

Analysis I, ETH, D-INFK

Miles Straessle

20. Februar 2021

Teil I

Zusammenfassung

1 Folgen

1.1 Definitionen

konvergent $\lim_{x \rightarrow \infty} a_n$ existiert

divergent $\lim_{x \rightarrow \infty} a_n$ existiert nicht

Nullfolge $\lim_{x \rightarrow \infty} a_n = 0$ gilt

beschränkt Es gibt C_1, C_2 , so dass gilt $C_1 \leq a_n \leq C_2$ bzw. C gibt, so dass $|a_n| \leq C$

unbeschränkt falls (a_n) nicht beschränkt ist. Unbeschränkte Folgen sind stets divergent

monoton wachsend $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

streng monoton wachsend $a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

monoton fallend $a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

streng monoton fallend $a_n > a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

alternierend die Vorzeichen der Folgenglieder wechseln sich ab

bestimmt divergent / uneigentlich konvergent es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm \infty$

Def. 1.1 (Grenzwert).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow a_n \rightarrow a \\ \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$$

Def. 1.2 (Teilfolge). Werden von einer Folge beliebig viele Glieder weggelassen, aber nur so viele, dass noch unendlich viele übrigbleiben, so erhält man eine Teilfolge.

Def. 1.3 (Häufungspunkt). a ist Häufungspunkt der Folge (a_n) , wenn in jeder Umgebung von a unendlich viele Folgeglieder liegen. Das ist äquivalent damit, dass a der Limes einer Teilfolge von (a_n) ist.

Def. 1.4 (Limes superior / Limes inferior). Ist (a_n) eine beschränkte Folge, so heisst der grösste Häufungspunkt Limes superior ($\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ oder $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$). Der kleinste Häufungspunkt ist der Limes inferior ($\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ oder $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$)

1.2 Rechnen mit Eigenschaften

Addition:

- $(a_n), (b_n)$ konvergiert $\Rightarrow (a_n + b_n)$ konvergiert
- (a_n) konvergiert, (b_n) divergent $\Rightarrow (a_n + b_n)$ divergent
- (a_n) beschränkt, (b_n) beschränkt $\Rightarrow (a_n + b_n)$ beschränkt

- (a_n) beschränkt, (b_n) unbeschränkt $\Rightarrow (a_n + b_n)$ unbeschränkt
- (a_n) beschränkt, $(b_n) \rightarrow \pm\infty \Rightarrow (a_n + b_n) \rightarrow \pm\infty$
- $(a_n) \rightarrow \infty$, $(b_n) \rightarrow \infty \Rightarrow (a_n + b_n) \rightarrow \infty$
- $(a_n) \rightarrow -\infty$, $(b_n) \rightarrow -\infty \Rightarrow (a_n + b_n) \rightarrow -\infty$

Produkt:

- (a_n) Nullfolge, (b_n) beschränkt $\Rightarrow (a_n b_n)$ Nullfolge
- (a_n) konvergent, (b_n) beschränkt $\Rightarrow (a_n b_n)$ beschränkt
- (a_n) konvergent, (b_n) konvergent $\Rightarrow (a_n b_n)$ konvergent
- (a_n) konvergent gegen $a \neq 0$, (b_n) divergent $\Rightarrow (a_n b_n)$ divergent

1.3 Rechnen mit Grenzwerten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$$

Achtung! Untenstehendes gilt nur wenn die Grenzwerte von a_n und b_n existieren. (Nicht 0 oder \inf sind.)

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot a$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab$
- Achtung: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^c = (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n)^c$, nur wenn $c \neq n$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, (b_n) keine Nullfolge

1.4 Hilfsmittel

Bernoullische Ungleichung: Für $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}$

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

Vergleich von Folgen: weiter rechts stehende Werte gehen schneller nach ∞

$$1, \quad \ln n, \quad n^\alpha \ (\alpha > 0), \quad q^n \ (q > 1), \quad n!, \quad n^n$$

Stirlingformel:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \Rightarrow \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \leq n! \leq \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \cdot e^{\frac{12}{n}}$$

1.5 Konvergenzkriterien

$$a_n \rightarrow a \Leftrightarrow a_n - a \rightarrow 0 \Leftrightarrow |a_n - a| \rightarrow 0$$

- Ist $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, so ist der Limes a einziger Häufungspunkt der Folge (a_n) und jede Teilfolge konvergiert auch gegen a .

Beispiel: Wegen $(1 + \frac{1}{n})^n \rightarrow e$, so gilt auch $(1 + \frac{1}{2n})^{2n} \rightarrow e$

- Hat die Folge zwei verschiedene Häufungspunkte, so ist die Folge sicher divergent.
- Ist die Folge monoton steigend und nach oben beschränkt, dann existiert $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Ist die Folge monoton fallend und nach unten beschränkt, dann existiert $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

- Konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, so ist $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Damit kann die Regeln für Reihen verwenden. Siehe Grenzwerte von Reihen.

- Gibt es eine Funktion f mit $f(n) = a_n$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$, so gilt auch $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Damit kann man zum Beispiel die Regel von l'Hospital und die restlichen Methoden anwenden. Siehe Grenzwerte von Funktionen.

Achtung: Es kann sein, dass f keinen Grenzwert besitzt, aber (a_n) schon.

- **Einschlusskriterium:** Sind $(a_n), (b_n), (c_n)$ Folgen mit $a_n \leq b_n \leq c_n$ und haben $(a_n), (c_n)$ den gleichen Grenzwert a , so konvergiert auch (b_n) nach a .

1.6 Tipps & Beispiele

1.6.1 Brüche

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \ln n}{\sqrt{n^4 - n^3}}$$

Bei Brüchen empfiehlt es sich den am stärksten wachsenden Teil (das am schnellsten wachsende n) zu kürzen. In diesem Fall ist es das n^4 in der Wurzel, also n^2 .

$$\begin{aligned} \dots &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \ln n}{\sqrt{n^4 - n^3}} \cdot \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \ln n}{n^2 \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} \cdot \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{\ln n}{n^2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{n}}} = \frac{1 + 0}{\sqrt{1 - 0}} = 0 \end{aligned}$$

1.6.2 l'Hospital für Folgen (Folge als Funktion)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^2}$$

Die Funktion $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ entspricht unseren Folgegliedern ($f(n) = a_n = \frac{\ln n}{n^2}$). Für $n \rightarrow \infty$ hat der Nenner und der Zähler den Grenzwert ∞ , also wenden wir die Regel von l'Hospital an.

$$\dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Somit geht auch die Folge gegen 0.

1.6.3 Wurzeln

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + an + 1} - \sqrt{n^2 + 1})$$

Hier wendet man die dritte binomische Formel an, um den Grenzwert zu berechnen. Die einzelnen Terme streben jeweils gegen ∞ und $\infty - \infty$ kann nicht berechnet werden.

Achtung auf die Vorzeichen beim Anwenden der Regel!

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + an + 1} - \sqrt{n^2 + 1}) \cdot \left(\frac{\sqrt{n^2 + an + 1} + \sqrt{n^2 + 1}}{\sqrt{n^2 + an + 1} + \sqrt{n^2 + 1}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + an + 1) - (n^2 + 1)}{\sqrt{n^2 + an + 1} + \sqrt{n^2 + 1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an}{\sqrt{n^2 + an + 1} + \sqrt{n^2 + 1}} \end{aligned}$$

nun verwenden wir den Tipp für Brüche und kürzen das n heraus

$$\dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{\sqrt{1 + \frac{a}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = \frac{a}{1 + 1} = \frac{a}{2}$$

1.7 Cauchy-Folgen

Def. 1.5 (Cauchy-Folge). Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathbb{R} . $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heisst **Cauchy-Folge**, falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n, l \geq n_0 : |a_n - a_l| < \varepsilon$$

Die Definition sagt grundsätzlich aus, dass ab einem $n_0(\varepsilon)$ (also einem Anfang n_0 , der abhängig von ε ist) die Folgeglieder nur noch ε Abstand zu einander haben. Also der Abstand beliebig klein wird zwischen Folgegliedern.

