Analysis I - D-INFK

Miles Strässle

3. August 2020

1 Mengen

1.1 Definitionen

Obere/Untere Schranke: $\exists b \in \mathbb{R}\ \forall a \in A:\ a \leq b,\ \exists c \in \mathbb{R}\ \forall a \in A:\ a \geq c$
Supremum: kleinste obere Schranke $\sup A$
Infimum: grösste untere Schranke $\inf A$
Maximum/Minimum: $\sup A \in A$, $\inf A \in A$
kompakt: abgeschlossen und beschränkt
abgeschlossen: z.B. $[0,1]$

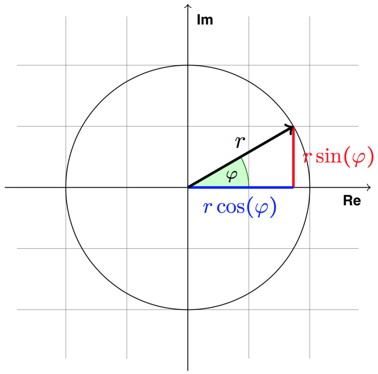
1.1.1 Vorgehen zur Bestimmung von Maximum/Minimum

1. Zeigen, dass $f(x)$ stetig ist
2. Zeigen, dass Definitionsmenge kompakt ist
3. Nach **Satz von Weierstrass** wird Maximum/Minimum angenommen
4. Maximum/Minimum bestimmen

1.2 Identitäten

$$A + B := \{a + b | a \in A, b \in B\}$$
$$\sup(A+B) = \sup A + \sup B,\ \inf(A+B) = \inf A + \inf B$$
$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\},\ \inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$$

2 Komplexe Zahlen



$$z = x + iy = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$$
$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\arg(z) = \varphi = \arctan(\frac{y}{x}) \quad \text{(je nach Qua}$$
$$x = r\cos(\varphi)$$
$$y = r\sin(\varphi)$$
$$zw = (re^{i\varphi}) \cdot (se^{i\psi}) = rse^{i(\varphi+\psi)}$$
$$\sqrt[q]{z} = \sqrt[q]{s}e^{i\varphi}, \text{ wobei } \varphi = \frac{\varphi}{q} \quad \text{mod } 2$$
$$e^{i(\frac{\pi}{2}+2\pi k)} = i,\ e^{i\pi} = 1,\ e^{-i\pi} = -1$$

$$(a,b)\cdot(c,d) = (ac - bd, ad + bc)$$
$$\overline{z} = x - iy$$
$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$
$$i = \sqrt{-1}$$

$$i^2 = -1$$
$$|z|^2 = z\overline{z}$$
$$|zw|^2 = (zw)\cdot\overline{(zw)} = |z|^2|w|^2$$

3 Grenzwert

3.1 Dominanz

$$\text{Für } x \to +\infty: \quad ... < \log(\log(x)) < \log(x) < x^\alpha < \alpha^x < x! < x^x$$
$$\text{Für } x \to 0: \quad ... < \log(\log(x)) < \log(x) < (\frac{1}{x})^\alpha$$

3.2 Fundamentallimes

$$\lim_{x\to a} \frac{\sin \odot}{\odot} = \lim_{x\to a} \frac{\tan \odot}{\odot} = 1 \text{ mit } \odot \xrightarrow{x\to a} 0$$
$$\lim_{x\to a} (1 + \frac{1}{\odot})^\odot = e \text{ mit } \odot \xrightarrow{x\to a} \infty$$
$$\lim_{x\to a} (1 + \odot)^{\frac{1}{\odot}} = e \text{ mit } \odot \xrightarrow{x\to a} 0$$

3.3 Wurzeltrick

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{\alpha} + \beta = \lim_{x\to\infty} (\sqrt{\alpha} + \beta)\frac{\sqrt{\alpha} - \beta}{\sqrt{\alpha} - \beta}$$

3.4 $e^{\log(x)}$-Trick

3.4.0.1 Anforderung:

Term der Form $f(x)^{g(x)}$ mit Grenzwert "0^0", "∞^0öder "1^∞für $x \to 0$

$$\textbf{Grundsatz:} \quad \lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{g(x)\cdot\log(f(x))}$$

Tipp: Danach den Limes des Exponenten berechnen. Oft ist Bernoulli-de l'Hôpital dazu nützlich.

