Trigonometrie, Euler & sonstiges

Miles Strässle, smiles@student.ethz.ch

23. Dezember 2019

Inhaltsverzeichnis

Quellen: Wo die Quellen nicht angegeben sind, stammen die Daten von wikipedia.org

1 Definitionen & Sätze

1.1 Definitionen

$$sin(x) := \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp ...$$

$$cos(x) := \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp ...$$

$$exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{x^n}{n})^n$$

1.1.1 Definition Taylorreihe

Eine Funktion $f(x)$ wird an einer Stelle x_0 angenähert durch $Tf(x;x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0)$

1.1.2 Definitionen csc(x), sec(x), cot(x)

$$csc(x) := \frac{1}{sin(x)}$$

$$sec(x) := \frac{1}{cos(x)}$$

$$cot(x) := \frac{1}{tan(x)} = \frac{cos(x)}{sin(x)}$$

1.2 Sinusssatz

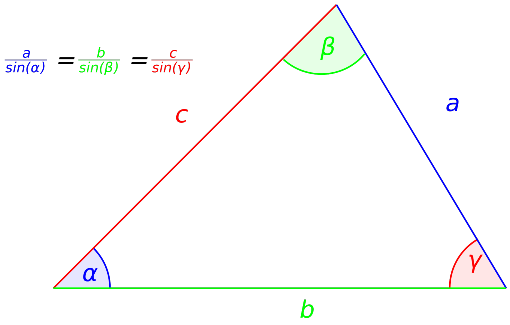


Abbildung 1: Quelle: https://de.wikipedia.org/

1.3 Cosinusssatz

$a^2 + b^2 - 2ab * cos(\gamma) = c^2$

2 Standardintegrale

$\frac{d}{dx} arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\frac{d}{dx} arccos(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\frac{d}{dx} arctan(x) = \frac{1}{x^2+1}$

$\frac{d}{dx} arsinh(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$\frac{d}{dx} arcosh(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$,wenn $x > 1$

$\frac{d}{dx} artanh(x) = \frac{1}{1-x^2}$,wenn $|x| < 1$

3 Euler Formel

$exp(i\phi) = cos(\phi) + isin(\phi)$
$exp(-i\phi) = cos(-\phi) + isin(-\phi) \Longleftrightarrow exp(-i\phi) = cos(\phi) - isin(\phi)$

Daraus kann nun sin, sinh, cos und cosh in Termen von exp(x) ausgedrückt werden.

$\frac{exp(i\phi) + exp(-i\phi)}{2} = cos(\phi)$
$\frac{exp(i\phi) - exp(-i\phi)}{2i} = sin(\phi)$

Ignoriere alle i, dann folgt...

$\frac{exp(\phi) + exp(-\phi)}{2} = cosh(\phi)$
$\frac{exp(\phi) - exp(-\phi)}{2} = sinh(\phi)$

4 Ableitungen, Integrale

4.1 Ableitungen

$\frac{d}{dx} sin(x) = cos(x)$

$\frac{d}{dx} cos(x) = -sin(x)$

$\frac{d}{dx} tan(x) = \frac{d}{dx} \frac{sin(x)}{cos(x)} = \frac{cos(x)cos(x) - sin(x)sin(x)}{cos^2(x)} = 1 - \frac{sin^2(x)}{cos^2(x)} = 1 - tan^2(x) = \frac{1}{cos2(x)}$

$\frac{d}{dx} \frac{1}{sin(x)} = \frac{0 * sin(x) - 1 * cos(x)}{sin^2(x)} = \frac{-cos(x)}{sin^2(x)}$

$\frac{d}{dx} \frac{1}{cos(x)} = \frac{0 * cos(x) - 1 * (-sin(x))}{cos^2(x)} = \frac{sin(x)}{cos^2(x)}$

$\frac{d}{dx} sin^2(x) = sin(x) * cos(x) + cos(x) * sin(x) = 2 * sin(x) * cos(x)$

$\frac{d}{dx} cos^2(x) = cos(x) * (-sin)(x) + (-sin(x)) * cos(x) = -2 * sin(x) * cos(x)$

4.2 Integrale

ON WORK

5 Rechenregeln

5.1 Additionstheoreme

$sin^2(x) + cos^2(x) = 1$

$sin(x \pm y) = sin(x)cos(y) \pm cos(x)sin(y) \quad (\#umgekehrteAbleitungsregel)$

$cos(x \pm y) = cos(x)cos(y) \mp sin(x)sin(y)$

$tan(x \pm y) = \dfrac{tan(x) \pm tan(y)}{1 \mp tan(x)\ tan(y)} = \dfrac{sin(x \pm y)}{cos(x \pm y)}$

