Lösungsskizze Serie 11

1. a) Sei X_i die Zufallsvariable, welche angibt, ob der i-te Mann mit "ja" ($X_i = 1$) oder "nein" ($X_i = 0$) antwortet. Mit dem Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit folgt

$$P[X_i = 1] = px + (1-p)(1-x) = p(2x-1) + 1 - x =: p^*.$$

Dieses Experiment wird N-mal unabhängig, identisch durchgeführt, also ist $Y = \sum_{i=1}^N X_i$ binomialverteilt mit Erfolgswahrscheinlichkeit p^*:
$Y \sim \text{Bin}(N, p^*)$, $E[Y] = Np^*$ und $\text{Var}[Y] = Np^*(1-p^*)$.

b) Das erste theoretische Moment ist $E[Y] = Np^* = N(p(2x-1) + 1 - x)$. Also ist für $x \neq 1/2$ der Momentenschätzer von p

$$\hat{p} = \frac{Y/N - 1 + x}{2x - 1}.$$

c) Aus den Eigenschaften von Erwartungswert und Varianz erhalten wir

$$E[\hat{p}] = \frac{E[Y]/N - 1 + x}{2x-1} = p$$

(der Schätzer ist erwartungstreu). Analog:

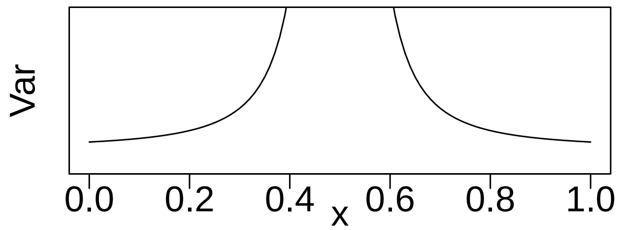
$$\begin{aligned}\text{Var}[\hat{p}] &= \frac{\text{Var}[Y]/N^2}{(2x-1)^2} = \frac{p^*(1-p^*)/N}{(2x-1)^2} = \frac{(p(2x-1)+1-x)(x-p(2x-1)}{N(2x-1)^2} \\ &= \frac{(2x-1)^2(p-p^2) + x(1-x)}{N(2x-1)^2} = \frac{p(1-p)}{N} + \frac{x(1-x)}{N(2x-1)^2}.\end{aligned}$$

Um die Extrema zu finden, leitet man nach x ab:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\text{Var}[\hat{p}] &= \frac{(1-2x)(2x-1)^2N - 2N(2x-1)2(x-x^2)}{N^2(2x-1)^4} \\ &= \frac{-(2x-1)^2 - 4(x-x^2)}{N(2x-1)^3} = -\frac{1}{N(2x-1)^3}.\end{aligned}$$

D.h. die Varianz steigt monoton auf $(0, 0.5)$ und fällt monoton auf $(0.5, 1)$, nimmt also Extrema nur in den Randpunkten $0, 1$ (die nicht zugelassen sind) an. Je näher an 0.5, desto grösser die Varianz. Man muss also zwischen Genauigkeit (gewöhnliche Umfrage mit $x = 0$ oder $x = 1$) und Anonymität ($x = 0.5$) abwägen.

Bitte wenden!



2. **a)** Unter P_ϑ erhalten wir für die Verteilungsfunktion von $T^{(n)}$

$$F_{T^{(n)}}(x) = P_\vartheta[T^{(n)} \le x] = P_\vartheta[\cap_{i=1}^n X_i \le x] = \prod_{i=1}^n P_\vartheta[X_i \le x]$$
$$= \left(\frac{x}{\vartheta}\right)^n \mathbb{1}\{x \in [0,\vartheta]\}, \quad x \le \vartheta,$$

und $F_{T^{(n)}}(x) = 1$ für $x \ge \vartheta$.

b) Mit der Verteilungsfunktion aus **a)** folgt für jedes $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
P_\vartheta[|T^{(n)} - \vartheta| > \varepsilon] &= 1 - P_\vartheta[|T^{(n)} - \vartheta| \le \varepsilon] \\
&= 1 - P_\vartheta[-\varepsilon \le T^{(n)} - \vartheta \le \varepsilon] \\
&= 1 - \left(P_\vartheta[T^{(n)} - \vartheta \le \varepsilon] - P_\vartheta[T^{(n)} - \vartheta \le -\varepsilon]\right) \\
&= 1 - \left(1 - \left(\frac{\vartheta - \varepsilon}{\vartheta}\right)^n \mathbb{1}_{\{(\vartheta-\varepsilon)\in[0,\vartheta]\}}\right) \\
&= \left(\frac{\vartheta - \varepsilon}{\vartheta}\right)^n \mathbb{1}_{\{(\vartheta-\varepsilon)\in[0,\vartheta]\}} \xrightarrow{n\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Somit ist die Konsistenz bewiesen.

3. Im Modell P_p seien $X_1, \ldots, X_n$ iid Bernoulli(p)-verteilte Zufallsvariablen mit der Interpretation, dass $X_i = 1$, falls der i-te Wurf Kopf ist und 0 sonst, $i = 1, \ldots, n = 100$. Sei $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ die Anzahl Köpfe in den n Würfen. Nach Voraussetzung ist S_n binomialverteilt mit Parametern n und p. Einseitiger Test:

$$H_0 : p = p_0 = 1/2,$$
$$H_A : p > p_0.$$

Siehe nächstes Blatt!

Die Nullhypothese möchten wir verwerfen, falls zu viele Köpfe geworfen werden. Wir wählen daher einen Verwerfungsbereich der Form $K = (c, 100]$. Der Verwerfungsbereich ist durch die Ungleichung

$$0.01 \geq P_{p_0}[S_n > c] \approx 1 - \Phi\left(\frac{c - 50}{5}\right)$$

bestimmt. Also $c \geq 61.6$ und wir erhalten den Verwerfungsbereich $K_{1\%} = [62, 100]$. Damit der Test zum 1% Niveau die Annnahme einer fairen Münze nicht verwirft, darf höchstens 61 mal Kopf fallen. In unserem Fall wird die Nullhypothese zum Signifikanzniveau 1% nicht verworfen.