3.5 Substitution

$$\lim_{x\to\infty} x^2(1 - \cos(\frac{1}{x})) \Rightarrow u = \frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(u)}{u^2}$$

3.6 Satz von Bernoulli-de l'Hôpital

3.6.0.1 Anforderung:

Term der Form $\frac{f(x)}{g(x)}$ mit Grenzwert entweder "$\frac{0}{0}$öder "$\frac{\infty}{\infty}$mit $g'(x) \neq 0$.

$$\textbf{Grundsatz:} \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Term	**Anforderung**	**Umformung**
$f(x)g(x)$	"$0 \cdot \infty$"	$\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$
$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{h(x)}{i(x)}$	"$\infty - \infty$"	$\frac{f(x)i(x) - h(x)g(x)}{g(x)i(x)}$

3.7 Wichtige Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0 \qquad \lim_{n\to 0} \frac{e^n - 1}{n} = 1$$
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$
$$\lim_{n\to\infty} \ln(n) = \infty \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$$

4 Folgen

4.1 Definition

Konvergenz: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N},$ sodass $\forall n \geq N: |a_n - a| < \varepsilon$
Divergenz: $\forall K > 0\ \exists N = N(K) \in \mathbb{N},$ sodass $\forall n \geq N: |a_n| > K$

4.2 Beweis

1. Zeige mittels **Induktion**, dass die Folge **beschränkt** ist und monoton **steigt/fällt**. Benutze dazu z.B. folgende Aussagen: $a_n \leq a_{n+1}$ oder $a_{n+1} - a_n \geq 0$.
2. **Grenzwert berechnen** mit $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ oder durch die ersten paar Terme abschätzen
3. Beweise den Grenzwert (z.B. mit $a_n \geq a$) um Beschränktheit zu beweisen

Tipp: Den Grenzwert in der rekursiven Formel mit a_n und a_{n+1} ersetzen.
Für die Formel $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \sqrt{a_n}$ muss zum Beispiel gelten: $a = \frac{1}{2}a + \sqrt{a}$ (hier $a = 4$)

5 Reihen $\sum^\infty$

5.1 Konvergenzkriterien

	Eignung	**Bemerkung**
Limes des allgemeinen Glieds		zeigt nur Divergenz
Majoranten- und Minorantenkriterium		ersten Glieder spielen Rolle
Quotientenkriterium	a_n mit Faktoren wie $n!$, a^n, oder Polynome	gleiche Folgerung wie W kriterium
Wurzelkriterium	$a_n = (b_n)^n$	gleiche Folgerung wie entenkriterium
Leibnitz-Kriterium	sin, cos, tan, $(-1)^n$	
Absolute Konvergenz	sin, cos, tan, $(-1)^n$	
Sandwich-Theorem	sin, cos, tan, $(-1)^n$	

Limes des allgemeinen Glieds

5.1.0.1 Bemerkung:

Mit dieser Methode lässt sich nur die Divergenz beweisen, nicht jedoch die Konvergenz.

1. $\sum_n a_n$ gegeben
2. Grenzwert $\lim_{n\mapsto\infty} a_n$ berechnen
   - falls Grenzwert $\neq 0 \Rightarrow$ **divergent**
   - falls Grenzwert $= 0 \Rightarrow$ keine Aussage

Majoranten- und Minorantenkriterium

Es seien a_n, $b_n > 0$ mit $a_n \geq b_n$ $\forall n$ ab einem gewissen n_0. Dann gilt:

$$\sum_n a_n \text{ konvergent} \Rightarrow \sum_n b_n \textbf{ konvergent} \quad \text{(Majorantenkriterium)}$$
$$\sum_n b_n \text{ divergent} \Rightarrow \sum_n a_n \textbf{ divergent} \quad \text{(Minorantenkriterium)}$$

Vergleichskriterium

1. $\sum_n a_n$ und $\sum_n b_n$ gegeben mit $a_n, b_n > 0$
2. Grenzwert $\lim_{n\mapsto\infty} \frac{a_n}{b_n}$ berechnen
   - falls Grenzwert $= 0$:
     - $\sum_n a_n$ divergent $\Rightarrow \sum_n b_n$ **divergent**
     - $\sum_n b_n$ konvergent $\Rightarrow \sum_n a_n$ **konvergent**
   - falls Grenzwert $= \infty$:
     - $\sum_n a_n$ konvergent $\Rightarrow \sum_n b_n$ **konvergent**
     - $\sum_n b_n$ divergent $\Rightarrow \sum_n a_n$ **divergent**

Quotientenkriterium

1. $\sum_n a_n$ mit $a_n \neq 0$ gegeben
2. Grenzwert $\lim_{n\mapsto\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ berechnen
   - falls Grenzwert $> 1 \Rightarrow$ **divergent**
   - falls Grenzwert $< 1 \Rightarrow$ **konvergent**
   - falls Grenzwert $= 1 \Rightarrow$ keine Aussage