5.2 Doppelwinkel

$sin(2x) = 2sin(x)cos(x) = \dfrac{2tan(x)}{1 + tan^2(x)}$

$cos(2x) = cos^2(x) - sin^2(x) = 1 - 2sin^2(x) = 2cos^2(x) - 1 = \dfrac{1 - tan^2(x)}{1 + tan^2(x)}$

$tan(2x) = \dfrac{2tan(x)}{1 - tan^2(x)} = \dfrac{2}{cot(x) - tan(x)}$

$cot(2x) = \dfrac{cot^2(x) - 1}{2cot(x)} = \dfrac{cot(x) - tan(x)}{2}$

Beweis mit Additionstheorem

5.3 Produkt-zu-Summen-Formel

$sin(x) * sin(y) = \dfrac{1}{2}(cos(x - y) - cos(x + y))$

$cos(x) * cos(y) = \dfrac{1}{2}(cos(x - y) + cos(x + y))$

$sin(x) * cos(y) = \dfrac{1}{2}(sin(x - y) + sin(x + y))$

6 Hyperbolische Funktionen

$sinh(z) := \dfrac{e^z - e^{-z}}{2} = z + \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} + \dfrac{z^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$cosh(z) := \dfrac{e^z + e^{-z}}{2} = 1 + \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^4}{4!} + \dfrac{z^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^{2n}}{(2n)!}$

6.1 Rechenregeln

6.1.1 Additionstheoreme

$sinh(z_1 \pm z_2) = sinh(z_1) \cdot cosh(z_2) \pm sinh(z_2) \cdot cosh(z_1)$

$cosh(z_1 \pm z_2) = cosh(z_1) \cdot cosh(z_2) \pm sinh(z_1) \cdot sinh(z_2)$

$tanh(z_1 \pm z_2) = \dfrac{tanh(z_1) \pm tanh(z_2)}{1 \pm tanh(z_1) \cdot tanh(z_2)}$

6.1.2 Zusammenhänge

$cosh^2(z) - sinh^2(z) = 1$

$cosh(z) + sinh(z) = e^z$

$cosh(z) - sinh(z) = e^{-z}$

6.2 Ableitungen

$\dfrac{d}{dz} sinh(z) = cosh(z)$

$\dfrac{d}{dz} cosh(z) = sinh(z)$

$\dfrac{d}{dz} tanh(z) = 1 - tanh^2(z) = \dfrac{1}{cosh^2(x)}$

7 Koordinatensysteme mit Funktionaldeterminante

7.1 Polarkoordinaten

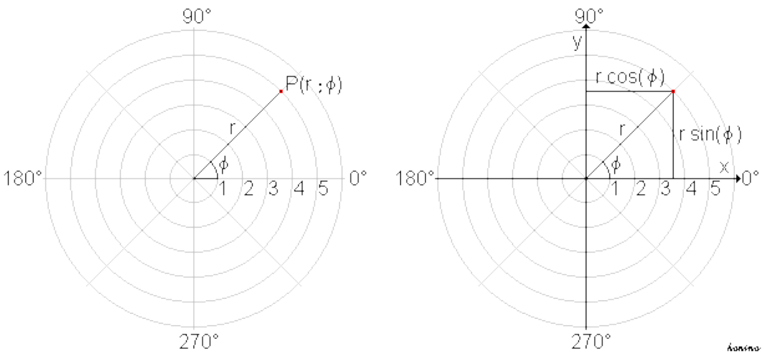


Abbildung 2: Quelle: https://de.wikipedia.org/

Umrechnung erfolgt durch:
$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$

Aus den Umrechnungsformeln von Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten erhält man für die Funktionaldeterminante als Determinante der Jacobi-Matrix:

$$\det J = \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r$$

7.2 Zylinderkoordinaten

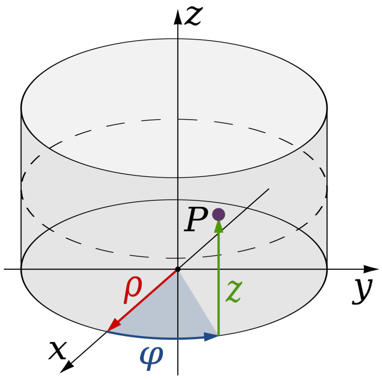


Abbildung 3: Quelle: https://de.wikipedia.org/

Umrechnung erfolgt durch:
$x = \rho\ \cos\varphi$
$y = \rho\ \sin\varphi$
$z = z$

