

1 Mengen

1.1 Definitionen

Obere/Untere Schranke:	$\exists b \in \mathbb{R} \forall a \in A : a \leq b, \exists c \in \mathbb{R} \forall a \in A : a \geq c$
Supremum:	kleinste obere Schranke $\sup A$
Infimum:	grösste untere Schranke $\inf A$
Maximum/Minimum:	$\sup A \in A, \inf A \in A$
kompakt:	abgeschlossen und beschränkt
abgeschlossen:	z.B. $[0, 1]$

1.1.1 Vorgehen zur Bestimmung von Maximum/Minimum

1. Zeigen, dass $f(x)$ stetig ist
2. Zeigen, dass Definitionsmenge kompakt ist
3. Nach **Satz von Weierstrass** wird Maximum/Minimum angenommen
4. Maximum/Minimum bestimmen

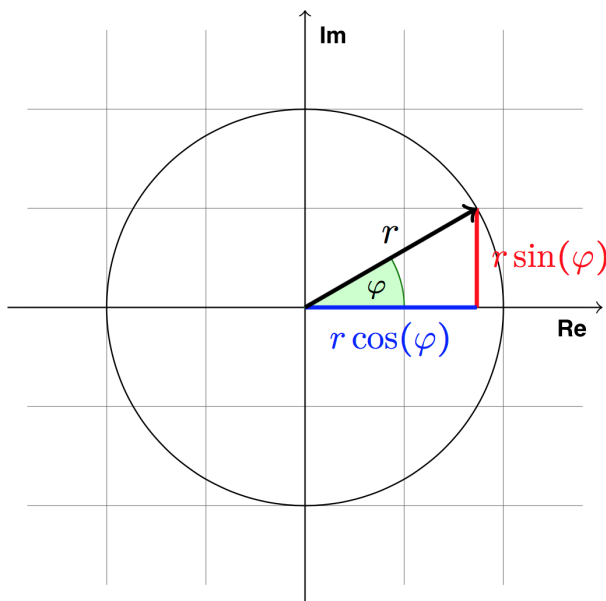
1.2 Identitäten

$$A + B := \{a + b | a \in A, b \in B\}$$

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B, \inf(A + B) = \inf A + \inf B$$

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}, \inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$$

2 Komplexe Zahlen



$$z = x + iy = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) = re^{i\varphi}$$

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\arg(z) = \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (\text{je nach Quadrant})$$

$$x = r \cos(\varphi)$$

$$y = r \sin(\varphi)$$

$$zw = (re^{i\varphi}) \cdot (se^{i\psi}) = rse^{i(\varphi+\psi)}$$

$$\sqrt[q]{z} = \sqrt[q]{s}e^{i\phi}, \text{ wobei } \phi = \frac{\varphi}{q} \mod \frac{2\pi}{q}$$

$$e^{i(\frac{\pi}{2}+2\pi k)} = i, e^{i\pi} = 1, e^{-i\pi} = -1$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

$$\bar{z} = x - iy$$

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

$$i = \sqrt{-1}$$

$$i^2 = -1$$

$$|z|^2 = z\bar{z}$$

$$|zw|^2 = (zw) \cdot \overline{(zw)} = |z|^2|w|^2$$

3 Grenzwert

3.1 Dominanz

Für $x \rightarrow +\infty$: $\dots < \log(\log(x)) < \log(x) < x^\alpha < \alpha^x < x! < x^x$

Für $x \rightarrow 0$: $\dots < \log(\log(x)) < \log(x) < \left(\frac{1}{x}\right)^\alpha$

3.2 Fundamentallimes

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin \odot}{\odot} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\tan \odot}{\odot} = 1 \text{ mit } \odot \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{1}{\odot}\right)^\odot = e \text{ mit } \odot \xrightarrow{x \rightarrow a} \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (1 + \odot)^{\frac{1}{\odot}} = e \text{ mit } \odot \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$

3.3 Wurzeltrick

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} + \beta = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x} + \beta) \frac{\sqrt{x} - \beta}{\sqrt{x} - \beta}$$

3.4 $e^{\log(x)}$ -Trick

Anforderung: Term der Form $f(x)^{g(x)}$ mit Grenzwert "0⁰", " ∞^0 " oder " 1^∞ " für $x \rightarrow 0$

$$\textbf{Grundsatz: } \lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \cdot \log(f(x))}$$

Tipp: Danach den Limes des Exponenten berechnen. Oft ist Bernoulli-de l'Hôpital dazu nützlich.

