Analysis I - D-INFK

Miles Strässle

3. August 2020

1 Mengen

1.1 Definitionen

Obere/Untere Schranke:	$\exists b \in \mathbb{R}\ \forall a \in A:\ a \leq b$, $\exists c \in \mathbb{R}\ \forall a \in A:\ a \geq c$
Supremum:	kleinste obere Schranke $\sup A$
Infimum:	grösste untere Schranke $\inf A$
Maximum/Minimum:	$\sup A \in A$, $\inf A \in A$
kompakt:	abgeschlossen und beschränkt
abgeschlossen:	z.B. $[0, 1]$

1.1.1 Vorgehen zur Bestimmung von Maximum/Minimum

1. Zeigen, dass $f(x)$ stetig ist
2. Zeigen, dass Definitionsmenge kompakt ist
3. Nach **Satz von Weierstrass** wird Maximum/Minimum angenommen
4. Maximum/Minimum bestimmen

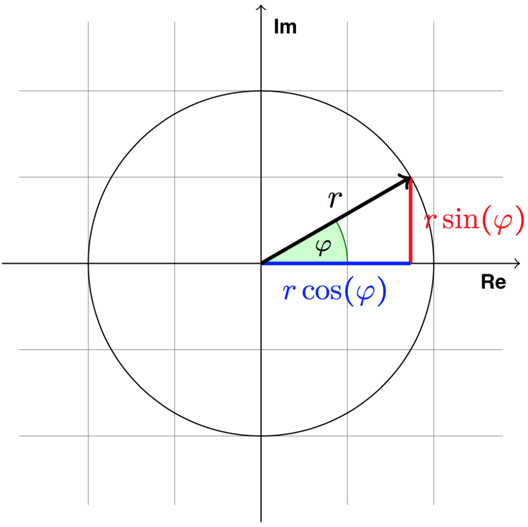
1.2 Identitäten

$$A + B := \{a + b | a \in A, b \in B\}$$

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B,\ \inf(A + B) = \inf A + \inf B$$

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\},\ \inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$$

2 Komplexe Zahlen



$$z = x + iy = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$$

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\arg(z) = \varphi = \arctan(\frac{y}{x}) \quad \text{(je nach Qua}$$

$$x = r\cos(\varphi)$$

$$y = r\sin(\varphi)$$

$$zw = (re^{i\varphi}) \cdot (se^{i\psi}) = rse^{i(\varphi+\psi)}$$

$$\sqrt[q]{z} = \sqrt[q]{s}e^{i\varphi}, \text{ wobei } \varphi = \frac{\varphi}{q} \mod \frac{2}{}$$

$$e^{i(\frac{\pi}{2}+2\pi k)} = i,\ e^{i\pi} = 1,\ e^{-i\pi} = -1$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

$$\overline{z} = x - iy$$

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

$$i = \sqrt{-1}$$

$$i^2 = -1$$

$$|z|^2 = z\overline{z}$$

$$|zw|^2 = (zw) \cdot \overline{(zw)} = |z|^2|w|^2$$

3 Grenzwert

3.1 Dominanz

$$\text{Für } x \to +\infty: \quad ... < \log(\log(x)) < \log(x) < x^\alpha < \alpha^x < x! < x^x$$

$$\text{Für } x \to 0: \quad ... < \log(\log(x)) < \log(x) < (\frac{1}{x})^\alpha$$

3.2 Fundamentallimes

$$\lim_{x\to a} \frac{\sin \odot}{\odot} = \lim_{x\to a} \frac{\tan \odot}{\odot} = 1 \text{ mit } \odot \xrightarrow{x\to a} 0$$

$$\lim_{x\to a} (1 + \frac{1}{\odot})^{\odot} = e \text{ mit } \odot \xrightarrow{x\to a} \infty$$

$$\lim_{x\to a} (1 + \odot)^{\frac{1}{\odot}} = e \text{ mit } \odot \xrightarrow{x\to a} 0$$

3.3 Wurzeltrick

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{\alpha} + \beta = \lim_{x\to\infty} (\sqrt{\alpha} + \beta)\frac{\sqrt{\alpha} - \beta}{\sqrt{\alpha} - \beta}$$

3.4 $e^{\log(x)}$-Trick

3.4.0.1 Anforderung:

Term der Form $f(x)^{g(x)}$ mit Grenzwert "0^0", "∞^0öder "1^∞für $x \to 0$

$$\textbf{Grundsatz:} \quad \lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{g(x)\cdot\log(f(x))}$$

Tipp: Danach den Limes des Exponenten berechnen. Oft ist Bernoulli-de l'Hôpital dazu nützlich.

