionen  $f : A \rightarrow B$  und  $g : B \rightarrow C$  surjektiv, so ist die Komposition  $g \circ f : A \rightarrow C$  auch surjektiv
- Ist  $g \circ f$  surjektiv, so folgt, dass  $g$  surjektiv ist
- $f : A \rightarrow B$  ist genau dann surjektiv, wenn  $f$  ein rechtes Inverse hat, also  $g : B \rightarrow A$  mit  $f \circ g = \text{id}_B$

### 3.4.3 Bijektiv

Eine Funktion ist bijektiv, wenn sie injektiv und surjektiv ist.



#### 3.4.3.1 Eigenschaften

- Es gelten die Eigenschaften von Injektivität und Surjektivität
- Die Gleichung  $f(x) = y$ ,  $f$  ist bijektiv und  $y$  gegeben, verfügt über genau eine Lösung für  $x$
- Sind die Funktionen  $f : A \rightarrow B$  und  $g : B \rightarrow C$  bijektiv, dann ist auch die Komposition  $g \circ f : A \rightarrow C$  bijektiv.
- Ist  $g \circ f$  bijektiv, dann ist  $f$  injektiv und  $g$  surjektiv

## 4 Zwischenwertsatz

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige reelle Funktion, die auf einem Intervall definiert ist. Dann existiert zu jedem  $u \in [f(a), f(b)]$  (falls  $f(a) \leq f(b)$ , sonst  $u \in [f(b), f(a)]$ ) ein  $c \in [a, b]$ , sodass gilt:  $f(c) = u$ .

### 4.1 Beispiel (Fixpunkt)

Sei  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ . Zeige:  $f$  hat einen Fixpunkt, d.h. es gibt ein  $x \in [0, 1]$  derart, dass  $f(x) = x$ .

Man erzeugt die Funktion  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) := f(x) - x$ . Es gilt:  $f(x) = x \Leftrightarrow g(x) = 0$ , d.h. ein Punkt  $x$  ist genau dann

ein Fixpunkt von  $f$  wenn er eine Nullstelle von  $g$  ist. Es ist zu zeigen, dass  $g$  immer eine Nullstelle auf  $[0, 1]$  hat. Als Differenz von zwei stetigen Funktionen ist  $g$  stetig. Weil ausserdem  $f(x) \in [0, 1] \forall x \in [0, 1]$  gilt, ist  $g(0) \geq 0 \geq g(1)$ . Da  $g$  stetig ist, gibt es daher nach dem Zwischenwertsatz ein  $x \in [0, 1]$  mit  $g(x) = 0$  und somit gibt es  $f(x) = x$ .

## 5 Folgen in $\mathbb{R}$

### 5.1 Definitionen

**konvergent**  $\lim_{x \rightarrow \infty} a_n$  existiert

**divergent**  $\lim_{x \rightarrow \infty} a_n$  existiert nicht

**Nullfolge**  $\lim_{x \rightarrow \infty} a_n = 0$  gilt

**beschränkt** Es gibt  $C_1, C_2$ , so dass gilt  $C_1 \leq a_n \leq C_2$  bzw.  $C$  gibt, so dass  $|a_n| \leq C$

**unbeschränkt** falls  $(a_n)$  nicht beschränkt ist. Unbeschränkte folgen sind stets divergent

**monoton wachsend**  $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

**streng monoton wachsend**  $a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

**monoton fallend**  $a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

**streng monoton fallend**  $a_n > a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

**alternierend** die Vorzeichen der Folgenglieder wechseln sich ab

**bestimmt divergent / uneigentlich konvergent** es gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm \infty$

**Definition 5.1** (Grenzwert).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow a_n \rightarrow a$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$$

**Definition 5.2** (Teilfolge). Werden von einer Folge beliebig viele Glieder weggelassen, aber nur so viele, dass noch unendlich viele übrigbleiben, so erhält man eine Teilfolge.

**Definition 5.3** (Häufungspunkt).  $a$  ist Häufungspunkt der Folge  $(a_n)$ , wenn in jeder Umgebung von  $a$  unendlich viele Folgenglieder liegen. Das ist äquivalent damit, dass  $a$  der Limes einer Teilfolge von  $(a_n)$  ist.

**Definition 5.4** (Limes superior / Limes inferior). Ist  $(a_n)$  eine beschränkte Folge, so heisst der grösste Häufungspunkt Limes superior ( $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$  oder  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ ). Der kleinste Häufungspunkt ist der Limes inferior ( $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$  oder  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ )

### 5.2 Rechnen mit Eigenschaften

Addition:

- $(a_n), (b_n)$  konvergiert  $\Rightarrow (a_n + b_n)$  konvergiert
- $(a_n)$  konvergiert,  $(b_n)$  divergent  $\Rightarrow (a_n + b_n)$  divergent
- $(a_n)$  beschränkt,  $(b_n)$  beschränkt  $\Rightarrow (a_n + b_n)$  beschränkt
- $(a_n)$  beschränkt,  $(b_n)$  unbeschränkt  $\Rightarrow (a_n + b_n)$  unbeschränkt
- $(a_n)$  beschränkt,  $(b_n) \rightarrow \pm \infty \Rightarrow (a_n + b_n) \rightarrow \pm \infty$
- $(a_n) \rightarrow \infty, (b_n) \rightarrow \infty \Rightarrow (a_n + b_n) \rightarrow \infty$
- $(a_n) \rightarrow -\infty, (b_n) \rightarrow -\infty \Rightarrow (a_n + b_n) \rightarrow -\infty$

Produkt:

- $(a_n)$  Nullfolge,  $(b_n)$  beschränkt  $\Rightarrow (a_n b_n)$  Nullfolge
- $(a_n)$  konvergent,  $(b_n)$  beschränkt  $\Rightarrow (a_n b_n)$  beschränkt
- $(a_n)$  konvergent,  $(b_n)$  konvergent  $\Rightarrow (a_n b_n)$  konvergent
- $(a_n)$  konvergent gegen  $a \neq 0$ ,  $(b_n)$  divergent  $\Rightarrow (a_n b_n)$  divergent

### 5.3 Rechnen mit Grenzwerten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$$

Achtung! Untenstehendes gilt nur wenn die Grenzwerte von  $a_n$  und  $b_n$  existieren. (Nicht 0 oder  $\inf$  sind.)

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot a$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab$
- Achtung:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^c = (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n)^c$ , nur wenn  $c \neq n$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ , ( $b_n$ ) keine Nullfolge

### 5.4 Hilfsmittel

**Bernoullische Ungleichung:** Für  $x \geq -1$  und  $n \in \mathbb{N}$

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

**Vergleich von Folgen:** weiter rechts stehende Werte gehen schneller nach  $\infty$

$$1, \ln n, n^\alpha (\alpha > 0), q^n (q > 1), n!, n^n$$

**Stirlingformel:**

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \Rightarrow \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \leq n! \leq \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \cdot e^{\frac{1}{2n}}$$

### 5.5 Konvergenzkriterien

$$a_n \rightarrow a \Leftrightarrow a_n - a \rightarrow 0 \Leftrightarrow |a_n - a| \rightarrow 0$$

- Ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , so ist der Limes  $a$  einziger Häufungspunkt der Folge  $(a_n)$  und jede Teilfolge konvergiert auch gegen  $a$ .  
**Beispiel:** Wegen  $(1 + \frac{1}{n})^n \rightarrow e$ , so gilt auch  $(1 + \frac{1}{2n})^{2n} \rightarrow e$
- Hat die Folge zwei verschiedene Häufungspunkte, so ist die Folge sicher divergent.
- Ist die Folge monoton steigend und nach oben beschränkt, dann existiert  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ . Ist die Folge monoton fallend und nach unten beschränkt, dann existiert  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$
- Konvergiert  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ , so ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$   
Damit kann die Regeln für Reihen verwendet werden. Siehe Grenzwerte von Reihen.
- Gibt es eine Funktion  $f$  mit  $f(n) = a_n$  und  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$ , so gilt auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ .  
Damit kann man zum Beispiel die Regel von l'Hospital und die restlichen Methoden anwenden. Siehe Grenzwerte von Funktionen.  
Achtung: Es kann sein, dass  $f$  keinen Grenzwert besitzt, aber  $(a_n)$  schon.
- **Einschlusskriterium:** Sind  $(a_n), (b_n), (c_n)$  Folgen mit  $a_n \leq b_n \leq c_n$  und haben  $(a_n), (c_n)$  den gleichen Grenzwert  $a$ , so konvergiert auch  $(b_n)$  nach  $a$ .

### 5.6 Tipps & Beispiele

#### 5.6.1 Brüche

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \ln n}{\sqrt{n^4 - n^3}}$$

Bei Brüchen empfiehlt es sich den am stärksten wachsenden Teil (das am schnellsten wachsende  $n$ ) zu kürzen. In diesem Fall ist es das  $n^4$  in der Wurzel, also  $n^2$ .

$$\begin{aligned} \dots &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \ln n}{\sqrt{n^4 - n^3}} \cdot \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \ln n}{n^2 \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} \cdot \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{\ln n}{n^2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{n}}} = \frac{1+0}{\sqrt{1-0}} = 0 \end{aligned}$$

#### 5.6.2 l'Hospital für Folgen (Folge als Funktion)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^2}$$

Die Funktion  $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$  entspricht unseren Folgegliedern ( $f(n) = a_n = \frac{\ln n}{n^2}$ ). Für  $n \rightarrow \infty$  hat der Nenner und der Zähler den Grenzwert  $\infty$ , also wenden wir die Regel von l'Hospital an.

$$\dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Somit geht auch die Folge gegen 0.

#### 5.6.3 Wurzeln

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + an + 1} - \sqrt{n^2 + 1})$$

Hier wendet man die dritte binomische Formel an, um den Grenzwert zu berechnen. Die einzelnen Terme streben jeweils gegen  $\infty$  und  $\infty - \infty$  kann nicht berechnet werden.

Achtung auf die Vorzeichen beim Anwenden der Regel!

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + an + 1} - \sqrt{n^2 + 1}) \cdot \left( \frac{\sqrt{n^2 + an + 1} + \sqrt{n^2 + 1}}{\sqrt{n^2 + an + 1} + \sqrt{n^2 + 1}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + an + 1) - (n^2 + 1)}{\sqrt{n^2 + an + 1} + \sqrt{n^2 + 1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an}{\sqrt{n^2 + an + 1} + \sqrt{n^2 + 1}} \end{aligned}$$

nun verwenden wir den Tipp für Brüche und kürzen das  $n$  heraus

$$\dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{\sqrt{1 + \frac{a}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = \frac{a}{1+1} = \frac{a}{2}$$

» **TODO** [Gelbes Rechenbuch 1, Seiten 163+ mit aufnehmen? Rekursive Folgen und so...]

#### 5.6.4 Laufvariable im Exponent

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 0} (3 - |x|)^{\frac{\sin(x)}{x}} \\ &\Rightarrow (3 - |x|)^{\frac{\sin(x)}{x}} = e^{\frac{\sin(x)}{x} \cdot \ln(3 - |x|)} \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (3 - |x|)^{\frac{\sin(x)}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\sin(x)}{x} \cdot \ln(3 - |x|)} \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \ln(3 - |x|) = \ln(3) \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (3 - |x|)^{\frac{\sin(x)}{x}} = e^{\ln(3)} = 3 \end{aligned}$$

#### 5.6.5 Gruppieren

Hat man zum Beispiel die Folge  $s_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1}$  so kann man die einzelnen Terme gruppieren und abschätzen in diesem Fall z.B. mit  $\frac{1}{4}$  (zweiter Term, dritter und vierter Term, fünfter bis achter Term, nächste 8 Terme, etc.). Wir erhalten dann  $s_{2^k} \geq 1 + \frac{k}{4}$  und sehen somit dass die Reihe nicht beschränkt ist und somit auch nicht konvergiert.

### 5.7 Cauchy-Folgen

**Definition 5.5** (Cauchy-Folge). Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{R}$ .  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heisst **Cauchy-Folge**, falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n, l \geq n_0 : |a_n - a_l| < \varepsilon$$

Die Definition sagt grundsätzlich aus, dass ab einem  $n_0(\varepsilon)$  (also einem Anfang  $n_0$ , der abhängig von  $\varepsilon$  ist) die Folgeglieder nur noch  $\varepsilon$  Abstand zu einander haben. Also der Abstand beliebig klein wird zwischen Folgegliedern.

**Satz 5.1** (Cauchy-Kriterium). Für  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  sind äquivalent:

- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist konvergent
- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist Cauchy-Folge

## 6 Reihen

### 6.1 Definitionen

Eine Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ist konvergent mit Grenzwert  $s$ , wenn die Folge der Partialsummen  $(S_m)$ ,  $S_m := \sum_{n=1}^m a_n$  gegen  $s$  konvergiert. Also wenn gilt:  $S_m \rightarrow s$ .

**Definition 6.1** ( $\varepsilon$ -Kriterium).  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m \geq n_0 : |\sum_{n=1}^m a_n - s| < \varepsilon$

**Definition 6.2** (Absolute Konvergenz). Wenn auch die Reihe der Absolutbeträge  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  konvergiert, so heisst die Reihe absolut konvergent. Aus der absoluten Konvergenz folgt Konvergenz. Der Umkehrschluss ist nicht möglich.