Satz 1.1 (Cauchy-Kriterium). Für $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ sind äquivalent:

- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent
- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge

2 Reihen

2.1 Definitionen

Eine Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n$ ist konvergent mit Grenzwert s , wenn die Folge der Partialsummen (S_m) , $S_m := \sum_{n=1}^m a_n$ gegen s konvergiert.

Also wenn gilt: $S_m \rightarrow s$.

Def. 2.1 (ε -Kriterium). $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m \geq n_0 : |\sum_{n=1}^m a_n - s| < \varepsilon$

Def. 2.2 (Absolute Konvergenz). Wenn auch die Reihe der Absolutbeträge $\sum_{n=1}^\infty |a_n|$ konvergiert, so heisst die Reihe absolut konvergent. Aus der absoluten Konvergenz folgt Konvergenz. Der Umkehrschluss ist nicht möglich.

2.2 Rechenregeln Reihen

Für konvergente Reihen gilt:

$$\sum_{n=1}^\infty a_n = A, \sum_{n=1}^\infty b_n = B \Rightarrow \sum_{n=1}^\infty (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha A + \beta B$$

2.3 Konvergenzkriterien

Konvergiert $\sum_{n=1}^\infty a_n$, so ist $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
Wenn also $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, so konvergiert die Reihe nicht

	Eignung	Bemerkung
Limes des allgemeinen Glieds		zeigt nur Divergenz
Majoranten- und Minorantenkriterium		ersten Glieder spielen keine Rolle
Quotientenkriterium	a_n mit Faktoren wie $n!$, a^n , oder Polynome	gleiche Folgerung wie Wurzelkriterium
Wurzelkriterium	$a_n = (b_n)^n$	gleiche Folgerung wie Quotientenkriterium
Leibnitz-Kriterium	$\sin, \cos, \tan, (-1)^n$	
Absolute Konvergenz	$\sin, \cos, \tan, (-1)^n$	
Sandwich-Theorem	$\sin, \cos, \tan, (-1)^n$	

2.3.1 Reihen Kriterien

Achtung. Die nachfolgenden Kriterien sagen nur aus, ob die Reihen konvergiert oder nicht. Sie sagen nicht aus, gegen was sie konvergieren!

2.3.1.1 Quotientenkriterium

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \rightarrow q. \quad \text{Dann gilt} \quad \begin{cases} q < 1 & \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut} \\ q = 1 & \Rightarrow \text{keine Aussage} \\ q > 1 & \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergiert} \end{cases}$$

2.3.1.2 Wurzelkriterium

$$\sqrt[n]{|a_n|} \rightarrow q. \quad \text{Dann gilt} \quad \begin{cases} q < 1 & \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut} \\ q = 1 & \Rightarrow \text{keine Aussage} \\ q > 1 & \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergiert} \end{cases}$$

2.3.1.3 Leibnizkriterium

Wenn gilt:

- (a_n) ist alternierende Folge, d.h die Vorzeichen wechseln jedes Mal
- $a_n \rightarrow 0$ oder $|a_n| \rightarrow 0$
- $(|a_n|)$ ist monoton fallend

... dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

2.3.1.4 Majorantenkriterium

Ist $|a_n| \leq b_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent, so konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.

2.3.1.5 Minorantenkriterium

Ist $a_n \geq b_n \geq 0$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent, so divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

2.4 Potenzreihe

Die Potenzreihe hat die allgemeine Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

x_0 ist der Entwicklungspunkt der Potenzreihe und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge.

2.4.1 Konvergenzradius

Die Berechnung des Konvergenzradius ist für solche Reihen einfacher, da der Faktor $(x - x_0)$ nicht analysiert werden muss. Entsprechend gilt für den Konvergenzradius r : $r = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ (Wurzelkriterium) bzw. $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ (Quotientenkriterium).

3 Stetigkeit

3.1 Zwischenwertsatz

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige reelle Funktion, die auf einem Intervall definiert ist. Dann existiert zu jedem $u \in [f(a), f(b)]$ (falls $f(a) \leq f(b)$, sonst $u \in [f(b), f(a)]$) ein $c \in [a, b]$, sodass gilt: $f(c) = u$.

3.1.1 Beispiel (Fixpunkt)

Sei $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Zeige: f hat einen Fixpunkt, d.h. es gibt ein $x \in [0, 1]$ derart, dass $f(x) = x$.

Man erzeugt die Funktion $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) := f(x) - x$. Es gilt: $f(x) = x \Leftrightarrow g(x) = 0$, d.h. ein Punkt x ist genau dann ein Fixpunkt von f wenn er eine Nullstelle von g ist. Es ist zu zeigen, dass g immer eine Nullstelle auf $[0, 1]$ hat. Als Differenz von zwei stetigen Funktionen ist g stetig. Weil ausserdem $f(x) \in [0, 1] \quad \forall x \in [0, 1]$ gilt, ist $g(0) \geq 0 \geq g(1)$. Da g stetig ist, gibt es daher nach dem Zwischenwertsatz ein $x \in [0, 1]$ mit $g(x) = 0$ und somit gibt es $f(x) = x$.

3.2 Lipschitz-Stetigkeit

Es existiert eine Konstante $L \in \mathbb{R}$, sodass:

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in \Omega$$

Bemerkung: Ist f' auf Ω **beschränkt**, so ist f Lipschitz-stetig. Lipschitz-Stetigkeit impliziert gleichmässige Stetigkeit.

3.3 Weierstrass-Kriterium

Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta(\varepsilon, a) > 0$, sodass für alle $|x - a| < \delta$ gilt:

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

3.4 Gleichmässige Stetigkeit

Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta(\varepsilon) > 0$, sodass für alle $|x - y| < \delta$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Bemerkung: Ist f **stetig und kompakt**, dann ist sie auch gleichmässig stetig.

3.5 Punktweise Konvergenz

$f_n(x)$ konvergiert punktweise falls:

$$\forall x \in \Omega \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

3.6 Gleichmässige Konvergenz

3.6.0.1 Grundsatz:

Falls eine Folge stetiger Funktionen f_n gleichmässig gegen f konvergiert, muss f stetig sein.

$f_n(x)$ konvergiert gleichmässig falls:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Bemerkung: Gleichmässige Konvergenz impliziert punktweise Konvergenz.
Rezept für gleichmässige Konvergenz

(i) Punktweiser Limes berechnen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad = \text{Grenzfunktion}$$

(ii) Supremum bestimmen
(Ableitung von $f_n(x)$ oder Abschätzung benutzen)

$$\sup |f_n(x) - f(x)|$$

(iii) Limes $n \rightarrow \infty$ bestimmen (vgl. Kriterium glm. Konvergenz)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup |f_n(x) - f(x)|$$

Limes = 0 \rightarrow Glm. konvergent mit Grenzfunktion f(x)
(iv) Indirekte Methode

- $f(x)$ unstetig auf $\Omega \Rightarrow$ keine glm. Konvergenz
- $f(x)$ stetig, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \forall x \in \Omega$ und Ω kompakt \Rightarrow Glm. Konvergenz

	gegeben:	$f_n : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}, \quad f_n(x) = (1 - x^2)x^n$
punktweisen Limes berechnen:	$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - x^2)x^n = 0 \equiv f(x)$	
	\Rightarrow konvergiert gegen 0	
Supremum berechnen:	$\sup_{x \in [0, 1]} f_n(x) - f(x) = \sup_{x \in [0, 1]} f_n(x) = \sup_{x \in [0, 1]}$	
Maximum finden:	$\frac{d}{dx} f_n(x) = nx^{n-1}(1 - x^2) - 2xx^n = x^{n-1}(n - 2x^2)$	
	$\Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = \sqrt{\frac{n}{n+2}} \Rightarrow x_2$ ist Maximum	
Limes berechnen:	$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, 1]} f_n(x) - f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_2) = 0$	
Folgerung:	f_n konvergiert auf $[0, 1]$ glm. gegen f	

4 Grenzwert

4.1 Dominanz

$$\text{Für } x \rightarrow +\infty : \quad \dots < \log(\log(x)) < \log(x) < x^\alpha < \alpha^x < x! < x^x$$

$$\text{Für } x \rightarrow 0 : \quad \dots < \log(\log(x)) < \log(x) < \left(\frac{1}{x}\right)^\alpha$$

4.2 Fundamentallimes

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin \odot}{\odot} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\tan \odot}{\odot} = 1 \text{ mit } \odot \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 \\ \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{1}{\odot}\right)^\odot &= e \text{ mit } \odot \xrightarrow{x \rightarrow a} \infty \\ \lim_{x \rightarrow a} (1 + \odot)^{\frac{1}{\odot}} &= e \text{ mit } \odot \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 \end{aligned}$$

4.3 Wurzeltrick

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} + \beta = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x} + \beta) \frac{\sqrt{x} - \beta}{\sqrt{x} - \beta}$$

4.4 $e^{\log(x)}$ -Trick

4.4.0.1 Anforderung:

Term der Form $f(x)^{g(x)}$ mit Grenzwert "0⁰", " ∞^0 " oder " 1^∞ " für $x \rightarrow 0$

Grundsatz: $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \cdot \log(f(x))}$

Tipp: Danach den Limes des Exponenten berechnen. Oft ist Bernoulli-de l'Hôpital dazu nützlich.