3.5 Substitution

$$\lim_{x\to\infty} x^2(1 - \cos(\frac{1}{x})) \Rightarrow u = \frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(u)}{u^2}$$

3.6 Satz von Bernoulli-de l'Hôpital

3.6.0.1 Anforderung:

Term der Form $\frac{f(x)}{g(x)}$ mit Grenzwert entweder "$\frac{0}{0}$öder "$\frac{\infty}{\infty}$mit $g'(x) \neq 0$.

$$\textbf{Grundsatz:} \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Term	Anforderung	Umformung
$f(x)g(x)$	"$0 \cdot \infty$"	$\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$
$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{h(x)}{i(x)}$	"$\infty - \infty$"	$\frac{f(x)i(x)-h(x)g(x)}{g(x)i(x)}$

3.7 Wichtige Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0 \qquad \lim_{n\to 0}\frac{e^n-1}{n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!} = \infty \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\ln(n) = \infty \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$$

4 Folgen

4.1 Definition

Konvergenz: $\forall\varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N},$ sodass $\forall n\geq N: |a_n-a|<\varepsilon$

Divergenz: $\forall K>0\ \exists N=N(K)\in\mathbb{N},$ sodass $\forall n\geq N: |a_n|>K$

4.2 Beweis

1. Zeige mittels **Induktion**, dass die Folge **beschränkt** ist und monoton **steigt/fällt**. Benutze dazu z.B. folgende Aussagen: $a_n \leq a_{n+1}$ oder $a_{n+1}-a_n\geq 0$.
2. **Grenzwert berechnen** mit $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ oder durch die ersten paar Terme abschätzen
3. Beweise den Grenzwert (z.B. mit $a_n \geq a$) um Beschränktheit zu beweisen

Tipp: Den Grenzwert in der rekursiven Formel mit a_n und a_{n+1} ersetzen.
Für die Formel $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \sqrt{a_n}$ muss zum Beispiel gelten: $a = \frac{1}{2}a + \sqrt{a}$ (hier $a = 4$)

5 Reihen $\sum^\infty$

5.1 Konvergenzkriterien

	Eignung	**Bemerkung**
Limes des allgemeinen Glieds		zeigt nur Divergenz
Majoranten- und Minorantenkriterium		ersten Glieder spielen keine Rolle
Quotientenkriterium	a_n mit Faktoren wie $n!$, a^n, oder Polynome	gleiche Folgerung wie Wurzelkriterium
Wurzelkriterium	$a_n = (b_n)^n$	gleiche Folgerung wie Quotientenkriterium
Leibnitz-Kriterium	sin, cos, tan, $(-1)^n$	
Absolute Konvergenz	sin, cos, tan, $(-1)^n$	
Sandwich-Theorem	sin, cos, tan, $(-1)^n$	

Limes des allgemeinen Glieds

5.1.0.1 Bemerkung:

Mit dieser Methode lässt sich nur die Divergenz beweisen, nicht jedoch die Konvergenz.

1. $\sum_n a_n$ gegeben
2. Grenzwert $\lim_{n \mapsto \infty} a_n$ berechnen
   - falls Grenzwert $\neq 0 \Rightarrow$ **divergent**
   - falls Grenzwert $= 0 \Rightarrow$ keine Aussage

Majoranten- und Minorantenkriterium

Es seien a_n, $b_n > 0$ mit $a_n \geq b_n$ $\forall n$ ab einem gewissen n_0. Dann gilt:

$$\sum_n a_n \text{ konvergent} \Rightarrow \sum_n b_n \textbf{ konvergent} \quad \text{(Majorantenkriterium)}$$
$$\sum_n b_n \text{ divergent} \Rightarrow \sum_n a_n \textbf{ divergent} \quad \text{(Minorantenkriterium)}$$

Vergleichskriterium

1. $\sum_n a_n$ und $\sum_n b_n$ gegeben mit $a_n, b_n > 0$
2. Grenzwert $\lim_{n \mapsto \infty} \frac{a_n}{b_n}$ berechnen
   - falls Grenzwert $= 0$:
     - $\sum_n a_n$ divergent $\Rightarrow \sum_n b_n$ **divergent**
     - $\sum_n b_n$ konvergent $\Rightarrow \sum_n a_n$ **konvergent**
   - falls Grenzwert $= \infty$:
     - $\sum_n a_n$ konvergent $\Rightarrow \sum_n b_n$ **konvergent**
     - $\sum_n b_n$ divergent $\Rightarrow \sum_n a_n$ **divergent**

