Analysis I - D-INFK

Miles Strässle

3. August 2020

1 Zwischenwertsatz

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige reele Funktion, die auf einem Intervall definiert ist. Dann existiert zu jedem $u \in [f(a), f(b)]$ (falls $f(a) \leq f(b)$, sonst $u \in [f(b), f(a)]$) ein $c \in [a, b]$, sodass gilt: $f(c) = u$.

1.1 Beispiel (Fixpunkt)

Sei $f : [0, 1] \to [0, 1]$. Zeige: f hat einen Fixpunkt, d.h. es gibt ein $x \in [0, 1]$ derart, dass $f(x) = x$.

Man erzeugt die Funktion $g : [0, 1] \to \mathbb{R}, g(x) := f(x) - x$. Es gilt: $f(x) = x \Leftrightarrow g(x) = 0$, d.h. ein Punkt x ist genau dann ein Fixpunkt von f wenn er eine Nullstelle von g ist. Es ist zu zeigen, dass g immer eine Nullstelle auf $[0, 1]$ hat. Als Differenz von zwei stetigen Funktionen ist g stetig. Weil ausserdem $f(x) \in [0, 1]\ \forall x \in [0, 1]$ gilt, ist $g(0) \geq 0 \geq g(1)$. Da g stetig ist, gibt es daher nach dem Zwischenwertsatz ein $x \in [0, 1]$ mit $g(x) = 0$ und somit gibt es $f(x) = x$.

Teil I

Zusammenfassung

2 Folgen

2.1 Definitionen

konvergent $\lim_{x\to\infty} a_n$ existiert
divergent $\lim_{x\to\infty} a_n$ existiert nicht
Nullfolge $\lim_{x\to\infty} a_n = 0$ gilt
beschränkt Es gibt C_1, C_2, so dass gilt $C_1 \leq a_n \leq C_2$ bzw. C gibt, so dass $|a_n| \leq C$
unbeschränkt falls (a_n) nicht beschränkt ist. Unbeschränkte folgen sind stets divergent
monoton wachsend $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
streng monoton wachsend $a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
monoton fallend $a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
streng monoton fallend $a_n > a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
alternierend die Vorzeichen der Folgenglieder wechseln sich ab
bestimmt divergent / uneigentlich konvergent es gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$

Def. 2.1 (Grenzwert)**.**

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow a_n \to a$$
$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$$

Def. 2.2 (Teilfolge)**.** Werden von einer Folge beliebig viele Glieder weggelassen, aber nur so viele, dass noch unendlich viele übrigbleiben, so erhält man eine Teilfolge.

Def. 2.3 (Häufungspunkt)**.** a ist Häufungspunkt der Folge (a_n), wenn in jeder Umgebung von a unendlich viele Folgeglieder liegen. Das ist äquivalent damit, dass a der Limes einer Teilfolge von (a_n) ist.

Def. 2.4 (Limes superior / Limes inferior)**.** Ist (a_n) eine beschränkte Folge, so heisst der grösste Häufungspunkt Limes superior ($\limsup_{n\to\infty} a_n$ oder $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$). Der kleinste Häufungspunkt ist der Limes inferior ($\liminf_{n\to\infty} a_n$ oder $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$)

2.2 Rechnen mit Eigenschaften

Addition:

- $(a_n), (b_n)$ konvergiert $\Rightarrow (a_n + b_n)$ konvergiert
- (a_n) konvergiert, (b_n) divergent $\Rightarrow (a_n + b_n)$ divergent
- (a_n) beschränkt, (b_n) beschränkt $\Rightarrow (a_n + b_n)$ beschränkt
- (a_n) beschränkt, (b_n) unbeschränkt $\Rightarrow (a_n + b_n)$ unbeschränkt
- (a_n) beschränkt, $(b_n) \to \pm\infty \Rightarrow (a_n + b_n) \to \pm\infty$
- $(a_n) \to \infty$, $(b_n) \to \infty \Rightarrow (a_n + b_n) \to \infty$
- $(a_n) \to -\infty$, $(b_n) \to -\infty \Rightarrow (a_n + b_n) \to -\infty$

Produkt:

- (a_n) Nullfolge, (b_n) beschränkt $\Rightarrow (a_n b_n)$ Nullfolge
- (a_n) konvergent, (b_n) beschränkt $\Rightarrow (a_n b_n)$ beschränkt
- (a_n) konvergent, (b_n) konvergent $\Rightarrow (a_n b_n)$ konvergent
- (a_n) konvergent gegen $a \neq 0$, (b_n) divergent $\Rightarrow (a_n b_n)$ divergent

2.3 Rechnen mit Grenzwerten

$\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$
Achtung! Untenstehendes gilt nur wenn die Grenzwerte von a_n und b_n existieren. (Nicht 0 oder inf sind.)

- $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$
- $\lim_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot a$
- $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$
- Achtung: $\lim_{n\to\infty}(a_n)^c = (\lim_{n\to\infty} a_n)^c$, nur wenn $c \neq n$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, (b_n) keine Nullfolge

2.4 Hilfsmittel

Bernoullische Ungleichung: Für $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}$

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

Vergleich von Folgen: weiter rechts stehende Werte gehen schneller nach ∞

$$1, \quad \ln n, \quad n^\alpha\ (\alpha > 0), \quad q^n\ (q > 1), \quad n!, \quad n^n$$

Stirlingformel:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \Rightarrow \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \leq n! \leq \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \cdot e^{\frac{12}{n}}$$

2.5 Konvergenzkriterien

$$a_n \to a \Leftrightarrow a_n - a \to 0 \Leftrightarrow |a_n - a| \to 0$$

- Ist $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, so ist der Limes a einziger Häufungspunkt der Folge (a_n) und jede Teilfolge konvergiert auch gegen a.
  Beispiel: Wegen $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e$, so gilt auch $\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} \to e$

- Hat die Folge zwei verschiedene Häufungspunkte, so ist die Folge sicher divergent.
- Ist die Folge monoton steigend und nach oben beschränkt, dann existiert $\lim_{n\to\infty} a$
  Ist die Folge monoton fallend und nach unten beschränkt, dann existiert $\lim_{n\to\infty} a$
- Konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, so ist $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
  Damit kann die Regeln für Reihen verwenden. Siehe Grenzwerte von Reihen.
- Gibt es eine Funktion f mit $f(n) = a_n$ und $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$, so gilt auch $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.
  Damit kann man zum Beispiel die Regel von l'Hospital und die restlichen Methoden anwenden. Siehe Grenzwerte von Funktionen.
  Achtung: Es kann sein, dass f keinen Grenzwert besitzt, aber (a_n) schon.
- **Einschliessungskriterium**: Sind $(a_n), (b_n), (c_n)$ Folgen mit $a_n \leq b_n \leq c_n$ und haben $(a_n), (c_n)$ den gleichen Grenzwert a, so konvergiert auch (b_n) nach a.

