Lösungsskizze Serie 13

1. a) Gepaarte Stichprobe: Zu jeder Blutplättchenmenge vor dem Rauchen gehört die Blutplättchenmenge der selben Person nach dem Rauchen.
Einseitiger Test: Wir wollen nicht wissen, ob sich die Bluplättchenmenge verändert hat, sondern ob sie sich erhöht hat.

H_0 : Rauchen hat keinen Einfluss auf die Anhäufung der Blutplättchen. ($\mu_R = \mu_{NR}$)
H_A: Durch Rauchen erhöht sich die Anhäufung der Blutplättchen. ($\mu_R > \mu_{NR}$)

b) Gepaarte Stichprobe: Zu jeder Höhe eines selbstbefruchteten Setzlings gehört die Höhe des fremdbefruchteten "Partners".
Einseitiger Test: Wir wollen nicht wissen, ob sich die Höhen unterscheiden, sondern ob die fremdbefruchteten Setzlinge grösser werden als die selbstbefruchteten.

H_0 : Die Höhen unterscheiden sich nicht. ($\mu_f = \mu_s$)
H_A: Fremdbefruchtete Setzlinge werden grösser als selbstbefruchtete. ($\mu_f > \mu_s$)

c) Ungepaarte Stichprobe: Ungleiche Anzahl in den Gruppen. Zu einem Blutdruck aus der Versuchsgruppe gehört nicht ein spezifischer aus der Kontrollgruppe.
Zweiseitiger Test: Wir wollen nur wissen, ob das Kalzium einen Einfluss hat auf den Blutdruck, egal ob nach oben oder unten.

H_0: Kalzium hat keinen Einfluss auf den Blutdruck. ($\mu_{Kalz} = \mu_{Kontr}$)
H_A: Kalzium hat einen Einfluss auf den Blutdruck. ($\mu_{Kalz} \neq \mu_{Kontr}$)

d) Ungepaarte Stichprobe: Die Anzahlen in den beiden Gruppen brauchen nicht gleich zu sein. Zur Eisenmessung einer "Fe^{2+}-Maus" gehört nicht eine bestimmte Messung einer "Fe^{3+}-Maus".
Zweiseitiger Test: Wir wollen nur wissen, ob die Mäuse die verschiedenen Eisenformen unterschiedlich gut aufnehmen.

H_0: Die Eisenaufnahme ist von der Form unabhängig. ($\mu_2 = \mu_3$)
H_A: Die Eisenaufnahme ist von der Form abhängig. ($\mu_2 \neq \mu_3$)

2. a) Gepaart, denn man soll Paare von Typ $(A_i, N_i), i = 1, \ldots, n = 10$ betrachten.

Bitte wenden!

b) Der t-Test wird folgendermassen formal durchgeführt:

Modellannahmen	:	D_i: $i-$te Differenz, $i = 1, \ldots, 10$. $D_i \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ mit σ unbekannt.
Nullhypothese H_0	:	$\mu = \mu_0 = 0$
Alternative H_A	:	$\mu < 0$ (einseitig)
Teststatistik	:	$T = \frac{\overline{D}-\mu_0}{S_D/\sqrt{n}}$
Verwerfungsbereich	:	V.B. $= \{T < t_{n-1,\alpha} = t_{9,0.05} = -1.833\}$.
Beobachtung	:	$T(w) = \sqrt{10} \cdot (-4)/19.80 = -0.6388$.
Testentscheid	:	$T(w) = -0.6388 \notin$ V.B.: die Nullhypothese wird beibehalten.