4.5 Substitution

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2(1 - \cos(\frac{1}{x})) \Rightarrow u = \frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(u)}{u^2}$$

4.6 Satz von Bernoulli-de l'Hôpital

4.6.0.1 Anforderung:

Term der Form $\frac{f(x)}{g(x)}$ mit Grenzwert entweder " $\frac{0}{0}$ " oder " $\frac{\infty}{\infty}$ " mit $g'(x) \neq 0$.

Grundsatz: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Term	Anforderung	Umformung
$f(x)g(x)$	" $0 \cdot \infty$ "	$\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$
$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{h(x)}{i(x)}$	" $\infty - \infty$ "	$\frac{f(x)i(x) - h(x)g(x)}{g(x)i(x)}$

5 Differenzialrechnung

Eine stetige Funktion ist differenzierbar, falls der Grenzwert $f'(x_0)$ existiert:

$$f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Tangente

Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in \Omega$ diffbar. Dann ist die Tangente im Punkt x_0

$$t(x; x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

5.1 Umkehrsatz

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

5.2 Mittelwertsatz

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

5.3 Taylorpolynom

Das Taylorpolynom m -ter Ordnung von $f(x)$ an der Stelle $x = a$

$$P_m^a(x) := f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2}f''(a)(x - a)^2 + \dots + \frac{1}{m!}f^{(m)}(a)(x - a)^m$$

mit dem Fehlerterm $R_m^a(x)$, wobei ξ zwischen a und b liegt:

$$R_m^a(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m + 1)!}(x + a)^{m+1}, \text{ wobei } f(x) = P_m^a(x) + R_m^a(x)$$

5.4 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$f(x) = \int_l^{m(x)} g(t)dt$$

$$f'(x) = g(m(x)) \cdot \frac{d}{dx}m(x)$$

wobei $m(x)$ der Form ax^b ist mit $l \in \mathbb{R}$

Differenzial / Jaccobi-Matrix

$$df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

→ enthält die n part. Ableit. aller m Komponenten von f

Taylorentwicklung mit mehreren Variabeln

$$\begin{aligned} f(x,y) = & \quad f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y \\ & + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\Delta x)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\Delta x\Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\Delta y)^2\right) \\ & + \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(\Delta x)^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(\Delta x)^2\Delta y \right. \\ & \quad \left. + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\Delta x(\Delta y)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(\Delta y)^3\right) \\ & + \dots \end{aligned}$$

6 Integration

6.1 Regeln

Direkter Integral $\int f(g(x))g'(x) \, dx = F(g(x))$

Partielle Integration $\int f' \cdot g \, dx = f \cdot g - \int f \cdot g' \, dx$

mit Polynomen $\int \frac{p(x)}{q(x)} \, dx \Rightarrow$ Partialbruchzerlegung

Substitution $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) \, dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, dx$ mit $x = \varphi(t)$

6.2 Tipps

$$\begin{aligned}\int \tan x \, dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = -\log |\cos(x)| \\ \int \frac{1}{x - \alpha} \, dx &= \log(x - \alpha) \\ \int \frac{\frac{1}{\alpha}}{1 + (\frac{x}{\alpha})^2} \, dx &= \arctan(x) \\ \int \sin^2(x) \, dx &= \frac{1}{2}(x - \sin(x) \cos(x)) + C \\ \int \cos^2(x) \, dx &= \frac{1}{2}(x + \sin(x) \cos(x)) + C \\ \int \sqrt{x^2 + 1} \, dx &= \sinh(x) + C\end{aligned}$$

6.3 Uneigentliche Integrale

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f(x) \, dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(x) \, dx \\ \int_{-\infty}^\infty f(x) \, dx &= \lim_{R \rightarrow -\infty} \int_R^k f(x) \, dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_k^R f(x) \, dx\end{aligned}$$

Gibt es eine Unstetigkeitsstelle c in dem Integrationsgebiet, so geht man wie folgt vor:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) \, dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x) \, dx$$

6.4 Beweis bijektiver Funktionen

Zu beweisen sind folgende Eigenschaften:

- injektiv:** Zeig, dass f **strickt monoton wächst oder fällt** undstetig ist
- surjektiv:** Zeig, dass alle Werte im Bildbereich angenommen werden (vl. mit Zwischenwertsatz)

Daraus folgt dann, dass f bijektiv ist.

7 Differentialgleichungen

7.1 Grundbegriffe

- Ordnung:** höchste vorkommende Ableitung
- linear:** alle y -abhängigen Terme kommen linear vor (keine Terme wie zum Beispiel y^2 , $(y'')^3$, $\sin(y)$, $e^{y'}$)
- homogen:** Gleichung ohne Störfunktionen
- Störfunktion:** Term, der rein von der Funktionsvariablen x abhängt

7.2 Methoden

	Problem	Anforderungen
Trennung der Variablen	$y' = \frac{dy}{dx} = h(x) \cdot g(y)$	1. Ordnung
Variation der Konstanten	$y' = \frac{dy}{dx} = h(x)y + b(x)$	1. Ordnung inhomogen
Euler-Ansatz	$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = 0$	n. Ordnung linear homogen
Direkter Ansatz	$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = b(x)$	n. Ordnung linear inhomogen

7.2.1 Trennung der Variable

$y' + x \tan y = 0, \quad y(0) = \frac{\pi}{2}$

umformen

 $\frac{dy}{dx} = -x \tan y$

konstante Lösungen

 $y(x) \equiv 0$ erfüllt jedoch $y(0) \equiv \frac{\pi}{2}$ nicht

Trennung

 $\frac{dy}{\tan y} = -x dx$

integrieren

 $\int \frac{\cos y}{\sin y} dy = - \int x dx \Rightarrow \log |\sin y| = -\frac{x^2}{2} + C$
 $\Rightarrow |\sin y| = e^C e^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow \sin y = \pm e^C e^{-\frac{x^2}{2}} = C e^{-\frac{x^2}{2}}$

Anfangsbedingung gebrauchen

 $\sin(y(0)) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow C = 1$

Lösung

 $y(x) = \arcsin(e^{-\frac{x^2}{2}})$

7.2.2 Variation der Konstanten

Grundsatz: $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

$$y'(x+1) + y = x^3, \quad y(0) = \sqrt{5}$$

Trennung $\frac{y'}{y} = \frac{-1}{x+1}$

konstante Lösungen $y(x) \equiv 0$ erfüllt jedoch $y(0) \equiv \sqrt{5}$ nicht

integrieren $\int \frac{dy}{y} = - \int \frac{dx}{x+1}$

$$\Rightarrow \ln |y| = -\ln |x+1| + C$$

Homogene Lösung $y_h(x) = \frac{C}{x+1}$, mit $C = \pm e^C \in \mathbb{R} \setminus 0$

partikulärer Ansatz $y_p(x) = \frac{C(x)}{x+1}$

einsetzen $(\frac{C'(x)}{x+1} - \frac{C(x)}{(x+1)^2})(x+1) + \frac{C(x)}{x+1} = x^3$

$$C'(x) = x^3$$

$$C(x) = \frac{x^4}{4}$$

partikuläre Lösung $y_p(x) = \frac{x^4}{4(x+1)}$

allgemeine Lösung $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \frac{C}{x+1} + \frac{x^4}{4(x+1)}$