Wurzelkriterium

1. $\sum_n a_n$ mit $a_n \neq 0$ gegeben
2. Grenzwert $\lim_{n\mapsto\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ berechnen
   - falls Grenzwert $> 1 \Rightarrow$ **divergent**
   - falls Grenzwert $< 1 \Rightarrow$ **konvergent**
   - falls Grenzwert $= 1 \Rightarrow$ keine Aussage

Leibniz-Kriterium

1. $\sum_n (-1)^n a_n$ gegeben
2. **konvergent**, falls:
   (a) $a_n \geq 0$
   (b) $\lim_{n\mapsto\infty} a_n = 0$
   (c) a_n monoton fallend

Absolute Konvergenz

1. $\sum_n (-1)^n a_n$ gegeben
2. **konvergent**, falls $\sum_n |a_n|$ konvergent

5.2 Geometrische Reihe

Reihe der Form $\sum_{k=0}^{\infty} a \cdot r^k$ mit der **Partialsumme**:

$$S_N = \frac{a - ar^{N+1}}{1-r}$$

Konvergent, falls $0 < |r| < 1$ mit Grenzwert:

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r}$$

5.3 Potenzreihe

Reihe der Form $\sum_0^\infty a_n x^n$. **Konvergent**, falls $|x| < \rho$. In diesem Gebiet darf man die Reihe ableiten und integrieren.

$$\rho = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}|$$
$$\rho = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

5.3.0.1 Konvergenzverhalten am Rand:

Es muss noch überprüft werden, ob die Reihe für genau ρ konvergiert. Dazu muss ρ in die Formel eingesetzt werden.

5.3.1 Wichtige Reihen

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$
$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$n^2 = \sum_{k=1}^{n} 2k - 1$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \quad \text{(harmonisch)}$$

5.3.2 Potenzreihenentwicklung

$$\textbf{Grundsatz:} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$$

6 Stetigkeit

6.1 Lipschitz-Stetigkeit

Es existiert eine Konstante $L \in \mathbb{R}$, sodass:

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in \Omega$$

Bemerkung: Ist f' **auf Ω beschränkt**, so ist f Lipschitz-stetig. Lipschitz-Stetigkeit impliziert gleichmässige Stetigkeit.

6.2 Weierstrass-Kriterium

Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta(\varepsilon, a) > 0$, sodass für alle $|x - a| < \delta$ gilt:

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

6.3 Gleichmässige Stetigkeit

Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta(\varepsilon) > 0$, sodass für alle $|x - y| < \delta$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Bemerkung: Ist f **stetig und kompakt**, dann ist sie auch gleichmässig stetig.

6.4 Punktweise Konvergenz

$f_n(x)$ konvergiert punktweise falls:

$$\forall x \in \Omega \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

6.5 Gleichmässige Konvergenz

6.5.0.1 Grundsatz:

Falls eine Folge stetiger Funktionen f_n gleichmässig gegen f konvergiert, muss f stetig sein.

$f_n(x)$ konvergiert gleichmässig falls:

$$\lim_{n\to\infty} \sup |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Bemerkung: Gleichmässige Konvergenz impliziert punktweise Konvergenz.
Rezept für gleichmässige Konvergenz

(i) Punktweiser Limes berechnen

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad = \text{Grenzfunktion}$$

(ii) Supremum bestimmen
(Ableitung von $f_n(x)$ oder Abschätzung benutzen)

$$\sup |f_n(x) - f(x)|$$

(iii) Limes $n \to \infty$ bestimmen (vgl. Kriterium glm. Konvergenz)

$$\lim_{n\to\infty} \sup |f_n(x) - f(x)|$$

Limes $= 0 \to$ Glm. konvergent mit Grenzfunktion f(x)

(iv) Indirekte Methode

- $f(x)$ unstetig auf $\Omega \Rightarrow$ keine glm. Konvergenz
- $f(x)$ stetig, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \forall x \in \Omega$ und Ω kompakt $\Rightarrow$ Glm. Konvergenz

gegeben: $f_n : [0,1] \mapsto \mathbb{R},\ f_n(x) = (1 - x^2)x^n$

punktweisen Limes berechnen: $\lim_{n\to\infty} (1 - x^2)x^n = 0 \equiv f(x)$
$\Rightarrow$ konvergiert gegen 0

Supremum berechnen: $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \sup_{x\in[0,1]}$

Maximum finden: $\frac{d}{dx} f_n(x) n x^{n-1}(1 - x^2) - 2x x^n = x^{n-1}(n - (n$
$\Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = \sqrt{\frac{n}{n+2}} \Rightarrow x_2$ ist Maximum

Limes berechnen: $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} f_n(x_2) = 0$