2.6 Tipps & Beispiele

2.6.1 Brüche

$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+\ln n}{\sqrt{n^4-n^3}}$

Bei Brüchen empfiehlt es sich den am stärksten wachsenden Teil (das am schnellsten wachsende n) zu kürzen. In diesem Fall ist es das n^4 in der Wurzel, also n^2.

$$\begin{aligned}
\ldots &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+\ln n}{\sqrt{n^4-n^3}} \cdot \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+\ln n}{n^2\sqrt{1-\frac{1}{n}}} \cdot \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{\ln n}{n^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1+0}{\sqrt{1-0}} = 0
\end{aligned}$$

2.6.2 l'Hospital für Folgen (Folge als Funktion)

$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^2}$

Die Funktion $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ entspricht unseren Folgegliedern ($f(n) = a_n = \frac{\ln n}{n^2}$). Für $n \to \infty$ hat der Nenner und der Zähler den Grenzwert ∞, also wenden wir die Regel von l'Hospital an.

$$\ldots = \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Somit geht auch die Folge gegen 0.

2.6.3 Wurzeln

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+an+1} - \sqrt{n^2+1})$

Hier wendet man die dritte binomische Formel an, um den grenzwert zu berechnen. Die einzelnen Terme streben jeweils gegen ∞ und $\infty - \infty$ kann nicht berechnet werden.

Achtung auf die Vorzeichen beim Anwenden der Regel!

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+an+1} - \sqrt{n^2+1}) \cdot \left(\frac{\sqrt{n^2+an+1} + \sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+an+1} + \sqrt{n^2+1}}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+an+1) - (n^2+1)}{\sqrt{n^2+an+1} + \sqrt{n^2+1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{an}{\sqrt{n^2+an+1} + \sqrt{n^2+1}}
\end{aligned}$$

nun verwenden wir den Tipp für Brüche und kürzen das n heraus

$$\ldots = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{\sqrt{1+\frac{a}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \frac{a}{1+1} = \frac{a}{2}$$

2.7 Cauchy-Folgen

Def. 2.5 (Cauchy-Folge)**.** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heisst **Cauchy-Folge**, falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_n = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n, l \geq n_0 : |a_n - a_l| < \varepsilon$$

Die Definition sagt grundsätzlich aus, dass ab einem $n_0(\varepsilon)$ (also einem Anfang n_0, der abhängig von ε ist) die Folgeglieder nur noch ε Abstand zu einander haben. Also der Abstand beliebig klein wird zwischen Folgegliedern.

Satz 2.1 (Cauchy-Kriterium)**.** Für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ sind äquivalent:

- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent
- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge

3 Reihen

3.1 Definitionen

Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent mit Grenzwert s, wenn die Folge der Partialsumm (S_m), $S_m := \sum_{n=1}^{m} a_n$ gegen s konvergiert. Also wenn gilt: $S_m \to s$.

Def. 3.1 (ε-Kriterium)**.** $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m \geq n_0 : |\sum_{n=1}^{m} a_n - s| < \varepsilon$

Def. 3.2 (Absolute Konvergenz)**.** Wenn auch die Reihe der Absolutbeträge $\sum_{n=1}^{\infty} |$ konvergiert, so heisst die Reihe absolut konvergent. Aus der absoluten Konvergenz folgt Konvergenz. Der Umkehrschluss ist nicht möglich.

3.2 Rechenregeln Reihen

Für konvergente Reihen gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha A + \beta B$$

3.3 Konvergenzkriterien

Konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, so ist $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
Wenn also $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, so konvergiert die Reihe nicht

	Eignung	**Bemerkung**
Limes des allgemeinen Glieds		zeigt nur Divergenz
Majoranten- und Minorantenkriterium		ersten Glieder spielen keine Rolle
Quotientenkriterium	a_n mit Faktoren wie $n!$, a^n, oder Polynome	gleiche Folgerung wie Wurzelkriterium
Wurzelkriterium	$a_n = (b_n)^n$	gleiche Folgerung wie Quotientenkriterium
Leibnitz-Kriterium	sin, cos, tan, $(-1)^n$	
Absolute Konvergenz	sin, cos, tan, $(-1)^n$	
Sandwich-Theorem	sin, cos, tan, $(-1)^n$	

3.3.1 Reihen Kriterien

Achtung. Die nachfolgenden Kriterien sagen nur aus, ob die Reihen konvergiert oder nicht. Sie sagen nicht aus, gegen was sie konvergieren!

3.3.1.1 Quotientenkriterium

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to q. \quad \text{Dann gilt} \begin{cases} q < 1 & \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut} \\ q = 1 & \Rightarrow \text{keine Aussage} \\ q > 1 & \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergiert} \end{cases}$$

3.3.1.2 Wurzelkriterium

$$\sqrt[n]{|a_n|} \to q. \quad \text{Dann gilt} \begin{cases} q < 1 & \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut} \\ q = 1 & \Rightarrow \text{keine Aussage} \\ q > 1 & \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergiert} \end{cases}$$

3.3.1.3 Leibnizkriterium

Wenn gilt:

- (a_n) ist alternierende Folge, d.h die Vorzeichen wechseln jedes Mal
- $a_n \to 0$ oder $|a_n| \to 0$
- $(|a_n|)$ ist monoton fallend

…dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

3.3.1.4 Majorantenkriterium

Ist $|a_n| \leq b_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent, so konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.

3.3.1.5 Minorantenkriterium

Ist $a_n \geq b_n \geq 0$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent, so divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

3.4 Potenzreihe

Die Potenzreihe hat die allgemeine Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

x_0 ist der Entwicklungspunkt der Potenzreihe und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge.

3.4.1 Konvergenzradius

Die Berechnung des Konvergenzradius ist für solche Reihen einfacher, da der Faktor $(x - x_0)$ nicht analysiert werden muss. Entsprechend gilt für den Konvergenzradius r: $r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a_n\|}}$ (Wurzelkriterium) bzw. $r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ (Quotientenkriterium).

4 Stetigkeit

4.1 Lipschitz-Stetigkeit

Es existiert eine Konstante $L \in \mathbb{R}$, sodass:

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in \Omega$$

Bemerkung: Ist f' **auf Ω beschränkt**, so ist f Lipschitz-stetig. Lipschitz-Stetigkeit impliziert gleichmässige Stetigkeit.

4.2 Weierstrass-Kriterium

Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta(\varepsilon, a) > 0$, sodass für alle $|x - a| < \delta$ gilt:

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

4.3 Gleichmässige Stetigkeit

Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta(\varepsilon) > 0$, sodass für alle $|x - y| < \delta$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Bemerkung: Ist f **stetig und kompakt**, dann ist sie auch gleichmässig stetig.

4.4 Punktweise Konvergenz

$f_n(x)$ konvergiert punktweise falls:

$$\forall x \in \Omega \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

4.5 Gleichmässige Konvergenz

4.5.0.1 Grundsatz:

Falls eine Folge stetiger Funktionen f_n gleichmässig gegen f konvergiert, muss f stetig sein.