### 6.2 Rechenregeln Reihen

Für konvergente Reihen gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha A + \beta B$$

### 6.3 Konvergenzkriterien

Konvergiert  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , so ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .  
Wenn also  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ , so konvergiert die Reihe nicht

#### 6.3.1 Reihen Kriterien

Achtung. Die nachfolgenden Kriterien sagen nur aus, ob die Reihen konvergiert oder nicht. Sie sagen nicht aus, gegen was sie konvergieren!

##### 6.3.1.1 Quotientenkriterium

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \rightarrow q. \quad \text{Dann gilt} \begin{cases} q < 1 & \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut} \\ q = 1 & \Rightarrow \text{keine Aussage} \\ q > 1 & \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergiert} \end{cases}$$

##### 6.3.1.2 Wurzelkriterium

$$\sqrt[n]{|a_n|} \rightarrow q. \quad \text{Dann gilt} \begin{cases} q < 1 & \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut} \\ q = 1 & \Rightarrow \text{keine Aussage} \\ q > 1 & \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergiert} \end{cases}$$

##### 6.3.1.3 Leibnizkriterium

Wenn gilt:

- $(a_n)$  ist alternierende Folge, d.h die Vorzeichen wechseln jedes Mal
- $a_n \rightarrow 0$  oder  $|a_n| \rightarrow 0$
- $(|a_n|)$  ist monoton fallend

...dann konvergiert  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

##### 6.3.1.4 Majorantenkriterium

Ist  $|a_n| \leq b_n$  und  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  konvergent, so konvergiert  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  absolut.

#### 6.3.1.5 Minorantenkriterium

Ist  $a_n \geq b_n \geq 0$  und  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  divergent, so divergiert  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

### 6.4 Potenzreihe

Die Potenzreihe hat die allgemeine Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

$x_0$  ist der Entwicklungspunkt der Potenzreihe und  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine beliebige Folge.

#### 6.4.1 Konvergenzradius

Die Berechnung des Konvergenzradius ist für solche Reihen einfacher, da der Faktor  $(x - x_0)$  nicht analysiert werden muss. Entsprechend gilt für den Konvergenzradius  $r$ :  $r = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$  (Wurzelkriterium) bzw.  $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$  (Quotientenkriterium).

## 7 Taylorreihe / -entwicklung

Funktionen werden in der Umgebung eines bestimmten Punktes durch eine Potenzreihe dargestellt. Damit wird die ursprüngliche Funktion angenähert.

Die Taylorreihe der Funktion  $f$  mit Grad  $m$  um den Punkt  $a$  ist:  $T_m f(x; a) = \sum_{n=0}^m \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$   
 $= f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x - a) + \frac{f''(a)}{2!} (x - a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!} (x - a)^3 + \frac{f^{(4)}(a)}{4!} (x - a)^4 \dots$   
 Dabei ist  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$

### 7.1 Rechenregeln

#### 7.1.1 Addition

$f, g$  sind  $m$ -mal differenzierbar:

$$T_m(f + g)(x; a) = T_m f(x; a) + T_m g(x; a)$$

#### 7.1.2 Multiplikation

$f, g$  sind  $m$ -mal differenzierbar:

$$T_m(f \cdot g)(x; a) = T_m(T_m f(x; a) \cdot T_m g(x; a))$$

Achtung: Anschaulich bedeutet es folgendes: Man multipliziert die beiden Taylorreihen von  $f$  und  $g$  miteinander  $(T_m f(x; a) \cdot T_m g(x; a))$ . Danach entfernt man alle Terme der Ordnung  $> m$ .

#### 7.1.3 Kettenregel

$f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow \mathbb{R}$  zwei  $m$ -mal differenzierbare Funktionen. Entwickelt wird um den Punkt  $a \in A$  mit  $f(a) = q$  ( $q$  muss man berechnen). Dann gilt:

$$\begin{aligned} T_m(g \circ f)(x; a) &= T_m(f(g))(x; a) \\ &= T_m(T_m(g)(x; q) \circ (T_m(f)(x; a) - q)) \end{aligned}$$

#### 7.1.4 Bemerkungen / Eigenschaften / Konvergenz

- Der Konvergenzradius kann 0 sein
- Falls Taylor-Reihe konvergiert, dann ist sie nicht notwendig gleich der Funktion, die sie beschreibt. Gegenbeispiel:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

- Ist  $f$  eine Potenzreihe, dann ist diese Potenzreihe auch die Taylor-Reihe



## 8 Stetigkeit und Limes einer Funktion

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  bedeutet, dass die Funktion  $f$  für  $x \rightarrow a$  den Grenzwert  $b$  hat. Der Funktionswert nähert sich also immer näher an  $b$  heran, wenn  $x$  sich  $a$  annähert (Epsilon-Delta-Kriterium).

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$$

Funktionsfolgen verhalten sich desweiteren wie Folgen. Es gelten also die gleichen Eigenschaften.

Existiert der Grenzwert, so konvergiert die Funktion, andernfalls divergiert sie. Der Grenzwert existiert nicht wenn die Funktion eine Division durch 0 enthält oder wenn er gegen  $\infty$ , resp.  $-\infty$  divergiert.

### 8.1 (Punktweise) Stetigkeit

Die Definition für punktweise Stetigkeit ist die gleiche, wie die für  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  (siehe die Definition gerade über diesem Kapitel).

Charakterisierungen der Stetigkeit von  $f$  im Punkt  $a$ :

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  ist die Definition
- Man kann  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  auch als  $f(\lim_{x \rightarrow a} x)$  schreiben. Also die Reihenfolge zwischen Bildung des Grenzwertes und der Anwendung der Funktion vertauschen. Beispiel:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x} = \sin(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}) = \sin(0) = 0$
- Es gilt linker Grenzwert = Funktionswert = rechter Grenzwert:  $\lim_{x \nearrow a} f(x) = f(a) = \lim_{x \searrow a} f(x)$
- Für eine beliebige (jede) Folge  $(x_n)$  mit  $x_n \rightarrow a$  hat  $f(x_n) \rightarrow f(a)$  zu gelten. Dies ist praktisch um zu zeigen, dass eine Funktion an einer Stelle nicht stetig ist.

Eine Funktion  $f$  ist stetig, wenn sie in allen Punkten stetig ist ("punktweise Stetigkeit").

Es gelten folgenden Eigenschaften:

- Ist  $f$  und  $g$  stetig in einem gemeinsamen Definitionsbereich, so sind  $f + g$ ,  $f - g$ ,  $f \cdot g$ ,  $\frac{f}{g}$ ,  $f \circ g$  ebenfalls stetig.

### 8.2 Gleichmässige Stetigkeit

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}$ , dann ist  $f$  genau dann stetig wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, x_0 \in D : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Der Unterschied zur punktweisen Stetigkeit liegt darin, dass  $\delta$  und  $\varepsilon$  nicht auch noch von  $x_0$  abhängig sind. So ist  $f(x) = x^2$  zwar (punktweise) stetig, aber nicht gleichmässig stetig. Begründung: Je weiter rechts man zwei Punkte mit einem Abstand kleiner als  $\delta$  wählt, desto grösser wird der Abstand der beiden Funktionswerte. Dieser Abstand der Funktionswerte müsste aber kleiner als das vorgegebene  $\varepsilon$  bleiben.

### 8.3 Lipschitz-Stetigkeit

Eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist Lipschitz-stetig, wenn eine Konstante  $L$  existiert, so dass gilt:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : \|f(x_1) - f(x_2)\| \leq L \cdot \|x_1 - x_2\|$$

#### 8.3.1 Beispiel

Zeigen sie das die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

konvergiert. Man zeige, dass der Grenzwert  $L$  die Ungleichung  $\frac{1}{2} < L < \frac{1}{5}$  erfüllt.

Die Reihe konvergiert. Sei  $L_N = \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$  die N-te Partialsumme. Es gilt

$$L_2 < L_4 < L_6 < \dots < L_5 < L_3 < L_1$$

und daraus folgt  $L_2 = \frac{1}{2} < L < \frac{1}{5} = L_3$ .

### 8.4 Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Integrierbarkeit

Sei  $f$  eine Funktion, so gilt:

$f$  differenzierbar  $\Rightarrow f$  stetig  $\Rightarrow f$  integrierbar

$f$  nicht integrierbar  $\Rightarrow f$  nicht stetig  $\Rightarrow f$  nicht differenzierbar

### 8.5 Abhängigkeit der Stetigkeitsbegriffe

Sei  $f$  eine reelle Funktion, so gilt:

$f$  Lipschitz-stetig  $\Rightarrow f$  absolut stetig  $\Rightarrow f$  gleichmässig stetig  $\Rightarrow f$  (punktweise) stetig.

### 8.6 Regel von de l'Hospital

Sei  $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ . Es hat zu gelten:

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  oder  $\pm \infty$
- In der Nähe von  $a$  ist  $g'(x) \neq 0$

Dann ist

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Diese Regel kann man mehrfach anwenden hintereinander.

Achtung: Es kann sein, dass der Limes  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g'(x)}$  nicht existiert, aber von  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  trotzdem.

### 8.7 Tips zur Stetigkeit

- Um zu zeigen das eine Funktion mit mehreren Parameter in einem Punkt *nicht* stetig ergänzbar ist hilft es häufig die Parameter gleich zu setzen. (Häufig geht dann der Limes nicht gegen den gesuchten Punkt  $\Rightarrow$  die Funktion ist *nicht* stetig ergänzbar.)

## 9 Stetigkeit von Funktionen mit mehreren Variablen

**Definition 9.1** (Grenzwert). Eine Funktion  $f(\vec{x})$  hat einen Grenzwert  $b$  an der Stelle  $\vec{a}$ , wenn für jede vektorwertige Folge  $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , mit  $\vec{x}_k \neq \vec{a}$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(\vec{x}_k) = b$  erfüllt ist

**Definition 9.2** (Stetigkeit). Die Funktion  $f(\vec{x})$  ist stetig im Punkt  $\vec{a}$ , wenn für beliebige Folgen  $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $(\vec{x}_k) \rightarrow \vec{a}$  gilt:  $\lim_{\vec{x}_k \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}_k) = f(\vec{a})$  für alle  $k$  gilt.

### 9.1 Typische Fälle

- $x$ -Achse entlang:  $y = 0$
- $y$ -Achse entlang:  $x = 0$
- Winkelhalbierende:  $x = y$

### 9.2 Beispiel 1

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{4xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Die Funktion ist als Komposition, Addition und Multiplikation stetiger Funktionen überall ausser in  $(0, 0)$  stetig (1. Zeile). Es bleibt zu untersuchen, ob  $f$  auch in  $(0, 0)$  stetig ist.

Längs der  $x$ -Achse ( $y = 0$ ) erhalten wir:

$$f(x, 0) = \frac{4x \cdot 0}{x^2 + 0^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$$

Als nächstes untersuchen wir die Winkelhalbierende ( $x = y$ ):

$$f(x, x) = \frac{4x^2}{x^2 + x^2} = \frac{4x^2}{2x^2} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2 = 2$$

Die Funktion ist somit in  $(0, 0)$  nicht stetig, da  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) \neq \lim_{x \rightarrow 0} f(x, x)$  ist.

## 10 Funktionsfolgen

### 10.1 Definition

Eine Funktionsfolge  $(f_n)$  konvergiert punktweise auf dem Definitionsbereich  $I$  gegen  $f$ , wenn für jedes  $x \in I$  gilt  $f_n(x) \rightarrow f(x)$ .

$$\forall \varepsilon > 0 \forall x \in I \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

Die Folge konvergiert gleichmässig auf  $I$  gegen  $f$ , wenn  $\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$  gilt. Das bedeutet, dass die obere Definition für alle  $x$  dasselbe  $n_0$  verwendet und nicht jeweils verschiedene:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall x \in I : n \geq n_0 \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

Wichtig: gleichmässige Konvergenz  $\Rightarrow$  punktweise Konvergenz. Nicht aber andersrum!

» **TODO** [Prüfen was man noch dazu sagen muss]

## 11 Differenzierbarkeit

### 11.1 Definition

$f$  ist in  $a \in I$  differenzierbar mit der Ableitung  $f'(a)$ , wenn

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} =: f'(a) = \frac{d}{dx} f(a)$$

existiert.

Ist  $f'$  stetig im Definitionsbereich, so heisst  $f$  stetig differenzierbar. Man kann also  $f$  differenzieren und bekommt mit  $f'$  eine stetige Funktion. Es gilt auch  $f \in C^1(I)$ .  $C^n(I)$  ist die Menge der  $n$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen über dem Intervall  $I$ .

### 11.2 Mittelwertsatz (Satz von Lagrange)

Ist  $f$  auf  $[a, b]$  stetig und in  $]a, b[$  differenzierbar, so gibt es ein  $c \in ]a, b[$  mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

#### 11.2.1 Beispiel: Ungleichungen

Zu zeigen:  $e^x(y - x) < e^y - e^x < e^y(y - x)$ ,  $\forall x < y$ :

Der Mittelwertsatz wird auf die Exponentialfunktion angewendet. Damit gilt für ein Paar von Zahlen  $x < y$  ein  $u \in ]x, y[$ , für welches gilt:  $\frac{e^y - e^x}{y - x} = e^u$ . Weil die Exponentialfunktion in  $\mathbb{R}$  streng monoton wachsend ist, gilt  $e^x < e^u < e^y$  und somit gilt:  $e^x < \frac{e^y - e^x}{y - x} < e^y$ . Multipliziert man nun mit dem Nenner des Bruchs bekommt man:  $e^x(y - x) < e^y - e^x < e^y(y - x)$ .