Folgerung: f_n konvergiert auf $[0,1]$ glm. gegen f

7 Differenzialrechnung

Eine stetige Funktion ist differenzierbar, falls der Grenzwert $f'(x_0)$ existiert:

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Tangente

Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in \Omega$ diffbar. Dann ist die Tangente im Punkt x_0

$$t(x; x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

7.1 Umkehrsatz

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

7.2 Mittelwertsatz

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

7.3 Taylorpolynom

Das Taylorpolynom m-ter Ordnung von $f(x)$ an der Stelle $x = a$

$$P_m^a(x) := f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 + ... + \frac{1}{m!} f^{(m)}(a)(x-a)^m$$

mit dem Fehlerterm $R_m^a(x)$, wobei ξ zwischen a und b liegt:

$$R_m^a(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}(x+a)^{m+1}, \text{ wobei } f(x) = P_m^a(x) + R_m^a(x)$$

7.4 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$f(x) = \int_l^{m(x)} g(t) dt$$

$$f'(x) = g(m(x)) \cdot \frac{d}{dx} m(x)$$

wobei $m(x)$ der Form ax^b ist mit $l \in \mathbb{R}$

Differenzial / Jaccobi-Matrix

$$df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$\to$ enthält die n part. Ableit. aller m Komponenten von f

Taylorentwicklung mit mehreren Variabeln

$$\begin{aligned} f(x,y) = \quad & f(x_0, y_0) + \tfrac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \tfrac{\partial f}{\partial y}\Delta y \\ & + \tfrac{1}{2!}\left(\tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\Delta x)^2 + 2\tfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y + \tfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\Delta y)^2 \right) \\ & + \tfrac{1}{3!}\left(\tfrac{\partial^3 f}{\partial x^3}(\Delta x)^3 + 3\tfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(\Delta x)^2 \Delta y \right. \\ & \qquad \left. + 3\tfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\Delta x(\Delta y)^2 + \tfrac{\partial^3 f}{\partial y^3}(\Delta y)^3 \right) \\ & + \cdots \end{aligned}$$

8 Integration

8.1 Elementare Integrale

$f'(x)$	$f(x)$	$F(x)$
$\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$	$\frac{f(x)}{g(x)}$	
0	c	cx
$r \cdot x^{r-1}$	x^r	$\frac{x^{r+1}}{r+1}$
$-\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\ln\lvert x\rvert$
$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$-\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$	$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$
e^x	e^x	e^x
$c \cdot e^{cx}$	e^{cx}	$\frac{1}{c} \cdot e^{cx}$
$\ln(c) \cdot c^x$	c^x	$\frac{c^x}{\ln(c)}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$x(\ln\lvert x\rvert - 1)$
$\frac{1}{\ln(a) \cdot x}$	$\log_a\lvert x\rvert$	$\frac{x}{\ln(a)}(\ln\lvert x\rvert - 1)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$x \cdot \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$	$x \cdot \arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\cosh(x)$
$\sinh(x)$	$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\sinh(x)$
$\frac{1}{\cosh^2(x)}$	$\tanh(x)$	$\log(\cosh(x))$

8.2 Regeln

Direkter Integral $\int f(g(x))g'(x)\, dx = F(g(x))$

Partielle Integration $\int f' \cdot g\, dx = f \cdot g - \int f \cdot g'\, dx$

mit Polynomen $\int \frac{p(x)}{q(x)}\, dx \Rightarrow$ Partialbruchzerlegung

Substitution $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\, dx$ mit $x = \varphi(t)$

8.3 Tipps

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = -\log|\cos(x)|$$

$$\int \frac{1}{x-\alpha}\, dx = \log(x - \alpha)$$

$$\int \frac{\frac{1}{\alpha}}{1 + (\frac{x}{\alpha})^2}\, dx = \arctan(x)$$

$$\int \sin^2(x)\, dx = \frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x)) + C$$

$$\int \cos^2(x)\, dx = \frac{1}{2}(x + \sin(x)\cos(x)) + C$$

$$\int \sqrt{x^2+1}\, dx = \sinh(x) + C$$

8.4 Uneigentliche Integrale

$$\int_0^\infty f(x)\, dx = \lim_{R \to \infty} \int_0^R f(x)\, dx$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\, dx = \lim_{R \to -\infty} \int_R^k f(x)\, dx + \lim_{R \to \infty} \int_k^R f(x)\, dx$$

Gibt es eine Unstetigkeitstelle c in dem Integrationsgebiet, so geht man wie folgt vor:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\, dx + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\, dx$$

8.5 Beweis bijektiver Funktionen

Zu beweisen sind folgende Eigenschaften:

injektiv: Zeig, dass f **strickt monoton wächst oder fällt** und**stetig** ist

surjektiv: Zeig, dass alle Werte im Bildbereich angenommen werden (vl. mit Zwischenwertsatz)

Daraus folgt dann, dass f bijektiv ist.