3. **a)** Seien $X_1, \ldots, X_n$ iid $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Null- und Alternativhypothese lauten:

$$\begin{aligned} H_0: &\quad \mu = 146, \\ H_A: &\quad \mu \neq 146. \end{aligned}$$

Die Teststatistik

$$T = \frac{\overline{X}_n - 146}{S_X/\sqrt{n}}$$

ist unter H_0 t-verteilt mit $n-1$ Freiheitsgraden. Auf dem Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$ wird die Nullhypothese verworfen, falls $|T| > t_{n-1,1-\alpha/2}$, wobei $t_{n-1,1-\alpha/2}$ das $1 - \alpha/2$-Quantil der t-Verteilung mit $(n-1)$ Freiheitsgraden ist. Für die obigen Daten haben wir

$$|T(w)| = \left| \frac{143.33 - 146}{\sqrt{24.25}/3} \right| = 1.63 < t_{8,0.975} = 2.306.$$

Die Nullhypothese kann somit nicht verworfen werden.

b) Das Vertrauensintervall zum Niveau $1 - \alpha$ besteht aus allen Parameterwerten μ, bei denen der Test zum Niveau α nicht verwirft. Gesucht sind also alle Werte von μ so dass:

$$-t_{n-1,1-\alpha/2} \leq \frac{\overline{X}_n - \mu}{S_X/\sqrt{n}} \leq t_{n-1,1-\alpha/2}.$$

Also

$$C(X_1, \ldots, X_n) = \left[\overline{X}_n - t_{n-1,1-\alpha/2} \frac{S_X}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + t_{n-1,1-\alpha/2} \frac{S_X}{\sqrt{n}} \right],$$

und aus den Daten erhalten wir $C(x_1, \ldots, x_n) = [139.54, 147.12]$.

c) Ungepaarte Stichproben. Zur Messung eines neuen Zugs gehört nicht die Messung eines bestimmten alten Zugs.

d) Da die Stichproben ungepaart sind, muss man einen 2-Stichproben-t-Test durchführen. Die zwei Stichproben seien durch $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma^2)$ und $Y_1, \ldots, Y_n \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma^2)$ gegeben. Null- und Alternativhypothese lauten:

$$\begin{aligned} H_0: &\quad \mu_X = \mu_Y, \\ H_A: &\quad \mu_X \neq \mu_Y. \end{aligned}$$

Die Teststatistik

$$T = \frac{\overline{X}_n - \overline{Y}_n}{S_{pool}\sqrt{\frac{2}{n}}},$$

mit $S^2_{Pool} = \frac{1}{2n-2}\left((n-1)S_X^2 + (n-1)S_Y^2\right) = \frac{1}{2}(S_X^2 + S_Y^2)$, ist unter H_0 t-verteilt mit $2n-2$ Freiheitsgraden. Auf dem Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$ wird die Nullhypothese verworfen, falls $|T| > t_{2n-2,1-\alpha/2}$, wobei $t_{2n-2,1-\alpha/2}$ das $1-\alpha/2$-Quantil der t-Verteilung mit $2n-2$ Freiheitsgraden ist. In diesem Fall haben wir

$$|T(w)| = 0.57 < t_{16,0.975} = 2.12.$$

Die Nullhypothese kann somit nicht verworfen werden.

4. Modell: X_i= Gewicht von Brot i, $i = 1, \ldots, 7 = n$, unabhängig und normalverteilt $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

$$\Longrightarrow \sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1),$$

mit $\overline{x}_n = 989$.

a) $\sigma = 15$.
Für ein 90 %-Vertrauensintervall für μ muss gelten:

$$\begin{aligned} &P\Big[\Big|\sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma}\Big| \leq q_{0.95}\Big] = 0.90 \text{ mit } q_{0.95} = 1.645 \\ &\Longrightarrow \sqrt{n}\Big|\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma}\Big| \leq 1.645 \\ &\Longrightarrow \overline{X}_n - 1.645 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X}_n + 1.645 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Also erhalten wir das Konfidenzintervall: $[979.7; 998.3]$.

b) Ersetze σ durch $s_X = 17.01$. Dann

$$\sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - \mu}{S_X} \sim t_{n-1,0.95}, \text{ mit } n = 7.$$

Aus der Tabelle für die t-Verteilung lesen wir ab, dass $t_{n-1,0.95} = 1.943$. Daher finden wir das Konfidenzintervall

$$[\overline{X}_n - 1.943 \cdot \frac{S_X}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + 1.943 \cdot \frac{S_X}{\sqrt{n}}].$$

Mit den Daten erhalten wir $[976.5; 1001.5]$.