## 11.3 Monotonie

- $f' > 0 \Rightarrow f$  streng monoton steigend
- $f' \geq 0 \Leftrightarrow f$  monoton steigend
- $f' < 0 \Rightarrow f$  streng monoton fallend
- $f' \leq 0 \Leftrightarrow f$  monoton fallend

Insbesondere besitzt die Funktion  $f$  wenn sie streng monoton wachsend/fallend ist weder kritische Punkte, noch lokale oder globale Extrema.

### 11.3.1 Extremstellen

- $f'(x_0) = 0, f''(x_0) > 0 \Rightarrow$  Minimum bei  $x_0$
- $f'(x_0) = 0, f''(x_0) < 0 \Rightarrow$  Maximum bei  $x_0$
- $f''(x_0) = 0, f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$  Wendepunkt in  $x_0$
- $f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0, f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$  Sattelpunkt in  $x_0$
- Extrema bei  $x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$

### 11.3.2 Beispiel Wendepunkt berechnen

Die hinreichende Bedingung für einen Wendepunkt lautet:  $f''(x_0) = 0$  und  $f'''(x_0) \neq 0$

Praktische Vorgehensweise für  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$ :

Um eine Funktion auf Wendepunkte hin zu untersuchen, führen wir die folgenden Schritte durch:

- Wir leiten die Funktion  $f(x)$  dreimal ab.  $f'(x) = x^2 - 4x + 3$ ,  $f''(x) = 2x - 4$  und  $f'''(x) = 2$
- Wir setzen die zweite Ableitung Null und berechnen den X-Wert, sofern möglich  $f''(x) = 2x - 4 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x = 2$
- Sofern möglich, setzen wir diesen X-Wert in die dritte Ableitung ein  $f'''(x) = 2$
- Ist dieses Ergebnis ungleich Null, liegt ein Wendepunkt vor  $f'''(x) = 2 \neq 0 \Rightarrow$  Wendepunkt
- Der X-Wert wird in  $f(x)$  eingesetzt, um den zugehörigen Y-Wert zu bestimmen.  $x = 2$  in  $f(x)$  einsetzen:  $f(2) = \frac{1}{3}2^3 - 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 = \frac{8}{3} - 8 + 6 = \frac{2}{3}$

### 11.4 Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit

- differenzierbar  $\Rightarrow$  stetig
- differenzierbar  $\nRightarrow$  stetig

### 11.5 Umkehrsatz

Ist  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $I$  differenzierbar mit  $f'(x) > 0$  für jedes  $x \in I$ , so ist  $f$  streng monoton wachsend und damit injektiv, die Umkehrfunktion  $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$  existiert und ist ebenfalls streng monoton wachsend, die Ableitung  $(f^{-1})'(y)$  existiert für alle  $y \in f(I)$  mit  $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$ , und zwar gilt dann

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

## 12 Partialbruchzerlegung

Mit dieser Methode wird ein schwieriger Bruch in eine Summe von einfacheren Brüchen zerlegt. Damit lässt sich der ursprüngliche Bruch einfacher integrieren.

1. Den Grad des Zählers und des Nenners vergleichen von  $R$ 
  - i) Ist der Zählergrad (über Bruchstrich) grösser oder gleich dem Nennergrad (unter Bruchstrich), so dividiert man den Zähler durch den Nenner. Man erhält daraus das Polynom  $P^*$  und möglicherweise einen Rest  $R$ , sodass gilt:  $R = P + R^*$ .
  - ii) Ist  $R^* \equiv 0$ , so ist das Verfahren abgeschlossen. Sonst arbeitet man nun mit dem Rest  $R^*$  weiter als Bruch,



den man ansieht.

- Man berechnet die Nullstellen vom Nenner des Bruches.
- Nun setzt man den ursprünglichen Bruch gleich der Summe der Partialbrüche. Die Partialbrüche sind jeweils abhängig von den Nullstellen:
  - Für jede einfache reelle Nullstelle  $x_i$  ist der Summand  $\frac{a_{i1}}{x-x_i}$  zu nehmen
  - Für jede  $r_i$ -fache Nullstelle  $x_i$  erhält man  $r_i$  Summanden:  $\frac{a_{i1}}{x-x_i} + \frac{a_{i2}}{(x-x_i)^2} + \dots + \frac{a_{ir_i}}{(x-x_i)^{r_i}}$
- Nun berechnet man die unbekannten  $a_{ij}$  indem man die Partialbrüche gleichnamig macht und dann die Koeffizienten des ursprünglichen Zählers mit denen des gleichnamigen Bruchs vergleicht.

## 12.1 Beispiel

$$R(x) = \frac{x^2}{x^2-2x+1}.$$

Der Zählergrad ist gleich dem Nennergrad, weswegen wir eine Polynomdivision durchführen:  $\Rightarrow R(x) = 1 + \frac{2x-1}{(x-1)^2}$ .

Aus  $(x-1)^2$  folgt, dass wir nur eine Nullstelle haben  $x_0 = 1$ . Es handelt sich dabei um eine doppelte Nullstelle.

Somit gilt:

$$\begin{aligned} \frac{2x-1}{(x-1)^2} &= \frac{a_1}{x-1} + \frac{a_2}{(x-1)^2} \\ 2x-1 &= a_1(x-1) + a_2 \\ 2x-1 &= a_1x - a_1 + a_2 \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass  $a_1 = 2$  und  $a_2 = 1$  (lineares Gleichungssystem).

Somit gilt:  $R(x) = \frac{x^2}{x^2-2x+1} = 1 + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$

## 13 Integralrechnung

### 13.1 Berechnung

$$\int \alpha f(x) + \beta g(x) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx$$

#### 13.1.1 Substitutionsregel

$$\int F'(g(x))g'(x)dx = F(g(x))$$

- Für die neue Variable  $u = g(x)$  bildet man:  $\frac{du}{dx} = g'(x) \Leftrightarrow du = g'(x)dx$ . Ersetzt also  $g(x) = u$  und  $dx = \frac{du}{g'(x)}$ . Wenn noch  $x$  übrig sind, ist ein Zwischenschritt nötig: Löse  $u = g(x)$  nach  $x$  auf, somit resultiert eine neue Formel mit  $x = h(u)$ , substituiere nun  $x$  durch  $h(x)$ .
- Bei bestimmten Integralen: Sei  $\int_a^b \dots dx$ . Dann sind die neuen Grenzen für das neue Integral  $g(a)$  und  $g(b)$
- Berechne das Integral in  $u$
- Ersetze im Ergebnis  $u$  durch  $g(x)$

#### 13.1.2 Integrale mit Parametern

Sei  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und partiell nach  $t$  diffbar mit stetiger Ableitungsfunktion. Betrachte

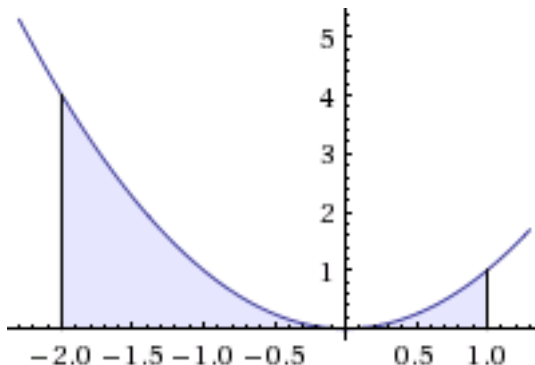
$$u(y) = \int_0^y h(x, y) dx$$

Dann ist  $u \in C^1(\mathbb{R})$  und für die Ableitung gilt

$$\dot{u}(y) = h(x, y)|_{x=y} + \int_0^y \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) dx$$

### 13.1.3 Beispiel: einfaches Integral

Das Integral  $\int_{-2}^1 x^2 dx$  berechnet die blaue Fläche die durch die Funktion  $f(x) = x^2$  beschränkt wird.  $F(x)$  sei die Stammfunktion von  $f(x)$ , generell berechnen wir  $\int x^y dx = \frac{x^{(y+1)}}{y+1}$ , somit  $F(x) = \frac{x^3}{3}$ . Somit  $\int_{-2}^1 x^2 dx = F(x)|_{-2}^1 = F(1) - F(-2) = \frac{1^3}{3} - \frac{-2^3}{3} = \frac{1}{3} + \frac{8}{3} = 3$ .



### 13.1.4 Beispiel: Substitution

$$\int_0^2 x\sqrt{x+1}^3 dx$$

Die Wurzel wird substituiert:  $u = g(x) = \sqrt{x+1}$ .

- $\frac{du}{dx} = g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2u}$ . Somit wird  $\sqrt{x+1}^3$  durch  $u^3$  ersetzt und  $dx$  durch  $\frac{du}{\frac{1}{2}u} = 2u du$ . Im Integral wären somit die Wurzel und das  $dx$  ersetzt. Es bleibt noch das  $x$  übrig vor der Wurzel. Lösen wird  $\sqrt{x+1} = u$  nach  $x$  auf, so erhalten wir  $x = u^2 - 1$ .
- Neue Grenzen:  $g(0) = 1$  und  $g(2) = \sqrt{3}$
- $\int_0^2 x\sqrt{x+1}^3 dx = \int_1^{\sqrt{3}} (u^2 - 1)u^3 2u du = 2 \int (u^6 - u^4) du = [\frac{2}{7}u^7 - \frac{2}{5}u^5]_1^{\sqrt{3}}$
- Rücksubstitution:  $\int_0^2 x\sqrt{x+1}^3 dx = [\frac{2}{7}\sqrt{x+1}^7 - \frac{2}{5}\sqrt{x+1}^5]_1^{\sqrt{3}} = \dots = \frac{144}{35}\sqrt{3} + \frac{4}{35}$

## 14 Riemannsummen (Riemannintegral)

### 14.1 Riemannsumme

Wir betrachten die folgende Einteilung des Intervalls  $[a, b]$ :

$$E : [a, b] = \bigcup_{k=1}^N [x_{k-1}, x_k] \text{ mit } x_k = a + k \cdot \frac{b-a}{N}.$$

Die Feinheit dieser Zerlegung ist:

$$\delta(E) \equiv \max\{x_k - x_{k-1} | k = 1 \dots N\} = \frac{b-a}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

$\xi_i$  sein ein Punkt auf dem Intervall  $[x_{i-1}, x_i]$ , somit  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ .

Somit können wir die Riemannsumme bilden:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sum (f, E, \xi) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} \underbrace{f(\xi_i)}_{\text{„Höhe“}} \cdot \underbrace{\delta(E)}_{\text{„Länge“}}}_{\text{Riemann-Summe}} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} f(a + k \frac{b-a}{N}) \cdot \frac{b-a}{N} \end{aligned}$$

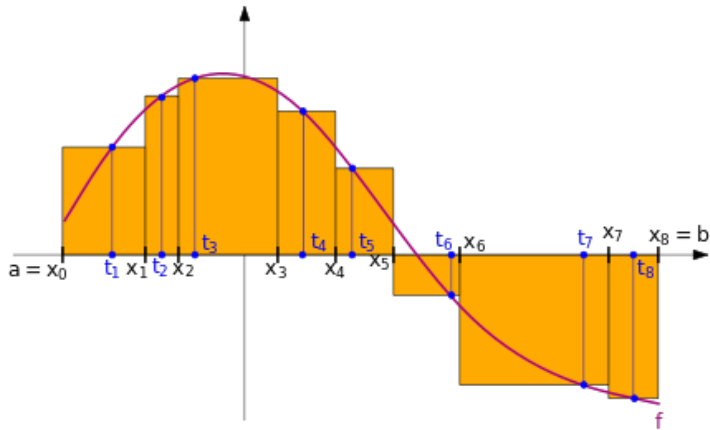


Abbildung 1: Darstellung Riemannintegral mit  $\xi_i = t_i$  und unsymmetrischer Intervalleinteilung  $E$ .

## 14.2 Riemann Integrabel

Die Funktion  $f$  sei Riemann Integrabel wenn es ein  $I \in \mathbb{R}$  gibt so dass:  $\forall \varepsilon > 0, \exists \nu > 0$  so dass

$$|I| - \varepsilon < \sum(f, E, \xi) < |I| + \varepsilon$$

für jede Einteilung  $E$  von  $[a, b]$  mit  $\delta(E) < \nu$ , und für jede Wahl von Zwischenpunkten  $\xi$ .

Jede monotone Funktion und jede stetige Funktion ist Riemann-integrierbar.

## 14.3 Beispiel

Es soll das Integral mittels Riemannschen Summe berechnet werden:  $\int_a^b e^{\lambda x} dx$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .  $f(x) = e^{\lambda x}$

Zuerst unterteilt man das Intervall  $[a, b]$ :  $E : [a, b] = \bigcup_{k=1}^N [c_{k-1}, c_k]$  mit  $c_k = a + k \cdot \frac{b-a}{N}$ .