$f_n(x)$ konvergiert gleichmässig falls:

$$\lim_{n\to\infty} \sup |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Bemerkung: Gleichmässige Konvergenz impliziert punktweise Konvergenz.
<u>Rezpet für gleichmässige Konvergenz</u>

(i) Punktweiser Limes berechnen

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad = \text{Grenzfunktion}$$

(ii) Supremum bestimmen
(Ableitung von $f_n(x)$ oder Abschätzung benutzen)

$$\sup |f_n(x) - f(x)|$$

(iii) Limes $n \to \infty$ bestimmen (vgl. Kriterium glm. Konvergenz)

$$\lim_{n\to\infty} \sup |f_n(x) - f(x)|$$

Limes $= 0 \to$ Glm. konvergent mit Grenzfunktion f(x)

(iv) Indirekte Methode

- $f(x)$ unstetig auf $\Omega \Rightarrow$ keine glm. Konvergenz
- $f(x)$ stetig, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \forall x \in \Omega$ und Ω kompakt $\Rightarrow$ Glm. Konvergenz

gegeben: $f_n : [0,1] \mapsto \mathbb{R},\ f_n(x) = (1-x^2)x^n$

punktweisen Limes berechnen: $\lim\limits_{n\to\infty} (1-x^2)x^n = 0 \equiv f(x)$

$\Rightarrow$ konvergiert gegen 0

Supremum berechnen: $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \sup\limits_{x\in[0,1]}$

Maximum finden: $\dfrac{d}{dx} f_n(x) n x^{n-1}(1-x^2) - 2x x^n = x^{n-1}(n - (n$

$\Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = \sqrt{\dfrac{n}{n+2}} \Rightarrow x_2$ ist Maximum

Limes berechnen: $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_2) = 0$

Folgerung: f_n konvergiert auf $[0,1]$ glm. gegen f

5 Grenzwert

5.1 Dominanz

$$\text{Für } x \to +\infty: \quad ... < \log(\log(x)) < \log(x) < x^\alpha < \alpha^x < x! < x^x$$

$$\text{Für } x \to 0: \quad ... < \log(\log(x)) < \log(x) < (\frac{1}{x})^\alpha$$

5.2 Fundamentallimes

$$\lim_{x\to a} \frac{\sin \odot}{\odot} = \lim_{x\to a} \frac{\tan \odot}{\odot} = 1 \text{ mit } \odot \xrightarrow{x\to a} 0$$

$$\lim_{x\to a} (1 + \frac{1}{\odot})^{\odot} = e \text{ mit } \odot \xrightarrow{x\to a} \infty$$

$$\lim_{x\to a} (1 + \odot)^{\frac{1}{\odot}} = e \text{ mit } \odot \xrightarrow{x\to a} 0$$

5.3 Wurzeltrick

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{\alpha} + \beta = \lim_{x\to\infty} (\sqrt{\alpha} + \beta)\frac{\sqrt{\alpha} - \beta}{\sqrt{\alpha} - \beta}$$

5.4 $e^{\log(x)}$-Trick

5.4.0.1 Anforderung:

Term der Form $f(x)^{g(x)}$ mit Grenzwert ”0^0”, ”∞^0öder ”1^∞für $x \to 0$

$$\textbf{Grundsatz:} \quad \lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{g(x)\cdot\log(f(x))}$$

Tipp: Danach den Limes des Exponenten berechnen. Oft ist Bernoulli-de l'Hôpital dazu nützlich.

5.5 Substitution

$$\lim_{x\to\infty} x^2(1 - \cos(\frac{1}{x})) \Rightarrow u = \frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(u)}{u^2}$$

5.6 Satz von Bernoulli-de l'Hôpital

5.6.0.1 Anforderung:

Term der Form $\frac{f(x)}{g(x)}$ mit Grenzwert entweder ”$\frac{0}{0}$öder ”$\frac{\infty}{\infty}$mit $g'(x) \neq 0$.

Grundsatz: $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Term	Anforderung	Umformung
$f(x)g(x)$	"$0 \cdot \infty$"	$\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$
$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{h(x)}{i(x)}$	"$\infty - \infty$"	$\frac{f(x)i(x)-h(x)g(x)}{g(x)i(x)}$

6 Differenzialrechnung

Eine stetige Funktion ist differenzierbar, falls der Grenzwert $f'(x_0)$ existiert:

$$f'(x_0) := \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Tangente

Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in \Omega$ diffbar. Dann ist die Tangente im Punkt x_0

$$t(x; x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

6.1 Umkehrsatz

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

6.2 Mittelwertsatz

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

6.3 Taylorpolynom

Das Taylorpolynom m-ter Ordnung von $f(x)$ an der Stelle $x = a$

$$P^a_m(x) := f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2}f''(a)(x - a)^2 + ... + \frac{1}{m!}f^{(m)}(a)(x - a)^m$$

mit dem Fehlerterm $R^a_m(x)$, wobei ξ zwischen a und b liegt:

$$R^a_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m + 1)!}(x + a)^{m+1}, \text{ wobei } f(x) = P^a_m(x) + R^a_m(x)$$

7 Vollständige Induktion

Grundlägende Struktur um die Aussage $A(n)$ zu beweisen:

1. **Induktionsanfang/Verankerung:** Die Aussage wird für $n = A$ bewiesen. A ist dabei meistens der erste Wert für die gegebene Eingabemenge. Der Beweis wird meist durch direktes ausrechnen gemacht.

2. **Annahme/Induktionsvoraussetzung:** Hier schreibt man, dass man davon ausgeht die Aussage sei gültig (damit man sie im nächsten Schritt) einsetzen kann. Man kopiert also im Grunde, was man zu beweisen hat mit einigen Zierwörter.

3. **Induktionsschritt:** Für jedes $n \geq A$ wird unter Benutzung der Aussage $A(n)$ die Aussage $A(n+1)$ bewiesen. Dazu wird die Induktionsannahme verwendet.

7.1 Beispiel

Es ist zu beweisen, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ folgendes gilt: $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Lemma: $\forall \in \mathbb{N}. 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Beweis:
Sei $P(n) \equiv 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
Wir zeigen $\forall \in \mathbb{N}. P(n)$ mit vollständiger Induktion.

Induktionsanfang: Zeige $P(0)$.

$$0 = \frac{0(0+1)}{2}$$

Induktionsschritt:
Sei $n \in N$ beliebig und nehmen wir $P(n)$ an (Induktionsvoraussetzung).
Zeige $P(n+1)$ (Induktionsbehauptung).

$$\begin{aligned}
1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n+1) &= && (1)\\
&= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \text{ — P(n) Induktionsvor.} && (2)\\
&= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} \text{—arith} && (3)\\
&= \frac{(n+1) * ((n+1)+1)}{2} \text{—arith} && (4)
\end{aligned}$$

qed.

