Математическая логика

11 февраля 2013 г.

Три основные логические операции

Название	Обозначение	Альт.	Соответствие	Знач.
Конъюнкция	$\&$	$\wedge$	умножение	и
Дизъюнкция	$\vee$		сложение	или
Отрицание	$\neg$		отрицание	не

- Полезно запомнить соответствия — это помогает определить порядок выполнения операций: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция.

&

$$\neg$$

$$\vee$$

$$A \vee \neg B \& C$$

Какой порядок выполнения?

$$\neg A \& \neg B \vee C \& (\neg D \vee E)$$

Какой порядок выполнения?

Таблицы истинности

Таблица истинности для конъюнкции

- Рассмотрим, чему может быть равно высказывание A & B:

A	B	A & B
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

Таблица истинности для дизъюнкции

- Рассмотрим, чему может быть равно высказывание $A \vee B$:

A	B	$A \vee B$
И	И	И
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

Таблица истинности для отрицания

- Рассмотрим, чему может быть равно высказывание $\neg A$:

A	$\neg A$
И	Л
Л	И

Правила для запоминания / понимания

- Конъюнкция требует, чтобы оба условия были истинны: **и** то, **и** другое.
- Дизъюнкции достаточно, чтобы одно из условий выполнялось: **или** первое, **или** второе (**или** оба вместе).
- Отрицание меняет значение на противоположное.

Пример построения таблицы истинности

- Построим таблицу истинности для высказывания $A \,\&\, B \vee \neg C$.
- Построение заключается в переборе всех возможных вариантов.

A	B	C	Итог
И	И	И	
И	И	Л	
И	Л	И	
Л	И	И	
И	Л	Л	
Л	И	Л	
Л	Л	И	
Л	Л	Л	

Пример построения таблицы истинности

- Посчитаем первую строку, подставив значения A, B, C:
- $A\&B \vee \neg C$ = И&И∨¬И = И&И∨Л = И ∨ Л = И

A	B	C	Итог
И	И	И	И
И	И	Л	
И	Л	И	
Л	И	И	
И	Л	Л	
Л	И	Л	
Л	Л	И	
Л	Л	Л	

Пример построения таблицы истинности

- Аналогично рассчитываем для каждой оставшейся строки.

А	В	С	Итог
И	И	И	И
И	И	Л	И
И	Л	И	Л
Л	И	И	Л
И	Л	Л	И
Л	И	Л	И
Л	Л	И	Л
Л	Л	Л	И

Задачи

- Построить таблицу истинности для следующих высказываний:
  1. $\mathrm{A}\quad \neg\,\mathrm{B} \vee \neg\neg \mathrm{A}$
  2. $\neg(\mathrm{A} \& \neg \mathrm{B}) \& C$
  3. $\mathrm{A}\quad \neg A$
  4. $\mathrm{A} \vee \neg A$

Законы логики

Основные законы логики

- Как и в математике, в логике есть свои законы.
- Во многом, они похожи на математические.

Название	Закон
Переместительный	$A \& B = B \& A$ $A \vee B = B \vee A$
Сочетательный	$A \& (B \& C) = A \& (B \& C)$ $A \vee (B \vee C) = A \vee (B \vee C)$
Распределительный	$A \& (B \vee C) = (A \& B) \vee (A \& C)$ $A \vee (B \& C) = (A \vee B) \& (A \vee C)$
Правила де Моргана	$\neg(A \& B) = \neg A \vee \neg B$ $\neg(A \vee B) = \neg A \& \neg B$

В логике можно доказывать законы

Но как?

Доказательство правила де Моргана

- В логике два высказывания называются равными, если совпадают их таблицы истинности.
- Для доказательства одного из правил де Моргана построим таблицы истинности для левых и правых частей равенства.
- Если таблицы совпадут, значит, формула верна:

A	B	¬(A&B)
И	И	Л
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	И

A	B	¬A∨¬B
И	И	Л
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	И

Задачи

- Докажите переместительный закон для конъюнкции.
- Докажите распределительный закон конъюнкции относительно дизъюнкции (первый).

Остальные законы

Название	Закон
Двойного отрицания	$\neg\neg A = A$
Противоречия	$A \& \neg A = Л$ $A \vee \neg A = И$
Повторения	$A \& A = A$ $A \vee A = A$
Просто закон	$A \& И = A$ $A \vee И = И$
Просто закон 2	$A \& Л = Л$ $A \vee Л = A$

Задачи

- Пример с раскрытием скобок:
- $A \& \neg(B \vee C) = A \& (\neg B \& \neg C) = A \& \neg B \& \neg C$
- Раскрыть скобки у следующих выражений:
  1. $\neg(A \& \neg B) \& C$
  2. $\neg(\neg(\neg\neg A \& \neg B) \& C)$