Die Feinheit dieser Zerlegung ist somit  $\delta(E) = \max\{c_k - c_{k-1} | k = 1 \dots N\} = \frac{b-a}{N}$ . Dabei gilt  $\delta(E) = \frac{b-a}{N} \rightarrow 0$  ( $N \rightarrow \infty$ ). Dies ist wichtig. Wir müssen die Feinheit unglaublich klein bekommen können, also nahezu 0. Je feiner die Feinheit desto genauer wird unsere Riemann'sche Summe. Der Grenzwert dieser Summe für  $N \rightarrow \infty$  ist der Wert des bestimmten Riemann-Integrals.

Zusätzlich müssen wir festlegen, an welchen Punkten in den Teilintervallen wir den Funktionswert auswerten. Hier legen wir fest:  $x_k = c_{k-1}$ , also jeweils am Punkt an dem das Teilintervall beginnt.

Daraus erhalten wir nun:

$$\begin{aligned} \int_a^b e^{\lambda x} dx &= \lim_{N \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} \underbrace{f(x_k)}_{\text{"Höhe"}} \cdot \underbrace{\delta(E)}_{\text{"Länge"}}}_{\text{Riemann-Summe}} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} \underbrace{e^{\lambda(a+k \cdot \frac{b-a}{N})}}_{f(x_k)} \underbrace{\frac{b-a}{N}}_{\delta(E)} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b-a}{N} e^{\lambda a} \sum_{k=0}^{N-1} (e^{\lambda \frac{b-a}{N}})^k \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b-a}{N} e^{\lambda a} \frac{1 - e^{\lambda \frac{b-a}{N}}}{1 - e^{\lambda \frac{b-a}{N}}} \end{aligned}$$

Wir wissen, dass  $\rho = \frac{b-a}{N} \rightarrow 0$  für  $N \rightarrow \infty$ . Somit ersetzen wir es entsprechend:

$$\begin{aligned} \int_a^b e^{\lambda x} dx &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \cdot e^{\lambda a} \cdot \frac{1 - e^{\lambda(b-a)}}{1 - e^{\lambda \rho}} \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho(e^{\lambda a} - e^{\lambda b})}{1 - e^{\lambda \rho}} \\ &\stackrel{\text{d'H}}{=} \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{e^{\lambda a} - e^{\lambda b}}{-\lambda e^{\lambda \rho}} \\ &= \frac{e^{\lambda a} - e^{\lambda b}}{-\lambda} = \frac{1}{\lambda} (e^{\lambda a} - e^{\lambda b}) \end{aligned}$$

## 15 Differentialgleichung (DGL)

### 15.1 Klassifizierung der DGL

Für die Vorlesung relevante DGL: \* lineare, homogene DGL 1. Ordnung mit konstante Koeffizienten \* lineare, inhomogene DGL 1. Ordnung mit konstante Koeffizienten \* nicht lineare, homogene DGL 1. Ordnung mit konstante Koeffizienten \* lineare, homogene DGL 2. Ordnung mit konstante Koeffizienten \* lineare, inhomogene DGL 2. Ordnung mit konstante Koeffizienten \* In ausnahmefälle lineare DGL höherer Ordnung

Generell ist zu sagen das inhomogene DGL immer gelöst werden in dem wir zuerst die homogene DGL lösen (in dem wir  $g(x) = 0$ ) setzen. Danach berechnen wir die inhomogenen Gleichung (den Ansatz wählen wir in dem wir die Form von  $g(x)$  berücksichtigen 15.4). Für die allgemeine Lösung rechnen wird die beiden Lösungen zusammen.

Sind Anfangswerte gegeben setzten wir diese in die Gleichung oder das Gleichungssystem ein und reduzieren somit die Variablen in der Gleichung.

### 15.2 Lineare DGL 1. Ordnung ( $y' + f(x) \cdot y = g(x)$ )

#### 15.2.1 Variation der Konstanten, homogen

Sei die DGL in der Form  $y' = f(x) \cdot y + g(x)$ , so sei:

$$F(x) = \int f(t) dt.$$

Dann ist  $\{y_{Hom}(x) = c_1 e^{F(x)} | c_1 \in \mathbb{R}\}$  die Menge aller Lösungen der homogenen Differentialgleichung ( $y' + f(x) \cdot y = 0$ ).

#### 15.2.2 Variation der Konstanten, inhomogener Teil

*Dieser Teil muss nicht berechnet werden (Herleitung).*

Als Ansatz für die Lösung des inhomogenen Problems setze man  $y_p(x) = u(x)e^{F(x)}$ .

Ansatzfunktion ist

$$y'_p(x) = u(x)f(x)e^{F(x)} + u'(x)e^{F(x)} = y(x)f(x) + u'(x)e^{F(x)}$$

Also löst  $y$  die inhomogene Differentialgleichung

$$y'_p(x) = y(x)f(x) + g(x)$$

genau dann, wenn

$$u'(x) = y(x)f(x) + g(x)$$

gilt.

Also folgt

$$u(x) = \int g(t)e^{-F(t)} dt$$

Somit ist die Lösungsmenge von  $y_p$

$$\{y'_p(x) = e^{F(x)}(u(x) + c_2) | c_2 \in \mathbb{R}\}$$

Die Lösungsmenge der generellen Lösung der allgemeinen Lösung ist somit  $y$ :

$$\begin{aligned}\{y\} &= \{y = y_{Hom} + y_p\} \\ &= \{y(x) = c_1 e^{F(x)} + e^{F(x)}(u(x) + c_2) | c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

Gibt es nun einen Ansatz, kann diese Menge durch Einsetzen des Funktionswert und Gleichsetzen mit dem Resultat genau bestimmen werden in dem die Konstanten  $c$  aufgelöst werden.

Konkret reicht es also aus,  $F$  und  $u$  zu berechnen.

### 15.2.3 Beispiel mit Variation der Konstanten

Gegeben:  $y' + x^2 \cdot y = 2x^2$

Somit:  $y' = f(x) \cdot y + g(x)$  mit  $g(x) := 2x^2$  und  $f(x) := -x^2$

Es gilt somit:

$$F(x) = \int f(t) dt = \int -x^2 dt = -\frac{x^3}{3}$$

Dann ist  $\{y_{Hom}(x) = c_1 e^{-\frac{x^3}{3}} | c_1 \in \mathbb{R}\}$  die Menge aller Lösungen der homogenen Differentialgleichung ( $y' + x^2 \cdot y = 0$ ).

Nun berechnen wir

$$u(x) = \int g(x) e^{-F(x)} dx = 2 \int x^2 e^{\frac{x^3}{3}} dx = 2e^{\frac{x^3}{3}}$$

Somit ist die Lösungsmenge von  $y_p$   $\{y'_p(x) = e^{-\frac{x^3}{3}}(2e^{\frac{x^3}{3}} + c_2) | c_2 \in \mathbb{R}\} = \{y'_p(x) = 2 + c_3 | c_3 \in \mathbb{R}\}$  Die Lösungsmenge der generellen Lösung der allgemeinen Lösung ist somit  $y$

$$\{y(x) = c_1 e^{-\frac{x^3}{3}} + 2 | c_1 \in \mathbb{R}\}$$

### 15.2.4 Separation der Variablen

Wenn  $g(x) = 0$  ist, dann ist die DGL homogen. Falls  $g(x) \neq 0$ , so handelt es sich um eine inhomogene DGL. Wenn die DGL in der Form  $y' = g(x)f(y)$  ist, kann sie direkt mit "Separation der Variablen" berechnet werden in dem das alle von  $y$  abhängigen Variablen auf die eine und alle von  $x$  abhängige Variablen auf die andere Seite der Gleichung gebracht werden. Siehe das nachfolgende Beispiel.

### 15.2.5 Beispiel direkterer Lösungsweg

Gegeben:  $y' + x^2 \cdot y = 2x^2$ . Direkt lösen:

$y' + x^2 \cdot y = 2x^2$	
$\frac{dy}{dx} + x^2 \cdot y = 2x^2$	$-(x^2 \cdot y)$
$\frac{dy}{dx} = 2x^2 - x^2 \cdot y$	vereinfachen
$\frac{dy}{dx} = x^2(2 - y)$	$\div (2 - y)$
$\frac{dy}{2-y} = x^2$	$\int$ with respect to $x$
$\int \frac{dy}{2-y} dx = \int x^2 dx$	links: $\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln  g(x) $
$-\ln 2-y  = \frac{x^3}{3} + c_1$	$\cdot (-1)$
$\ln 2-y  = -\frac{x^3}{3} - c_1$	$e$
$e^{\ln 2-y } = e^{-\frac{1}{3}x^3 - c_1}$	
$2 - y = e^{-\frac{1}{3}x^3 - c_1}$	$-2$
$-y = e^{-\frac{1}{3}x^3 - c_1} - 2$	$\cdot (-1)$
$y = -e^{-\frac{1}{3}x^3 - c_1} + 2$	replace const
$\underline{\underline{y = c_2 \cdot e^{-\frac{1}{3}x^3} + 2}}$	

## 15.3 Lineare DGL höherer Ordnung

Hier geht es um DGL der Form:  $a_n y^{(n)} + a_{(n-1)} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 = g(x)$ .

Wieder unterscheiden wir homogene DGL ( $g(x) = 0$ ) und inhomogene DGL ( $g(x) \neq 0$ ).

Als ersten Schritt lösen wir für homogene und inhomogene DGL die homogene Version der DGL:  $a_n y^{(n)} + a_{(n-1)} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$ . Dazu ersetzen wir  $y^{(n)}$  durch  $\lambda^n \cdot e^{\lambda x}$ . Beispielsweise wird aus  $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$  wird  $a_2 \lambda^2 e^{\lambda x} + a_1 \lambda e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x} = 0$ .

Diese neue Gleichung ist das charakteristische Polynom. Von diesem berechnen wir als erstes die Nullstellen  $\lambda_i$ . Wir beachten, dass wir auch komplexe Nullstellen miteinbeziehen. Auch merken wir uns die Vielfachheit einer Nullstelle.

Hat man die Nullstellen  $\lambda_i$ , so lösen für einfache Nullstellen  $e^{\lambda_i x}$  die homogene DGL. Ist die Nullstelle  $\lambda_i$   $k$ -fach, so lösen  $e^{\lambda_i x}, x e^{\lambda_i x}, x^2 e^{\lambda_i x}, \dots, x^{k-1} e^{\lambda_i x}$  die homogene DGL. Wir erhalten also die allgemeine homogene Lösung in einer ähnlichen Form wie:  $y_h = C_n e^{\lambda_n x} + \underbrace{C_{n-1} e^{\lambda_{n-1} x} + C_{n-2} x e^{\lambda_{n-1} x} + \dots + C_3 x^2 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x} + C_1 e^{\lambda_1 x}}_{\lambda_{n-1}: 2\text{-fache Nullstelle}}$ .

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\lambda_1: 3\text{-fache Nullstelle}}$

Ist  $\lambda_i$  eine komplexe Nullstelle, so ist  $\lambda_i$  der Form  $\lambda_i = a + i \cdot b$ . Zu jeder komplexen Nullstelle gibt es auch eine konjugierte Nullstelle:  $\lambda_k = a - i \cdot b$ . Aus diesem Grund lösen für die komplexe Nullstelle ( $\lambda_i$ )  $e^{x(a+ib)}$  und  $e^{x(a-ib)}$  das homogene DGL. Achtung: Nachfolgend lohnt es sich oft die Eulersche Identität zu verwenden:  $e^{i \cdot x} = \cos(x) + i \sin(x)$ .

Die allgemeine Lösung der homogenen DGL haben wir nun gefunden. Die Unbekannten  $C_i$  können gefunden werden, wenn genügend Punkte gegeben sind, an denen der Funktionswert bekannt ist.

### Lineare DGL höherer Ordnung, inhomogen

Hat man ursprünglich eine inhomogene DGL vorliegen, so muss man für die allgemeine Lösung noch die partikuläre Lösung des inhomogenen DGL berechnen. Dazu werden die Unbekannten  $C_i$  durch Funktionen  $u_i(x)$  ersetzt. So wird aus  $y_h = C_2 x e^{\lambda_1 x} + C_1 e^{\lambda_1 x} \Rightarrow y_p = u_2(x) x e^{\lambda_1 x} + u_1(x) e^{\lambda_1 x}$  (eine doppelte Nullstelle).

Jetzt geht es darum die Funktionen  $u_i(x)$  zu bestimmen, um sie in die vorherige  $y_p$ -Gleichung einsetzen zu können. Dazu stellen wir  $i$  Gleichungen auf. Also so viele, wie wir unbekannte Funktionen  $u_i(x)$  haben:

$$\begin{aligned}u_2(x)'(x e^{\lambda_1 x}) + u_1(x)'(e^{\lambda_1 x}) &= 0 \\ u_2(x)'(x e^{\lambda_1 x})' + u_1(x)'(e^{\lambda_1 x})' &= g(x)\end{aligned}$$

Das Prinzip ist folgendes: Bis auf die letzte Gleichung, wird gleich 0 gesetzt. Die letzte Gleichung wird gleich  $g(x)$  gesetzt. Unsere unbekannten Funktionen werden jeweils einmal abgeleitet, egal in welcher Gleichung wir sind. Pro Zeile, die man weiter runter geht, wird der Term mit  $e^{\lambda_i x}$  jeweils einmal mehr abgeleitet. In der ersten Zeile wird zum Beispiel  $e^{\lambda_1 x}$  nicht abgeleitet, in der nächsten Gleichung wird es einmal abgeleitet. Hätten wir mehr Unbekannte Funktionen, so würde in der folgenden Zeile

zwei mal abgeleitet werden. Im Allgemeinen gilt also:

$$\begin{aligned} u_1(x)'y_{h1}(x) + u_2(x)'y_{h2}(x) + \dots + u_n(x)'y_{hn}(x) &= 0 \\ u_1(x)'y_{h1}(x)' + u_2(x)'y_{h2}(x)' + \dots + u_n(x)'y_{hn}(x)' &= 0 \\ u_1(x)'y_{h1}(x)'' + u_2(x)'y_{h2}(x)'' + \dots + u_n(x)'y_{hn}(x)'' &= 0 \\ &\dots \\ u_1(x)'y_{h1}(x)^{(n-1)} + u_2(x)'y_{h2}(x)^{(n-1)} + \dots + u_n(x)'y_{hn}(x)^{(n-1)} &= g(x) \end{aligned}$$

Diese Gleichungen werden nun jeweils aufgelöst, bis man  $u_i(x)$  erhält. Um zu  $u_i(x)$  zu gelangen, muss auf dem Weg einmal die Gleichung auf beiden Seiten integriert werden. Hat man alle  $u_i(x)$ , so setzt man diese in unsere ursprüngliche  $y_p$  Gleichung ein.