7.2 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$f(x) = \int_l^{m(x)} g(t)dt$$

$$f'(x) = g(m(x)) \cdot \frac{d}{dx} m(x)$$

wobei $m(x)$ der Form ax^b ist mit $l \in \mathbb{R}$

<u>Differenzial / Jaccobi-Matrix</u>

$$df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & ... & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ ... & ... & ... \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & ... & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ enthält die n part. Ableit. aller m Komponenten von f

Taylorentwicklung mit mehreren Variabeln

$$\begin{aligned}
f(x,y) = \quad & f(x_0, y_0) + \tfrac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \tfrac{\partial f}{\partial y}\Delta y \\
& + \tfrac{1}{2!}\left(\tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\Delta x)^2 + 2\tfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y + \tfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\Delta y)^2 \right) \\
& + \tfrac{1}{3!}\Bigg(\tfrac{\partial^3 f}{\partial x^3}(\Delta x)^3 + 3\tfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(\Delta x)^2 \Delta y \\
& \qquad + 3\tfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\Delta x (\Delta y)^2 + \tfrac{\partial^3 f}{\partial y^3}(\Delta y)^3 \Bigg) \\
& + \cdots
\end{aligned}$$

8 Integration

8.1 Regeln

Direkter Integral $\int f(g(x))g'(x)\ dx = F(g(x))$

Partielle Integration $\int f' \cdot g\ dx = f \cdot g - \int f \cdot g'\ dx$

mit Polynomen $\int \frac{p(x)}{q(x)}\ dx \Rightarrow$ Partialbruchzerlegung

Substitution $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\ dx$ mit $x = \varphi(t)$

8.2 Tipps

$$\int \tan x\ dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\ dx = -\log|\cos(x)|$$

$$\int \frac{1}{x-\alpha}\ dx = \log(x-\alpha)$$

$$\int \frac{\frac{1}{\alpha}}{1+(\frac{x}{\alpha})^2}\ dx = \arctan(x)$$

$$\int \sin^2(x)\ dx = \frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x)) + C$$

$$\int \cos^2(x)\ dx = \frac{1}{2}(x + \sin(x)\cos(x)) + C$$

$$\int \sqrt{x^2+1}\ dx = \sinh(x) + C$$

8.3 Uneigentliche Integrale

$$\int_0^\infty f(x)\ dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^R f(x)\ dx$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\ dx = \lim_{R\to-\infty} \int_R^k f(x)\ dx + \lim_{R\to\infty} \int_k^R f(x)\ dx$$

Gibt es eine Unstetigkeitstelle c in dem Integrationsgebiet, so geht man wie folgt vor:

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\ dx + \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\ dx$$

8.4 Beweis bijektiver Funktionen

Zu beweisen sind folgende Eigenschaften:

injektiv: Zeig, dass f **strickt monoton wächst oder fällt** und**stetig** ist

surjektiv: Zeig, dass alle Werte im Bildbereich angenommen werden (vl. mit Zwischenwertsatz)

Daraus folgt dann, dass f bijektiv ist.

9 Differentialgleichungen

9.1 Grundbegriffe

Ordnung: höchste vorkommende Ableitung

linear: alle y-abhängigen Terme kommen linear vor (keine Terme wie zum Beispiel y^2, $(y'')^3$, $\sin(y)$, $e^{y'}$)

homogen: Gleichung ohne Störfunktionen

Störfunktion: Term, der rein von der Funktionsvariablen x abhängt

9.2 Methoden

	Problem	Anforderungen
Trennung der Variablen	$y' = \frac{dy}{dx} = h(x) \cdot g(y)$	1. Ordnung
Variation der Konstanten	$y' = \frac{dy}{dx} = h(x)y + b(x)$	1. Ordnung inhomogen
Euler-Ansatz	$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_0 y = 0$	n. Ordnung linear homogen
Direkter Ansatz	$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_0 y = b(x)$	n. Ordnung linear inhomogen

9.2.1 Trennung der Variable

$$y' + x \tan y = 0, \; y(0) = \frac{\pi}{2}$$

umformen $\quad \dfrac{dy}{dx} = -x \tan y$

konstante Lösungen $\quad y(x) \equiv 0$ erfüllt jedoch $y(0) \equiv \dfrac{\pi}{2}$ nicht

Trennung $\quad \dfrac{dy}{\tan y} = -x dx$

integrieren $\quad \displaystyle\int \frac{\cos y}{\sin y} dy = -\int x dx \Rightarrow \log|\sin y| = -\frac{x^2}{2} + C$

$$\Rightarrow |\sin y| = e^C e^{\frac{-x^2}{2}} \Rightarrow \sin y = \pm e^C e^{\frac{-x^2}{2}} = C e^{\frac{-x^2}{2}}$$

Anfangsbedingung gebrauchen $\quad \sin(y(0)) = \sin(\dfrac{\pi}{2}) = 1 \Rightarrow C = 1$

Lösung $\quad y(x) = \arcsin(e^{\frac{-x^2}{2}})$

9.2.2 Variation der Konstanten

$$\textbf{Grundsatz:}\quad y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

$$
\begin{aligned}
& y'(x+1) + y = x^3,\ y(0) = \sqrt{5} \\
\text{Trennung}\quad & \frac{y'}{y} = \frac{-1}{x+1} \\
\textbf{konstante Lösungen}\quad & y(x) \equiv 0 \text{ erfüllt jedoch } y(0) \equiv \sqrt{5} \text{ nicht} \\
\text{integrieren}\quad & \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x+1} \\
& \Rightarrow \ln|y| = -\ln|x+1| + C \\
\textbf{Homogene Lösung}\quad & y_h(x) = \frac{C}{x+1},\ \text{mit } C = \pm e^C \in \mathbb{R}\backslash 0 \\
\text{partikulärer Ansatz}\quad & y_p(x) = \frac{C(x)}{x+1} \\
\text{einsetzen}\quad & (\frac{C'(x)}{x+1} - \frac{C(x)}{(x+1)^2})(x+1) + \frac{C(x)}{x+1} = x^3 \\
& C'(x) = x^3 \\
& C(x) = \frac{x^4}{4} \\
\textbf{partkuläre Lösung}\quad & y_p(x) = \frac{x^4}{4(x+1)} \\
\text{allgemeine Lösung}\quad & y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \frac{C}{x+1} + \frac{x^4}{4(x+1)} \\
\text{Anfangsbedingung benutzen}\quad & y(0) = \sqrt{5} \Rightarrow C = \sqrt{5} \\
\textbf{Lösung}\quad & y(x) = \frac{\sqrt{5}}{x+1} + \frac{x^4}{4(x+1)}
\end{aligned}
$$

9.2.3 Euler-Ansatz

$$
\begin{aligned}
& y'' - 2y' - 8y = 0,\ y(1) = 1, y'(1) = 0 \\
\text{Euler-Ansatz}\quad & y(x) = e^{\lambda x} \\
\text{einsetzen}\quad & \lambda^2 e^{\lambda x} - 2\lambda e^{\lambda x} - 8e^{\lambda x} = 0 \\
\textbf{charakt. Polynom}\quad & \lambda^2 - 2\lambda - 8 = (\lambda - 4)(\lambda + 2) = 0 \\
\text{Nullstellen}\quad & 4, -2 \\
\textbf{allgemeine Lösung}\quad & y(x) = Ae^{4x} + Be^{-2x} \\
\text{Anfangsbedingung gebrauchen}\quad & y(1) = Ae^4 + Be^{-2} = 1, \\
& y'(1) = 4Ae^4 - 2Be^{-2} = 0 \\
& \Rightarrow A = \frac{1}{3}e^{-4}, B = \frac{2}{3}e^2 \\
\textbf{Lösung}\quad & y(x) = \frac{1}{3}e^{4x-4} + \frac{2}{3}e^{2-2x}
\end{aligned}
$$

Bemerkung: Zu einer m-fachen Nullstelle λ gehören die m linear unabhängigen Lösungen $e^{\lambda x}$, $x \cdot e^{\lambda x}$, ... , $x^{m-1} \cdot e^{\lambda x}$. Zur m-fachen Nullstelle $\lambda = 0$ gehören die Lösungen 1, x, ... , x^{m-1}.