Anfangsbedingung benutzen $y(0) = \sqrt{5} \Rightarrow C = \sqrt{5}$

Lösung $y(x) = \frac{\sqrt{5}}{x+1} + \frac{x^4}{4(x+1)}$

7.2.3 Euler-Ansatz

$$y'' - 2y' - 8y = 0, \quad y(1) = 1, y'(1) = 0$$

Euler-Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$

einsetzen $\lambda^2 e^{\lambda x} - 2\lambda e^{\lambda x} - 8e^{\lambda x} = 0$

charakt. Polynom $\lambda^2 - 2\lambda - 8 = (\lambda - 4)(\lambda + 2) = 0$

Nullstellen $4, -2$

allgemeine Lösung $y(x) = Ae^{4x} + Be^{-2x}$

Anfangsbedingung gebrauchen $y(1) = Ae^4 + Be^{-2} = 1$,

$$y'(1) = 4Ae^4 - 2Be^{-2} = 0$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{3}e^{-4}, B = \frac{2}{3}e^2$$

Lösung $y(x) = \frac{1}{3}e^{4x-4} + \frac{2}{3}e^{2-2x}$

Bemerkung: Zu einer m -fachen Nullstelle λ gehören die m linear unabhängigen Lösungen $e^{\lambda x}, x \cdot e^{\lambda x}, \dots, x^{m-1} \cdot e^{\lambda x}$. Zur m -fachen Nullstelle $\lambda = 0$ gehören die Lösungen $1, x, \dots, x^{m-1}$.

Komplexe Nullstellen:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ein komplexes Nullstellenpaar der Form $\alpha \pm \beta i$ liefert folgende homogene Lösung:

$$y(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x))$$

7.2.4 Direkter Ansatz

Grundsatz: $y(x) = y_{\text{homo}}(x) + y_p(x)$

Inhomogener Term $b(x)$	Ansatz für $y_p(x)$	zu bestimmen
Polynom	$Ax^2 + Bx + C$	A, B, C
ce^{kx}	Ae^{kx}	A
$c \sin(kx)$ oder $c \cos(kx)$	$A \sin(kx) + B \cos(kx)$	A, B

Bemerkung: Kommt der gewählte Ansatz schon in der homogenen Lösung vor, so multipliziert man den Ansatz einfach mit x .

$y'' - y' + \frac{1}{4}y = \cos(x)$

homogener Ansatz $y'' + y' + \frac{1}{4}y = 0$

Euler-Ansatz anwenden $\lambda^2 + \lambda + \frac{1}{4} = (\lambda + \frac{1}{2})^2 = 0$

homogene Lösung $\Rightarrow y_{\text{homo}}(x) = Ae^{-\frac{x}{2}} + Bx \cdot e^{-\frac{x}{2}}$

partikulärer Ansatz wählen $y_p(x) = a \cos(x) + b \sin(x)$
 $\Rightarrow y'_p(x) = -a \sin(x) + b \cos(x), \quad y''_p(x) = -a \cos(x) - b \sin(x)$

Einsetzen $(-a + b + \frac{a}{4}) \cos(x) + (-b - a + \frac{1}{4}b) \sin(x) = \cos(x)$

Koeffizientenvergleich $-\frac{3}{4}a + b = 1, \quad -a - \frac{3}{4}b = 0$

partikuläre Lösung $y_p(x) = -\frac{12}{25} \cos(x) + \frac{16}{25} \sin(x)$

Lösung $y(x) = Ae^{-\frac{x}{2}} + Bx \cdot e^{-\frac{x}{2}} - \frac{12}{25} \cos(x) + \frac{16}{25} \sin(x)$

8 Komplexe Zahlen

$z = x + iy = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) = re^{i\varphi}$ $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\arg(z) = \varphi = \arctan(\frac{y}{x}) \quad (\text{je nach Quadrant})$ $x = r \cos(\varphi)$ $y = r \sin(\varphi)$ $zw = (re^{i\varphi}) \cdot (se^{i\psi}) = rse^{i(\varphi+\psi)}$ $\sqrt[q]{z} = \sqrt[q]{r}e^{i\varphi/q}, \text{ wobei } \varphi = \frac{\varphi}{q} \mod \frac{2\pi}{q}$ $e^{i(\frac{\pi}{2}+2\pi k)} = i, \quad e^{i\pi} = 1, \quad e^{-i\pi} = -1$

$(a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd, ad + bc)$ $\bar{z} = x - iy$ $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ $i = \sqrt{-1}$ $i^2 = -1$ $|z|^2 = z\bar{z}$ $|zw|^2 = (zw) \cdot \overline{(zw)} = |z|^2 |w|^2$

Tables

8.1 Elementare Integrale

$f'(x)$	$f(x)$	$F(x)$
$\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$	$\frac{f(x)}{g(x)}$	
0	c	cx
$r \cdot x^{r-1}$	x^r	$\frac{x^{r+1}}{r+1}$
$-\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\ln x $
$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$-\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$	$-\ln \cos(x) $
e^x	e^x	e^x
$c \cdot e^{cx}$	e^{cx}	$\frac{1}{c} \cdot e^{cx}$
$\ln(c) \cdot c^x$	c^x	$\frac{c^x}{\ln(c)}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$x(\ln x - 1)$
$\frac{1}{\ln(a) \cdot x}$	$\log_a x $	$\frac{x}{\ln(a)}(\ln x - 1)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$x \cdot \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$	$x \cdot \arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\cosh(x)$
$\sinh(x)$	$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\sinh(x)$
$\frac{1}{\cosh^2(x)}$	$\tanh(x)$	$\log(\cosh(x))$

8.2 Wichtige Grenzwerte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n) = \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$
$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{e^n - 1}{n} = 1$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$$

9 Formeltafel

9.1 Mitternachtsformel

$$ax + bx + c = 0 \qquad \implies$$
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

9.2 Binomalkoeffizient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{für } 0 \leq k \leq n$$

9.3 Argument

$$\arg(x,y) := \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) & x \geq 0 \\ -\arctan(\frac{y}{x}) & x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0, y < 0 \\ \frac{3\pi}{2} & x = 0, y > 0 \end{cases}$$

9.4 Kreisfunktionen

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	Periode	Wertebereich
	0°	30°	45°	60°	90°	120°	180°		
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\sin(\alpha + k \cdot 2\pi)$	$[-1, 1]$
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$\cos(\alpha + k \cdot 2\pi)$	$[-1, 1]$
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$\tan(\alpha + k \cdot \pi)$	$] -\infty, \infty[$

9.5 Ableitungen

9.5.1 Regeln

- (Summenregel) $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- (Produktregel) $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- (Quotientenregel) $(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
- (Kettenregel) $(g \circ f)'(x) = (g(f(x)))' = g'(f(x))f'(x)$

9.5.2 Ableitungs-Tafel

- $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$
- $\frac{d}{dx} \frac{1}{x^n} = -n \frac{1}{x^{n+1}}$
- $\frac{d}{dx} \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}$
- $\frac{d}{dx} e^{\alpha x + \beta} = \alpha e^{\alpha x + \beta}$
- $\frac{d}{dx} e^{x^\alpha} = \alpha x^{\alpha-1} e^{x^\alpha}$
- $\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}$
- $\frac{d}{dx} \alpha^x = \alpha^x \ln(\alpha)$
- $\frac{d}{dx} x^x = x^x (1 + \ln(x))$
- $\frac{d}{dx} x^{x^\alpha} = x^{x^\alpha + \alpha - 1} (\alpha \log(x) + 1)$

- $\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x); \frac{d}{dx} \sin(\alpha x + \beta) = \alpha \cos(\alpha x + \beta)$
- $\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x); \frac{d}{dx} \cos(\alpha x + \beta) = -\alpha \sin(\alpha x + \beta)$
- $\frac{d}{dx} \tan(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}; \frac{d}{dx} \tan(\alpha x + \beta) = \alpha \frac{1}{\cos^2(\alpha x + \beta)}$
- $\frac{d}{dx} \arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \frac{d}{dx} \arcsin(\alpha x + \beta) = \frac{\alpha}{\sqrt{1-(\alpha x + \beta)^2}}$
- $\frac{d}{dx} \arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \frac{d}{dx} \arccos(\alpha x + \beta) = -\frac{\alpha}{\sqrt{1-(\alpha x + \beta)^2}}$
- $\frac{d}{dx} \arctan(x) = \frac{1}{x^2+1}; \frac{d}{dx} \arctan(\alpha x + \beta) = \frac{\alpha}{(\alpha x + \beta)^2+1}$