Quotientenkriterium

1. $\sum_n a_n$ mit $a_n \neq 0$ gegeben
2. Grenzwert $\lim_{n \mapsto \infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ berechnen
   - falls Grenzwert $> 1 \Rightarrow$ **divergent**
   - falls Grenzwert $< 1 \Rightarrow$ **konvergent**
   - falls Grenzwert $= 1 \Rightarrow$ keine Aussage

Wurzelkriterium

1. $\sum_n a_n$ mit $a_n \neq 0$ gegeben
2. Grenzwert $\lim_{n \mapsto \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ berechnen
   - falls Grenzwert $> 1 \Rightarrow$ **divergent**
   - falls Grenzwert $< 1 \Rightarrow$ **konvergent**
   - falls Grenzwert $= 1 \Rightarrow$ keine Aussage

Leibniz-Kriterium

1. $\sum_n (-1)^n a_n$ gegeben
2. **konvergent**, falls:
   (a) $a_n \geq 0$
   (b) $\lim_{n \mapsto \infty} a_n = 0$
   (c) a_n monoton fallend

Absolute Konvergenz

1. $\sum_n (-1)^n a_n$ gegeben
2. **konvergent**, falls $\sum_n |a_n|$ konvergent

5.2 Geometrische Reihe

Reihe der Form $\sum_{k=0}^{\infty} a \cdot r^k$ mit der **Partialsumme**:

$$S_N = \frac{a - ar^{N+1}}{1-r}$$

Konvergent, falls $0 < |r| < 1$ mit Grenzwert:

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r}$$

5.3 Potenzreihe

Reihe der Form $\sum_0^{\infty} a_n x^n$. **Konvergent**, falls $|x| < \rho$. In diesem Gebiet darf man die Reihe ableiten und integrieren.

$$\rho = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}|$$

$$\rho = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

5.3.0.1 Konvergenzverhalten am Rand:

Es muss noch überprüft werden, ob die Reihe für genau ρ konvergiert. Dazu muss ρ in die Formel eingesetzt werden.

5.3.1 Wichtige Reihen

$\cos(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$
$\sin(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
e^x	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
n^2	$\sum_{k=1}^{n} 2k-1$
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$	*harmonisch*

5.3.2 Potenzreihenentwicklung

$$\textbf{Grundsatz:} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$$

6 Stetigkeit

6.1 Lipschitz-Stetigkeit

Es existiert eine Konstante $L \in \mathbb{R}$, sodass:

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y| \quad \forall x, y \in \Omega$$

Bemerkung: Ist f' **auf Ω beschränkt**, so ist f Lipschitz-stetig. Lipschitz-Stetigkeit impliziert gleichmässige Stetigkeit.

6.2 Weierstrass-Kriterium

Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta(\varepsilon, a) > 0$, sodass für alle $|x-a| < \delta$ gilt:

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

6.3 Gleichmässige Stetigkeit

Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta(\varepsilon) > 0$, sodass für alle $|x - y| < \delta$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Bemerkung: Ist f **stetig und kompakt**, dann ist sie auch gleichmässig stetig.

6.4 Punktweise Konvergenz

$f_n(x)$ konvergiert punktweise falls:

$$\forall x \in \Omega \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

6.5 Gleichmässige Konvergenz

6.5.0.1 Grundsatz:

Falls eine Folge stetiger Funktionen f_n gleichmässig gegen f konvergiert, muss f stetig sein.

$f_n(x)$ konvergiert gleichmässig falls:

$$\lim_{n\to\infty} \sup |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Bemerkung: Gleichmässige Konvergenz impliziert punktweise Konvergenz.
Rezpet für gleichmässige Konvergenz

(i) Punktweiser Limes berechnen

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad = \text{Grenzfunktion}$$

(ii) Supremum bestimmen
(Ableitung von $f_n(x)$ oder Abschätzung benutzen)

$$\sup |f_n(x) - f(x)|$$

(iii) Limes $n \to \infty$ bestimmen (vgl. Kriterium glm. Konvergenz)

$$\lim_{n\to\infty} \sup |f_n(x) - f(x)|$$

Limes = 0 $\to$ Glm. konvergent mit Grenzfunktion f(x)