Nun kann die allgemeine Lösung des inhomogenen DGL berechnet werden. Dazu summiert man  $y_h$  und  $y_p$ :  $y = y_h + y_p$ . Dies ist die allgemeine Lösung. Hat man konkrete Punkte, an denen die Funktion ausgewertet wurde, so kann man die Unbekannten  $C_i$  berechnen.

### 15.3.1 Euler

$$\underbrace{C_1 \cdot e^{(a+bi)x} + C_2 \cdot e^{(a-bi)x}}_{D_1 \cdot e^{ax} \sin(bx) + D_2 \cdot e^{ax} \cos(bx)}$$

### 15.3.2 Beispiel

Es soll  $y'' + y = \frac{2}{\cos(x)}$  ausgerechnet werden.

Zuerst sehen wir uns das homogene DGL an:

$$\begin{aligned} y'' + y &= 0 \\ \Rightarrow \lambda^2 e^{\lambda x} + e^{\lambda x} &= 0 \\ \Leftrightarrow e^{\lambda x} (\lambda^2 + 1) &= 0 \\ \Rightarrow \lambda^2 + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda^2 = -1 &\Rightarrow \underline{\lambda_1 = i}, \underline{\lambda_2 = -i} \end{aligned}$$

Somit ist die allgemeine Lösung des homogenen DGL:

$$\begin{aligned} y_h &= C_1 \cdot e^{ix} + C_2 \cdot e^{-ix} \\ &= C_1 (\cos(x) + i \sin(x)) + C_2 (\cos(x) - i \sin(x)) \\ &= \sin(x) \underbrace{(iC_1 + iC_2)}_{=D_1} + \cos(x) \underbrace{(C_1 + C_2)}_{=D_2} \\ &= \underline{D_1 \sin(x) + D_2 \cos(x) = y_h} \end{aligned}$$

Da es sich um ein inhomogenes DGL handelt, berechnen wir als nächstes die partikuläre Lösung:

$$\begin{aligned} y_p &= \underbrace{u_1(x)}_{D_1 \text{ in } y_h} \sin(x) + \underbrace{u_2(x)}_{D_2 \text{ in } y_h} \cos(x) \\ \Rightarrow \left| \begin{array}{l} u_1(x)' \sin(x) + u_2(x)' \cos(x) = 0 \\ u_1(x)' \sin(x)' + u_2(x)' \cos(x)' = \frac{2}{\cos(x)} \end{array} \right| \\ &= \dots \\ \Rightarrow u_1(x)' &= -2 \tan(x), u_2(x)' = 2 \\ \Leftrightarrow u_1(x) &= 2 \ln(\cos(x)), u_2(x) = 2x \\ \Rightarrow \underline{y_p} &= \underline{2 \ln(\cos(x)) \sin(x) + 2x \cos(x)} \end{aligned}$$

Da wir nun auch die partikuläre Lösung haben, können wir die allgemeine Lösung des inhomogenen DGL berechnen:  $\underline{y = y_h + y_p = D_1 \sin(x) + D_2 \cos(x) + 2 \ln(\cos(x)) \sin(x) + 2x \cos(x)}$

## 15.4 Ansätze für partikuläre Lösung

**Hinweis:** nur brauchbar für lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

Bezeichnungen:

$P(x)$  charakt. Polynom der DGL  
 $S_k(x)$  polynomielle Störfunktion, Grad  $k$   
 $A, B$  unbekannte Konstanten

$R_k(x) = a_k x^k + \dots + a_1 x + a_0$  mit unbekannten Koeffizienten

$g(x)$	Ansatz
$ce^{mx}$	$Ae^{mx}$ , falls $P(m) \neq 0$ $Ax^q e^{mx}$ , falls $m$ $q$ -fache NST von $P$
$S_k(x)$	$R_k(x)$ , falls $P(0) \neq 0$ $x^q R_k(x)$ , falls $0$ $q$ -fache NST von $P$
$P_k(x)e^{mx}$	$R_k(x)e^{mx}$ , falls $P(m) \neq 0$ $x^q R_k(x)e^{mx}$ , falls $m$ $q$ -fache NST von $P$
$\sin wx, \cos wx$	$A \cos wx + B \sin wx$ , falls $P(\pm iw) \neq 0$ $x^q (A \cos wx + B \sin wx)$ , falls $\pm iw$ $q$ -fache NST von $P$
$\sinh wx, \cosh wx$	$A \cosh wx + B \sinh wx$ , falls $P(w) \neq 0$ $x^q (A \cosh wx + B \sinh wx)$ , falls $w$ $q$ -fache NST von $P$

## 16 Kurvenintegral (Linienintegral)

In den Übungen sind nur immer Integrale der zweiten Art vorgekommen.

### 16.1 2. Art

Das Wegintegral über ein stetiges Vektorfeld  $\vec{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  entlang eines stetig differenzierbaren Weges  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist definiert durch:

$$\int_{\gamma} \vec{f}(\vec{x}) d\vec{x} := \int_a^b \langle \vec{f}(\gamma(t)), \gamma(t)' \rangle dt$$

Skalarprodukt:  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_x b_x + a_y b_y + \dots$

### Beispiel

Berechne des Linienintegral  $\int_{\gamma} \vec{K} d\vec{x}$  für  $\vec{K}(x, y) = (x^2 + y, 2xy)$  und  $\gamma$  als Einheitskreis mit positivem Umlaufsinn. Gegeben:

$$\begin{aligned} \vec{K}(x, y) &= (x^2 + y, 2xy) \\ \gamma: [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \gamma: t &\mapsto (\cos(t), \sin(t)) \end{aligned}$$

Zu berechnen:

$$\begin{aligned} \gamma(t)' &= (-\sin(t), \cos(t)) \\ \vec{K}(\gamma(t)) &= (\cos^2(t) + \sin(t), 2\cos(t)\sin(t)) \\ \langle \vec{K}(\gamma(t)), \gamma(t)' \rangle &= -\cos^2(t)\sin(t) - \sin^2(t) + 2\cos^2(t)\sin(t) \\ &= \cos^2(t)\sin(t) - \sin^2(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{K} d\vec{x} &= \int_0^{2\pi} \langle \vec{K}(\gamma(t)), \gamma(t)' \rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2(t)\sin(t) - \sin^2(t) dt \\ &= \left. -\frac{1}{3} \cos^3(t) - \frac{1}{2} t + \sin(t) \cos(t) \right|_0^{2\pi} = \underline{\underline{-\pi}} \end{aligned}$$

## 16.2 1. Art

Das Wegintegral einer stetigen Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  entlang eines stetig differenzierbaren Weges  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist definiert durch:

$$\int_{\gamma} f ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\|_2 dt$$

Euklidische Norm:  $\|\vec{a}\|_2 = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + \dots}$  Achtung: Beim Integral muss man zuerst  $\gamma(t)$  nach  $t$  ableiten und erst dann die Norm davon berechnen!

### Beispiel

Es sei die Schraubenlinie (Spirale in 3D)

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \gamma : t \mapsto (\cos(t), \sin(t), t)$$

und  $f(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2$  gegeben. Wir berechnen  $\int_{\gamma} f ds$ . Zunächst bestimmen wir

$$\begin{aligned} \|\gamma'(t)\|_2 &= \sqrt{\left[\frac{d(\cos t)}{dt}\right]^2 + \left[\frac{d(\sin t)}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dt}{dt}\right]^2} \\ &= \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + 1} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

Dann substituieren wir x,y und z und erhalten

$$f(x, y, z) = f(\gamma(t)) = \sin^2(t) + \cos^2(t) + t^2 = 1 + t^2$$

auf  $\gamma$ . Das führt zu

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(x, y, z) ds &= \int_0^{2\pi} (1 + t^2) \sqrt{2} dt = \sqrt{2} \left( t + \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{2\sqrt{2}\pi}{3} (3 + 4\pi^2) \end{aligned}$$

## 16.3 Parametrisierung von Kurven

Grundlegender Tipp: Skizze machen, um Grenzen und Kurve besser zu verstehen und schneller auf die Parametrisierung zu kommen.

- Wenn die Kurve in der Form

$$C = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^n | \vec{r} = \gamma(t), a \leq t \leq b\}$$

bereits gegeben, so ist klar, dass  $\gamma(t)$  der Weg ist und das Integral von  $a$  nach  $b$  verläuft.

- Die Parametrisierung einer Strecke von  $\vec{a}$  nach  $\vec{b}$ :  $\gamma(t) = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a})$ ,  $0 \leq t \leq 1$
- Die Parametrisierung eines Kreises mit Mittelpunkt  $(x_0, y_0)$  und Radius  $r$  ist:  $\gamma(t) = \begin{pmatrix} x_0 + r \cos(t) \\ y_0 + r \sin(t) \end{pmatrix}$ . Für einen vollen Kreis gilt  $0 \leq t \leq 2\pi$ , für Kreisteile schränkt man diesen Intervall entsprechend ein.
- Parametrisierung eines Graphen der Funktion  $f(x)$  für  $x$  zwischen  $a$  und  $b$ :  $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$ ,  $a \leq t \leq b$ . Achtung: Hat man zwei Graphen, die als Grenzen für das Kurvenintegral fungieren, so schliessen diese gemeinsam eine Fläche ein. Die Umlaufrichtung ist so zu wählen, dass diese Fläche jeweils links liegt.

### 16.3.1 Beispiel: Kurvenintegral mit zwei Grenzgraphen

Es soll das Kurvenintegral  $\int_{\gamma} K(x, y) dt = \int_{\gamma} \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2y - x \end{pmatrix} dt$  berechnet werden.  $\gamma$  ist der Rand des beschränkten Gebietes im ersten Quadranten, welches durch die Graphen  $y = x^2$  und  $y = x^3$  begrenzt wird.

Lösung: Man macht eine Skizze der Grenzen ( $y = x^2$  und  $y = x^3$ ) und sieht, dass diese eine Fläche einschliessen. Die Schnittpunkte sind  $x = 0$  und  $x = 1$ . Der Rand dieses Gebiets besteht also aus den beiden parametrisierten Kurven (Parametrisierung für Graphen verwenden)

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= \begin{pmatrix} t \\ t^3 \end{pmatrix} & t \in [0, 1] \\ \gamma_2(t) &= \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} & t \in [0, 1] \end{aligned}$$

Wir sehen, dass die eingeschlossene Fläche in Durchlaufrichtung von  $\gamma_1$  links liegt, was soweit gut ist. Bei  $\gamma_2$  liegt die Fläche aber auf der rechten Seite, weshalb wir die Durchlaufrichtung drehen müssen, was zu  $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$  führt (man beachte das Minus statt einem Plus).

Jetzt muss nur noch ganz normal das Wegintegral berechnet werden:  $\int_{\gamma} K dx = \int_{\gamma_1} K dx + \int_{-\gamma_2} K dx = \int_{\gamma_1} K dx - \int_{\gamma_2} K dx = \dots$

### 16.4 Berechnung

Die Berechnung findet in drei Schritten statt:

1. Parametrisierung der Kurve  $C$  als  $C = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^n | \vec{r} = \gamma(t), a \leq t \leq b\}$
2. Einsetzen ins Integral:  $\int_C f(\vec{r}) ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$ . Man setzt also für die Variablen von  $f$  die Komponenten von  $\gamma$  ein und multipliziert dies dann mit dem Betrag der Ableitung nach  $t$  von  $\gamma$ .
3. Integral ausrechnen.

### 16.5 Bogenlänge

Für die Bogenlänge  $L$ , auf dem Weg beschrieben durch  $x(t)$  und  $y(t)$ , ergibt sich:

$$L = \int ds = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

### 16.6 Strecke

Arbeit durch das Vektorfeld entlang der Strecke von  $P_1$  nach  $P_2$  ist auch  $f(P_2) - f(P_1)$ , wenn  $\vec{v}$  ein Potentialfeld ist und  $f$  das Potential davon.