Komplexe Nullstellen:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ein komplexes Nullstellenpaar der Form $\alpha \pm \beta i$ liefert folgende homogene Lösung:

$$y(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x))$$

9.2.4 Direkter Ansatz

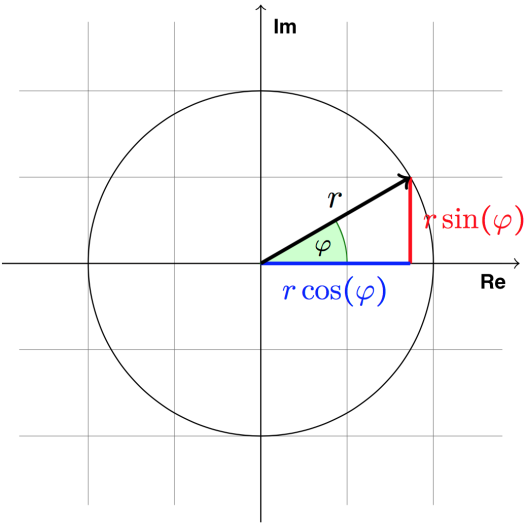
$$\textbf{Grundsatz:} \quad y(x) = y_{\text{homo}}(x) + y_p(x)$$

Inhomogener Term $b(x)$	**Ansatz für** $y_p(x)$	**zu bestimmen**
Polynom	$Ax^2 + Bx + C$	$A,\ B,\ C$
ce^{kx}	Ae^{kx}	A
$c\sin(kx)$ oder $c\cos(kx)$	$A\sin(kx) + B\cos(kx)$	$A,\ B$

Bemerkung: Kommt der gewählte Ansatz schon in der homogenen Lösung vor, so multipliziert man den Ansatz einfach mit x.

$$
\begin{aligned}
& y'' - y' + \frac{1}{4}y = \cos(x) \\
\text{homogener Ansatz} \quad & y'' + y' + \frac{1}{4}y = 0 \\
\text{Euler-Ansatz anwenden} \quad & \lambda^2 + \lambda + \frac{1}{4} = (\lambda + \frac{1}{2})^2 = 0 \\
\textbf{homogene Lösung} \quad & \Rightarrow y_{\text{homo}}(x) = Ae^{-\frac{x}{2}} + Bx \cdot e^{-\frac{x}{2}} \\
\text{partikulärer Ansatz wählen} \quad & y_p(x) = a\cos(x) + b\sin(x) \\
& \Rightarrow y_p'(x) = -a\sin(x) + b\cos(x),\ y_p''(x) = \\
& = -a\cos(x) - b\sin(x) \\
\text{Einsetzen} \quad & (-a + b + \frac{a}{4})\cos(x) + (-b - a + \frac{1}{4}b)\sin(x) = \cos(x) \\
\text{Koeffizientenvergleich} \quad & -\frac{3}{4}a + b = 1,\ -a - \frac{3}{4}b = 0 \\
\textbf{partikuläre Lösung} \quad & y_p(x) = -\frac{12}{25}\cos(x) + \frac{16}{25}\sin(x) \\
\textbf{Lösung} \quad & y(x) = Ae^{-\frac{x}{2}} + Bx \cdot e^{-\frac{x}{2}} - \frac{12}{25}\cos(x) + \frac{16}{25}\sin(x)
\end{aligned}
$$

10 Komplexe Zahlen



$$
\begin{aligned}
z &= x + iy = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) \\
r &= |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \\
\arg(z) &= \varphi = \arctan(\frac{y}{x}) \quad \text{(je nach Qua} \\
x &= r\cos(\varphi) \\
y &= r\sin(\varphi) \\
zw &= (re^{i\varphi}) \cdot (se^{i\psi}) = rse^{i(\varphi+\psi)} \\
\sqrt[q]{z} &= \sqrt[q]{s}e^{i\varphi}, \text{ wobei } \varphi = \frac{\varphi}{q} \mod \frac{2}{\ }
\end{aligned}
$$

$$e^{i(\frac{\pi}{2}+2\pi k)} = i,\ e^{i\pi} = 1,\ e^{-i\pi} = -1$$

$$
\begin{aligned}
(a,b)\cdot(c,d) &= (ac - bd, ad + bc) \\
\overline{z} &= x - iy \\
z^{-1} &= \frac{\overline{z}}{|z|^2} \\
i &= \sqrt{-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
i^2 &= -1 \\
|z|^2 &= z\overline{z} \\
|zw|^2 &= (zw)\cdot\overline{(zw)} = |z|^2|w|^2
\end{aligned}
$$

Abbildung

Teil II

Tables

10.1 Elementare Integrale

$f'(x)$	$f(x)$	$F(x)$
$\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$	$\frac{f(x)}{g(x)}$	
0	c	cx
$r \cdot x^{r-1}$	x^r	$\frac{x^{r+1}}{r+1}$
$-\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\ln\|x\|$
$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$-\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$	$-\ln\|\cos(x)\|$
e^x	e^x	e^x
$c \cdot e^{cx}$	e^{cx}	$\frac{1}{c} \cdot e^{cx}$
$\ln(c) \cdot c^x$	c^x	$\frac{c^x}{\ln(c)}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\|$	$x(\ln\|x\|-1)$
$\frac{1}{\ln(a)\cdot x}$	$\log_a\|x\|$	$\frac{x}{\ln(a)}(\ln\|x\|-1)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$x \cdot \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$	$x \cdot \arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$	$\cosh(x)$
$\sinh(x)$	$\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$	$\sinh(x)$
$\frac{1}{\cosh^2(x)}$	$\tanh(x)$	$\log(\cosh(x))$

10.2 Wichtige Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0 \qquad \lim_{n\to 0}\frac{e^n-1}{n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!} = \infty \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\ln(n) = \infty \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$$

Teil III

Generelles

11 Definitionen & Sätze

11.1 Definitionen

$sin(x) := \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp ...$

$cos(x) := \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp ...$

$exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{x^n}{n})^n$

$arctan(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \mp ...$

Hinweis: Für einfache Approximation genügt es die ersten paar Glieder der $arctan(x)$ *Reihe* zu berechnen.
Falls: $x \notin [0,1]$, gibt es eine Vereinfachung: $arctan(x) = \frac{sgn(x)*\pi}{2} - arctan(\frac{1}{x})$

11.1.1 Definition Taylorreihe

Eine Funktion $f(x)$ wird an einer Stelle x_0 angenähert durch $Tf(x;x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = f(x_0)$