9 Differentialgleichungen

9.1 Grundbegriffe

Ordnung: höchste vorkommende Ableitung

linear: alle y-abhängigen Terme kommen linear vor (keine Terme wie zum Beispiel y^2, $(y'')^3$, $\sin(y)$, $e^{y'}$)

homogen: Gleichung ohne Störfunktionen

Störfunktion: Term, der rein von der Funktionsvariablen x abhängt

9.2 Methoden

	Problem	**Anforderu**
Trennung der Variablen	$y' = \frac{dy}{dx} = h(x) \cdot g(y)$	1. Ordnung
Variation der Konstanten	$y' = \frac{dy}{dx} = h(x)y + b(x)$	1. Ordnung inhomogen
Euler-Ansatz	$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_0 y = 0$	n. Ordnung linear homogen
Direkter Ansatz	$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_0 y = b(x)$	n. Ordnung linear inhomogen

9.2.1 Trennung der Variable

$$y' + x\tan y = 0, \; y(0) = \frac{\pi}{2}$$

umformen $\frac{dy}{dx} = -x\tan y$

konstante Lösungen $y(x) \equiv 0$ erfüllt jedoch $y(0) \equiv \frac{\pi}{2}$ nicht

Trennung $\frac{dy}{\tan y} = -x dx$

integrieren $\int \frac{\cos y}{\sin y} dy = -\int x dx \Rightarrow \log|\sin y| = -\frac{x^2}{2} + C$

$\Rightarrow |\sin y| = e^C e^{\frac{-x^2}{2}} \Rightarrow \sin y = \pm e^C e^{\frac{-x^2}{2}} = Ce^{\frac{-x^2}{2}}$

Anfangsbedingung gebrauchen $\sin(y(0)) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1 \Rightarrow C = 1$

Lösung $y(x) = \arcsin(e^{\frac{-x^2}{2}})$

9.2.2 Variation der Konstanten

Grundsatz: $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

$$y'(x+1) + y = x^3,\ y(0) = \sqrt{5}$$

Trennung $\frac{y'}{y} = \frac{-1}{x+1}$

konstante Lösungen $y(x) \equiv 0$ erfüllt jedoch $y(0) \equiv \sqrt{5}$ nicht

integrieren $\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x+1}$

$\Rightarrow \ln|y| = -\ln|x+1| + C$

Homogene Lösung $y_h(x) = \frac{C}{x+1}$, mit $C = \pm e^C \in \mathbb{R}\backslash 0$

partikulärer Ansatz $y_p(x) = \frac{C(x)}{x+1}$

einsetzen $(\frac{C'(x)}{x+1} - \frac{C(x)}{(x+1)^2})(x+1) + \frac{C(x)}{x+1} = x^3$

$C'(x) = x^3$

$C(x) = \frac{x^4}{4}$

partkuläre Lösung $y_p(x) = \frac{x^4}{4(x+1)}$

allgemeine Lösung $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \frac{C}{x+1} + \frac{x^4}{4(x+1)}$

Anfangsbedingung benutzen $y(0) = \sqrt{5} \Rightarrow C = \sqrt{5}$

Lösung $y(x) = \frac{\sqrt{5}}{x+1} + \frac{x^4}{4(x+1)}$

9.2.3 Euler-Ansatz

$$y'' - 2y' - 8y = 0,\ y(1) = 1, y'(1) = 0$$

Euler-Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$

einsetzen $\lambda^2 e^{\lambda x} - 2\lambda e^{\lambda x} - 8e^{\lambda x} = 0$

charakt. Polynom $\lambda^2 - 2\lambda - 8 = (\lambda - 4)(\lambda + 2) = 0$

Nullstellen $4, -2$

allgemeine Lösung $y(x) = Ae^{4x} + Be^{-2x}$

Anfangsbedingung gebrauchen $y(1) = Ae^4 + Be^{-2} = 1,\ y'(1) = 4Ae^4 - 2Be^{-2} =$

$\Rightarrow A = \frac{1}{3}e^{-4}, B = \frac{2}{3}e^2$

Lösung $y(x) = \frac{1}{3}e^{4x-4} + \frac{2}{3}e^{2-2x}$

Bemerkung: Zu einer m-fachen Nullstelle λ gehören die m linear unabhängigen Lösungen $e^{\lambda x}$, $x \cdot e^{\lambda x}$, ... , $x^{m-1} \cdot e^{\lambda x}$. Zur m-fachen Nullstelle $\lambda = 0$ gehören die Lösungen 1, x, ... , x^{m-1}.