- $\frac{d}{dx} \sinh(x) = \cosh(x); \frac{d}{dx} \sinh(\alpha x + \beta) = \alpha \cosh(\alpha x + \beta)$

- $\frac{d}{dx} \cosh(x) = \sinh(x)$; $\frac{d}{dx} \cosh(\alpha x + \beta) = \alpha \sinh(\alpha x + \beta)$
- $\frac{d}{dx} \tanh(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$; $\frac{d}{dx} \tanh(\alpha x + \beta) = \alpha \frac{1}{\cosh^2(\alpha x + \beta)}$
- $\frac{d}{dx} \operatorname{arcsinh}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$; $\frac{d}{dx} \operatorname{arcsinh}(\alpha x + \beta) = \frac{\alpha}{\sqrt{(\alpha x + \beta)^2 + 1}}$
- $\frac{d}{dx} \operatorname{arcosh}(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}}$; $\frac{d}{dx} \operatorname{arcosh}(\alpha x + \beta) = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha x + \beta - 1}\sqrt{\alpha x + \beta + 1}}$
- $\frac{d}{dx} \operatorname{arctanh}(x) = \frac{1}{1-x^2}$; $\frac{d}{dx} \operatorname{arctanh}(\alpha x + \beta) = \frac{\alpha}{1-(\alpha x + \beta)^2}$

9.6 Integrale

Integralregeln

Es gelte: $\int f(x) dx = F(x)$

- $\int u' \cdot v dx = uv - \int u \cdot v' dx$
- $\int f(x) dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t) dt, \quad x = g(t), dx = g'(t) dt$
- $\int f(a+x) dx = F(a+x)$
- $\int f(a-x) dx = -F(a-x)$
- $\int f(-x) dx = -F(-x)$
- $\int f(\alpha x) dx = \frac{1}{\alpha} F(\alpha x)$
- $\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln |g(x)|$
- $\int g(x) g'(x) dx = \frac{1}{2} g(x)^2$
- $|\int f(x)| \leq \int |f(x)|$ (wenn f, Riemann-Integriert ist)

typische Integrale

- $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x|$
- $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}$
- $\int \frac{1}{x+a} dx = \ln |x+a|$
- $\int \ln(x) dx = x(\ln(x) - 1)$
- $\int \ln(ax+b) dx = \frac{(ax+b) \ln(ax+b) - ax}{a}$
- $\int \frac{1}{(x+a)^2} dx = -\frac{1}{x+a}$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x}$
- $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b|$
- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln |1+x^2|$
- $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a}, (n \neq -1)$
- $\int x(ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+2}}{(n+2)a^2} - \frac{b(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a^2}$
- $\int \frac{ax+b}{px+q} dx = \frac{ax}{p} + \frac{bp-aq}{p^2} \ln |pq+q|$
- $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan(\frac{x}{a})$

- $\int \frac{1}{a^2-x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right|$
- $\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \sqrt{x^3}$
- $\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{\sin(x)} \right)$
- $\int a^{xb+c} dx = \frac{a^{bx+c}}{b \log(a)}$

trionometrische Funktionen

- $\int \sin(ax) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax)$
- $\int \cos(ax) dx = \frac{1}{a} \sin(ax)$
- $\int \sin(ax)^2 dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a}$
- $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x$
- $\int x \sin(ax) dx = \frac{\sin(ax)}{a^2} - \frac{x \cos(ax)}{a}$
- $\int \cos^2(ax) dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2ax)}{4a}$
- $\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan x$
- $\int \cos(ax) dx = \frac{\cos(ax)}{a^2} + \frac{x \sin(ax)}{a}$
- $\int \sin(ax) \cos(ax) dx = -\frac{\cos^2(ax)}{2a}$
- $\int \tan(ax) dx = -\frac{1}{a} \ln |\cos(ax)|$
- $\int \arcsin(x) dx = x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$
- $\int \arccos(x) dx = x \arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$
- $\int \arctan(x) dx = x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$

Hyperbelfunktionen

- $\int \sinh(ax+b) dx = \frac{\cosh(ax+b)}{a}; \int \sinh(x) dx = \cosh(x)$
- $\int \cosh(ax+b) dx = \frac{\sinh(ax+b)}{a}; \int \cosh(x) dx = \sinh(x)$
- $\int \tanh(ax+b) dx = \frac{\log(\cosh(ax+b))}{a}; \int \tanh(x) dx = \log(\cosh(x))$

Exponentialfunktion

- $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$
- $\int x e^{ax} dx = e^{ax} \cdot \left(\frac{ax-1}{a^2} \right)$
- $\int x \ln(x) dx = \frac{1}{2} x^2 (\ln(x) - \frac{1}{2})$
- $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{a} x^2} dx = \sqrt{a\pi}$

9.7 Reihen

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert (“harmonische Reihe”)
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \ln \frac{1}{2}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergiert für $\alpha > 1$, divergiert für $\alpha \leq 1$
- $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ für $|q| < 1$ (“geometrische Reihe”)
- $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^n = \frac{1}{1-q}$ für $|q| < 1$ (“geometrische Reihe”)
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$
- $\sum_{n=1}^m n = \frac{m(m+1)}{2}$
- $\sum_{n=0}^m q^n = \frac{1-q^{m+1}}{1-q}$
- $\sum_{n=0}^m n^2 = \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)$
- $\sum_{n=0}^m n^3 = \frac{1}{4}m^2(m+1)^2$

9.8 Reihenentwicklung

- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$
- $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n+1)} \frac{x^n}{n}$
- $-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$
- $\ln x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} \cdot \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n}$
- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ für $|x| < 1$ (Geom. Reihe)
- $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{(n-1)}$
- $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$
- $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \dots$
- $\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
- $\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
- $\arcsin x = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} \frac{x^{2k+1}}{4^k(2k+1)}$
- $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$
- $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{(2n+1)}}{2n+1}$ für $|x| < 1$

9.9 Grenzwerte

- **Bernoullische Ungleichung:** $x \geq -1, n \in \mathbb{N} : (1+x)^n \geq 1+nx$
- **Vergleich von Folgen:** weiter rechts stehende Folgen streben schneller gegen ∞ als die links davon stehenden:
 $1, \quad \ln n, \quad n^\alpha (\alpha > 0), \quad q^n (q > 1), \quad n!, \quad n^n \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^\alpha} = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty}$$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} \rightarrow 1$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \rightarrow 1$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} \rightarrow \infty$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \rightarrow e$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{n!} \rightarrow \frac{1}{e}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \rightarrow e$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow \frac{1}{e}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \rightarrow e^x$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \rightarrow \frac{1}{e^x}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{a}{n} \rightarrow 0, a > -1$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} \rightarrow 0$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{n!} \rightarrow \infty$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n^k} \rightarrow \infty, a > 1, k \text{ fest}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n n^k \rightarrow 0, |a| < 1, k \text{ fest}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{a} - 1) \rightarrow \ln a, a > 0$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p q^n = 0 \quad p \in \mathbb{N} \text{ und } 0 < q < 1$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 - x} - x = \frac{1}{2}$
 (Lösungsansatz mit Taylorreihe ($\sqrt{1-x} = 1 + \frac{x}{2} + O(x^2)$): $\sqrt{x^2 - x} - x = x(\sqrt{1 - \frac{1}{x}} - 1) = x((1 + \frac{1}{2x} + O(\frac{1}{x^2})) - 1) = \frac{1}{2} + O(\frac{1}{x}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$)

$$\lim_{x \rightarrow 0}$$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} x^a \ln x = 0, a > 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \ln x = 0 \quad \alpha > 0$

9.10 Linienintegral

- 2. Art: $\int_{\gamma} \vec{f}(\vec{x}) d\vec{x} := \int_a^b \left\langle \vec{f}(\gamma(t)), \gamma(t)' \right\rangle dt$
- 1. Art: $\int_{\gamma} f ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma(t)'\|_2 dt$