11.1.2 Definitionen csc(x), sec(x), cot(x)

$csc(x) := \frac{1}{sin(x)}$

$sec(x) := \frac{1}{cos(x)}$

$cot(x) := \frac{1}{tan(x)} = \frac{cos(x)}{sin(x)}$

11.2 Sinusssatz

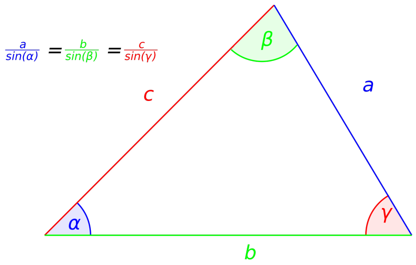


Abbildung 1: Quelle: https://de.wikipedia.org/

11.3 Cosinusssatz

$a^2 + b^2 - 2ab * cos(\gamma) = c^2$

12 Standardintegrale

$\frac{d}{dx} arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\frac{d}{dx} arccos(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\frac{d}{dx} arctan(x) = \frac{1}{x^2+1}$

$\frac{d}{dx} arsinh(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$\frac{d}{dx} arcosh(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$,wenn $x > 1$

$\frac{d}{dx} artanh(x) = \frac{1}{1-x^2}$,wenn $|x| < 1$

13 Euler Formel

$exp(i\varphi) = cos(\varphi) + isin(\varphi)$
$exp(-i\varphi) = cos(-\varphi) + isin(-\varphi) \iff exp(-i\varphi) = cos(\varphi) - isin(\varphi)$

Daraus kann nun sin, sinh, cos und cosh in Termen von exp(x) ausgedrückt werden.

$\frac{exp(i\varphi)+exp(-i\varphi)}{2} = cos(\varphi)$

$\frac{exp(i\varphi)-exp(-i\varphi)}{2i} = sin(\varphi)$

Ignoriere alle i, dann folgt...

$\frac{exp(\varphi)+exp(-\varphi)}{2} = cosh(\varphi)$

$\frac{exp(\varphi)-exp(-\varphi)}{2} = sinh(\varphi)$

14 Ableitungen, Integrale

14.1 Ableitungen

$\frac{d}{dx}sin(x) = cos(x)$

$\frac{d}{dx}cos(x) = -sin(x)$

$\frac{d}{dx}tan(x) = \frac{d}{dx}\frac{sin(x)}{cos(x)} = \frac{cos(x)cos(x)-sin(x)sin(x)}{cos^2(x)} = 1 - \frac{sin^2(x)}{cos^2(x)} = 1 - tan^2(x) = \frac{1}{cos^2(x)}$

$\frac{d}{dx}\frac{1}{sin(x)} = \frac{0*sin(x)-1*cos(x)}{sin^2(x)} = \frac{-cos(x)}{sin^2(x)}$

$\frac{d}{dx}\frac{1}{cos(x)} = \frac{0*cos(x)-1*(-sin(x))}{cos^2(x)} = \frac{sin(x)}{cos^2(x)}$

$\frac{d}{dx}sin^2(x) = sin(x)*cos(x) + cos(x)*sin(x) = 2*sin(x)*cos(x)$

$\frac{d}{dx}cos^2(x) = cos(x)*(-sin)(x) + (-sin(x))*cos(x) = -2*sin(x)*cos(x)$

15 Rechenregeln

15.1 Additionstheoreme

$sin^2(x) + cos^2(x) = 1$

$sin(x \pm y) = sin(x)cos(y) \pm cos(x)sin(y) \quad (\#umgekehrteAbleitungsregel)$

$cos(x \pm y) = cos(x)cos(y) \mp sin(x)sin(y)$

$tan(x \pm y) = \frac{tan(x)\pm tan(y)}{1\mp tan(x)\ tan(y)} = \frac{sin(x\pm y)}{cos(x\pm y)}$

15.2 Doppelwinkel

$sin(2x) = 2sin(x)cos(x) = \frac{2tan(x)}{1+tan^2(x)}$

$cos(2x) = cos^2(x) - sin^2(x) = 1 - 2sin^2(x) = 2cos^2(x) - 1 = \frac{1-tan^2(x)}{1+tan^2(x)}$

$tan(2x) = \frac{2tan(x)}{1-tan^2(x)} = \frac{2}{cot(x)-tan(x)}$

$cot(2x) = \frac{cot^2(x)-1}{2cot(x)} = \frac{cot(x)-tan(x)}{2}$

Beweis mit Additionstheorem

15.3 Produkt-zu-Summen-Formel

$sin(x)*sin(y) = \frac{1}{2}(cos(x-y) - cos(x+y))$

$cos(x)*cos(y) = \frac{1}{2}(cos(x-y) + cos(x+y))$

$sin(x)*cos(y) = \frac{1}{2}(sin(x-y) + sin(x+y))$

15.4 Hyperbolische Funktionen

$sinh(z) := \frac{e^z-e^{-z}}{2} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$cosh(z) := \frac{e^z+e^{-z}}{2} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}$

15.5 Additionstheoreme

$sinh(z_1 \pm z_2) = sinh(z_1) \cdot cosh(z_2) \pm sinh(z_2) \cdot cosh(z_1)$

$cosh(z_1 \pm z_2) = cosh(z_1) \cdot cosh(z_2) \pm sinh(z_1) \cdot sinh(z_2)$

$tanh(z_1 \pm z_2) = \frac{tanh(z_1) \pm tanh(z_2)}{1 \pm tanh(z_1) \cdot tanh(z_2)}$

15.5.1 Zusammenhänge

$cosh^2(z) - sinh^2(z) = 1$

$cosh(z) + sinh(z) = e^z$

$cosh(z) - sinh(z) = e^{-z}$

15.6 Ableitungen

$\frac{d}{dz} sinh(z) = cosh(z)$

$\frac{d}{dz} cosh(z) = sinh(z)$

$\frac{d}{dz} tanh(z) = 1 - tanh^2(z) = \frac{1}{cosh^2(x)}$

16 Koordinatensysteme mit Funktionaldeterminante

16.1 Polarkoordinaten

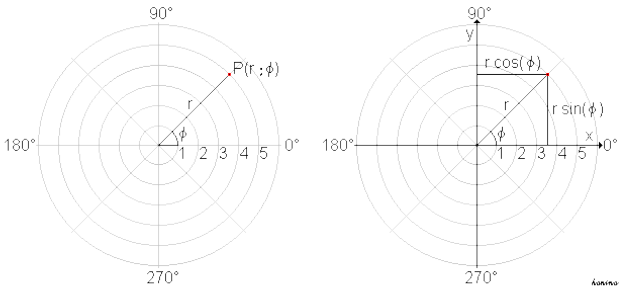


Abbildung 2: Quelle: https://de.wikipedia.org/

Umrechnung erfolgt durch:
$x = r \cos \varphi$
$y = r \sin \varphi$

Aus den Umrechnungsformeln von Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten erhält man für die Funktionaldeterminante als Determinante der Jacobi-Matrix:

$$\det J = \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r$$

16.2 Zylinderkoordinaten

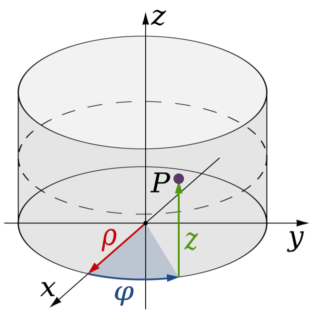


Abbildung 3: Quelle: https://de.wikipedia.org/

Umrechnung erfolgt durch:
$x = \rho \ \cos\varphi$
$y = \rho \ \sin\varphi$
$z = z$