(iv) Indirekte Methode

- $f(x)$ unstetig auf $\Omega \Rightarrow$ keine glm. Konvergenz
- $f(x)$ stetig, $f_n(x) \le f_{n+1}(x) \forall x \in \Omega$ und Ω kompakt $\Rightarrow$ Glm. Konvergenz

gegeben: $f_n : [0,1] \mapsto \mathbb{R},\ f_n(x) = (1 - x^2)x^n$

punktweisen Limes berechnen: $\lim_{n\to\infty} (1 - x^2)x^n = 0 \equiv f(x)$

$\Rightarrow$ konvergiert gegen 0

Supremum berechnen: $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \sup_{x\in[0,1]}$

Maximum finden: $\frac{d}{dx} f_n(x) n x^{n-1}(1 - x^2) - 2x x^n = x^{n-1}(n - (n$

$\Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = \sqrt{\frac{n}{n+2}} \Rightarrow x_2$ ist Maximum

Limes berechnen: $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} f_n(x_2) = 0$

Folgerung: f_n konvergiert auf $[0,1]$ glm. gegen f

7 Differenzialrechnung

Eine stetige Funktion ist differenzierbar, falls der Grenzwert $f'(x_0)$ existiert:

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Tangente

Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in \Omega$ diffbar. Dann ist die Tangente im Punkt x_0

$$t(x; x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

7.1 Umkehrsatz

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

7.2 Mittelwertsatz

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

7.3 Taylorpolynom

Das Taylorpolynom m-ter Ordnung von $f(x)$ an der Stelle $x = a$

$$P_m^a(x) := f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2} f''(a)(x - a)^2 + ... + \frac{1}{m!} f^{(m)}(a)(x - a)^m$$

mit dem Fehlerterm $R_m^a(x)$, wobei ξ zwischen a und b liegt:

$$R_m^a(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m + 1)!}(x + a)^{m+1}, \text{ wobei } f(x) = P_m^a(x) + R_m^a(x)$$

7.4 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$f(x) = \int_l^{m(x)} g(t)dt$$

$$f'(x) = g(m(x)) \cdot \frac{d}{dx} m(x)$$

wobei $m(x)$ der Form ax^b ist mit $l \in \mathbb{R}$

Differenzial / Jaccobi-Matrix

$$df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & ... & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ ... & ... & ... \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & ... & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$\to$ enthält die n part. Ableit. aller m Komponenten von f

Taylorentwicklung mit mehreren Variabeln

$$\begin{aligned} f(x,y) = \quad & f(x_0, y_0) + \tfrac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \tfrac{\partial f}{\partial y} \Delta y \\ & + \tfrac{1}{2!} \left(\tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + 2 \tfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \tfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} (\Delta y)^2 \right) \\ & + \tfrac{1}{3!} \left(\tfrac{\partial^3 f}{\partial x^3} (\Delta x)^3 + 3 \tfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} (\Delta x)^2 \Delta y \right. \\ & \qquad \left. + 3 \tfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \Delta x (\Delta y)^2 + \tfrac{\partial^3 f}{\partial y^3} (\Delta y)^3 \right) \\ & + \cdots \end{aligned}$$

8 Integration

8.1 Elementare Integrale

$f'(x)$	$f(x)$	$F(x)$
$\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$	$\frac{f(x)}{g(x)}$	
0	c	cx
$r \cdot x^{r-1}$	x^r	$\frac{x^{r+1}}{r+1}$
$-\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\ln\|x\|$
$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$-\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$	$-\ln\|\cos(x)\|$
e^x	e^x	e^x
$c \cdot e^{cx}$	e^{cx}	$\frac{1}{c} \cdot e^{cx}$
$\ln(c) \cdot c^x$	c^x	$\frac{c^x}{\ln(c)}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\|$	$x(\ln\|x\| - 1)$
$\frac{1}{\ln(a)\cdot x}$	$\log_a \|x\|$	$\frac{x}{\ln(a)}(\ln\|x\| - 1)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$x \cdot \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$	$x \cdot \arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\cosh(x)$
$\sinh(x)$	$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\sinh(x)$
$\frac{1}{\cosh^2(x)}$	$\tanh(x)$	$\log(\cosh(x))$