Mit Funktionaldeterminante: $\det \dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,z)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho$

7.3 Kugelkoordinaten

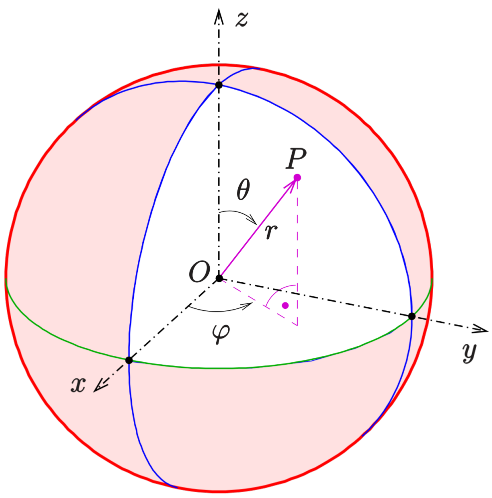


Abbildung 4: Quelle: https://de.wikipedia.org/

Umrechnung erfolgt durch:
$x = r \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi$
$y = r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi$
$z = r \cdot \cos\theta$

Jacobi-Matrix:

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

mit Funktionaldeterminante: $\det J = r^2 \sin\theta$

8 Rotationsmatrix, Drehmatrix

8.1 Drehmatrix der Ebene

Jede Rotation um den Ursprung ist eine lineare Abbildung. Wie bei jeder linearen Abbildung genügt daher zur Festlegung der Gesamtabbildung die Festlegung der Bilder der Elemente einer beliebigen Basis. Wird die Standardbasis gewählt, sind die Bilder der Basisvektoren gerade die Spalten der dazugehörigen Abbildungsmatrix.

Wir haben unter R_α

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$

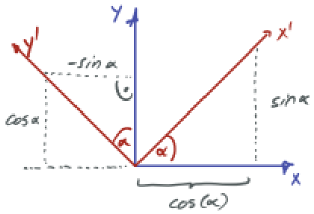
Die Drehmatrix für eine Drehung um α ist also:
$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

8.1.1 Herleitung

Herleitung Drehmatrix

Gesucht: Matrix welche Vektoren, Basen um Winkel α dreht.



$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{l} \cos(\alpha) = \frac{x}{1} \\ \sin(\alpha) = \frac{y}{1} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{l} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{array}$$

$\longrightarrow$ $(-)$ kommt von $\sin\alpha = \frac{G}{H}$ mit $sgn(G) = -x \cdot c$ und $H = r = 1$ (Einheitskreis)

Daraus ergibt sich Drehmatrix R_α.

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Spalten entspr. neuer Basisvektoren

Die Menge aller Drehmatrizen eines Raumes bildet eine Drehgruppe, die "special orthogonal group":

$$SO(n) = \{ \text{lin. Abb. } R: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \mid R^T R = I_n,\ \det R = 1 \}$$

Abbildung 5: Quelle: Miles Strässle, 20.11.2019

8.2 Drehmatrix in 3-Dimensionen

In der Physik werden häufig Drehungen des Koordinatensystems benutzt, dann müssen bei den untenstehenden Matrizen die Vorzeichen aller Sinus-Einträge vertauscht werden. Die Drehung eines Vektors um einen bestimmten Winkel in einem Koordinatensystem ist äquivalent zur Drehung des Koordinatensystems um den gleichen Winkel in umgekehrter Richtung (Drehung um negativen Winkel). „Der Drehsinn ergibt sich, wenn man entgegen der positiven Drehachse auf den Ursprung sieht.“

8.2.1 Drehung um die x-Achse:

$$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

8.2.2 Drehung um die y-Achse:

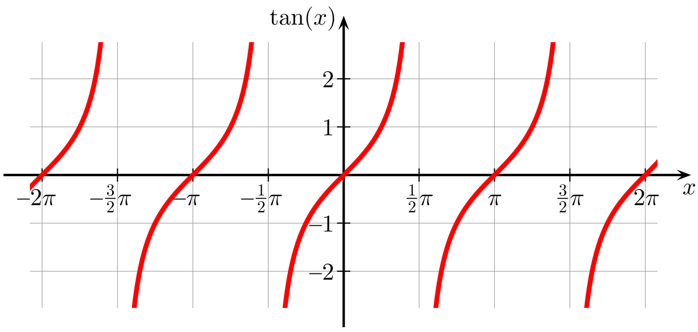
$$R_y(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