3.5 Substitution

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2(1 - \cos(\frac{1}{x})) \Rightarrow u = \frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(u)}{u^2}$$

3.6 Satz von Bernoulli-de l'Hôpital

Anforderung: Term der Form $\frac{f(x)}{g(x)}$ mit Grenzwert entweder " $\frac{0}{0}$ " oder " $\frac{\infty}{\infty}$ " mit $g'(x) \neq 0$.

$$\textbf{Grundsatz: } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Term	Anforderung	Umformung
$f(x)g(x)$	"0 · ∞"	$\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$
$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{h(x)}{i(x)}$	"∞ - ∞"	$\frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{h(x)}{i(x)}}{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{h(x)}{i(x)}}$

3.7 Wichtige Grenzwerte

$$\begin{array}{ll}
\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \\
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a} \\
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2} \\
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \\
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0 & \lim_{n \rightarrow 0} \frac{e^n - 1}{n} = 1 \\
\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty & \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \\
\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n) = \infty & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}
\end{array}$$

4 Folgen

4.1 Definition

Konvergenz: $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, sodass $\forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$

Divergenz: $\forall K > 0 \exists N = N(K) \in \mathbb{N}$, sodass $\forall n \geq N : |a_n| > K$

4.2 Beweis

1. Zeige mittels **Induktion**, dass die Folge **beschränkt** ist und monoton **steigt/fällt**. Benutze dazu z.B. folgende Aussagen: $a_n \leq a_{n+1}$ oder $a_{n+1} - a_n \geq 0$.
2. **Grenzwert berechnen** mit $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ oder durch die ersten paar Terme abschätzen
3. Beweise den Grenzwert (z.B. mit $a_n \geq a$) um Beschränktheit zu beweisen

Tipp: Den Grenzwert in der rekursiven Formel mit a_n und a_{n+1} ersetzen.

Für die Formel $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \sqrt{a_n}$ muss zum Beispiel gelten: $a = \frac{1}{2}a + \sqrt{a}$ (hier $a = 4$)

5 Reihen \sum^{∞}

5.1 Konvergenzkriterien

	Eignung	Bemerkung
Limes des allgemeinen Glieds		zeigt nur Divergenz
Majoranten- und Minorantenkriterium		ersten Glieder spielen keine Rolle
Quotientenkriterium	a_n mit Faktoren wie $n!$, a^n , oder Polynome	gleiche Folgerung wie Wurzelkriterium
Wurzelkriterium	$a_n = (b_n)^n$	gleiche Folgerung wie Quotientenkriterium
Leibnitz-Kriterium	$\sin, \cos, \tan, (-1)^n$	
Absolute Konvergenz	$\sin, \cos, \tan, (-1)^n$	
Sandwich-Theorem	$\sin, \cos, \tan, (-1)^n$	

Limes des allgemeinen Glieds

Bemerkung: Mit dieser Methode lässt sich nur die Divergenz beweisen, nicht jedoch die Konvergenz.

1. $\sum_n a_n$ gegeben
2. Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ berechnen
 - falls Grenzwert $\neq 0 \Rightarrow$ **divergent**
 - falls Grenzwert $= 0 \Rightarrow$ keine Aussage

Majoranten- und Minorantenkriterium

Es seien $a_n, b_n > 0$ mit $a_n \geq b_n \forall n$ ab einem gewissen n_0 . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \sum_n a_n \text{ konvergent} &\Rightarrow \sum_n b_n \text{ **konvergent**} && \text{(Majorantenkriterium)} \\ \sum_n b_n \text{ divergent} &\Rightarrow \sum_n a_n \text{ **divergent**} && \text{(Minorantenkriterium)} \end{aligned}$$

Vergleichskriterium

1. $\sum_n a_n$ und $\sum_n b_n$ gegeben mit $a_n, b_n > 0$
2. Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ berechnen
 - falls Grenzwert $= 0$:
 - $\sum_n a_n$ divergent $\Rightarrow \sum_n b_n$ **divergent**
 - $\sum_n b_n$ konvergent $\Rightarrow \sum_n a_n$ **konvergent**
 - falls Grenzwert $= \infty$:
 - $\sum_n a_n$ konvergent $\Rightarrow \sum_n b_n$ **konvergent**
 - $\sum_n b_n$ divergent $\Rightarrow \sum_n a_n$ **divergent**

Quotientenkriterium

1. $\sum_n a_n$ mit $a_n \neq 0$ gegeben
2. Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ berechnen
 - falls Grenzwert $> 1 \Rightarrow$ **divergent**
 - falls Grenzwert $< 1 \Rightarrow$ **konvergent**
 - falls Grenzwert $= 1 \Rightarrow$ keine Aussage