9.11 Kreuzprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

9.12 Exponent

- $a^n a^m = a^{n+m}$
- $(a^n)^m = a^{nm}$
- $(ab)^n = a^n b^n$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$
- $a^{\frac{n}{m}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^n = \left(a^n\right)^{\frac{1}{m}}$

9.13 Wurzel

- $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
- $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nm]{a}$
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

9.14 Ungleichungen

- $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ und $a - c < b - c$
- $a < b$ und $c > 0 \Rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$
- $a < b$ und $c < 0 \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$
- Dreiecksungleichung für reelle Zahlen: $|a + b| \leq |a| + |b|$
- Cauchy-Schwarz Ungleichung: $|x \cdot y| \leq \|x\| \cdot \|y\|$, $x, y \in \mathbb{R}^n$

9.15 Logarithmen

- $e^{-\infty} = 0$
- $e^0 = 1$
- $e^1 = e = 2.718281828$
- $e^{\infty} = \infty$
- $y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$
- $\log_a 1 = 0$

- $\log_a a^x = x$
- $a^{\log_a x} = x$
- $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$
- $\log_a x^r = r \log_a x$
- $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$
- $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$
- $\log_a (x + y) = \log_a x + \log_a (1 + \frac{y}{x})$
- $\log_a (x - y) = \log_a x + \log_a (1 - \frac{y}{x})$
- $e^{a+bi} = e^a (\cos(b) + i \sin(b))$ (Euler Identität)
- $e^{b \ln(a)} = a^b$
- $e^{-\ln(b)} = \frac{1}{b}$

9.16 Komplexe Zahlen

- $z \in \mathbb{C} : z = a + b \cdot i$
- $\bar{z} = a - b \cdot i$
- $|z|^2 = z \cdot \bar{z} = (a + b \cdot i) \cdot (a - b \cdot i) = a^2 + b^2$
- $i^2 = -1$
- $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
- $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$
- $\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} \cdot i$

9.17 Geometrische Körper

9.17.1 Ellipsoid

Hat die Form eines Rugbyballs. In kartesischen Koordinaten definert durch $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$.

9.18 Geometrie in 3D

Masse von speziellen Gebieten

Zylinder	$V = \pi r^2 h$
Pyramide	$V = \frac{1}{3} Gh$
Ellipsoid	$V = \frac{4\pi}{3} abc$
Kegel	$V = \frac{\pi}{3} r^2 h$
Kegelstumpf	$V = \frac{\pi h}{3} (r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$
Torus	$V = 2\pi^2 R r^2$
	$S = 4\pi^2 R r$
Kugel	$V = \frac{4\pi}{3} r^3$
	$S = 4\pi r^2$

Rotationskörper

Rotation um die x Achse $V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$.

Rotation um die y Achse $V = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x) dx$.

9.19 Ausklammern

- $x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$
- $x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$

9.20 Aus Serien

- Ableitung von x^x kann man berechnen, indem man $x = e^{\log(x)}$ setzt. Also in diesem Fall $e^{\log(x^x)} = e^{x \log(x)}$ ableitet, was $e^{x \log(x)}(1 + \log(x))$ (Serie 10)
- Cauchy-Schwarz Ungleichung: $|x \cdot y| \leq \|x\| \cdot \|y\|$, $x, y \in \mathbb{R}^n$
- Euler Identität (komplexe Zahlen): $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$

wie schnell gehen die a_n gegen 0	schnelles Fallen	polynomial wie $n^{-\alpha}$, $\alpha > 1$	höchstens wie $1/n$		langsameres Fallen
	exponentiell wie q^n , $ q < 1$				gar nicht
Beispiele	$a_n = \frac{n^8}{2^n},$ $a_n = (\sqrt[n]{n} - 1)^n,$ $a_n = \frac{1}{n!},$ $a_n = \left(\frac{-1}{4}\right)^n$	$a_n = \frac{1}{n^2},$ $a_n = \frac{1}{n^{100}},$ $a_n = \frac{1}{(n + \ln n)^2},$ $a_n = \frac{20}{n^2 - 33}$	$a_n = \frac{(-1)^n}{\ln n},$ $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$	$a_n = \frac{1}{\ln n},$ $a_n = \frac{1}{n + \ln n},$ $a_n = \frac{1}{n}$	$a_n = (-1)^n,$ $a_n = \sin n,$ $a_n = n^2$
passende Konvergenzkriterien	Wurzel- und Quotientenkriterium	Integral- und Verdictungskriterium	Leibniz-Kriterium		$a_n \neq 0$
Vergleichs-, Majoranten-, Minorantenkriterium	Vergleichen mit q^n	Vergleichen mit $n^{-\alpha}$	kein Vergleich möglich	Vergleichen mit $\frac{1}{n}$	
Konvergenz-verhalten	absolute Konvergenz		keine absolute Konvergenz (einfach Konvergenz)	Divergenz	

direkte Kriterien	
Quotientenkriterium	Gut für Reihen, die Fakultäten oder Glieder der Form a^n enthalten. Nicht auf Reihen anwendbar, in denen die Glieder nur wie eine Potenz von n fallen.
Wurzelkriterium	Gut in Reihen, deren Glieder n -te Potenzen sind, zusammen mit der Stirlingformel oft auch bei Fakultäten anwendbar.
Leibnizkriterium	Nur für alternierende Reihen.
Integralkriterium	Anwendbar auf monotone Reihen.
direkte Kriterien	
Vergleichskriterium	Ermöglicht es „Störterme“ wegzulassen und so einfachere Reihen zu untersuchen
Verdichtungskriterium	Bei monotonen Reihen anwendbar. Für Reihen mit langsam fallenden Gliedern
Majoranten- und Minorantenkriterium	Ähnlich wie Vergleichskriterium. Wird mit einer Reihe verglichen, deren Glieder stets kleiner oder grösser sind.

Teil III

Generelles

10 Trigonometrische Definitionen & Sätze

10.1 Definitionen

$sin(x) := \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \dots$

$cos(x) := \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \dots$

$exp(x) := \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{x^n}{n})^n$

$arctan(x) := \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \mp \dots$

Hinweis: Für einfache Approximation genügt es die ersten paar Glieder der $arctan(x)$ – Reihe zu berechnen.

Falls: $x \notin [0, 1]$, gibt es eine Vereinfachung: $arctan(x) = \frac{sgn(x) \cdot \pi}{2} - arctan(\frac{1}{x})$

10.1.1 Definition Taylorreihe

Eine Funktion $f(x)$ wird an einer Stelle x_0 angenähert durch $Tf(x; x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = f(x_0)$

10.1.2 Definitionen $\csc(x)$, $\sec(x)$, $\cot(x)$

$$\csc(x) := \frac{1}{\sin(x)}$$

$$\sec(x) := \frac{1}{\cos(x)}$$

$$\cot(x) := \frac{1}{\tan(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

10.2 Sinussatz

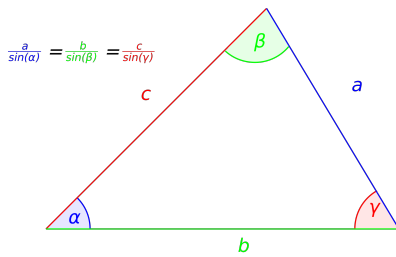


Abbildung 1: Quelle: <https://de.wikipedia.org/>

10.3 Cosinussatz

$$a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma) = c^2$$

10.4 Standardintegrale

$$\frac{d}{dx} \arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \arccos(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \arctan(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arsinh}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arcosh}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \text{ wenn } x > 1$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{1-x^2}, \text{ wenn } |x| < 1$$

10.5 Euler Formel

$$\exp(i\varphi) = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$$

$$\exp(-i\varphi) = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) \iff \exp(-i\varphi) = \cos(\varphi) - i\sin(\varphi)$$

Daraus kann nun \sin , \sinh , \cos und \cosh in Termen von $\exp(x)$ ausgedrückt werden.

$$\frac{\exp(i\varphi) + \exp(-i\varphi)}{2} = \cos(\varphi)$$

$$\frac{\exp(i\varphi) - \exp(-i\varphi)}{2i} = \sin(\varphi)$$

Ignoriere alle i , dann folgt...