Komplexe Nullstellen:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ein komplexes Nullstellenpaar der Form $\alpha \pm \beta i$ liefert folgende homogene Lösung:

$$y(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x))$$

9.2.4 Direkter Ansatz

Grundsatz: $y(x) = y_{\text{homo}}(x) + y_p(x)$

Inhomogener Term $b(x)$	**Ansatz für** $y_p(x)$	**zu bestimmen**
Polynom	$Ax^2 + Bx + C$	A, B, C
ce^{kx}	Ae^{kx}	A
$c\sin(kx)$ oder $c\cos(kx)$	$A\sin(kx) + B\cos(kx)$	A, B

Bemerkung: Kommt der gewählte Ansatz schon in der homogenen Lösung vor, so multipliziert man den Ansatz einfach mit x.

$$y'' - y' + \frac{1}{4}y = \cos(x)$$

homogener Ansatz $y'' + y' + \frac{1}{4}y = 0$

Euler-Ansatz anwenden $\lambda^2 + \lambda + \frac{1}{4} = (\lambda + \frac{1}{2})^2 = 0$

homogene Lösung $\Rightarrow y_{\text{homo}}(x) = Ae^{-\frac{x}{2}} + Bx \cdot e^{-\frac{x}{2}}$

partikulärer Ansatz wählen $y_p(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$

$\Rightarrow y_p'(x) = -a\sin(x) + b\cos(x),\ y_p''(x) = -a\cos(x) -$

Einsetzen $(-a + b + \frac{a}{4})\cos(x) + (-b - a + \frac{1}{4}b)\sin(x) = \cos(x)$

Koeffizientenvergleich $-\frac{3}{4}a + b = 1,\ -a - \frac{3}{4}b = 0$

partikuläre Lösung $y_p(x) = -\frac{12}{25}\cos(x) + \frac{16}{25}\sin(x)$

Lösung $y(x) = Ae^{-\frac{x}{2}} + Bx \cdot e^{-\frac{x}{2}} - \frac{12}{25}\cos(x) + \frac{16}{25}\sin(x)$

10 Wegintegral

10.1 Standardmethode

Grundsatz: $\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} := \int_a^b \vec{v}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \dot{\vec{\gamma}}(t)\ dt$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix},\ \gamma : [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}$$

parametrisieren hier bereits gegeben

γ ableiten $\dot{\gamma} = \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t)) \end{pmatrix}$

in Formel einsetzen $\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} dt$

$= \int_0^{2\pi} (1 - \cos(t))^2\ dt = \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos(t) + \cos^2(t))\ dt$

Lösung $2\pi - 0 + \pi = 3\pi$

10.2 In Potenzialfeldern

10.2.0.1 Anforderung:

Das Vektorfeld $\vec{v}$ ist **konservativ**(= Potenzialfeld, der Weg ist egal). Es existiert ein Potenzial.

$$\textbf{Grundsatz:} \quad \int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{s} = \Phi(\text{Ende}) - \Phi(\text{Anfang})$$

$$\begin{aligned}
& \vec{v} = \begin{pmatrix} e^{xy}(1+xy) \\ e^{xy}x^2 \end{pmatrix}, \text{ Kreisbogen von } (1,0) \text{ nach } (-1,0) \\
\text{gleichsetzen:} \quad & \vec{v} = \begin{pmatrix} e^{xy}(1+xy) \\ e^{xy}x^2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} \end{pmatrix} = \nabla\Phi \\
& \frac{\partial\Phi}{\partial y} = e^{xy}x^2 \Rightarrow \Phi = \int e^{xy}x^2\, dy = xe^{xy} + C(x) \\
\text{ableiten:} \quad & \frac{\partial\Phi}{\partial x} = e^{xy} + xye^{xy} + C' \stackrel{!}{=} e^{xy} + xye^{xy} \\
& \Rightarrow C' = 0 \Rightarrow C = \text{const.} \\
\textbf{Potenzial:} \quad & \Phi = xe^{xy} + \text{const.} \\
\textbf{Lösung:} \quad & \int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{s} = \Phi(-1,0) - \Phi(1,0) = -1 + C - 1 - C = 2
\end{aligned}$$

10.3 Satz von Green

10.3.0.1 Anforderung:

Der Rand muss im positiven mathematischen Sinn umlaufen werden (d.h. im Gegenuhrzeigersinn).

$$\textbf{Grundsatz:} \quad \int_{\gamma=\partial C} \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_C \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) dxdy$$