8.2 Regeln

Direkter Integral $\int f(g(x))g'(x)\;dx = F(g(x))$

Partielle Integration $\int f' \cdot g\;dx = f \cdot g - \int f \cdot g'\;dx$

mit Polynomen $\int \frac{p(x)}{q(x)}\;dx \Rightarrow$ Partialbruchzerlegung

Substitution $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\;dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\;dx$ mit $x = \varphi(t)$

8.3 Tipps

$$\int \tan x\;dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\;dx = -\log|\cos(x)|$$

$$\int \frac{1}{x-\alpha}\;dx = \log(x-\alpha)$$

$$\int \frac{\frac{1}{\alpha}}{1+(\frac{x}{\alpha})^2}\;dx = \arctan(x)$$

$$\int \sin^2(x)\;dx = \frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x)) + C$$

$$\int \cos^2(x)\;dx = \frac{1}{2}(x + \sin(x)\cos(x)) + C$$

$$\int \sqrt{x^2+1}\;dx = \sinh(x) + C$$

8.4 Uneigentliche Integrale

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^R f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim_{R\to-\infty}\int_R^k f(x)\,dx + \lim_{R\to\infty}\int_k^R f(x)\,dx$$

Gibt es eine Unstetigkeitstelle c in dem Integrationsgebiet, so geht man wie folgt vor:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

8.5 Beweis bijektiver Funktionen

Zu beweisen sind folgende Eigenschaften:

injektiv:	Zeig, dass f **strickt monoton wächst oder fällt** und**stetig** ist
surjektiv:	Zeig, dass alle Werte im Bildbereich angenommen werden (vl. mit Zwischenwertsatz)

Daraus folgt dann, dass f bijektiv ist.

9 Differentialgleichungen

9.1 Grundbegriffe

Ordnung:	höchste vorkommende Ableitung
linear:	alle y-abhängigen Terme kommen linear vor (keine Terme wie zum Beispiel y^2, $(y'')^3$, $\sin(y)$, $e^{y'}$)
homogen:	Gleichung ohne Störfunktionen
Störfunktion:	Term, der rein von der Funktionsvariablen x abhängt

9.2 Methoden

	Problem	**Anforderungen**
Trennung der Variablen	$y' = \frac{dy}{dx} = h(x)\cdot g(y)$	1. Ordnung
Variation der Konstanten	$y' = \frac{dy}{dx} = h(x)y + b(x)$	1. Ordnung inhomogen
Euler-Ansatz	$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_0 y = 0$	n. Ordnung linear homogen
Direkter Ansatz	$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_0 y = b(x)$	n. Ordnung linear inhomogen

9.2.1 Trennung der Variable

$$y' + x\tan y = 0,\ y(0) = \frac{\pi}{2}$$

umformen $\quad \frac{dy}{dx} = -x\tan y$

konstante Lösungen $\quad y(x)\equiv 0$ erfüllt jedoch $y(0)\equiv\frac{\pi}{2}$ nicht

Trennung $\quad \frac{dy}{\tan y} = -xdx$

integrieren $\quad \int\frac{\cos y}{\sin y}dy = -\int xdx \Rightarrow \log|\sin y| = -\frac{x^2}{2} + C$

$$\Rightarrow |\sin y| = e^C e^{\frac{-x^2}{2}} \Rightarrow \sin y = \pm e^C e^{\frac{-x^2}{2}} = Ce^{\frac{-x^2}{2}}$$

Anfangsbedingung gebrauchen $\quad \sin(y(0)) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1 \Rightarrow C = 1$

Lösung $\quad y(x) = \arcsin(e^{\frac{-x^2}{2}})$

9.2.2 Variation der Konstanten

$$\textbf{Grundsatz:} \quad y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

$$\begin{aligned}
& y'(x+1) + y = x^3,\ y(0) = \sqrt{5} \\
\text{Trennung} \quad & \frac{y'}{y} = \frac{-1}{x+1} \\
\textbf{konstante Lösungen} \quad & y(x) \equiv 0 \text{ erfüllt jedoch } y(0) \equiv \sqrt{5} \text{ nicht} \\
\text{integrieren} \quad & \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x+1} \\
& \Rightarrow \ln|y| = -\ln|x+1| + C \\
\textbf{Homogene Lösung} \quad & y_h(x) = \frac{C}{x+1},\ \text{mit } C = \pm e^C \in \mathbb{R}\backslash 0 \\
\text{partikulärer Ansatz} \quad & y_p(x) = \frac{C(x)}{x+1} \\
\text{einsetzen} \quad & \left(\frac{C'(x)}{x+1} - \frac{C(x)}{(x+1)^2}\right)(x+1) + \frac{C(x)}{x+1} = x^3 \\
& C'(x) = x^3 \\
& C(x) = \frac{x^4}{4} \\
\textbf{partkuläre Lösung} \quad & y_p(x) = \frac{x^4}{4(x+1)} \\
\text{allgemeine Lösung} \quad & y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \frac{C}{x+1} + \frac{x^4}{4(x+1)} \\
\text{Anfangsbedingung benutzen} \quad & y(0) = \sqrt{5} \Rightarrow C = \sqrt{5} \\
\textbf{Lösung} \quad & y(x) = \frac{\sqrt{5}}{x+1} + \frac{x^4}{4(x+1)}
\end{aligned}$$