$$\frac{\exp(\varphi)+\exp(-\varphi)}{2} = \cosh(\varphi)$$

$$\frac{\exp(\varphi)-\exp(-\varphi)}{2} = \sinh(\varphi)$$

10.6 Ableitungen, Integrale

10.7 Ableitungen

$$\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x)$$

$$\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x)$$

$$\frac{d}{dx} \tan(x) = \frac{d}{dx} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x)}{\cos^2(x)} = 1 - \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 - \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{\sin(x)} = \frac{0 \cdot \sin(x) - 1 \cdot \cos(x)}{\sin^2(x)} = \frac{-\cos(x)}{\sin^2(x)}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{\cos(x)} = \frac{0 \cdot \cos(x) - 1 \cdot (-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$$

$$\frac{d}{dx} \sin^2(x) = \sin(x) * \cos(x) + \cos(x) * \sin(x) = 2 * \sin(x) * \cos(x)$$

$$\frac{d}{dx} \cos^2(x) = \cos(x) * (-\sin(x)) + (-\sin(x)) * \cos(x) = -2 * \sin(x) * \cos(x)$$

10.8 Rechenregeln

10.9 Additionstheoreme

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y) \quad (\# \text{umgekehrte Ableitungsregel})$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x)\tan(y)} = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos(x \pm y)}$$

10.10 Doppelwinkel

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) = \frac{2\tan(x)}{1+\tan^2(x)}$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = \frac{1-\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)}$$

$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)} = \frac{2}{\cot(x)-\tan(x)}$$

$$\cot(2x) = \frac{\cot^2(x)-1}{2\cot(x)} = \frac{\cot(x)-\tan(x)}{2}$$

Beweis mit Additionstheorem

10.11 Produkt-zu-Summen-Formel

$$\sin(x) * \sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\cos(x) * \cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x) * \cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

10.12 Hyperbolische Funktionen

$$\sinh(z) := \frac{e^z - e^{-z}}{2} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cosh(z) := \frac{e^z + e^{-z}}{2} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

10.13 Additionstheoreme

$$\sinh(z_1 \pm z_2) = \sinh(z_1) \cdot \cosh(z_2) \pm \sinh(z_2) \cdot \cosh(z_1)$$

$$\cosh(z_1 \pm z_2) = \cosh(z_1) \cdot \cosh(z_2) \pm \sinh(z_1) \cdot \sinh(z_2)$$

$$\tanh(z_1 \pm z_2) = \frac{\tanh(z_1) \pm \tanh(z_2)}{1 \pm \tanh(z_1) \cdot \tanh(z_2)}$$

10.13.1 Zusammenhänge

$$\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$$

$$\cosh(z) + \sinh(z) = e^z$$

$$\cosh(z) - \sinh(z) = e^{-z}$$

10.14 Ableitungen

$$\frac{d}{dz} \sinh(z) = \cosh(z)$$

$$\frac{d}{dz} \cosh(z) = \sinh(z)$$

$$\frac{d}{dz} \tanh(z) = 1 - \tanh^2(z) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$$

11 Koordinatensysteme mit Funktionaldeterminante

11.1 Polarkoordinaten

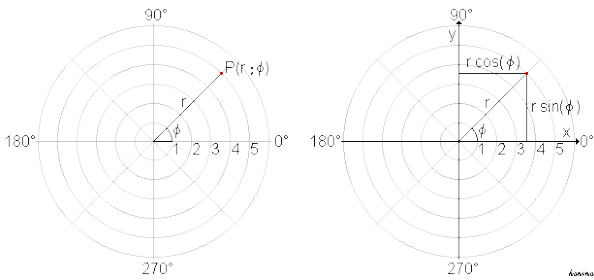


Abbildung 2: Quelle: <https://de.wikipedia.org/>

Umrechnung erfolgt durch:

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

Aus den Umrechnungsformeln von Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten erhält man für die Funktionaldeterminante als Determinante der Jacobi-Matrix:

$$\det J = \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r$$

11.2 Zylinderkoordinaten

Umrechnung erfolgt durch:

$$x = \rho \cos \varphi$$

$$y = \rho \sin \varphi$$

$$z = z$$

Mit Funktionaldeterminante: $\det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,z)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho$

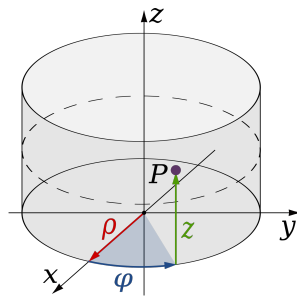


Abbildung 3: Quelle: <https://de.wikipedia.org/>

11.3 Kugelkoordinaten

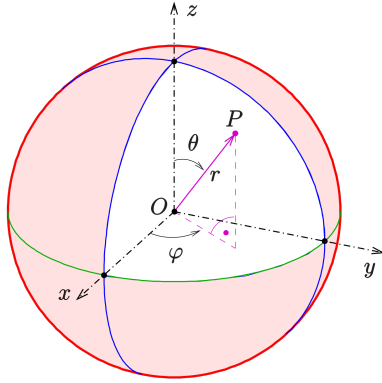


Abbildung 4: Quelle: <https://de.wikipedia.org/>

Umrechnung erfolgt durch:

$$x = r \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi$$

$$y = r \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi$$

$$z = r \cdot \cos \theta$$

Jacobi-Matrix:

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}$$

mit Funktionaldeterminante: $\det J = r^2 \sin \theta$

12 Rotationsmatrix, Drehmatrix

12.1 Drehmatrix der Ebene

Jede Rotation um den Ursprung ist eine lineare Abbildung. Wie bei jeder linearen Abbildung genügt daher zur Festlegung der Gesamtabbildung die Festlegung der Bilder der Elemente einer beliebigen Basis. Wird die Standardbasis gewählt, sind die Bilder der Basisvektoren gerade die Spalten der dazugehörigen Abbildungsmatrix.

Wir haben unter R_α

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Die Drehmatrix für eine Drehung um α ist also:

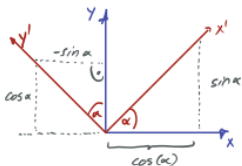
$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

12.1.1 Herleitung

Herleitung Drehmatrix

Gesucht: Matrix welche Vektoren, Basen um Winkel α dreht.



$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{x}{r} \\ \sin(\alpha) &= \frac{y}{r} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{aligned} -\sin(\alpha) & \longrightarrow (-) \text{ kommt von } \sin \alpha = \frac{G}{H} \\ \cos(\alpha) & \text{ mit } \sin(\alpha) = -x \cdot c \text{ und } H = r = 1 \text{ (Einheitskreis)} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich Drehmatrix R_α .

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad \text{Spalten entspr. neuer Basisvektoren}$$

Die Menge aller Drehmatrizen eines Raumes bildet eine Drehgruppe, die "special orthogonal group":

$$SO(n) = \{ \text{lin. Abb. } R: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \mid R^T R = I_n, \det R = 1 \}$$

Abbildung 5: Quelle: Miles Strässle, 20.11.2019

12.2 Drehmatrix in 3-Dimensionen

In der Physik werden häufig Drehungen des Koordinatensystems benutzt, dann müssen bei den untenstehenden Matrizen die Vorzeichen aller Sinus-Einträge vertauscht werden. Die Drehung eines Vektors um einen bestimmten Winkel in einem Koordinatensystem ist äquivalent zur Drehung des Koordinatensystems um den gleichen Winkel in umgekehrter Richtung (Drehung um negativen Winkel). „Der Drehsinn ergibt sich, wenn man entgegen der positiven Drehachse auf