Bemerkung: Falls das Vektorfeld nicht gegeben ist, können folgende ausgewählt werden:
$\vec{v}_1 = \binom{0}{x}$ oder $\vec{v}_2 = \binom{-y}{0}$

$$\begin{aligned}
& \vec{v} = \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix}, \text{ Kreisbogen mit Radius 1 um } (0,0) \\
\text{Rotation berechnen:} \quad & rot(\vec{v}) = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 - 1 = -1 \\
\text{Normalbereich:} \quad & E = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x^2+y^2 \le 1\} \\
\text{in Formel einsetzen:} \quad & \int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_E -1\, dxdy = -\mu(E) = -\pi
\end{aligned}$$

10.4 Satz von Stokes

10.4.0.1 Anforderung:

Einfacher in $\mathbb{R}^3$, der Rand muss im positiven mathematischen Sinn umlaufen werden (d.h. im Gegenuhrzeigersinn)

$$\textbf{Grundsatz:} \quad \int_{\gamma=\partial C} \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_C \text{rot}(\vec{v})\cdot\vec{n}\; do$$

$$\begin{aligned}
& \vec{v} = \begin{pmatrix} y(z^2-x^2) \\ x(y^2-z^2) \\ z(x^2+y^2) \end{pmatrix}, \text{ Rand der oberen Hälft} \\
\text{Rotation berechnen:} \quad & rot(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 2z(x+y) \\ 2z(y-x) \\ x^2+y^2-2z^2 \end{pmatrix} \\
\textbf{Einheitssphäre parametrisieren:} \quad & \Phi(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \\
\text{Normalvektor berechnen:} \quad & \Phi_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\varphi) \\ \cos(\theta)\sin(\varphi) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix}, \; \Phi_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin(\theta)\sin \\ \sin(\theta)\cos(\\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Phi_\theta \times \Phi_\varphi = \begin{pmatrix} \sin^2(\theta)\cos(\varphi) \\ \sin^2(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\theta)\cos(\theta) \end{pmatrix} \\
\textbf{Grundsatz anwenden:} \quad & \int_H \text{rot}(\vec{v})\cdot\vec{n}\; do = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

11 Flächenintegral

11.1 Normalbereich

$$\begin{aligned}
\textbf{Grundsatz:} \quad & \Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | a \le x \le b, f(x) \le y \le g(x)\} \\
& \int_\Omega F\; d\mu = \int_a^b dx \int_{f(x)}^{g(x)} dy\; F(x,y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_\Omega xy\; d\mu,\; \Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | y \ge x^2, x \ge y^2\} \\
\text{als Normalbereich schreiben:} \quad & \Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | 0 \le x \le 1, x^2 \le y \le \sqrt{x}\} \\
\text{in Formel einsetzen:} \quad & \int_\Omega xy\; d\mu = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dyxy = \int_0^1 dx\; x\Big[\frac{y^2}{2}\Big]_{x^2}^{\sqrt{x}} \\
& = \int_0^1 \Big(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{2}\Big) dx = \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

Bemerkung: Soll nur die Fläche ausgerechnet werden, so wähle $F(x,y) = 1$. Werden Polarkoordinaten benutzt, so wähle $F(r,\varphi) = r$.

11.2 Satz von Green

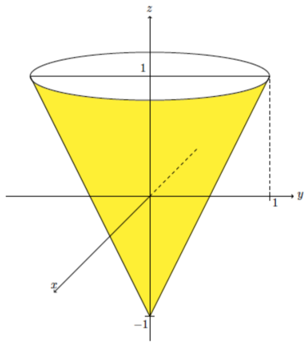
11.2.0.1 Anforderung:

Der Rand muss im positiven mathematischen Sinn umlaufen werden (d.h. im Gegenuhrzeigersinn)

$$\textbf{Grundsatz:} \quad \mu(C) = \int_{\gamma=\partial C} \vec{v}\cdot d\vec{s}, \text{ falls } rot(\vec{v}) = 1$$

$$\begin{aligned}
& \text{Flächeninhalt der Ellipse } E\text{, berandet durch } x = a\,c \\
\text{Rand parametrisieren:} \quad & \gamma : [0,2\pi] \mapsto \mathbb{R}^2,\; \theta \mapsto \begin{pmatrix} a\cos(\theta) \\ b\sin(\theta) \end{pmatrix} \\
\text{Vektorfeld auswählen:} \quad & \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \text{ oder } \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -y \\ 0 \end{pmatrix} \\
\textbf{Wegintegral ausrechnen:} \quad & \mu(E) = \pi ab
\end{aligned}$$

12 Oberflächenintegral



$$\begin{aligned}
\text{gegeben:} \quad & \vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{x^2}{2} \\ -xy \\ x^2+3z^2-3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

gesucht: Fluss durch die Mantelfläch
(von Innen nach Aussen)