Wurzelkriterium

1. $\sum_n a_n$ mit $a_n \neq 0$ gegeben
2. Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ berechnen
 - falls Grenzwert $> 1 \Rightarrow$ **divergent**
 - falls Grenzwert $< 1 \Rightarrow$ **konvergent**
 - falls Grenzwert $= 1 \Rightarrow$ keine Aussage

Leibniz-Kriterium

1. $\sum_n (-1)^n a_n$ gegeben
2. **konvergent**, falls:
 - (a) $a_n \geq 0$
 - (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
 - (c) a_n monoton fallend

Absolute Konvergenz

1. $\sum_n (-1)^n a_n$ gegeben
2. **konvergent**, falls $\sum_n |a_n|$ konvergent

5.2 Geometrische Reihe

Reihe der Form $\sum_{k=0}^{\infty} a \cdot r^k$ mit der **Partialsumme**:

$$S_N = \frac{a - ar^{N+1}}{1 - r}$$

Konvergent, falls $0 < |r| < 1$ mit Grenzwert:

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1 - r}$$

5.3 Potenzreihe

Reihe der Form $\sum_0^{\infty} a_n x^n$. **Konvergent**, falls $|x| < \rho$. In diesem Gebiet darf man die Reihe ableiten und integrieren.

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$
$$\rho = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Konvergenzverhalten am Rand: Es muss noch überprüft werden, ob die Reihe für genau ρ konvergiert. Dazu muss ρ in die Formel eingesetzt werden.

5.3.1 Wichtige Reihen

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \\ \sin(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} n^2 &= \sum_{k=1}^n 2k - 1 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} &= \infty \quad (\text{harmonisch}) \end{aligned}$$

5.3.2 Potenzreihenentwicklung

Grundsatz: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$

6 Stetigkeit

6.1 Lipschitz-Stetigkeit

Es existiert eine Konstante $L \in \mathbb{R}$, sodass:

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in \Omega$$

Bemerkung: Ist f' auf Ω beschränkt, so ist f Lipschitz-stetig. Lipschitz-Stetigkeit impliziert gleichmässige Stetigkeit.

6.2 Weierstrass-Kriterium

Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta(\epsilon, a) > 0$, sodass für alle $|x - a| < \delta$ gilt:

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon$$

6.3 Gleichmässige Stetigkeit

Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta(\epsilon) > 0$, sodass für alle $|x - y| < \delta$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Bemerkung: Ist f stetig und kompakt, dann ist sie auch gleichmässig stetig.

6.4 Punktweise Konvergenz

$f_n(x)$ konvergiert punktweise falls:

$$\forall x \in \Omega \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

6.5 Gleichmässige Konvergenz

Grundsatz: Falls eine Folge stetiger Funktionen f_n gleichmässig gegen f konvergiert, muss f stetig sein.

$f_n(x)$ konvergiert gleichmässig falls:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Bemerkung: Gleichmässige Konvergenz impliziert punktweise Konvergenz.

Rezept für gleichmässige Konvergenz

(i) Punktweser Limes berechnen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad = \text{Grenzfunktion}$$

(ii) Supremum bestimmen
(Ableitung von $f_n(x)$ oder Abschätzung benutzen)

$$\sup |f_n(x) - f(x)|$$

(iii) Limes $n \rightarrow \infty$ bestimmen (vgl. Kriterium glm. Konvergenz)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup |f_n(x) - f(x)|$$

Limes = 0 \rightarrow Glm. konvergent mit Grenzfunktion $f(x)$

(iv) Indirekte Methode

- $f(x)$ unstetig auf $\Omega \Rightarrow$ keine glm. Konvergenz
- $f(x)$ stetig, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \forall x \in \Omega$ und Ω kompakt \Rightarrow Glm. Konvergenz

gegeben: $f_n : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}, f_n(x) = (1 - x^2)x^n$

punktweisen Limes berechnen: $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - x^2)x^n = 0 \equiv f(x)$
 \Rightarrow konvergiert gegen 0

Supremum berechnen: $\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x)| = \sup_{x \in [0,1]} f_n(x)$

Maximum finden: $\frac{d}{dx} f_n(x) = nx^{n-1}(1 - x^2) - 2xx^n = x^{n-1}(n - (n+2)x^2) = 0$
 $\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \sqrt{\frac{n}{n+2}} \Rightarrow x_2$ ist Maximum