den Ursprung sieht.“

12.2.1 Drehung um die x-Achse:

$$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

12.2.2 Drehung um die y-Achse:

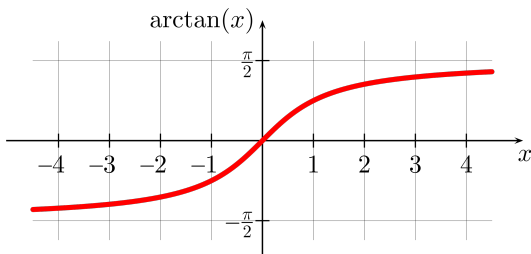
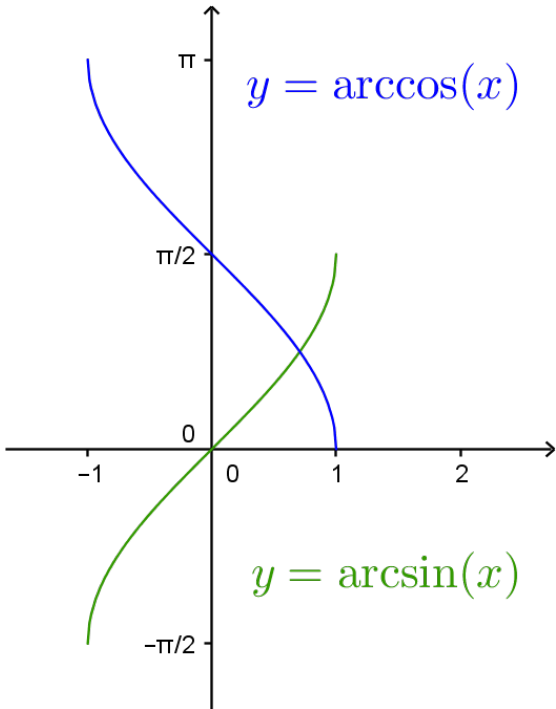
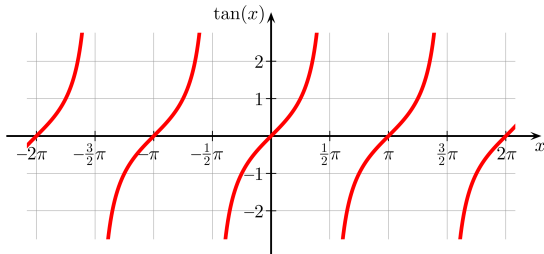
$$R_y(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

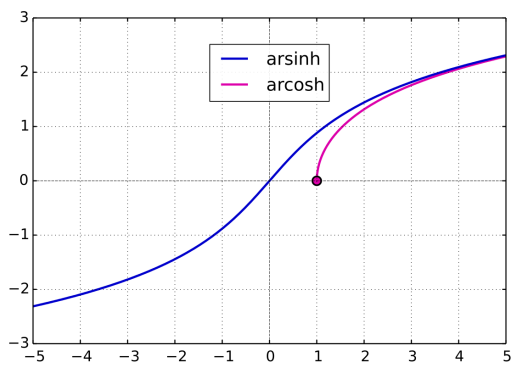
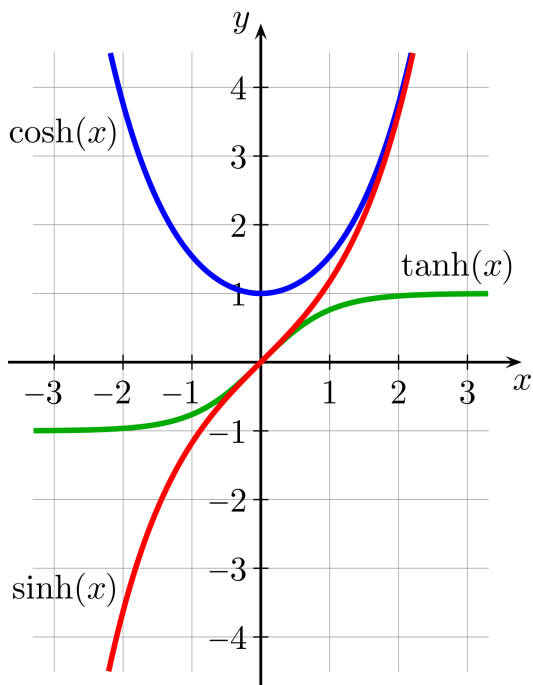
12.2.3 Drehung um die z-Achse:

$$R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

13 Plots Trigonometrischer Funktionen

Alle Plots in diesem Kapitel von www.wikipedia.org!





14 Nützliches

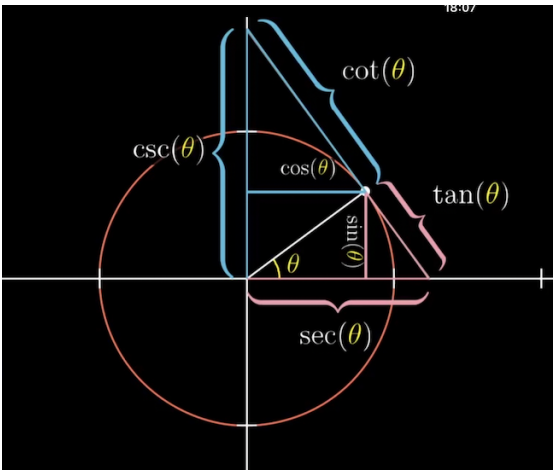


Abbildung 6: Quelle: youtube, 3blue1brown

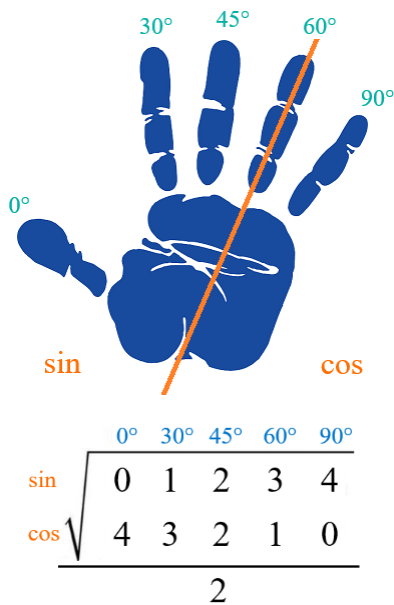


Abbildung 7: Quelle: <https://www.pinterest.com/pin/68735321805/>

15 Vollständige Induktion

Grundlägende Struktur um die Aussage $A(n)$ zu beweisen:

1. **Induktionsanfang/Verankerung:** Die Aussage wird für $n = A$ bewiesen. A ist dabei meistens der erste Wert für die gegebene Eingabemenge. Der Beweis wird meist durch direktes ausrechnen gemacht.
2. **Annahme/Induktionsvoraussetzung:** Hier schreibt man, dass man davon ausgeht die Aussage sei gültig (damit man sie im nächsten Schritt) einsetzen kann. Man kopiert also im Grunde, was man zu beweisen hat mit einigen Zierwörter.
3. **Induktionsschritt:** Für jedes $n \geq A$ wird unter Benutzung der Aussage $A(n)$ die Aussage $A(n + 1)$ bewiesen. Dazu wird die Induktionsannahme verwendet.

15.1 Beispiel

Es ist zu beweisen, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ folgendes gilt: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Lemma: $\forall \in \mathbb{N}. 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Beweis:

Sei $P(n) \equiv 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Wir zeigen $\forall \in \mathbb{N}. P(n)$ mit vollständiger Induktion.

Induktionsanfang: Zeige $P(0)$.

$$0 = \frac{0(0+1)}{2}$$

Induktionsschritt:

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig und nehmen wir $P(n)$ an (Induktionsvoraussetzung).

Zeige $P(n + 1)$ (Induktionsbehauptung).

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + (n + 1) = \quad (1)$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \text{ — P(n) Induktionsvor.} \quad (2)$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} \text{ —arith} \quad (3)$$

$$= \frac{(n+1) * ((n+1) + 1)}{2} \text{ —arith} \quad (4)$$

qed.

16 Mengen

16.1 Definitionen

Obere/Untere Schranke:	$\exists b \in \mathbb{R} \ \forall a \in A : a \leq b, \exists c \in \mathbb{R} \ \forall a \in A : a \geq c$
Supremum:	kleinste obere Schranke $\sup A$
Infimum:	grösste untere Schranke $\inf A$
Maximum/Minimum:	$\sup A \in A, \inf A \in A$
kompakt:	abgeschlossen und beschränkt
abgeschlossen:	z.B. $[0, 1]$

16.1.1 Vorgehen zur Bestimmung von Maximum/Minimum

1. Zeigen, dass $f(x)$ stetig ist
2. Zeigen, dass Definitionsmenge kompakt ist
3. Nach **Satz von Weierstrass** wird Maximum/Minimum angenommen
4. Maximum/Minimum bestimmen

16.2 Identitäten

$$A + B := \{a + b | a \in A, b \in B\}$$

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B, \inf(A + B) = \inf A + \inf B$$

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}, \inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$$