Mit Funktionaldeterminante: $\det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,z)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho$

16.3 Kugelkoordinaten

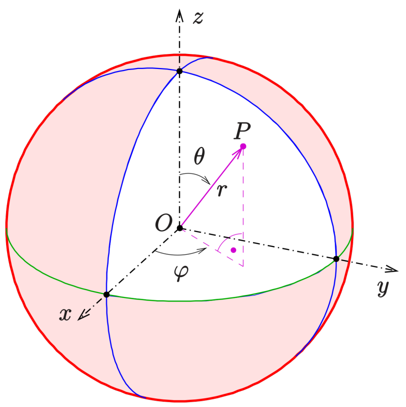


Abbildung 4: Quelle: https://de.wikipedia.org/

Umrechnung erfolgt durch:
$x = r \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi$
$y = r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi$
$z = r \cdot \cos\theta$

Jacobi-Matrix:
$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$

mit Funktionaldeterminante: $\det J = r^2 \sin\theta$

17 Rotationsmatrix, Drehmatrix

17.1 Drehmatrix der Ebene

Jede Rotation um den Ursprung ist eine lineare Abbildung. Wie bei jeder linearen Abbildung genügt daher zur Festlegung der Gesamtabbildung die Festlegung der Bilder der Elemente einer beliebigen Basis. Wird die Standardbasis gewählt, sind die Bilder der Basisvektoren gerade die Spalten der dazugehörigen Abbildungsmatrix.

Wir haben unter R_α

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Die Drehmatrix für eine Drehung um α ist also:
$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

17.1.1 Herleitung

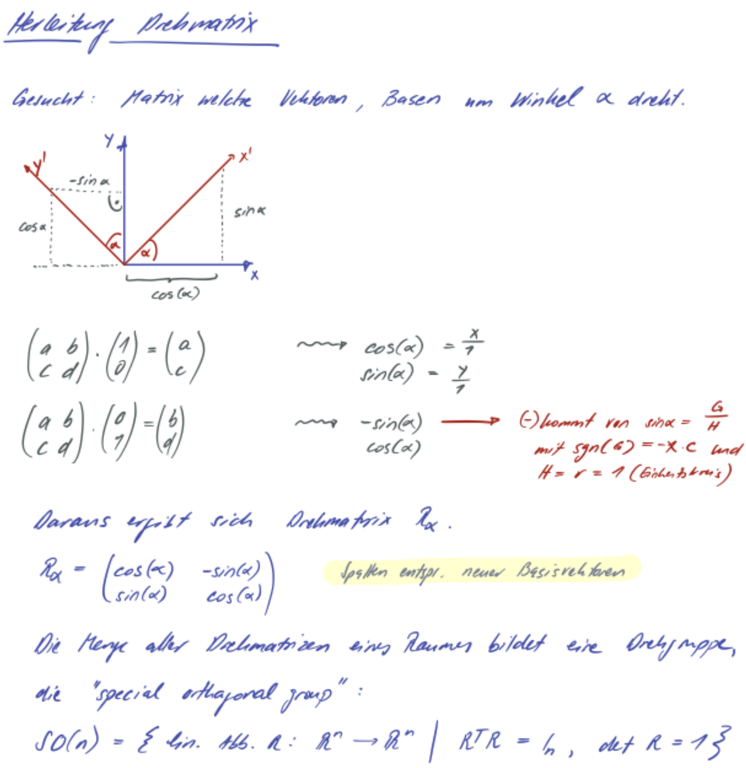


Abbildung 5: Quelle: Miles Strässle, 20.11.2019

17.2 Drehmatrix in 3-Dimensionen

In der Physik werden häufig Drehungen des Koordinatensystems benutzt, dann müssen bei den untenstehenden Matrizen die Vorzeichen aller Sinus-Einträge vertauscht werden. Die Drehung eines Vektors um einen bestimmten Winkel in einem Koordinatensystem ist äquivalent zur Drehung des Koordinatensystems um den gleichen Winkel in umgekehrter Richtung (Drehung um negativen Winkel). „Der

Drehsinn ergibt sich, wenn man entgegen der positiven Drehachse auf den Ursprung sieht.“

17.2.1 Drehung um die x-Achse:

$$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

17.2.2 Drehung um die y-Achse:

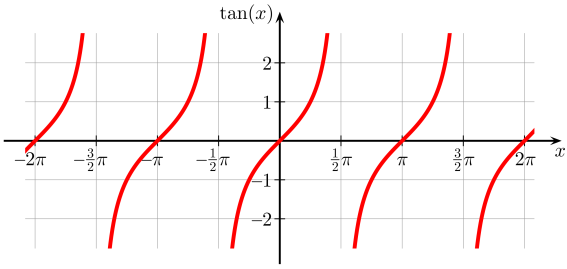
$$R_y(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

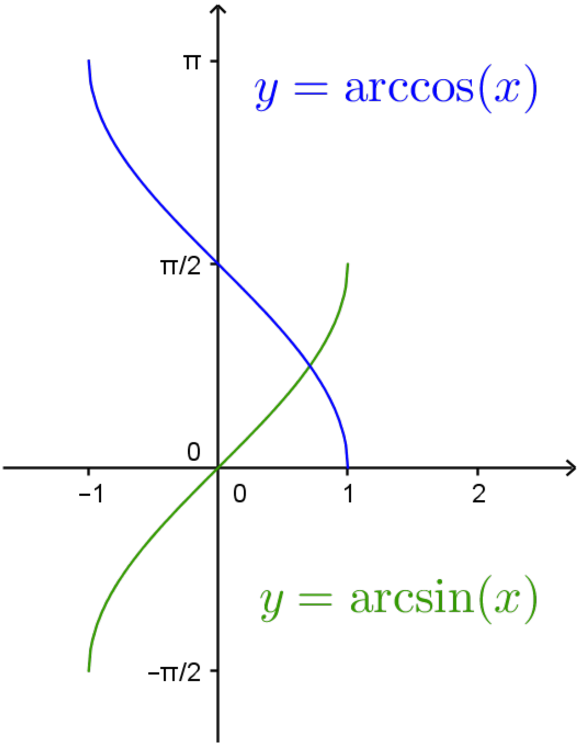
17.2.3 Drehung um die z-Achse:

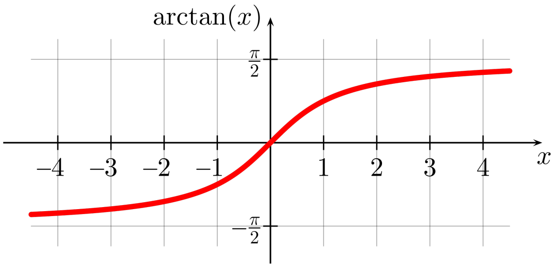
$$R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