Limes berechnen: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_2) = 0$

Folgerung: f_n konvergiert auf $[0, 1]$ glm. gegen f

7 Differenzialrechnung

Eine stetige Funktion ist differenzierbar, falls der Grenzwert $f'(x_0)$ existiert:

$$f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Tangente

Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in \Omega$ diffbar. Dann ist die Tangente im Punkt x_0

$$t(x; x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

7.1 Umkehrsatz

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

7.2 Mittelwertsatz

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

7.3 Taylorpolynom

Das Taylorpolynom m -ter Ordnung von $f(x)$ an der Stelle $x = a$

$$P_m^a(x) := f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2}f''(a)(x - a)^2 + \dots + \frac{1}{m!}f^{(m)}(a)(x - a)^m$$

mit dem Fehlerterm $R_m^a(x)$, wobei ξ zwischen a und b liegt:

$$R_m^a(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}(x - a)^{m+1}, \text{ wobei } f(x) = P_m^a(x) + R_m^a(x)$$

7.4 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$f(x) = \int_l^{m(x)} g(t) dt$$

$$f'(x) = g(m(x)) \cdot \frac{d}{dx} m(x)$$

wobei $m(x)$ der Form ax^b ist mit $l \in \mathbb{R}$

Differenzial / Jaccobi-Matrix

$$df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

→ enthält die n part. Ableit. aller m Komponenten von f

Taylorentwicklung mit mehreren Variablen

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y \\ & + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (\Delta y)^2 \right) \\ & + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} (\Delta x)^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} (\Delta x)^2 \Delta y \right. \\ & \quad \left. + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \Delta x (\Delta y)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} (\Delta y)^3 \right) \\ & + \dots \end{aligned}$$

8 Integration

8.1 Elementare Integrale

$f'(x)$	$f(x)$	$F(x)$
$\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$	$\frac{f(x)}{g(x)}$	
0	c	cx
$r \cdot x^{r-1}$	x^r	$\frac{x^{r+1}}{r+1}$
$-\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\ln x $
$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$-\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$	$-\ln \cos(x) $
e^x	e^x	e^x
$c \cdot e^{cx}$	e^{cx}	$\frac{1}{c} \cdot e^{cx}$
$\ln(c) \cdot c^x$	c^x	$\frac{c^x}{\ln(c)}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$x(\ln x - 1)$
$\frac{1}{\ln(a) \cdot x}$	$\log_a x $	$\frac{x}{\ln(a)}(\ln x - 1)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$x \cdot \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$	$x \cdot \arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\cosh(x)$
$\sinh(x)$	$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\sinh(x)$
$\frac{1}{\cosh^2(x)}$	$\tanh(x)$	$\log(\cosh(x))$

8.2 Regeln

$$\begin{aligned}\textbf{Direkter Integral} \quad & \int f(g(x))g'(x) \, dx = F(g(x)) \\ \textbf{Partielle Integration} \quad & \int f' \cdot g \, dx = f \cdot g - \int f \cdot g' \, dx \\ \textbf{mit Polynomen} \quad & \int \frac{p(x)}{q(x)} \, dx \Rightarrow \text{Partialbruchzerlegung} \\ \textbf{Substitution} \quad & \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) \, dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, dx \text{ mit } x = \varphi(t)\end{aligned}$$

8.3 Tipps

$$\begin{aligned}\int \tan x \, dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = -\log |\cos(x)| \\ \int \frac{1}{x - \alpha} \, dx &= \log(x - \alpha) \\ \int \frac{\frac{1}{\alpha}}{1 + (\frac{x}{\alpha})^2} \, dx &= \arctan(x) \\ \int \sin^2(x) \, dx &= \frac{1}{2}(x - \sin(x) \cos(x)) + C \\ \int \cos^2(x) \, dx &= \frac{1}{2}(x + \sin(x) \cos(x)) + C \\ \int \sqrt{x^2 + 1} \, dx &= \sinh(x) + C\end{aligned}$$

8.4 Uneigentliche Integrale

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f(x) \, dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(x) \, dx \\ \int_{-\infty}^\infty f(x) \, dx &= \lim_{R \rightarrow -\infty} \int_R^k f(x) \, dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_k^R f(x) \, dx\end{aligned}$$

Gibt es eine Unstetigkeitsstelle c in dem Integrationsgebiet, so geht man wie folgt vor:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) \, dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x) \, dx$$

8.5 Beweis bijektiver Funktionen

Zu beweisen sind folgende Eigenschaften:

- injektiv:** Zeig, dass f **strikt monoton wächst oder fällt** und **stetig** ist
surjektiv: Zeig, dass alle Werte im Bildbereich angenommen werden (vl. mit Zwischenwertsatz)

Daraus folgt dann, dass f bijektiv ist.