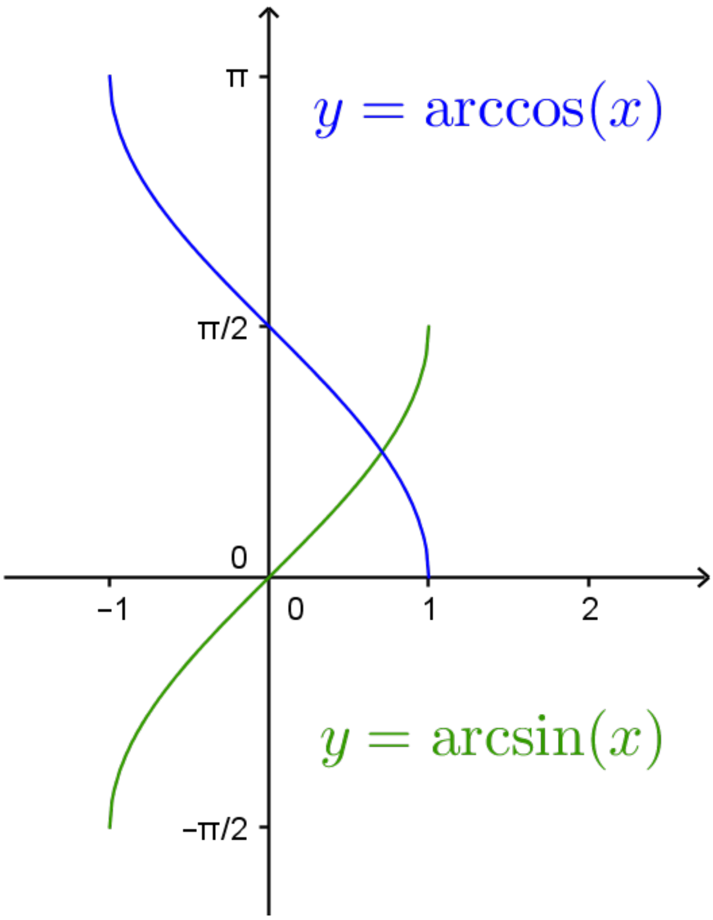
8.2.3 Drehung um die z-Achse:

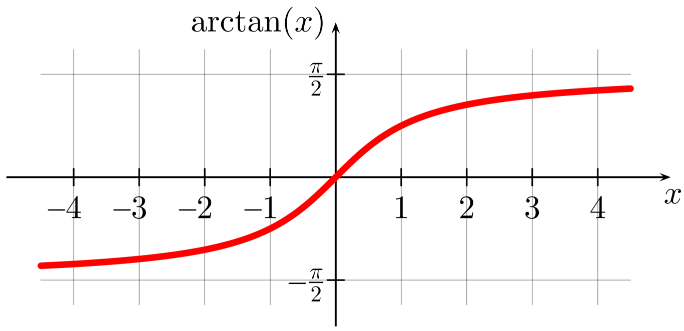
$$R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