9.2.3 Euler-Ansatz

$$\begin{aligned}
& y'' - 2y' - 8y = 0,\ y(1) = 1, y'(1) = 0 \\
\text{Euler-Ansatz} \quad & y(x) = e^{\lambda x} \\
\text{einsetzen} \quad & \lambda^2 e^{\lambda x} - 2\lambda e^{\lambda x} - 8e^{\lambda x} = 0 \\
\textbf{charakt. Polynom} \quad & \lambda^2 - 2\lambda - 8 = (\lambda - 4)(\lambda + 2) = 0 \\
\text{Nullstellen} \quad & 4, -2 \\
\textbf{allgemeine Lösung} \quad & y(x) = Ae^{4x} + Be^{-2x} \\
\text{Anfangsbedingung gebrauchen} \quad & y(1) = Ae^4 + Be^{-2} = 1, \\
& y'(1) = 4Ae^4 - 2Be^{-2} = 0 \\
& \Rightarrow A = \frac{1}{3}e^{-4}, B = \frac{2}{3}e^2 \\
\textbf{Lösung} \quad & y(x) = \frac{1}{3}e^{4x-4} + \frac{2}{3}e^{2-2x}
\end{aligned}$$

Bemerkung: Zu einer m-fachen Nullstelle λ gehören die m linear unabhängigen Lösungen $e^{\lambda x}$, $x \cdot e^{\lambda x}$, ... , $x^{m-1} \cdot e^{\lambda x}$. Zur m-fachen Nullstelle $\lambda = 0$ gehören die Lösungen 1, x, ... , x^{m-1}.

Komplexe Nullstellen:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ein komplexes Nullstellenpaar der Form $\alpha \pm \beta i$ liefert folgende homogene Lösung:

$$y(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x))$$

9.2.4 Direkter Ansatz

Grundsatz: $y(x) = y_{\text{homo}}(x) + y_p(x)$

Inhomogener Term $b(x)$	**Ansatz für** $y_p(x)$	**zu bestimmen**
Polynom	$Ax^2 + Bx + C$	A, B, C
ce^{kx}	Ae^{kx}	A
$c\sin(kx)$ oder $c\cos(kx)$	$A\sin(kx) + B\cos(kx)$	A, B

Bemerkung: Kommt der gewählte Ansatz schon in der homogenen Lösung vor, so multipliziert man den Ansatz einfach mit x.

$$y'' - y' + \frac{1}{4}y = \cos(x)$$

homogener Ansatz $\quad y'' + y' + \frac{1}{4}y = 0$

Euler-Ansatz anwenden $\quad \lambda^2 + \lambda + \frac{1}{4} = (\lambda + \frac{1}{2})^2 = 0$

homogene Lösung $\quad \Rightarrow y_{\text{homo}}(x) = Ae^{-\frac{x}{2}} + Bx \cdot e^{-\frac{x}{2}}$

partikulärer Ansatz wählen $\quad y_p(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$

$$\Rightarrow y_p'(x) = -a\sin(x) + b\cos(x),\ y_p''(x) = = -a\cos(x) - b\sin(x)$$

Einsetzen $\quad (-a + b + \frac{a}{4})\cos(x) + (-b - a + \frac{1}{4}b)\sin(x) = \cos(x)$

Koeffizientenvergleich $\quad -\frac{3}{4}a + b = 1,\ -a - \frac{3}{4}b = 0$

partikuläre Lösung $\quad y_p(x) = -\frac{12}{25}\cos(x) + \frac{16}{25}\sin(x)$

Lösung $\quad y(x) = Ae^{-\frac{x}{2}} + Bx \cdot e^{-\frac{x}{2}} - \frac{12}{25}\cos(x) + \frac{16}{25}\sin(x)$