9 Differentialgleichungen

9.1 Grundbegriffe

- Ordnung:** höchste vorkommende Ableitung
linear: alle y -abhängigen Terme kommen linear vor (keine Terme wie zum Beispiel y^2 , $(y'')^3$, $\sin(y)$, $e^{y'}$)
homogen: Gleichung ohne Störfunktionen
Störfunktion: Term, der rein von der Funktionsvariablen x abhängt

9.2 Methoden

	Problem	Anforderungen
Trennung der Variablen	$y' = \frac{dy}{dx} = h(x) \cdot g(y)$	1. Ordnung
Variation der Konstanten	$y' = \frac{dy}{dx} = h(x)y + b(x)$	1. Ordnung inhomogen
Euler-Ansatz	$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = 0$	n. Ordnung linear homogen
Direkter Ansatz	$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = b(x)$	n. Ordnung linear inhomogen

9.2.1 Trennung der Variable

$$y' + x \tan y = 0, \quad y(0) = \frac{\pi}{2}$$

umformen $\frac{dy}{dx} = -x \tan y$

konstante Lösungen $y(x) \equiv 0$ erfüllt jedoch $y(0) \equiv \frac{\pi}{2}$ nicht

Trennung $\frac{dy}{\tan y} = -x dx$

integrieren $\int \frac{\cos y}{\sin y} dy = - \int x dx \Rightarrow \log |\sin y| = -\frac{x^2}{2} + C$
 $\Rightarrow |\sin y| = e^C e^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow \sin y = \pm e^C e^{-\frac{x^2}{2}} = C e^{-\frac{x^2}{2}}$

Anfangsbedingung gebrauchen $\sin(y(0)) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1 \Rightarrow C = 1$

Lösung $y(x) = \arcsin(e^{-\frac{x^2}{2}})$

9.2.2 Variation der Konstanten

Grundsatz: $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

$$y'(x+1) + y = x^3, \quad y(0) = \sqrt{5}$$

Trennung $\frac{y'}{y} = \frac{-1}{x+1}$

konstante Lösungen $y(x) \equiv 0$ erfüllt jedoch $y(0) \equiv \sqrt{5}$ nicht

integrieren $\int \frac{dy}{y} = - \int \frac{dx}{x+1}$
 $\Rightarrow \ln |y| = -\ln |x+1| + C$

Homogene Lösung $y_h(x) = \frac{C}{x+1}$, mit $C = \pm e^C \in \mathbb{R} \setminus 0$

partikulärer Ansatz $y_p(x) = \frac{C(x)}{x+1}$

einsetzen $\left(\frac{C'(x)}{x+1} - \frac{C(x)}{(x+1)^2}\right)(x+1) + \frac{C(x)}{x+1} = x^3$

$$C'(x) = x^3$$

$$C(x) = \frac{x^4}{4}$$

partikuläre Lösung $y_p(x) = \frac{x^4}{4(x+1)}$

allgemeine Lösung $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \frac{C}{x+1} + \frac{x^4}{4(x+1)}$

Anfangsbedingung benutzen $y(0) = \sqrt{5} \Rightarrow C = \sqrt{5}$

Lösung $y(x) = \frac{\sqrt{5}}{x+1} + \frac{x^4}{4(x+1)}$

9.2.3 Euler-Ansatz

$$y'' - 2y' - 8y = 0, \quad y(1) = 1, y'(1) = 0$$

$$\text{Euler-Ansatz} \quad y(x) = e^{\lambda x}$$

$$\text{einsetzen} \quad \lambda^2 e^{\lambda x} - 2\lambda e^{\lambda x} - 8e^{\lambda x} = 0$$

$$\text{charakt. Polynom} \quad \lambda^2 - 2\lambda - 8 = (\lambda - 4)(\lambda + 2) = 0$$

$$\text{Nullstellen} \quad 4, -2$$

$$\text{allgemeine Lösung} \quad y(x) = Ae^{4x} + Be^{-2x}$$

$$\text{Anfangsbedingung gebrauchen} \quad y(1) = Ae^4 + Be^{-2} = 1, \quad y'(1) = 4Ae^4 - 2Be^{-2} = 0$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{3}e^{-4}, B = \frac{2}{3}e^2$$

$$\text{Lösung} \quad y(x) = \frac{1}{3}e^{4x-4} + \frac{2}{3}e^{2-2x}$$

Bemerkung: Zu einer m -fachen Nullstelle λ gehören die m linear unabhängigen Lösungen $e^{\lambda x}$, $x \cdot e^{\lambda x}$, \dots , $x^{m-1} \cdot e^{\lambda x}$. Zur m -fachen Nullstelle $\lambda = 0$ gehören die Lösungen $1, x, \dots$, x^{m-1} .