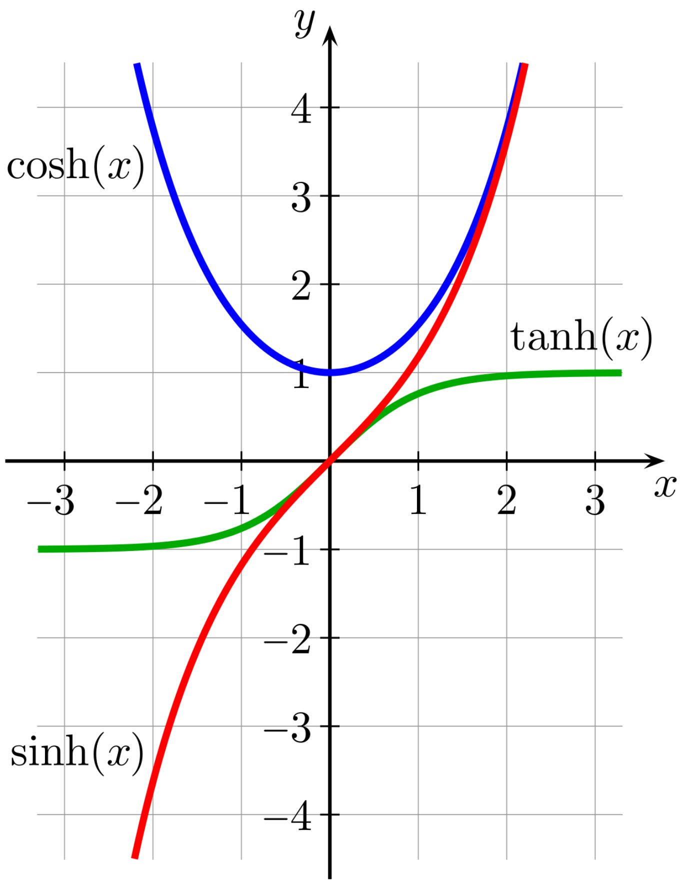
9 Plots Trigonometrischer Funktionen

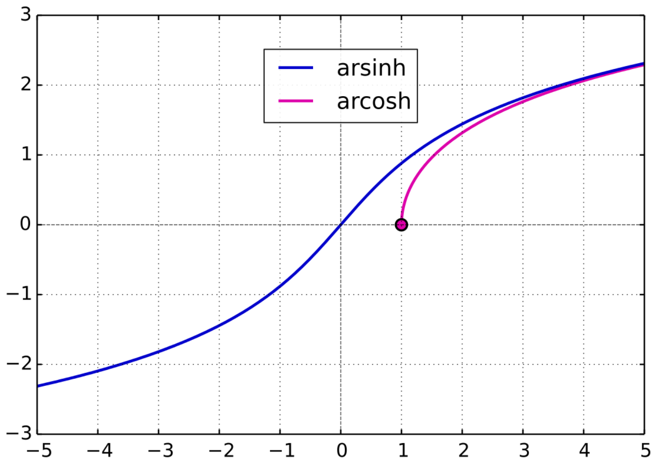
Alle Plots in diesem Kapitel von www.wikipedia.org!








y
x
cosh(x)
tanh(x)
sinh(x)
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−3
−2
−1
1
2
3


arsinh
arcosh
3
2
1
0
−1
−2
−3
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5

10 Nützliches

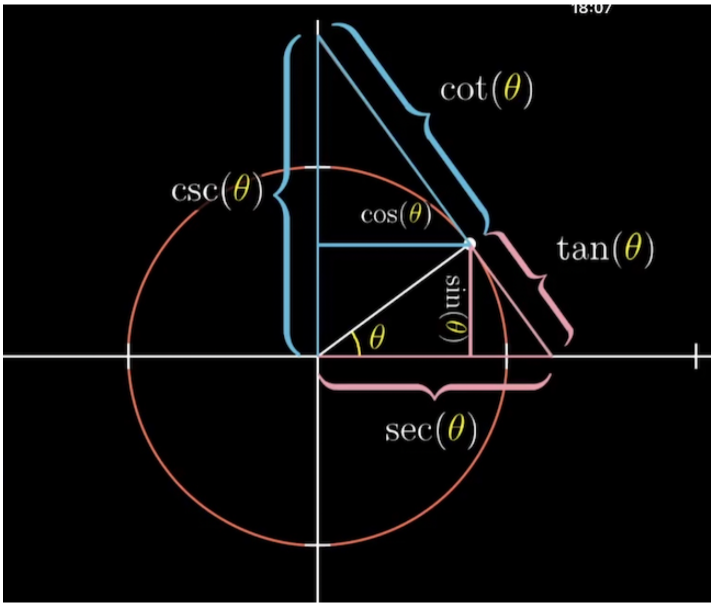


Abbildung 6: Quelle: youtube, 3blue1brown

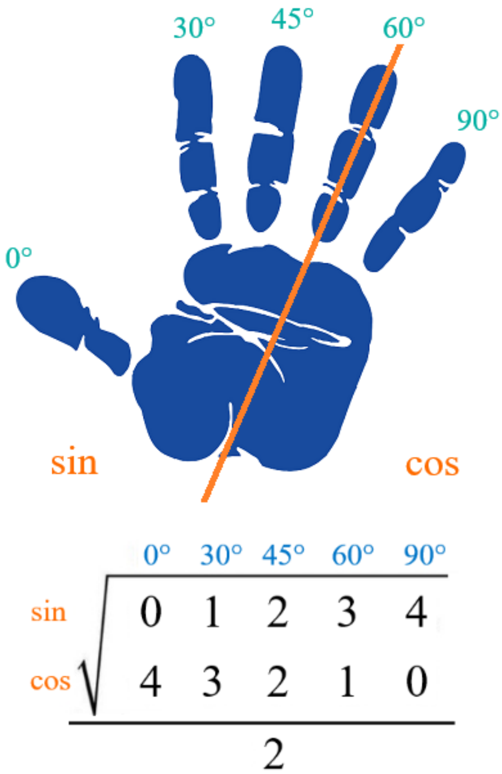


Abbildung 7: Quelle: https://www.pinterest.com/pin/68735321805/