## 17 Differentialrechnung in $\mathbb{R}^n$

Hier geht es um Funktionen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , wobei  $m = 1$  gelten kann ( $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ). Solche Funktionen haben die allgemeine

$$\text{Form: } f(x) = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ \dots \\ f_m(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

Für nahezu alle Eigenschaften gilt: Die Vektorfunktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  hat eine bestimmte Eigenschaft, wenn jede einzelne ihrer Komponenten ( $f_1, f_2, \dots, f_m$ ) die besagte Eigenschaft besitzen. Das Problem liegt neu also nicht im Wertebereich, sondern vor allem in Definitionsbereich.

## 17.1 Norm

Eine Norm auf  $\mathbb{R}^n$  ist die Funktion  $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit den folgenden Eigenschaften:

- $\forall x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \geq 0$
- $\forall x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$
- $\forall x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R} : \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

## 17.2 Partielle Differenzierbarkeit

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist in  $a = (a_1, \dots, a_n)$  partiell differenzierbar nach der  $i$ -ten Variable  $x_i$ , wenn die Funktion  $f : x_i \rightarrow f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$  differenzierbar ist. Man berechnet die partielle Ableitung also folgendermassen: Eine Funktion  $f$  wird nach einer Variable partiell differenziert, indem man alle anderen Variablen als Konstanten behandelt und die Rechenregeln für Funktionen mit einer Variable anwendet.

**Satz 17.1** (Satz von Schwarz). Ist  $f$  nach  $x$  und  $y$  zweimal partiell differenzierbar und sind die gemischten partiellen Ableitungen  $f_{xy}$  und  $f_{yx}$  stetig, so gilt:  $f_{xy} = f_{yx}$ .

## 17.3 Hesse-Matrix

Die Hesse-Matrix ist eine Matrix, die in der mehrdimensionalen reellen Analysis ein Analogon zur zweiten Ableitung einer Funktion ist. Ist die Funktion zweimal stetig differenzierbar kann die Hesse-Matrix gebildet werden. Eine Hesse-Matrix ist symmetrisch.

Für eine Funktion  $f(x, y)$  sieht die Hesse Matrix wie folgt aus:

$$H_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}.$$

Verallgemeinert für die Funktion  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (die ebenfalls zweimal stetig differenzierbar sein muss), sieht die Matrix wie folgt aus:

$$H(f) = H_f = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1,\dots,n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Anmerkung: Die Determinante einer Matrix ist:

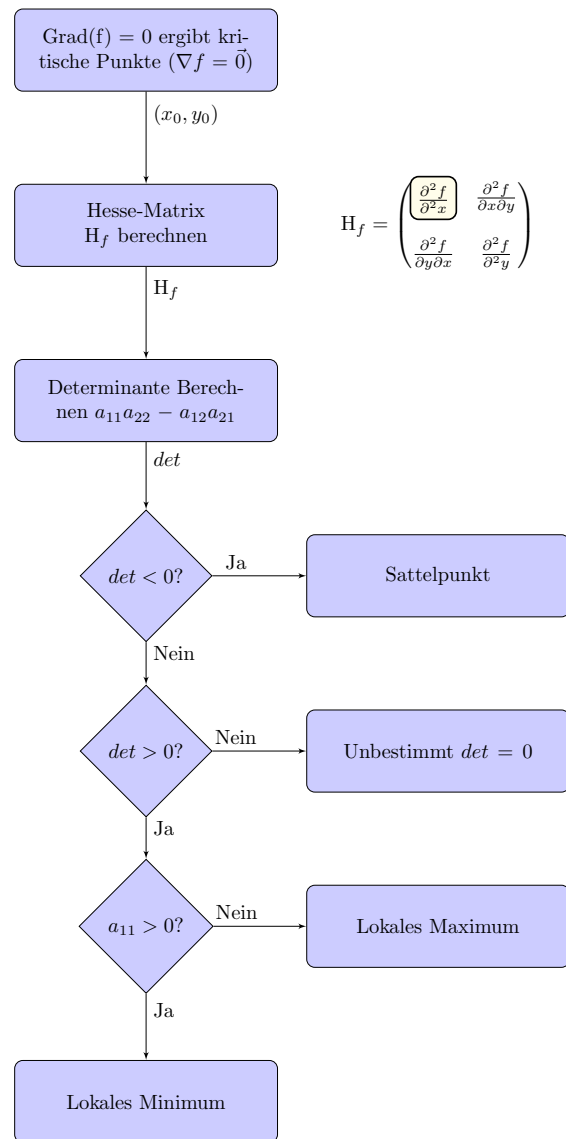
$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

## 17.4 Kritische Punkte

Berechnen von lokalen Minima und Maxima. (Achtung: Rand separat betrachten!)



## 18 Vektoranalysis

**Definition 18.1** (Vektorfeld). Die Abbildung  $\vec{v}(\vec{r}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist ein Vektorfeld. Es weist jedem Vektor  $\vec{r}$  einen Vektor  $\vec{v}(\vec{r})$  zu.

**Definition 18.2** (Skalarfeld). Ist eine Abbildung der Form  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Es existiert wenn das Vektorfeld wirbelfrei/konservativ ist. Ergibt ein geschlossener Weg im Vektorfeld nicht null so existiert kein skalares Feld (jedoch nicht unbedingt umgekehrt).

**Definition 18.3** (Gradient). Ist  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (Skalarfeld), so ist der Gradient von  $f$  der Vektor  $\vec{v} = \text{grad } f = \nabla f$ . (Im Fall  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ :  $\text{grad } f = (f_x, f_y, f_z) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$ .) Der Gradient  $\nabla f$  von einer Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  beschreibt die Richtung und den Betrag des steilsten Anstiegs des Graphen von  $f$ .

**Definition 18.4** (Potential). Ist  $\vec{v} = \text{grad } f$  der Gradient von  $f$ , so ist  $f$  das Potential oder Stammfunktion zu  $\vec{v}$ . Existiert wenn  $\text{rot } \vec{f} = \vec{0}$  und der Definitionsbereich zusammenhängend ist.

**Definition 18.5** (1-Form des Differential). Das Differential in der 1-Form für die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ist  $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$ .

**Definition 18.6** (Gradientenfeld / Potentialfeld). Ist  $\vec{v} = \text{grad } f$  der Gradient von  $f$ , so ist das Vektorfeld  $\vec{v}$  ein Gradientenfeld / Potentialfeld. Es besitzt dabei die folgenden Eigenschaften:



- Der Wert des Kurvenintegrals entlang eines beliebigen Weges innerhalb des Feldes ist unabhängig vom Weg selbst, sondern nur vom Anfangs- und Endpunkt
- Ein Kurvenintegral mit einem Weg bei dem Anfangs- und Endpunkt der gleiche Punkt sind, hat den Wert 0.
- Ist immer wirbelfrei:  $\text{rot } \vec{v} = \text{rot}(\text{grad } f) = \vec{0}$

**Definition 18.7** (Rotor / Rotation). Ist  $\vec{v}$  ein Vektorfeld im  $\mathbb{R}^3$ , so ist die Rotation von  $\vec{v} = (P, Q, R)^T$  das Vektorfeld  $\vec{w} = \text{rot } \vec{v} = \begin{pmatrix} R_y - Q_z \\ P_z - R_x \\ Q_x - P_y \end{pmatrix}$

**Definition 18.8** (Vektorpotential). Ein Vektorfeld  $\vec{v}$  heisst Vektorpotential zu  $\vec{w}$ , falls  $\vec{w} = \text{rot } \vec{v}$ .

**Definition 18.9** (Wirbelfrei / konservativ). Ist  $\vec{v}$  ein Vektorfeld mit  $\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$ , so nennt man  $\vec{v}$  wirbelfrei. Auch: Das Vektorfeld ist *konservativ*.

**Definition 18.10** (Divergenz). Die Divergenz eines Vektorfelds  $\text{div } \vec{K}(x, y, z)$  ist definiert durch:  $\text{div } \vec{K}(x, y, z) := \frac{\partial K_1}{\partial x} + \frac{\partial K_2}{\partial y} + \frac{\partial K_3}{\partial z}$

**Lemma 18.1** (Geschlossener Weg). Wenn  $F = \text{grad } \varphi$ , respektive  $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$  und der Definitionsbereich zusammenhängend ist, sowie  $\gamma$  geschlossen ist, so folgt  $\int_{\gamma} F = 0$ .

## 18.1 Bestimmung eines Potentials durch Raten

In den Nachfolgenden Kapitel beschriebener Vorgang ist teilweise nicht nötig. In gewissen Fällen kann das Potential  $f$  erraten werden in dem wir das Vektorfeld  $\vec{v}$  partielle Integrieren und dann eine Funktion  $f$  erraten, so dass  $\nabla f$  wieder  $\vec{v}$  ergibt.

## 18.2 Bestimmung eines Potentials $\mathbb{R}^2$

Sei  $\vec{v} = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}$ .

Um schnell zu prüfen, ob man überhaupt den folgenden Algorithmus anwenden muss, kann man prüfen ob gilt:  $P_y = Q_x$ , wenn nicht, so hat  $\vec{v}$  kein Potential  $f$ .

1.  $f(x, y) = \int P(x, y) dx + C(y)$  berechnen (Integral berechnen)
2. Die berechnete Gleichung  $f(x, y)$  nun nach  $y$  ableiten:  $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y) dx + C'(y)$  (berechnetes Integral nach  $y$  ableiten)
3.  $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = Q(x, y)$  setzen und  $C'(y)$  berechnen durch umformen und integrieren
4. Berechnetes  $C(y)$  in die Gleichung im 1. Punkt einsetzen. Fertig. Achtung: Im Grunde hat  $C(y)$  durch integrieren (aufleiten) noch einen konstanten Wert, der beliebigen Wert haben kann. Dieser taucht im Grunde auch in der fertigen  $f(x, y)$  Funktion auf.

## 18.3 Bestimmung eines Potentials $\mathbb{R}^3$

Sei  $\vec{v} = \begin{pmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{pmatrix}$ .

Um zu prüfen, ob man überhaupt ein Potential finden kann für  $\vec{v}$  hat rot  $\vec{v} = \vec{0}$  zu sein, also wirbelfrei zu sein. Dazu muss gelten (zu zeigen mit  $\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$ ):  $P_y = Q_x, P_z = R_x, Q_z = R_y$ .

1.  $f(x, y, z) = \int P(x, y, z) dx + C(y, z)$  lösen (Integral berechnen)

2. Nun die berechnete Gleichung  $f(x, y, z)$  nach  $y$  ableiten  $\Rightarrow f_y(x, y, z)$ .
3. Die abgeleitete Gleichung  $f_y$  mit  $Q(x, y, z)$  gleichsetzen:  $f_y(x, y, z) = Q(x, y, z)$  und damit  $C_y(y, z)$  bestimmen.
4. Durch Integration von  $C_y(y, z)$  nach  $y$  ( $\int C_y(y, z) dy$ ) wird  $C(y, z)$  bestimmt bis auf eine Konstante  $D(z)$ , die von  $z$  abhängt.  $C(y, z)$  hat also die Form:  $C(y, z) = \int C_y(y, z) dy + D(z)$ .
5. Dieses  $C(y, z)$  setzt man nun in die Gleichung  $f(x, y, z)$  ein, die im 1. Punkt steht.
6. Nun wird die daraus erzeugte  $f(x, y, z) = \int P(x, y, z) dx + C(y, z) = \int P(x, y, z) dx + \int C_y(y, z) dy + D(z)$  Gleichung nach  $z$  abgeleitet.
7. Durch Gleichsetzen von  $f_z(x, y, z) = R(x, y, z)$  lässt sich  $D_z(z)$  bestimmen.
8.  $D_z(z)$  wird wiederum durch Integration zu  $D(z) = \int D_z(z) dz + c, \quad c \in \mathbb{R}$
9. Das berechnete  $D(z)$  in die  $f(x, y, z)$  Gleichung aus Punkt 6 einsetzen, fertig.

## 18.4 Geometrisches Verständnis

Sei  $B$  ein drei dimensionaler Körper (beschrieben durch Punkte in  $\mathbb{R}^3$  mit der Funktion  $f$ ) so sei  $\nabla f$  senkrecht dazu.

### 18.4.1 Beispiel

Gib einen Vektoren der ein nach aussen gerichteter Normalenvektor (nicht notwendigerweise normiert) auf dem Rand des Ellipsoids ist

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$$

Der Vektor  $\begin{pmatrix} 2x/a^2 \\ 2y/b^2 \\ 2z/c^2 \end{pmatrix}$  ist gleich  $\nabla f$  und steht somit senkrecht auf der Niveauläche  $f = 1$ . Da er vom Ursprung weg orientiert ist, liefert er die richtige Antwort.

Der Vektor  $\begin{pmatrix} yz(1/b^2 - 1/c^2) \\ xz(1/c^2 - 1/a^2) \\ xy(1/a^2 - 1/b^2) \end{pmatrix}$  ist tangential zum Rand  $\partial B$

## 18.5 Fläche unter Kurve

Sei eine Kurve in der Parameterdarstellung (z.B.:  $x(t) = \sin(2t)$  und  $y(t) = \cos(3t)$  über  $0 \leq t \leq \pi$ ) gegeben. So ist die Fläche  $A = \int_0^\pi y \dot{x} dt$ .