Komplexe Nullstellen:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ein komplexes Nullstellenpaar der Form $\alpha \pm \beta i$ liefert folgende homogene Lösung:

$$y(x) = e^{\alpha x} (C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x))$$

9.2.4 Direkter Ansatz

Grundsatz: $y(x) = y_{\text{homo}}(x) + y_p(x)$

Inhomogener Term $b(x)$	Ansatz für $y_p(x)$	zu bestimmen
Polynom	$Ax^2 + Bx + C$	A, B, C
ce^{kx}	Ae^{kx}	A
$c \sin(kx)$ oder $c \cos(kx)$	$A \sin(kx) + B \cos(kx)$	A, B

Bemerkung: Kommt der gewählte Ansatz schon in der homogenen Lösung vor, so multipliziert man den Ansatz einfach mit x .

$$\begin{aligned}
 & y'' - y' + \frac{1}{4}y = \cos(x) \\
 \text{homogener Ansatz} \quad & y'' + y' + \frac{1}{4}y = 0 \\
 \text{Euler-Ansatz anwenden} \quad & \lambda^2 + \lambda + \frac{1}{4} = \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \\
 \text{homogene Lösung} \quad & \Rightarrow y_{\text{homo}}(x) = Ae^{-\frac{x}{2}} + Bx \cdot e^{-\frac{x}{2}} \\
 \text{partikulärer Ansatz wählen} \quad & y_p(x) = a \cos(x) + b \sin(x) \\
 & \Rightarrow y'_p(x) = -a \sin(x) + b \cos(x), \quad y''_p(x) = -a \cos(x) - b \sin(x) \\
 \text{Einsetzen} \quad & (-a + b + \frac{a}{4}) \cos(x) + (-b - a + \frac{1}{4}b) \sin(x) = \cos(x) \\
 \text{Koeffizientenvergleich} \quad & -\frac{3}{4}a + b = 1, \quad -a - \frac{3}{4}b = 0 \\
 \text{partikuläre Lösung} \quad & y_p(x) = -\frac{12}{25} \cos(x) + \frac{16}{25} \sin(x) \\
 \text{Lösung} \quad & y(x) = Ae^{-\frac{x}{2}} + Bx \cdot e^{-\frac{x}{2}} - \frac{12}{25} \cos(x) + \frac{16}{25} \sin(x)
 \end{aligned}$$

10 Wegintegral

10.1 Standardmethode

Grundsatz: $\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} := \int_a^b \vec{v}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \dot{\vec{\gamma}}(t) dt$

$$\begin{aligned}
 & \vec{v} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma : [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix} \\
 \text{parametrisieren} \quad & \text{hier bereits gegeben} \\
 \gamma \text{ ableiten} \quad & \dot{\gamma} = \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \\
 \text{in Formel einsetzen} \quad & \int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} dt \\
 & = \int_0^{2\pi} (1 - \cos(t))^2 dt = \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos(t) + \cos^2(t)) dt \\
 \text{Lösung} \quad & 2\pi - 0 + \pi = 3\pi
 \end{aligned}$$

10.2 In Potenzialfeldern

Anforderung: Das Vektorfeld \vec{v} ist **konservativ**(= Potenzialfeld, der Weg ist egal). Es existiert ein Potenzial.

$$\textbf{Grundsatz: } \int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \Phi(\text{Ende}) - \Phi(\text{Anfang})$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} e^{xy}(1+xy) \\ e^{xy}x^2 \end{pmatrix}, \text{ Kreisbogen von } (1,0) \text{ nach } (-1,0)$$

$$\text{gleichsetzen: } \vec{v} = \begin{pmatrix} e^{xy}(1+xy) \\ e^{xy}x^2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{pmatrix} = \nabla \Phi$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = e^{xy}x^2 \Rightarrow \Phi = \int e^{xy}x^2 dy = xe^{xy} + C(x)$$

$$\begin{aligned} \text{ableiten: } \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= e^{xy} + xye^{xy} + C' \stackrel{!}{=} e^{xy} + xye^{xy} \\ &\Rightarrow C' = 0 \Rightarrow C = \text{const.} \end{aligned}$$

$$\textbf{Potenzial: } \Phi = xe^{xy} + \text{const.}$$

$$\textbf{Lösung: } \int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \Phi(-1,0) - \Phi(1,0) = -1 + C - 1 - C = 2$$

10.3 Satz von Green

Anforderung: Der Rand muss im positiven mathematischen Sinn umlaufen werden (d.h. im Gegenuhrzeigersinn).