Vorgehen: Fluss durch den ganzen Ke
mit **Satz von Gauss** bere
Fluss durch Deckel
mit **Standardmethode** be

12.1 Standardmethode

$$\textbf{Grundsatz:}\quad \int_{\partial V} \vec{v}\cdot\vec{n}\; do$$

$$\text{Normalvektor:}\quad \vec{n} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\text{Vektorfeld anpassen:}\quad z=1 \Rightarrow \vec{F} = \begin{pmatrix}\frac{x^2}{2}\\-xy\\x^2\end{pmatrix}$$

$$\textbf{Grundsatz anwenden:}\quad \iint_D \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{x^2}{2}\\-xy\\x^2\end{pmatrix} dxdy = \iint_D x^2\; dxdy$$

$$\textbf{Koordinatentransformation:}\quad \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\cos^2(\varphi)\; drd\varphi = \frac{\pi}{4}$$

12.2 Satz von Gauss

$$\textbf{Grundsatz:}\quad \int_{\partial V} \vec{v}\cdot\vec{n}\; do = \int_V \operatorname{div}(\vec{v})\; d\mu$$

wobei $\vec{n}$ die nach aussen gerichtete Normale längs ∂V bezeichnet.

$$\text{Divergenz berechnen:}\quad \operatorname{div}(\vec{F}) = 6z$$

$$\textbf{Grundsatz anwenden:}\quad \int_{-1}^{1} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{z+1}{2}} 6zr\; dr = 2\pi$$

Bemerkung: In diesem Beispiel wurden zylindrische Koordinaten benutzt.

12.3 Satz von Stokes

12.3.0.1 Anforderung:

Einfacher in $\mathbb{R}^3$, der Rand muss im positiven mathematischen Sinn umlaufen werden (d.h. im Gegenuhrzeigersinn)

$$\textbf{Grundsatz:}\quad \int_{\gamma=\partial C} \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_C \operatorname{rot}(\vec{v})\cdot\vec{n}\; do$$

13 Kurvendiskussion

Extremalstelle	$f'(x)=0 \wedge f''(x)\neq 0$
Minimalstelle	$f'(x)=0 \wedge f''(x)>0$
Maximalstelle	$f'(x)=0 \wedge f''(x)<0$
Wendepunkt	$f''(x)=0 \wedge f'''(x)\neq 0$
Sattelpunkt	$f'(x)=0 \wedge f''(x)=0 \wedge f'''(x)\neq 0$

kritischer Punkt: $p_0 \in \Omega$ für welchen $\operatorname{rank}(df(p_0)) < \min\{m,n\}$ gilt

Kandidaten für Extrema: $p_0 \in \Omega$ für welchen $df(p_0)=0$ gilt

13.1 Extremwertaufgaben ohne Nebenbedingungen

1. Kandidaten für Extrema finden $df(x)=0$
2. Bestimmung:
   (a) $\text{Hess}(f)(p_0)$ positiv definit $\Rightarrow$ lokales Minimum
   (b) $\text{Hess}(f)(p_0)$ negativ definit $\Rightarrow$ lokales Maximum
   (c) $\text{Hess}(f)(p_0)$ indefinit $\Rightarrow$ Sattelpunkt

Bemerkung: Falls alle Eigenwerte von A grösser als 0 sind, dann ist A **positiv definit**. Hat A sowohl positive als auch negative Eigenwerte, so ist sie **indefinit**.

13.2 Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen

13.2.0.1 Beweis

Falls es sich um eine stetige Funktion auf einem kompakten Gebiet handelt, so nimmt f gemäss Weierstrass ein Supremum und Infimum an. Daraus folgt, dass f auf dem Gebiet ein Maximum und Minimum besitzt.

13.2.0.2 1. Kandidaten im Innern des Gebiets:

i $df(x,y)=0$ auflösen
ii Überprüfen, ob gefundene Punkte wirklich im Gebiet sind

13.2.0.3 2. Kandidaten auf den Randstücken des Gebiets:

i $df(x,y)-\lambda dg(x,y)-\mu dh(x,y)=0$ auflösen
ii Überprüfen, ob gefundene Punkte wirklich auf dem Rand sind
iii $dg(x,y)=0$ auflösen und überprüfen, ob gefunden Punkte Nebenbedingung erfüllen
iv Eckpunkte des Randstückes überprüfen

$\Rightarrow$ Benutze ein System hergeleitet von $df(x,y)-\lambda dg(x,y)-\mu dh(x,y)=0$ und den verschiedenen Nebenbedingungen.

Tipp: Ist das Randstück nicht differenzierbar, muss man es in mehrere Teilstrecken aufteilen.