Übungsserie 11

1. In einer Gruppe verheirateter Männer (keiner von ihnen war jemals verwitwet) ist ein gewisser Anteil $0 < p < 1$ mindestens einmal geschieden. Mit Hilfe der folgenden Prozedur soll p geschätzt werden: Sei $x \in (0, 1)$ bekannt. Eine Urne enthält hundert Umschläge. $100x$ von ihnen enthalten die Frage: "Wurden Sie jemals geschieden?" Die anderen $100(1 - x)$ enthalten die Frage: "Ist Ihre momentane Ehe die erste?"
Beachten Sie, dass eine Person die zweite Frage notwendig mit "nein" beantworten muss, wenn sie die erste mit "ja" beantwortet. Wir nehmen an, dass jeder nur wahrheitsgemässe Antworten gibt.
N verheiratete Männer werden nun zufällig aus der Gruppe ausgewählt. Nacheinander wird jeder von ihnen gebeten, einen Umschlag aus der Urne zu nehmen, seinen Inhalt zu lesen und ihn dann wieder in die Urne zurückzulegen. Er muss dann die Frage, die er gelesen hat, laut mit "ja" oder "nein" beantworten. Also kennt nur er allein die Frage, die in dem Umschlag enthalten war. Es bezeichne Y die Anzahl derjenigen Männer, die mit "ja" geantwortet haben.

a) Bestimme die Verteilung von Y.

b) Bestimme den Momentenschätzer von p aus der Zufallsvariablen Y für den Fall, dass $x \neq 1/2$.

c) Berechne den Erwartungswert und die Varianz des Schätzers aus **b)**. Gibt es einen Wert von x, so dass die Varianz des Schätzers minimal ist?

Bemerkung: Diese Aufgabe beschreibt eine Stichprobenprozedur namens *randomized response*. Es handelt sich dabei um eine Technik, die nützlich ist, wenn es darum geht, Informationen über heikle Themen zu erhalten.

2. Unter P_ϑ seien $X_1, \ldots, X_n$ iid $\sim \mathcal{U}(0, \vartheta)$. Wir betrachten den Schätzer

$$T^{(n)} = \max(X_1, \ldots, X_n)$$

für ϑ.

a) Bestimme die Verteilungsfunktion von $T^{(n)}$ unter P_ϑ.

b) Ist die Folge von Schätzern $T^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, konsistent für ϑ?

Bitte wenden!