$$\textbf{Grundsatz: } \int_{\gamma=\partial C} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_C \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) dx dy$$

Bemerkung: Falls das Vektorfeld nicht gegeben ist, können folgende ausgewählt werden:
 $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$ oder $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -y \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix}, \text{ Kreisbogen mit Radius 1 um } (0,0)$$

$$\text{Rotation berechnen: } \text{rot}(\vec{v}) = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 - 1 = -1$$

$$\text{Normalbereich: } E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$\text{in Formel einsetzen: } \int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_E -1 dx dy = -\mu(E) = -\pi$$

10.4 Satz von Stokes

Anforderung: Einfacher in \mathbb{R}^3 , der Rand muss im positiven mathematischen Sinn umlaufen werden (d.h. im Gegenuhrzeigersinn)

$$\textbf{Grundsatz: } \int_{\gamma=\partial C} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_C \text{rot}(\vec{v}) \cdot \vec{n} \, do$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} y(z^2 - x^2) \\ x(y^2 - z^2) \\ z(x^2 + y^2) \end{pmatrix}, \text{ Rand der oberen Hälfte der Einheitssphäre mit Radius 1}$$

$$\text{Rotation berechnen: } \text{rot}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 2z(x+y) \\ 2z(y-x) \\ x^2 + y^2 - 2z^2 \end{pmatrix}$$

$$\textbf{Einheitssphäre parametrisieren: } \Phi(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\phi) \\ \sin(\theta) \sin(\phi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\text{Normalvektor berechnen: } \Phi_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \cos(\phi) \\ \cos(\theta) \sin(\phi) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix}, \quad \Phi_\phi = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \sin(\phi) \\ \sin(\theta) \cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_\theta \times \Phi_\phi = \begin{pmatrix} \sin^2(\theta) \cos(\phi) \\ \sin^2(\theta) \sin(\phi) \\ \sin(\theta) \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\textbf{Grundsatz anwenden: } \int_H \text{rot}(\vec{v}) \cdot \vec{n} \, do = \frac{\pi}{2}$$

11 Flächenintegral

11.1 Normalbereich

$$\textbf{Grundsatz: } \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

$$\int_{\Omega} F \, d\mu = \int_a^b dx \int_{f(x)}^{g(x)} dy \, F(x, y)$$

$$\int_{\Omega} xy \, d\mu, \quad \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2, x \geq y^2\}$$

$$\text{als Normalbereich schreiben: } \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$$

$$\begin{aligned} \text{in Formel einsetzen: } \int_{\Omega} xy \, d\mu &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy xy = \int_0^1 dx \, x \left[\frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^{\sqrt{x}} \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{2} \right) dx = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Bemerkung: Soll nur die Fläche ausgerechnet werden, so wähle $F(x, y) = 1$. Werden Polarkoordinaten benutzt, so wähle $F(r, \phi) = r$.

11.2 Satz von Green

Anforderung: Der Rand muss im positiven mathematischen Sinn umlaufen werden (d.h. im Gegenurzeigersinn)

Grundsatz: $\mu(C) = \int_{\gamma=\partial C} \vec{v} \cdot d\vec{s}$, falls $\text{rot}(\vec{v}) = 1$

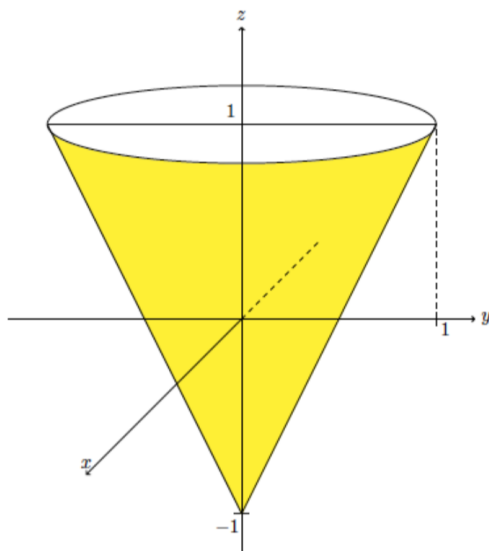
Flächeninhalt der Ellipse E , berandet durch $x = a \cos(\theta)$, $y = b \sin(\theta)$

Rand parametrisieren: $\gamma : [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^2$, $\theta \mapsto \begin{pmatrix} a \cos(\theta) \\ b \sin(\theta) \end{pmatrix}$

Vektorfeld auswählen: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$ oder $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -y \\ 0 \end{pmatrix}$