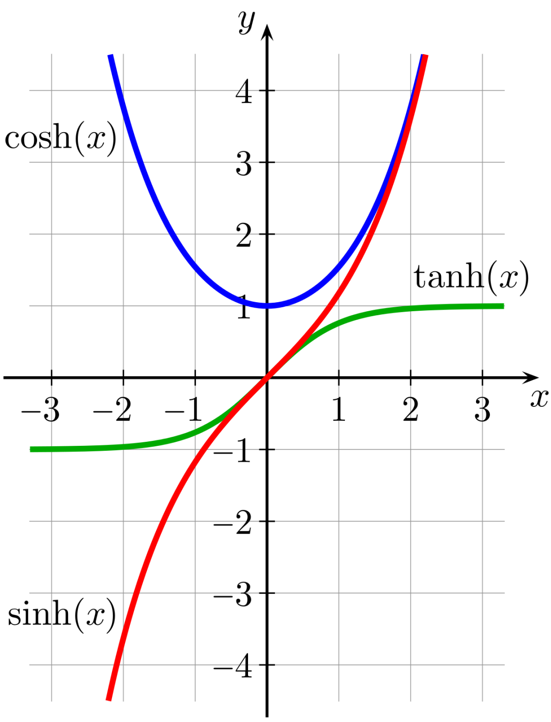
18 Plots Trigonometrischer Funktionen

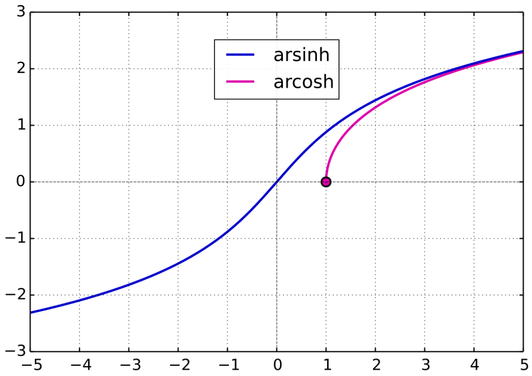
Alle Plots in diesem Kapitel von www.wikipedia.org!


tan(x)
x
2
1
−1
−2
−2π
−3/2 π
−π
−1/2 π
1/2 π
π
3/2 π
2π


y = arccos(x)
y = arcsin(x)
π
π/2
-π/2
0
-1
0
1
2


arctan(x)
π/2
−π/2
x
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4


y
x
cosh(x)
tanh(x)
sinh(x)
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−3
−2
−1
1
2
3



19 Nützliches

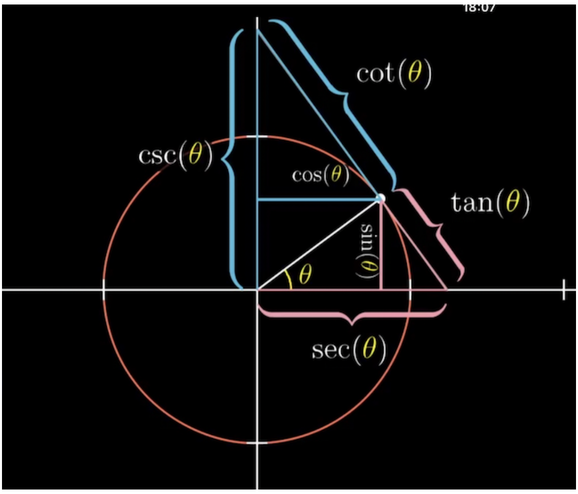


Abbildung 6: Quelle: youtube, 3blue1brown

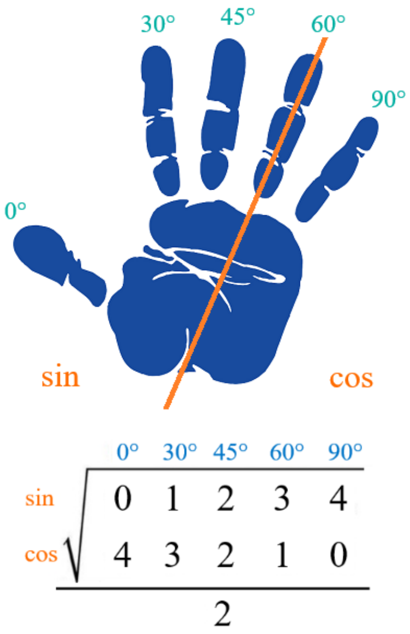


Abbildung 7: Quelle: https://www.pinterest.com/pin/68735321805/

20 Vollständige Induktion

Grundlägende Struktur um die Aussage $A(n)$ zu beweisen:

1. **Induktionsanfang/Verankerung:** Die Aussage wird für $n = A$ bewiesen. A ist dabei meistens der erste Wert für die gegebene Eingabemenge. Der Beweis wird meist durch direktes ausrechnen gemacht.

2. **Annahme/Induktionsvoraussetzung:** Hier schreibt man, dass man davon ausgeht die Aussage sei gültig (damit man sie im nächsten Schritt) einsetzen

kann. Man kopiert also im Grunde, was man zu beweisen hat mit einigen Zierwörter.

3. **Induktionsschritt:** Für jedes $n \geq A$ wird unter Benutzung der Aussage $A(n)$ die Aussage $A(n+1)$ bewiesen. Dazu wird die Induktionsannahme verwendet.

20.1 Beispiel

Es ist zu beweisen, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ folgendes gilt: $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Lemma: $\forall \in \mathbb{N}. 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Beweis:
Sei $P(n) \equiv 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
Wir zeigen $\forall \in \mathbb{N}. P(n)$ mit vollständiger Induktion.

Induktionsanfang: Zeige $P(0)$.

$$0 = \frac{0(0+1)}{2}$$

Induktionsschritt:
Sei $n \in N$ beliebig und nehmen wir $P(n)$ an (Induktionsvoraussetzung).
Zeige $P(n+1)$ (Induktionsbehauptung).

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n+1) = \tag{5}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \text{ — P(n) Induktionsvor.} \tag{6}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} \text{—arith} \tag{7}$$

$$= \frac{(n+1) * ((n+1)+1)}{2} \text{—arith} \tag{8}$$

qed.

21 Mengen

21.1 Definitionen

Obere/Untere Schranke:	$\exists b \in \mathbb{R}\ \forall a \in A: \ a \leq b$, $\exists c \in \mathbb{R}\ \forall a \in A: \ a \geq c$
Supremum:	kleinste obere Schranke $\sup A$
Infimum:	grösste untere Schranke $\inf A$
Maximum/Minimum:	$\sup A \in A$, $\inf A \in A$
kompakt:	abgeschlossen und beschränkt
abgeschlossen:	z.B. $[0, 1]$

21.1.1 Vorgehen zur Bestimmung von Maximum/Minimum

1. Zeigen, dass $f(x)$ stetig ist
2. Zeigen, dass Definitionsmenge kompakt ist
3. Nach **Satz von Weierstrass** wird Maximum/Minimum angenommen
4. Maximum/Minimum bestimmen

21.2 Identitäten

$$A + B := \{a + b | a \in A, b \in B\}$$
$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B, \ \inf(A + B) = \inf A + \inf B$$
$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}, \ \inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$$