## 19 Formeltafel

### 19.1 Mitternachtsformel

$$ax + bx + c = 0 \quad \implies \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

### 19.2 Binomialkoeffizient

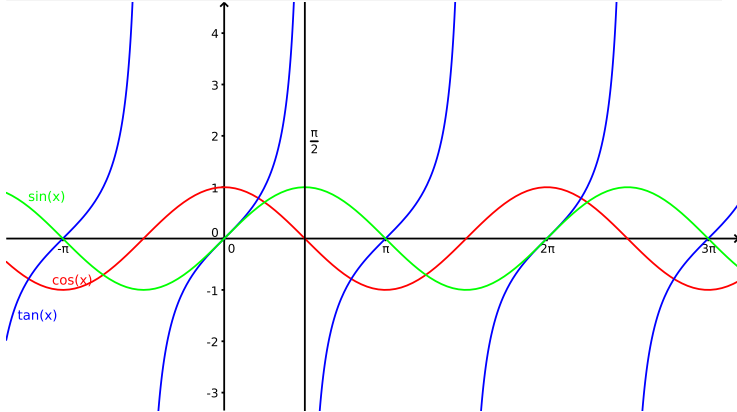
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{für } 0 \leq k \leq n$$

### 19.3 Argument

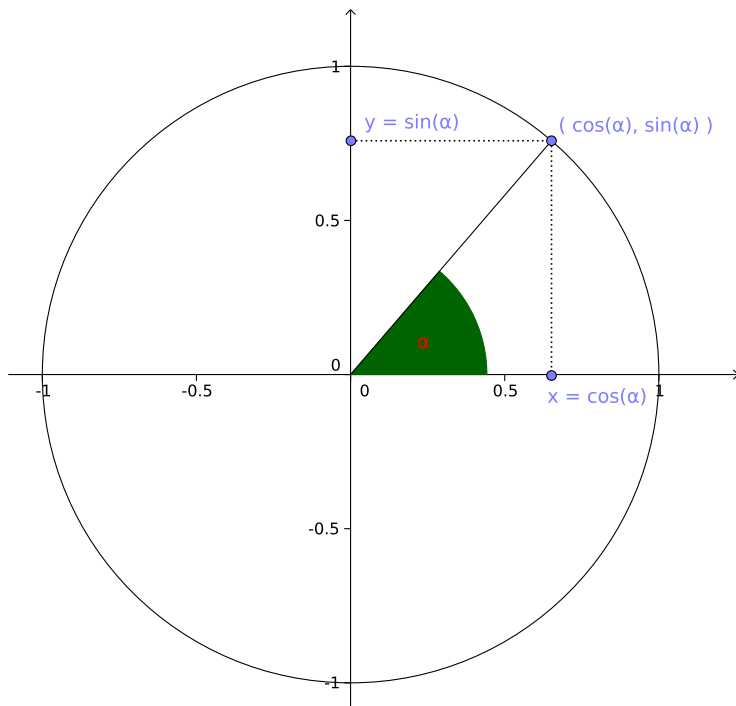
$$\arg(x, y) := \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0 \\ -\arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0, y > 0 \\ \frac{3\pi}{2} & x = 0, y < 0 \end{cases}$$

### 19.4 Kreisfunktionen

$\alpha$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\pi$	Periode	Wertebereich
$\sin$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\sin(\alpha + k \cdot 2\pi)$	$[-1, 1]$
$\cos$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$\cos(\alpha + k \cdot 2\pi)$	$[-1, 1]$
$\tan$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\tan(\alpha + k \cdot \pi)$	$] -\infty, \infty[$



#### 19.4.1 Einheitskreis



$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{y}{x}$$

### 19.5 Trigonometrische Funktionen & Additionstheorem

- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\frac{1}{\cos^2(\alpha)} = 1 + \tan^2(\alpha)$
- $\sin(90^\circ \pm \alpha) = \cos(\alpha)$
- $\sin(180^\circ \pm \alpha) = \mp \sin(\alpha)$
- $\cos(90^\circ \pm \alpha) = \mp \sin(\alpha)$
- $\cos(180^\circ \pm \alpha) = -\cos(\alpha)$
- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta)$
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$
- $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)}$
- $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$
- $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1 = 1 - 2\sin^2(\alpha)$
- $\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$

### 19.6 Hyperbelfunktionen

- $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = -i \sin(ix)$
- $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cos(ix)$
- $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1}$
- $\operatorname{arcsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
- $\operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$
- $\operatorname{arctanh}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$
- Umformung:  $\tanh(x) + 1 = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} + 1 = \frac{2x - 1 + e^{2x} + 1}{e^{2x} + 1} = \frac{2e^{2x}}{e^{2x} + 1}$

### 19.7 Ableitungen

#### 19.7.1 Regeln

- (Summenregel)  $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- (Produktregel)  $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- (Quotientenregel)  $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
- (Kettenregel)  $(g \circ f)'(x) = (g(f(x)))' = g'(f(x))f'(x)$

#### 19.7.2 Ableitungs-Tafel

- $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$
- $\frac{d}{dx} \frac{1}{x^n} = -n \frac{1}{x^{n+1}}$
- $\frac{d}{dx} \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}$
- $\frac{d}{dx} e^{\alpha x + \beta} = \alpha e^{\alpha x + \beta}$
- $\frac{d}{dx} e^{x^\alpha} = \alpha x^{\alpha-1} e^{x^\alpha}$
- $\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}$
- $\frac{d}{dx} \alpha^x = \alpha^x \ln(\alpha)$
- $\frac{d}{dx} x^x = x^x(1 + \ln(x))$
- $\frac{d}{dx} x^{x^\alpha} = x^{x^\alpha + \alpha - 1}(\alpha \log(x) + 1)$
- $\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x); \frac{d}{dx} \sin(\alpha x + \beta) = \alpha \cos(\alpha x + \beta)$
- $\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x); \frac{d}{dx} \cos(\alpha x + \beta) = -\alpha \sin(\alpha x + \beta)$
- $\frac{d}{dx} \tan(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}; \frac{d}{dx} \tan(\alpha x + \beta) = \alpha \frac{1}{\cos^2(\alpha x + \beta)}$
- $\frac{d}{dx} \arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \frac{d}{dx} \arcsin(\alpha x + \beta) = \frac{\alpha}{\sqrt{1-(\alpha x + \beta)^2}}$
- $\frac{d}{dx} \arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \frac{d}{dx} \arccos(\alpha x + \beta) = -\frac{\alpha}{\sqrt{1-(\alpha x + \beta)^2}}$
- $\frac{d}{dx} \arctan(x) = \frac{1}{x^2+1}; \frac{d}{dx} \arctan(\alpha x + \beta) = \frac{\alpha}{(\alpha x + \beta)^2+1}$
- $\frac{d}{dx} \sinh(x) = \cosh(x); \frac{d}{dx} \sinh(\alpha x + \beta) = \alpha \cosh(\alpha x + \beta)$
- $\frac{d}{dx} \cosh(x) = \sinh(x); \frac{d}{dx} \cosh(\alpha x + \beta) = \alpha \sinh(\alpha x + \beta)$
- $\frac{d}{dx} \tanh(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}; \frac{d}{dx} \tanh(\alpha x + \beta) = \alpha \frac{1}{\cosh^2(\alpha x + \beta)}$
- $\frac{d}{dx} \operatorname{arcsinh}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}; \frac{d}{dx} \operatorname{arcsinh}(\alpha x + \beta) = \frac{\alpha}{\sqrt{(\alpha x + \beta)^2+1}}$
- $\frac{d}{dx} \operatorname{arcosh}(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}}; \frac{d}{dx} \operatorname{arcosh}(\alpha x + \beta) = \frac{\alpha}{\sqrt{(\alpha x + \beta)-1}\sqrt{(\alpha x + \beta)+1}}$
- $\frac{d}{dx} \operatorname{arctanh}(x) = \frac{1}{1-x^2}; \frac{d}{dx} \operatorname{arctanh}(\alpha x + \beta) = \frac{\alpha}{1-(\alpha x + \beta)^2}$

## 19.8 Integrale

### Integralregeln

Es gelte:  $\int f(x) dx = F(x)$

- $\int u' \cdot v dx = uv - \int u \cdot v' dx$
- $\int f(x) dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t) dt, x = g(t), dx = g'(t) dt$

- $\int f(a+x) dx = F(a+x)$
- $\int f(a-x) dx = -F(a-x)$
- $\int f(-x) dx = -F(-x)$
- $\int f(\alpha x) dx = \frac{1}{\alpha} F(\alpha x)$
- $\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln |g(x)|$
- $\int g(x) g'(x) dx = \frac{1}{2} g(x)^2$

- $|\int f(x)| \leq \int |f(x)|$  (wenn  $f$ , Riemann-Integrierbar ist)

### typische Integrale

- $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x|$
- $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}$
- $\int \frac{1}{x+a} dx = \ln |x+a|$
- $\int \ln(x) dx = x(\ln(x) - 1)$
- $\int \ln(ax+b) dx = \frac{(ax+b) \ln(ax+b) - ax}{a}$
- $\int \frac{1}{(x+a)^2} dx = -\frac{1}{x+a}$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x}$
- $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b|$
- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln |1+x^2|$
- $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a}, (n \neq -1)$
- $\int x(ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+2}}{(n+2)a^2} - \frac{b(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a^2}$
- $\int \frac{ax+b}{px+q} dx = \frac{ax}{p} + \frac{bp-aq}{p^2} \ln |pq+q|$
- $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$
- $\int \frac{1}{a^2-x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right|$
- $\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \sqrt{x^3}$
- $\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \left( x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{\sin(x)} \right)$
- $\int a^{bx+c} dx = \frac{a^{bx+c}}{b \log(a)}$

### trigonometrische Funktionen

- $\int \sin(ax) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax)$
- $\int \cos(ax) dx = \frac{1}{a} \sin(ax)$
- $\int \sin(ax)^2 dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a}$
- $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x$
- $\int x \sin(ax) dx = \frac{\sin(ax)}{a^2} - \frac{x \cos(ax)}{a}$
- $\int \cos^2(ax) dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2ax)}{4a}$
- $\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan x$
- $\int \cos(ax) dx = \frac{\cos(ax)}{a^2} + \frac{x \sin(ax)}{a}$
- $\int \sin(ax) \cos(ax) dx = -\frac{\cos^2(ax)}{2a}$
- $\int \tan(ax) dx = -\frac{1}{a} \ln |\cos(ax)|$
- $\int \arcsin(x) dx = x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$
- $\int \arccos(x) dx = x \arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$
- $\int \arctan(x) dx = x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$

### Hyperbelfunktionen

- $\int \sinh(ax+b) dx = \frac{\cosh(ax+b)}{a}; \int \sinh(x) dx = \cosh(x)$
- $\int \cosh(ax+b) dx = \frac{\sinh(ax+b)}{a}; \int \cosh(x) dx = \sinh(x)$
- $\int \tanh(ax+b) dx = \frac{\log(\cosh(ax+b))}{a}; \int \tanh(x) dx = \log(\cosh(x))$

### Exponentialfunktion

- $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$

- $\int x e^{ax} dx = e^{ax} \cdot \left( \frac{ax-1}{a^2} \right)$
- $\int x \ln(x) dx = \frac{1}{2} x^2 (\ln(x) - \frac{1}{2})$
- $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{a} x^2} dx = \sqrt{a\pi}$

## 19.9 Reihen

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  divergiert ("harmonische Reihe")
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \ln \frac{1}{2}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  konvergiert für  $\alpha > 1$ , divergiert für  $\alpha \leq 1$
- $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$  für  $|q| < 1$  ("geometrische Reihe")
- $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^n = \frac{1}{1-q}$  für  $|q| < 1$  ("geometrische Reihe")
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$
- $\sum_{n=1}^m n = \frac{m(m+1)}{2}$
- $\sum_{n=0}^m q^n = \frac{1-q^{m+1}}{1-q}$
- $\sum_{n=0}^m n^2 = \frac{1}{6} m(m+1)(2m+1)$
- $\sum_{n=0}^m n^3 = \frac{1}{4} m^2(m+1)^2$

## 19.10 Reihenentwicklung

- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$
- $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n+1)} \frac{x^n}{n}$
- $-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$
- $\ln x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} \cdot \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^{2n}$
- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$  für  $|x| < 1$  (Geom. Reihe)
- $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1}$
- $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$
- $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \dots$
- $\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
- $\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
- $\arcsin x = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} \frac{x^{2k+1}}{4^k(2k+1)}$
- $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$
- $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$  für  $|x| < 1$

## 19.11 Grenzwerte

- **Bernoullische Ungleichung:**  $x \geq -1, n \in \mathbb{N} : (1+x)^n \geq 1+nx$
- **Vergleich von Folgen:** weiter rechts stehende Folgen streben schneller gegen  $\infty$  als die links davon stehenden:  $1, \ln n, n^\alpha (\alpha > 0), q^n (q > 1), n!, n^n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^\alpha} = 0$

$\lim_{n \rightarrow \infty}$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} \rightarrow 1$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \rightarrow 1$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} \rightarrow \infty$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \rightarrow e$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{n!} \rightarrow \frac{1}{e}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n} \right)^n \rightarrow e$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \rightarrow e$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^n \rightarrow \frac{1}{e}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{x}{n} \right)^n \rightarrow e^x$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{x}{n} \right)^n \rightarrow \frac{1}{e^x}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a}{n} \right) \rightarrow 0, a > -1$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} \rightarrow 0$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n!} \rightarrow \infty$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n^k} \rightarrow \infty, a > 1, k$  fest
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n n^k \rightarrow 0, |a| < 1, k$  fest
- $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{a} - 1) \rightarrow \ln a, a > 0$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p q^n = 0 \quad p \in \mathbb{N} \text{ und } 0 < q < 1$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 - x} - x = -\frac{1}{2}$   
(Lösungsansatz mit Taylorreihe ( $\sqrt{1-x} = 1 + \frac{x}{2} + O(x^2)$ ):  
 $\sqrt{x^2 - x} - x = x(\sqrt{1 - \frac{1}{x}} - 1) = x((1 + \frac{1}{2x} + O(\frac{1}{x^2})) - 1) = \frac{1}{2} + O(\frac{1}{x}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$ )