Wegintegral ausrechnen: $\mu(E) = \pi ab$

12 Oberflächenintegral



gegeben: $\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{x^2}{2} \\ -xy \\ x^2 + 3z^2 - 3 \end{pmatrix}$

gesucht: Fluss durch die Mantelfläche des Kegels
(von Innen nach Aussen)

Vorgehen: Fluss durch den ganzen Kegel
mit **Satz von Gauss** berechnen
Fluss durch Deckel
mit **Standardmethode** berechnen

12.1 Standardmethode

$$\textbf{Grundsatz:} \quad \int_{\partial V} \vec{v} \cdot \vec{n} \, do$$

$$\text{Normalvektor:} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Vektorfeld anpassen:} \quad z = 1 \Rightarrow \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{x^2}{2} \\ -xy \\ x^2 \end{pmatrix}$$

$$\textbf{Grundsatz anwenden:} \quad \iint_D \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{x^2}{2} \\ -xy \\ x^2 \end{pmatrix} dx dy = \iint_D x^2 \, dx dy$$

$$\textbf{Koordinatentransformation:} \quad \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 \cos^2(\phi) \, dr d\phi = \frac{\pi}{4}$$

12.2 Satz von Gauss

$$\textbf{Grundsatz:} \quad \int_{\partial V} \vec{v} \cdot \vec{n} \, do = \int_V \operatorname{div}(\vec{v}) \, d\mu$$

wobei \vec{n} die nach aussen gerichtete Normale längs ∂V bezeichnet.

$$\text{Divergenz berechnen:} \quad \operatorname{div}(\vec{F}) = 6z$$

$$\textbf{Grundsatz anwenden:} \quad \int_{-1}^1 dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{z+1}{2}} 6zr \, dr = 2\pi$$

Bemerkung: In diesem Beispiel wurden zylindrische Koordinaten benutzt.

12.3 Satz von Stokes

Anforderung: Einfacher in \mathbb{R}^3 , der Rand muss im positiven mathematischen Sinn umlaufen werden (d.h. im Gegenuhrzeigersinn)

$$\textbf{Grundsatz:} \quad \int_{\gamma=\partial C} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_C \operatorname{rot}(\vec{v}) \cdot \vec{n} \, do$$

13 Kurvendiskussion

Extremalstelle	$f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$
Minimalstelle	$f'(x) = 0 \wedge f''(x) > 0$
Maximalstelle	$f'(x) = 0 \wedge f''(x) < 0$
Wendepunkt	$f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$
Sattelpunkt	$f'(x) = 0 \wedge f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$

kritischer Punkt: $p_0 \in \Omega$ für welchen $\text{rank}(df(p_0)) < \min\{m, n\}$ gilt

Kandidaten für Extrema: $p_0 \in \Omega$ für welchen $df(p_0) = 0$ gilt

13.1 Extremwertaufgaben ohne Nebenbedingungen

1. Kandidaten für Extrema finden $df(x) = 0$
2. Bestimmung:
 - (a) $\text{Hess}(f)(p_0)$ positiv definit \Rightarrow lokales Minimum
 - (b) $\text{Hess}(f)(p_0)$ negativ definit \Rightarrow lokales Maximum
 - (c) $\text{Hess}(f)(p_0)$ indefinit \Rightarrow Sattelpunkt

Bemerkung: Falls alle Eigenwerte von A grösser als 0 sind, dann ist A **positiv definit**. Hat A sowohl positive als auch negative Eigenwerte, so ist sie **indefinit**.

13.2 Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen

Beweis

Falls es sich um eine stetige Funktion auf einem kompakten Gebiet handelt, so nimmt f gemäss Weierstrass ein Supremum und Infimum an. Daraus folgt, dass f auf dem Gebiet ein Maximum und Minimum besitzt.

1. Kandidaten im Innern des Gebiets:

- i $df(x, y) = 0$ auflösen
- ii Überprüfen, ob gefundene Punkte wirklich im Gebiet sind

2. Kandidaten auf den Randstücken des Gebiets:

- i $df(x, y) - \lambda dg(x, y) - \mu dh(x, y) = 0$ auflösen
- ii Überprüfen, ob gefundene Punkte wirklich auf dem Rand sind
- iii $dg(x, y) = 0$ auflösen und überprüfen, ob gefunden Punkte Nebenbedingung erfüllen
- iv Eckpunkte des Randstückes überprüfen

\Rightarrow Benutze ein System hergeleitet von $df(x, y) - \lambda dg(x, y) - \mu dh(x, y) = 0$ und den verschiedenen Nebenbedingungen.

Tipp: Ist das Randstück nicht differenzierbar, muss man es in mehrere Teilstrecken aufteilen.