$\lim_{x \rightarrow 0}$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} x^a \ln x = 0, a > 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \ln x = 0 \quad \alpha > 0$

## 19.12 Linienintegral

- 2. Art:  $\int_\gamma \vec{f}(\vec{x}) d\vec{x} := \int_a^b \langle \vec{f}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$
- 1. Art:  $\int_\gamma f ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\|_2 dt$

## 19.13 Kreuzprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

## 19.14 Exponent

- $a^n a^m = a^{n+m}$
- $(a^n)^m = a^{nm}$
- $(ab)^n = a^n b^n$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$
- $a^{\frac{n}{m}} = (a^{\frac{1}{m}})^n = (a^n)^{\frac{1}{m}}$

## 19.15 Wurzel

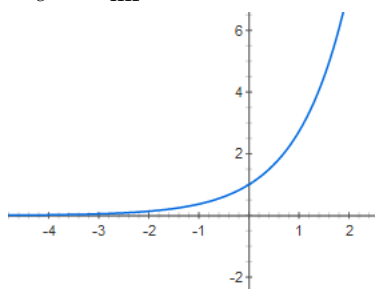
- $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
- $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

## 19.16 Ungleichungen

- $a < b \Rightarrow a + c < b + c$  und  $a - c < b - c$
- $a < b$  und  $c > 0 \Rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$
- $a < b$  und  $c < 0 \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$
- Dreiecksungleichung für reelle Zahlen:  $|a + b| \leq |a| + |b|$
- Cauchy-Schwarz Ungleichung:  $|x \cdot y| \leq \|x\| \cdot \|y\|, x, y \in \mathbb{R}^n$

## 19.17 Logarithmen

- $e^{-\inf} = 0$
- $e^0 = 1$
- $e^1 = e = 2.718281828$
- $e^{\inf} = \inf$



- $y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$

- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a^x = x$
- $a^{\log_a x} = x$
- $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$
- $\log_a x^r = r \log_a x$
- $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$
- $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$
- $\log_a(x + y) = \log_a x + \log_a(1 + \frac{y}{x})$
- $\log_a(x - y) = \log_a x + \log_a(1 - \frac{y}{x})$
- $e^{a+bi} = e^a(\cos(b) + i \sin(b))$  (Euler Identität)
- $e^{b \ln(a)} = a^b$
- $e^{-\ln(b)} = \frac{1}{b}$

## 19.18 Komplexe Zahlen

- $z \in \mathbb{C} : z = a + b \cdot i$
- $\bar{z} = a - b \cdot i$
- $|z|^2 = z \cdot \bar{z} = (a + b \cdot i) \cdot (a - b \cdot i) = a^2 + b^2$
- $i^2 = -1$
- $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
- $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$
- $\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} \cdot i$

## 19.19 Geometrische Körper

### 19.19.1 Ellipsoid

Hat die Form eines Rugbyballs. In kartesischen Koordinaten definiert durch  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ .

## 19.20 Geometrie in 3D

### Masse von speziellen Gebieten

Zylinder	$V = \pi r^2 h$	Torus	$V = 2\pi^2 R r^2$
Pyramide	$V = \frac{1}{3} G h$		$S = 4\pi^2 R r$
Ellipsoid	$V = \frac{4\pi}{3} abc$	Kugel	$V = \frac{4\pi}{3} r^3$
Kegel	$V = \frac{\pi}{3} r^2 h$		$S = 4\pi r^2$
Kegelstumpf	$V = \frac{\pi h}{3} (r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$		

## Rotationskörper

Rotation um die x Achse  $V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$ .

Rotation um die y Achse  $V = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x) dx$ .

## 19.21 Ausklammern

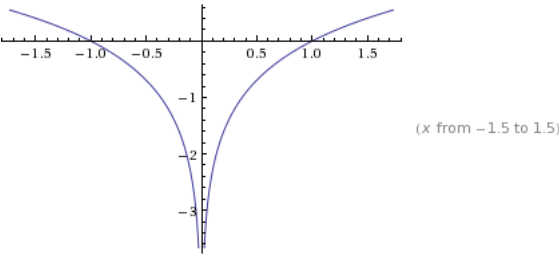
- $x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$
- $x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$

## 19.22 Aus Serien

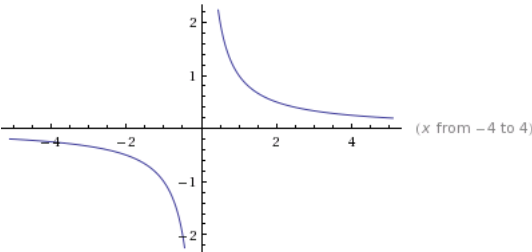
- Ableitung von  $x^x$  kann man berechnen, indem man  $x = e^{\log(x)}$  setzt. Also in diesem Fall  $e^{\log(x^x)} = e^{x \log(x)}$  ableitet, was  $e^{x \log(x)}(1 + \log(x))$  (Serie 10)
- Cauchy-Schwarz Ungleichung:  $|x \cdot y| \leq \|x\| \cdot \|y\|, x, y \in \mathbb{R}^n$
- Euler Identität (komplexe Zahlen):  $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$

19.23 Funktionsgraphen

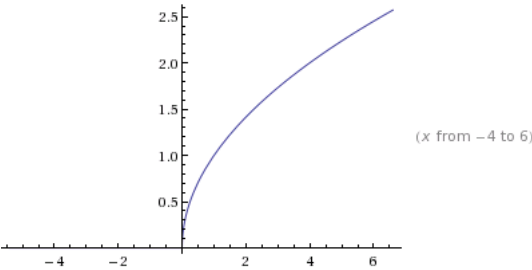
$\log(x)$



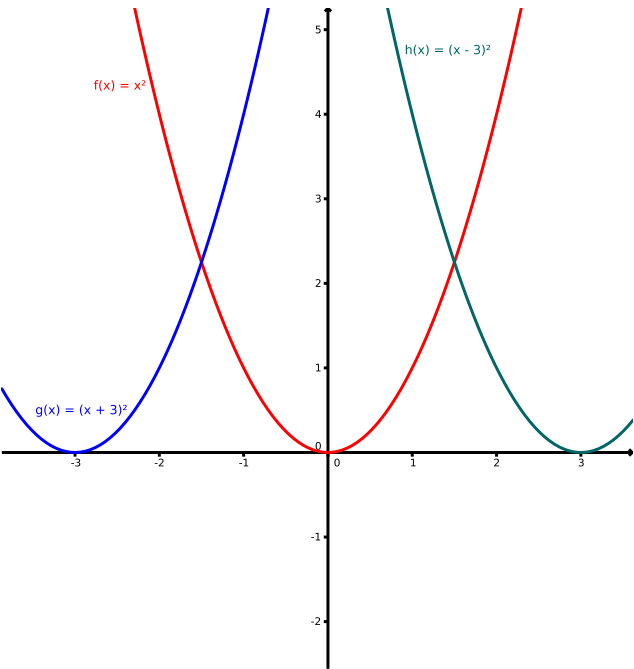
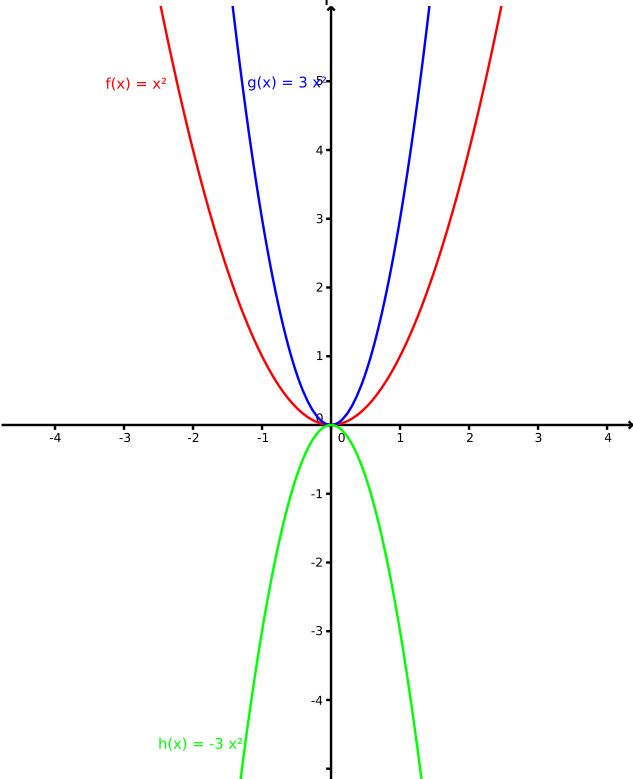
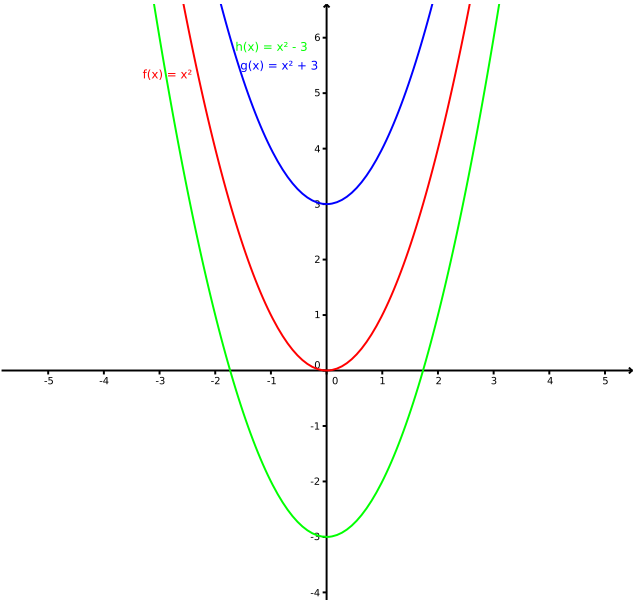
$\frac{1}{x}$



$\sqrt{x}$



Funktionsmanipulation



19.24 Pascalsches Dreieck

$(a+b)^0$	1
$(a+b)^1$	1 1
$(a+b)^2$	1 2 1
$(a+b)^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4$	1 4 6 4 1
$(a+b)^5$	1 5 10 10 5 1

## 20 Reihen Tabellen

	schnelles Fallen			langsames Fallen	
wie schnell gehen die $a_n$ gegen 0	exponentiell wie $q^n,  q  < 1$	polynomial wie $n^{-\alpha}, \alpha > 1$	höchstens wie $1/n$		gar nicht
Beispiele	$a_n = \frac{n^8}{2^n},$ $a_n = (\sqrt[n]{n} - 1)^n,$ $a_n = \frac{1}{n!},$ $a_n = \left(\frac{-1}{4}\right)^n$	$a_n = \frac{1}{n^2},$ $a_n = \frac{1}{n^{100}},$ $a_n = \frac{1}{(n + \ln n)^2},$ $a_n = \frac{20}{n^2 - 33}$	$a_n = \frac{(-1)^n}{\ln n},$ $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$	$a_n = \frac{1}{\ln n},$ $a_n = \frac{1}{n + \ln n},$ $a_n = \frac{1}{n}$	$a_n = (-1)^n,$ $a_n = \sin n,$ $a_n = n^2$
passende Konvergenzkriterien	Wurzel- und Quotientenkriterium	Integral- und Verdichtungskriterium	Leibniz-Kriterium		$a_n \not\rightarrow 0$
Vergleichs-, Majoranten-, Minorantenkriterium	Vergleichen mit $q^n$	Vergleichen mit $n^{-\alpha}$	kein Vergleich möglich	Vergleichen mit $\frac{1}{n}$	
Konvergenz-verhalten	absolute Konvergenz		keine absolute Konvergenz (einfach Konvergenz)	Divergenz	

direkte Kriterien	
<b>Quotientenkriterium</b>	Gut für Reihen, die Fakultäten oder Glieder der Form $a^n$ enthalten. Nicht auf Reihen anwendbar, in denen die Glieder nur wie eine Potenz von $n$ fallen.
<b>Wurzelkriterium</b>	Gut in Reihen, deren Glieder $n$ -te Potenzen sind, zusammen mit der Stirlingformel oft auch bei Fakultäten anwendbar.
<b>Leibnizkriterium</b>	Nur für alternierende Reihen.
<b>Integralkriterium</b>	Anwendbar auf monotone Reihen.
direkte Kriterien	
<b>Vergleichskriterium</b>	Ermöglicht es „Störterme“ wegzulassen und so einfachere Reihen zu untersuchen
<b>Verdichtungskriterium</b>	Bei monotonen Reihen anwendbar. Für Reihen mit langsam fallenden Gliedern
<b>Majoranten- und Minorantenkriterium</b>	Ähnlich wie Vergleichskriterium. Wird mit einer Reihe verglichen, deren Glieder stets kleiner oder grösser sind.